ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICÆ.

TOMUS L.

HELSINGFORSIÆ.
Ex officina typographica Societatis litterariæ fennicæ.
MCMXXVI.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY
WOODS HOLE, MASS.
LIBRARY

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE TOME.

N:o

1. Die ausserordentliche Haloerscheinung am 10. März 1920 in Süd-Finnland, von Osc. V. Johansson.
2. Lösningars optiska egenskaper. En hypotes rörande byggnaden av elektrolyternas molekyler, av Jarl A. Wasastjerna.
3. Zur Theorie der automorphen Funktionen beliebig vieler veränderlichen, von P. J. Myrberg.
4. Zur Kenntnis der Blütenentwicklung einiger Juncaceen, von Widar Brenner. Mit 1 Tafel und 41 Figuren im Text.
5. Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, von F. und R. Nevanlinna.
6. Untersuchungen über den Picard'schen Satz, von Rolf Nevanlinna.
7. Recherches sur les Mouvements propres des étoiles dans la Zone photographique de Helsingfors, par Ragnar Furuhjelm II. Clichés de 6^h à 9^h.
8. Über Stabverbindungen mit veränderlichem Kraftangriff, von Harald Lunelund.
9. Untersuchungen zur Theorie der Beleuchtung des Mondes auf Grund photometrischer Messungen, von E. Schoenberg.
10. Über das Leitvermögen der Mischungen von starken Elektrolyten. Untersuchungen bei sehr kleinen Konzentrationen, von J. E. Renholm.
11. Über Fachwerkträger mit veränderlichem Kraftangriff, von Harald Lunelund.
12. Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, von Rolf Nevanlinna.
13. Über die numerische Integration von Differentialgleichungen, von E. J. Nyström.
14. Über die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt, von Hj. Tallqvist.
15. Untersuchungen über rollende Bewegung. Anwendungen der elliptischen Funktionen, von Hj. Tallqvist.

29181

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 1.

DIE AUSSERORDENTLICHE HALOERSCHEINUNG

AM 10. MÄRZ 1920

IN

SÜD-FINNLAND

VON

OSC. V. JOHANSSON

HELSINGFORS 1920
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATUR-GESELLSCHAFT

Einleitung.

Am 10. März 1920 wurde vornehmlich im S-Finnland eine ausserordentlich gut entwickelte Haloerscheinung beobachtet und von einigen auch genauer Beobahtern aufgezeichnet. Vor allem hat Herr Ingenieur E. A. Biese die Erscheinung in seltener Vollständigkeit und Schönheit beobachtet, auf einem Halbkugelmodell aufgezeichnet und dieses mir zur Verfügung gestellt. Hierdurch wurde ich veranlasst, nach seinen und anderen Angaben diese Beschreibung der Erscheinung hier zu veröffentlichen, wobei auch einige andere Zeichnungen ähnlicher Art von finnländischen Beobachtern, insbesondere einige aus älterer Zeit reproduziert und kurz beschrieben werden.

Herr Biese hat mir schon am 10. März zwei Zeichnungen der Erscheinung zugesandt, so dass ich eine Mitteilung hierüber in einer hiesigen Morgenzeitung für den 12. März einführen konnte. Da man die Erscheinung nicht an der Meteorologischen Zentralanstalt beobachtet hatte und da sofort aus diesen Zeichnungen zu ersehen war, dass die Verhältnisse für die Entwickelung der verschiedenen Einzelerscheinungen diesmal ausserordentlich günstig waren, habe ich in der erwähnten Mitteilung eine Aufforderung zum Einsenden von Zeichnungen oder Beschreibungen der Erscheinung ergehen lassen. Teils hierdurch, teils sonst haben mehrere Beobachter der Zentralanstalt oder mir ihre Aufzeichnungen oder Beschreibungen mitgeteilt, etwa ein Dutzend von diesen mit Zeichnungen. Weil, so viel ich weiss, ein so vollständiges gleichzeitiges Material für die Darstellung der meisten hierher gehörigen Lichtbilder in der Litteratur nicht vorkommt, will ich die Beschreibungen hier in allen wesentlichen Punkten, wo möglich und wenn nötig in originalen Mitteilungen, wiedergeben. Leider fehlen Messungen der Dimensionen beinahe durchweg. Die Zeichnungen sind auch in verschiedener Weise und mit wechselnder Genauigkeit ausgeführt. Die wichtigsten Zeichnungen sind auf der beigefügten Tafel in Fig. I—X reproduziert, wo möglich in gleicher Skala, aber auch möglichst genau nach den Originalen. Sämtliche Gebilde auf dem Himmelsgewölbe werden dabei entweder auf der Ebene senkrecht zu den Sonnenstrahlen projiziert oder auf der Ebene des Horizontalkreises so zu sagen umgebogen (nicht projiziert), so dass alle Kreise als Kreise erscheinen. Nur einige unwesentliche Ungenauigkeiten in Betreff der Symmetrie und Grössenordnung sind entfernt und im übrigen bei den Beschreibungen auf alle abweichenden und wesentlichen Punkte aufmerksam gemacht. Die Beobachtungsorte, die Beobachter, die Länge und Breite des Ortes, die Zeit und die Sonnenhöhe werden in einer Tabelle am Schluss der Abhandlung angeführt. Da die meisten

Beobachtungen zwischen 60 und 61° Breite und zwischen 7 und 11 Uhr a ausgeführt wurden, sei hier eine Tabelle mit der entsprechenden Sonnenhöhe ohne Rücksicht auf die Refraktion berechnet.

Zeit	$7\frac{1}{2}$	8	$8\frac{1}{2}$	9	$9\frac{1}{2}$	10	$10\frac{1}{2}$	11	$11\frac{1}{2}$	12
60° Breite	7	10	13	16	18	21	23	25	25	26
61 „	6	9	12	15	18	20	22	24	24	25

Die Wetterlage am 10. März morgens wies ein flaches 770—774 mm hohes Maximum im S, schwächeren Barometerfall in der Nacht im N, auf. Bei Winddrehung von NW gegen W und SW hatte der Himmel sich im N schon in der Nacht mit Wolken überzogen und in S-Finnland fuhr die Wolkenbildung im Laufe des Vormittags fort, so dass der Himmel hier um 2 p allgemein trüb war, im N wiederum heiterer nach Zurückdrehen des Windes nach NW. Abends war es auch im S heiter. Offenbar war ein sehr schwaches Randminimum vorübergegangen. In Helsingfors blieb der Barometerstand nach 8 Uhr ziemlich konstant, aber hatte vorher verhältnismässig rasch zugenommen. Die Bewölkung wurde in Helsingfors um 7—9 a mit 0, um 10 mit 1°, um 11 a mit 5°, um 12 Uhr mit 10° notiert. Um 7 a wurde Ci—Cu, um 10 und 12 Uhr Ci—S beobachtet. Der Beobachter in Kuusankoski meldet äusserst dünne Wolkenschichten über dem Himmel, der in Kaipiainen sagt, dass der Himmel nur etwas neblig war, der in Kotka fand nur einige daunenartige Wolken („untuvia") im S. u. s. w.

Ich gebe jetzt die Berichte der Beobachter, wo möglich in originalem Wortlaut, wieder. Wesentliche Besonderheiten der Zeichnungen, die nicht aus den Reproduktionen hervorgehen, werden auch angeführt.

I. Die Beobachtungen über die Haloerscheinung am 10. März 1920.

Die Erscheinung wurde hauptsächlich in S-Finnland beobachtet und vorwiegend E von Helsingfors. Von den etwa 10 Hauptberichten stammen 6 aus der Gegend des Kymmene Flusses, 2 Längengrade E von Helsingfors. Hier war die Erscheinung offenbar am schönsten entwickelt und die vollständigsten Berichte liegen von zwei Beobachtern auf der grossen Papierfabrik Kymmene, Kuusankoski, 5 km nördlich der Mitte der Hauptbahn zwischen Riihimäki und Wiborg, vor. Man könnte mit grossem Recht die Erscheinung „das Kymmene- oder Kuusankoski-Phänomen" nennen. Wir behandeln die Berichte von Kymmene in einem ersten Abschnitt.

A. Die Berichte aus Kymmene Fabrik von E. A. Biese und T. L. Suursalmi.

Wie schon erwähnt war Herr Ingenieur E. A. Biese der erste, welcher über die Erscheinung berichtet hat, und von ihm stammen die vollständigsten Zeichnungen und Beschreibungen.

Der erste Brief Bieses war der folgende:

„Tager mig härmed friheten översända till Eder en i all hast uppgjord skiss över ett i dag här å Kymmene bruk iakttaget ljusfenomen. Fenomenet var synligt över en timmes tid och ytterst tydligt. Himmeln var betäckt med ytterst tunna molnlager. Strimmorna vid bisolarna, ringen e (= 11) samt den breda bågen upptill framträdde i regnbågsfärger. De övriga strimmorna och ringarna i skarp vit färg. . . .

Die hiermit eingesandten 2 Zeichnungen I a und I b sind Vertikalprojektionen gegen die Sonne und Gegensonne, wobei der Horizontalkreis geradlinig gezeichnet ist.

In einem Briefe vom 16. März habe ich nähere Auskünfte verlangt und am folgenden Tage antwortete Herr BIESE u. a. folgendes:

„Jag låter här förfärdiga av plåt en halv-svär med en diam. av 500 mm, denna målas ljusblågrå och skall jag inrita alla kurvor samt allt, vad syntes av nämnda fenomen, om möjligt med naturliga färger. Får samtidigt meddela, att magister V. KROHN även utfört en ritning av fenomenet ifråga, tillsammans med sin fru och torde han insänt ritningen till professor MELANDER. Så fort jag får mig tillsänd en kopia av min rit ning, skall jag med biträde av mag. KROHN åskådliggöra fenomenet å ovannämnda sväryta."

Ich sandte sofort die Original-Zeichnungen zurück nebst einer Angabe, dass die Sonnenhöhe um 8.30 etwa $12\,^1/_2\,^\circ$ betrug. Am 4. April teilte Herr BIESE mit, dass das Halbkugelmodell fertig sei und in der nächsten Zeit mir zugesandt würde. Folgende Beschreibung desselben wird gegeben und Fig. I c gibt schematisch die von Herrn BIESE gesehenen und auf dem Modell eingezeichneten und numerierten Gegenstände an:

„Samtliga kurvor hava blivit fixerade av mig och magister Krohn gemensamt samt deras lägen fastställts efter gemensam prövning och s. a. s. gemensamt godkännande och torde deras lägen vara någorlunda exakta, emedan vi använt oss av bågen (sträckan) från solen till zenit som måttenhet vid bestämmandet av de övriga bågarnas inbördes storlek samt lägen.

Får även meddela, att min första skiss, den jag insände till Er, icke innehöll allt, det jag såg. Jag visste ej då, att min lilla i hast uppgjorda teckning skulle hava vetenskapligt värde. Från denna hade uteblivit bl. a. sidosolarna 5 och 6, samt bågarna 28 och 29, vilka alla jag tydligt sett. Däremot har jag ej iakttagit bågarna 18, 20 och 21. Bågen 20 dock delvis i nord-ost. Dessa bågar har magister KROHN dock tydligt sett och uppritat. Får även meddela, att min observation hänför sig till tiden $^1/_2\,9-9$ f. m. samt magister KROHNS till tiden $9-{}^1/_2\,10$ f. m. Bågarna kring solen syntes tydligast kl. $^1/_4\,9$ samt bågarna i nordväst kl 9. Himmeln var klarast i zenit samt mulnare mot horisonten. Fältet inom cirkeln 10 var mörkast, mellan cirkeln 10 samt bågarna 12 och 18 litet ljusare, samt mellan bågarna 11 och 12 ännu ljusare, dock var detta sistnämnda fält mörkare än himmeln ytterom cirkeln 11. Det såg ut som om dessa tre fält legat ovanpå varandra (således i tre olika skikt), det sistnämnda underst samt mittelcirkelfältet överst. Dessa fält skiftade i olika nyancer av violett. I samtliga regnbågsfärgade bågar var den ultravioletta färgen bortvänd från solen och av dessa bågar lyste bågen 15 starkast och enastående vackert samt de övriga i följande ordning 12, 10, 11, 28 och 29. Bågen 15 var mycket bred, samt de delar av bågen 12, vilka tangerade cirkeln 10 skarpt lysande. Bisolarna vid cirklarna 10 och 22 samt sidosolarna (90 grader från den egentliga solen) syntes elliptiska med vertikala långaxlar, varemot bisolen ovanom den egentliga solen, samt motsolen i nordväst syntes runda. Å de ställen, varest bågarna kommo i beröring med bisolarna, voro samtliga bågar såväl de vita som de regnbågsfärgade betydligt bredare, så som från avbildningen framgår. Undantag i detta avseende utgör dock bågen 12, där den tangerar cirkeln 11 samt bågarna 23, 24, 25, 26, där de genomgå motsolen 7. Bågen 13 syntes svagare än de övriga vita bågarna, varemot sidostrimmorna 14 framträdde ganska skarpt. Den vita horisontala bågen 16 syntes mycket tydligt, likaså bågarna 23, 24, 25 och 26. Cirkeln 22 samt bågen 27 mindre tydligt men ändå fullt skönjbara. Troligt är, att bågarna 19, 25 och 26 skulle hava fortsatt mot eller över zenit, men till följd av att himmeln här var nästan molnfri, framträdde ej här fortsättningarna å dem.

Något vidare att meddela betr. fenomenet minnes jag ej. Får även meddela, att jag några gånger tidigare (bl. a. i slutet av januari i år i Kotka) sett detta fenomen, dock i liten skala, nämligen endast bisolarna 2 och 4 samt cirkeln 10, allt betydligt svagare än denna gång. Jag har ej heller sett avbildningar av detta fenomen tidigare. I går blev jag dock uppmärksamgjord på en avbildning som ingått i en gammal tidskrift, vilken avbildning jag här bifogar. Ej har jag heller påträffat andra beskrivningar av detta fenomen i litteraturen."

Am 13. April bekam ich das erwähnte Modell mit den in Fig. I c kopierten 29 Einzelerscheinungen auf der blaugrauen eisernen Halbkugel (Halbmesser 25 cm) schön gemalt. Da hier

einige Grössenverhältnisse anders waren als in der ursprünglichen Zeichnung, habe ich wiederum Auskünfte hierüber verlangt und hat Herr BIESE meine Fragen bereitwillig beantwortet, worüber später noch berichtet sei. Hier zitiere ich aus diesem Briefe vom 15. April nur folgendes:

„Får även meddela, att de ursprungliga teckningarna av mig och magister KROHN[1]) gjordes fullständigt oberoende av varandra och utan att vi hade vetskap om varandras förehavande. Beklagligt är ju, att mätningarna icke utfördes med instrument, varigenom dessas vetenskapliga värde måste reduceras."

II. Eine zweite ebenso in Kymmene Fabrik ausgeführte Zeichnung Fig. II stammt vom Herrn T. L. SUURSALMI. Die Hauptkreise 10 und 11 und die oberen berührenden Bogen 12 und 15 sind ähnlich wie in Fig. I gezeichnet, wobei 12 jedoch mehr zweigeteilt, d. h. mit einem etwa geraden Winkel zwischen den beiden Ästen gezeichnet ist. Auch enden diese Äste etwas innerhalb der Schnittpunkte des grossen Kreises 11 mit dem Horizontalkreis 16. Etwas nach E von dem östlichen dieser Schnittpunkte endet an dem Horizontalkreis ein zweiter Bogen, 18, welcher sich nach unten streckt und gegen die Sonne seine konvexe Seite wendet. Dieser Bogen 18 und die Fortsetzung des grossen Hauptkreises 11 würden sich etwa tangieren. Über alle diese Bogen (ausser 16) wurde angegeben, dass sie mit den Farben des Regenbogens auftraten. Auch die 3 Nebensonnen 2, 3 und 4 an dem kleinen Kreise wurden als farbig bezeichnet. Die Nebensonnen 5 und 6 in etwa 90° Entfernung von der Sonne wurden beobachtet, aber diese als weisse Kugeln bezeichnet, diejenige in E (5) mit weissen Strahlen („valkea säteily") gesehen.

Auch die Gegensonne in NW (7) wurde wahrgenommen. In ihrer Nähe sind in Fig. II drei Bogenpaare gezeichnet, so dass je zwei gegen einander konkav sind und lanzettenähnliche Blattbildungen ausmachen. An diesen Bildungen sind die Worte „weisse Belichtung" (valkea valotus) ähnlich wie an dem Horizontalkreis eingeschrieben. Die Blätter strecken sich von der Gegensonne in der Richtung gegen die nächsten Nebensonnen 5 und 6 und gegen den Zenith. Die äussersten von diesen 6 Bogen (30 u 31) dürften mit keinem in Fig. I identisch sein. Schliesslich kommt noch ein Paar sich kreuzender weisser Bogenstücke, eigentlich gerade Linien im SW, vor, etwas nach S von der südwestlichen Nebensonne. Zu der Deutung und Identifizierung aller dieser Bogen kommen wir später zurück.

Die Erscheinung fing nach diesem Beobachter um 8 Uhr an und endete um $11.^{30}$ a. Die Zeit, für welche die Zeichnung gilt, ist nicht angegeben, so dass man am besten die Mitte der Zeit $9.^{45}$ annimmt.

B. Übrige Berichte über die Erscheinungen.

III—X u. a.

III. Die vollständigste Zeichnung aus ausserhalb Kymmene liegenden Orten stammt aus Sippola, 25 km nach SE, her und ist von Herr P. HYTTINEN ausgeführt. Die Zeichnung wurde in zwei

[1] Wie hier und früher angegeben ist, hat Mag. phil. V. KROHN einen wesentlichen Anteil an den Zeichnungen auf dem erwähnten Modelle, aber auf besonderen Wunsch des Herrn Krohn will ich die nur von ihm gemachten Beobachtungen unerwähnt lassen. Seine Absicht ist, hierüber an anderer Stelle selbst zu berichten. (Anmerk. b. d. Korr.: Inzwischen in Annales Academiae Scientiarum Fennicae A. XIII 10 erschienen. Die Angabe daselbst, dass Herr BIESE nicht die Gebilde k_2 (=28 u. 29), k_3 (= 23 u. 24) und C (= 5 u. 6.) gesehen hätte, stimmt nicht mit seinen eigenen Mitteilungen.)

Teilen gegeben, die Sonnen- und Gegensonnenseite und beide so zu sagen von innen gesehen. In Fig. III ist der Gegensonnenteil unverändert reproduziert, die Vorderseite jedoch wie gewöhnlich nach innen umgebogen. Auf der Sonnenseite sind die Nebensonnen 32 und 33 an den Schnittpunkten des grossen Hauptkreises mit dem Horizontalkreis für die früher erwähnten Zeichnungen fremd, auf der anderen Seite wiederum die gegen die Gegensonne konvexen Bogen 34 und 35, welche als Teile von Kreisen mit den Mittelpunkten 90 ° von der Sonne angesehen werden können. Die beiden Hauptringe und deren berührende Bogen werden als Regenbogen bezeichnet, der Bogen 15 als sehr klar. Der Berührungspunkt zwischen 10 und 12 wurde als eine klarere Stelle gesehen. Übrige Kreise und Bogen wurden als blasse („vaalea") bezeichnet, sämtliche Nebensonnen und die Gegensonne als regenbogenfarbig. Von den ausserhalb des Horizontalkreises gezeichneten Bogen 36—38 wird gesagt, dass diese oberhalb des Horizontalkreises 16 zu finden waren. Der Himmel war übrigens wolkenfrei, nur grauliche Federwolken („harmahtavaa harsoa") oben zu sehen. Die Erscheinung dauerte von $8\,^1/_2$ bis $9\,^1/_2$ a. Sie wurde als wunderbar bezeichnet und gab einen mächtigen Eindruck.

IV. Eine vierte Zeichnung der Erscheinung ist von Herr Ingenieur E. Hall in Kaipiainen geliefert. Der Ort liegt 25 km gerade E- wärts von Kuusankoski an der Hauptbahn. Die Beobachtung wurde um 10.30 a ausgeführt bei der Sonnenhöhe von c. 22 °. Fig. IV ist eine Reproduktion dieser Zeichnung. Ausser dem Horizontalkreis waren sämtliche Teile farbig mit Rot gegen die Sonne. Die 3 Nebensonnen des kleinen Ringes wurden als leuchtende Schnitt- und Berührungspunkte der Bogen bezeichnet. Die Halbmesser der beiden heliozentrischen Ringe wurden roh mit einem Winkellineal gemessen und zu etwa $25\,^1/_2$ bzw. 51 ° gefunden. Auch der Abstand zwischen den oberen und seitlichen Nebensonnen wurde gemessen und zu 32 ° gefunden.

Wie in der Fig. IV zu ersehen ist, kamen obere Berührungsbogen sowohl zu dem kleinen wie zu dem grossen Kreise vor. Beide wurden als zircumzenitale Kreisbogen gesehen. Ein grösseres Interesse bietet der innere (a), welcher etwas ausserhalb des grossen Haupthalos fortsetzt und wiederum an sich zwei berührende, um die horizontalen Nebensonnen gekrümmte Bogen (39 u. 40), aufweist. Nach Herrn Hall schienen die Verlängerungen dieser Bogen sich nicht in der Sonne, sondern etwas oberhalb derselben zu schneiden. Hiernach wären die Mittelpunkte dieser Kreisbogen nicht genau in den Nebensonnen, sondern etwas näher der Sonne zu finden. Herr Hall hat auch erwähnt, dass die Bogen 12, 39 und 40 etwas früher zusammen als eine doppelgekrümmte Wellenlinie, ähnlich wie z. B. in Kymmene gesehen wurden. Schliesslich findet man in der Zeichnung IV wie in II ein von 16 nach unten gehendes Bogenstück 18, aber hier an dem östlichen Schnittpunkte zwischen dem grossen Haupthalo und dem Horizontalkreis. Dieser Bogen ging nur eine kleine Strecke nach unten und hatte seine konvexe Seite nach der Sonne gewendet.

V. Eine fünfte Zeichnung Fig. V ist von dem meteorologischen Beobachter in der Stadt Kotka, Herrn J. Kukkola geliefert. Dieselbe zeigt den Horizontalkreis (16), die zwei heliozentrischen Ringe (10 u. 11), 5 Nebensonnen (2, 3, 4, 32 u. 33) an diesen und obere Berührungsbogen (12 u. 15) an beiden. Derjenige an dem inneren Ringe verläuft ziemlich ähnlich wie in dem Kymmene-Phänomen, obwohl derselbe als von zwei Kreisbogen zusammengesetzt dargestellt ist. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind in die Nebensonnen verlegt. Für die obersten Bogen, welche als die breitesten erscheinen, sind die Farben angegeben, Rot gegen die Sonne und weiter Grün und Blau. Schliesslich sind an dem Horizontalkreis noch die Gegensonne (7) und zwei Neben-

sonnen (8, 9) etwa 60° von der Gegensonne entfernt zu finden. Der Beobachter hebt noch hervor, dass hier nicht am Mittel- und N-Himmel ersichtliche schwache weise Bogen eingezeichnet sind. Nach späteren aus dem Gedächtnis gemachten Zusätzen waren diese weissen Bogen Teile von grösseren Kreisen als die farbigen, endeten am Horizontalkreis und bildeten dort leuchtende Stellen. Auch wird gesagt, dass die gezeichneten farbigen Bogen verhältnismässig zu gross sind. In einer Zeitungsnotiz erwähnt Herr K., dass die Erscheinung zwischen 9 u. 10 a eintrat und um $^1/_2$10 a am schönsten war, weiter, dass sowohl farbige als weisse Nebensonnen vorkamen.

VI. Die Beobachtung Fig. VI des Herrn Gärtners K. SAMMALLAHTI in Valkeala (9 km nach NE von Kuusankoski) umfasst folgende Erscheinungen: Zwei Nebensonnen in der Nähe der Sonne (2 u. 4), eine in NNE (8), der Horizontalkreis durch diese (16), der grosse Halo und sein oberer Berührungsbogen (15), ein sehr eigentümlich gezeichneter Berührungsbogen des inneren Ringes (12) und zwei gegen einander konvexe Bogenpaare in N und W (vielleicht 22 u. 34, 35). Diese wurden zuletzt aufgedeckt und verschwanden zuerst, die Nebensonnen zuletzt. Alle 3 Nebensonnen sind als viereckige Sterne gezeichnet. Die beiden in der Nähe der Sonne waren die ganze Zeit kräftig beleuchtet, die innere Hälfte Coccinéa-rot, die äussere hellgelb.[1]) Die dritte Nebensonne, der Nebensonnenkreis und die beiden Bogenkeile auf der Nebensonnenseite sind als hellblau, die 3 übrigen Bogen als regenbogenfarbig angegeben. Der innere Berührungsbogen und der grosse Ring waren in der breiter gezeichneten Mitte kräftig beleuchtet, die zugespitzten äusseren Enden als hell angegeben. Die Erscheinung fing um 8.30 an, endete um 10.20 und war am stärksten um 9.40 entwickelt.

VII. Der Beobachter Herr Kaufmann J. R. GÖSSLING in Lovisa hat die Haloerscheinung für die Zeit 8.50 gezeichnet (Fig. VII) und folgende Beschreibung hierüber geliefert:

„Från solen, som stod i SE — avståndet kan jag icke bestämma — var såsom teckningen visar en mindre mot NW öppen båge i de skäraste regnbågens färger, under den, såsom å teckningen synes, en större mot solen öppen båge, vars färger också voro regnbågens, men mycket mörka och dystra. Under dessa bågar närmare solen var en liten vädersol i mycket ljusa matta färger och såg ut som den vore avskuren på sidan vänd mot de större bågarna. På W- och E-sidan om solen (en på var sida) voro stora i vackra färger skiftande vädersolar. Från vädersolen i W utgick ett smalt ljust molnband mycket långsamt böjande sig åt N och slutande i en större äggformig kula alldeles skinande vit såsom i den vore en vit elektrisk belysning. Ett likadant molnband utgick från vädersolen i E, böjande sig åt N, slutande i en äggformig vit kula, men molnbandet var kortare. Dessa molnband och vita kulor försvunno snart, men bågarna och vädersolarna avtogo mycket långsamt och upphörde kl. 9.45 f. m. Fenomenet hade väl börjat något tidigare, men då jag hade arbete inomhus, observerade jag det icke tidigare."

VIII. Der sonst sehr interessierte und gewissenhafte Beobachter Herr P. SORMA in Somero hat die Zeichnung in Fig. VIII geliefert. Aus der ursprünglich farbigen Zeichnung gehen noch folgende Umstände hervor. Die gegen die Sonne gewendete Seite ist in allen 4 Bogen rot gezeichnet, die Mitte gelb, die äussere Seite blau. Jedoch fehlt die blaue Farbe an dem Berührungsbogen des inneren Ringes und ist der gelbe Teil hier in der Mitte sehr breit gemalt. Nach unten geht hiervon auch bis an die Sonne ein oben breiterer gelber Lichtkegel (17). Ebenso ist die linke (südliche) Nebensonne mit einem gelben nach aussen zugespitzten Lichtkegel ausgerüstet, die rechte und als dunklere („hämärämpi") angegebene Nebensonne nur mit einer schwachen

[1] Eigentlich ist eine umgekehrte Farbenfolge für die südlichere Nebensonne angegeben, aber wahrscheinlich liegt hier ein Irrtum vor.

Andeutung zu einem Lichtstreifen. Die rote Farbe ist am schärfsten an dem kleinen Ringe in der Nähe der Nebensonnen und am unteren Rand des Berührungsbogens derselben gezeichnet. Die Mittelpunkte der Nebensonnen fallen ein wenig ausserhalb der Mitte des Kreises, so dass die blaue Farbe etwa durch die Mitte der Nebensonnen geht. Die beiden Ringe teilten die Strecke Sonne—Zenit in 3 etwa gleiche Teile von ca. 30°. Neu ist der gegen die Sonne konvexe Bogen (41) oben zwischen den Halos. Die Erscheinung wurde um 7.20—7.40 gesehen, also kurz nach Sonnenaufgang. Eine ähnliche Erscheinung wurde von Herrn Sorma im Mai 1892 um 4 p (in Helsingfors am 3 u. 26 Mai um 5 p.) beobachtet und eine Zeichnung der Zentralanstalt eingesandt.[1]) Herr Sorma hat damals wegen dieser Erscheinung einen regnerischen Sommer vorausgesagt, was auch eintraf. Durch die Verspätung der Vegetation und frühe Nachtfröste entstand Missernte. „Wäre wohl die Erscheinung auch jetzt für dasselbe ein Vorbote und Warnungszeichen?„ fragt sich der Beobachter. Hierzu sei nur bemerkt, dass der April 1920 sehr regenreich in grossen Teilen Finnlands ausfiel und dass Ekholm einen sehr kühlen Sommer vorausberechnet hat.

Noch sei zugefügt, dass in einer erneuten Zeichnung (nach dem Gedächtnis, weil die sofort eingesandte irrtümlich als verloren angesehen wurde) vom 16. April auch ein Berührungsbogen des grossen Halo zugefügt ist.

IX. Der Herr Volkschullehrer S. Kantola im Kirchspiel Orimattila (Heinämaa) hat nur eine sehr ungefähre Zeichnung IX geliefert, aber eine ziemlich vollständige und in mehreren Beziehungen abweichende Beschreibung gegeben. Diese sei hier in Übersetzung aus der finnischen Sprache wiedergegeben:

„Um 8.20 beobachtete ich am E-Himmel eine kreuzförmige Lichterscheinung. Im Zentrum derselben war ein Sonnenbild (32) und von diesem ging in der Richtung N ein kräftiger Lichtstreifen (16), ähnlich nach oben und unten. Der in der Richtung S (gegen die Sonne) gehende Streifen (16) war lichtschwächer als die übrigen. Die Sonne befand sich in SSE, der Himmel mit leichten Wolken bedeckt. In der Mitte des Himmels befand sich ein halbkreisförmiger Regenbogen (15), die Farben klar, der Rücken gegen die Sonne. Vom Horizont nach der Himmelsmitte ging als gerade Linie (Richtung NE) ein zweiter klarer Regenbogen. In der Richtung der Sonne, aber an der oberen Seite der Sonne fand sich ein unklarerer Doppelregenbogen (10 u. 12), die Rücken gegen einander, die Bogen kurz.

Um 8.35 bildete sich an der Südseite der Sonne ein neues Sonnenbild (2), von welchem 4 Lichtstreifen ausgingen (10 u. 16) ähnlich wie von dem auf der anderen Seite befindlichen Sonnenbilde. Am schwächsten war der nach der Sonne gehende Streifen. Jetzt bogen sich die von den beiden Sonnenbildern nach oben sich erhebenden Lichtstreifen zusammen (10) oberhalb der Sonne. Auch die unteren Lichtstreifen bogen sich gegen einander, aber verschwanden vor der Vereinigung. In den Reflexions-Sonnen waren die nach der Sonne gewendeten Seiten kräftig gelb, die andere Hälfte war weiss, die Lichtstreifen waren ebenso weiss. Um 8.45 a waren die Regenbogen verschwunden, 3 Sonnen strahlten noch, die mittlere etwas stärker. Um 9.5 a. war die Erscheinung nur schwach zu sehen."

X. Eine kleine Zeichnung (Fig. X) vom Herrn Volkschullehrer J. Aro in Hausjärvi (Kara) weist folgendes auf: die zwei Hauptkreise (10 u. 11) und die oberen berührenden Bogen beider (12 u. 15), auf beiden Kreisen je 3 Nebensonnen, also auch eine von den übrigen Beobachtern nicht angeführte oben an dem Berührungspunkte des grossen Halo (42). Schliesslich war ein Teil des Horizontalkreises (16) durch die 5 Sonnen zu sehen. Die inneren Gebilde waren deutlicher als die äusseren. Die Erscheinung fing um 8 Uhr an und entwickelte sich am deutlichsten zwischen

[1]) Jetzt nicht wiedergefunden.

10 und 11 a. Am 20. März vormittags sah derselbe Beobachter wiederum die 4 Nebensonnen auf dem Horizontalkreis und den kleinen Ring.

Der Herr Gutsbesitzer Grahn hat in Kulla in der Nähe der Stadt Borgå nach mündlicher Mitteilung u. a. zwei grosse gefärbte Bogen ausserhalb des kleinen Ringes oberhalb der Sonne und konvex gegen diese gesehen. Auch wurde erwähnt, dass der Hauptkreis und sein Berührungsbogen Veränderungen unterlag.

Schliesslich seien noch einige eigentümliche Beobachtungen (um 9 a) über die südliche Nebensonne von Frau Hulda Ehrnsten in Dickursby kurz erwähnt. Sie und ihre Tochter sahen nämlich u. a. diese Nebensonne in Bewegung gegen die Sonne. Die Bewegung konnte im Schutze der Fenstereinfassung konstatiert werden. Die Nebensonne hatte nach sich einen Schweif, so dass sie mit einem Komet verglichen wurde. Einige Zeilen der Beschreibung lauten:

„Då iakttogo vi båda, huru ljushuvudet närmade sig solen, men huru det på ett helt nära avstånd stannade med en som det tycktes roterande rörelse“ (später zugefügt: „och liksom skiftande av små granna partiklar“). „Då det stått så några minuter, kastade det ljussken, ehuru en kortare strimma, både uppåt och nedåt och en kort stund även emot solen“ ... „sedan sågo vi mellan de båda solarna alldeles obetydliga små strömoln och över dessa en kort gredelin regnbåge ej mycket längre än solen och med den mörkare sidan vänd mot solen.“

Hier folgte eine kleine Skizze, wonach ein kurzes gegen die Sonne konvexes Bogenstück etwa halbwegs zu der Nebensonne zu sehen war.

Die oben erwähnten sind die vollständigeren Berichte, welche mir zugänglich sind. Ausserdem ist die Haloerscheinung an vielen anderen Orten wahrgenommen, u. a. von mehreren Personen in Helsingfors, nach W und N bis Eräjärvi, Lestijärvi und Viitasaari, nach E vielleicht bis Suistamo. Für diesen Ort ist freilich als Datum einer Beobachtung eines grossen Ringes der 9. März angegeben, aber vielleicht liegt eine Verwechselung des Tages vor.

C. Einige Beobachtungen aus anderen Zeiten.

Einige andere Beobachtungen von Haloerscheinungen aus der letzten und alten Zeit seien noch hinzugefügt. In der folgenden Nacht, am 11. März um $4^3/_4$ — 5 a wurden z. B. in Seinäjoki zwei Nebenmonde auf beiden Seiten des Mondes gesehen. Die Farben der Nebenmonde waren einerseits „ähnlich wie durch einen Kristall gesehen“, andererseits war gesagt, dass die inneren Hälften lila, die äusseren weiss waren. Auf den äusseren Seiten wurden horizontale, nach aussen zugespitzte Lichtkegel oder Schweife gesehen. Es wird auch gesagt, dass die Schweife wohl darauf deuteten, dass die Nebensonnen sich nach innen oder nach dem Beobachter zu bewegten. Diese Bemerkung ist wohl die einzig mögliche Erklärung zu der ähnlichen Täuschung bei der beweglichen Nebensonne nach der Beobachtung in Dickursby, wobei übrigens von der Ähnlichkeit mit einem Kometen gesprochen wurde.

Am 2. März d. J. um $1.45-2.05$ p hat der Vorsteher der Volkshochschule in Uusikirkko Kanneljärvi ($\varphi = 60° 21'$ $\lambda = 29° 26'$) J. Hurmalainen die zwei Hauptringe, den oberen berührenden

Bogen des äusseren Ringes und die zwei Nebensonnen auf dem kleinen Ringe gesehen. Ausserdem wurden nach seiner Zeichnung deutlicher als in anderen Fällen je 3 Lichtsäulen oder Schweife an den beiden Nebensonnen gesehen, nämlich nach aussen oben und unten gerichtet. Sie sind über den äusseren Ring hinaus gezeichnet. Die Lichtsäulen waren weiss, die Bogen in Regenbogenfarben.

Auch am 20. (Eräjärvi) und 23. März (Tammerfors) und am 1. April (Suistamo) dieses Jahres wurden Haloerscheinungen wahrgenommen. Die Beobachtung in Tammerfors am 23. März (von Stadtgärtner O. Karsten) weist, ausser den 2 Hauptringen, 3 inneren Nebensonnen und dem oberen Berührungsbogen des grösseren Ringes, auch zwei kleine berührende Bogenstücke zu dem inneren Ringe auf.

XI. Aus älterer Zeit seien hier 5 Zeichnungen von Haloerscheinungen, welche in Finnland beobachtet sind, erwähnt und teils wiedergegeben. Fig. XI gibt erstens eine sehr eigentümliche Zeichnung von Herrn J. L. Eriksson wieder, beobachtet in Tuusniemi (φ=62° 49′ λ= 28° 27′) am 26. Juli 1894 8—9 a. Die exzentrische Lage der Sonne, die Anordnung der Nebensonnen u. s. w. wirken sehr befremdend.

An anderer Stelle[1] habe ich eine Haloerscheinung erwähnt, beobachtet und gezeichnet am 30. Mai 7 p 1842 in Uleåborg vom Herrn K. Nyman. Die Zeichnung enthält 2, 3, 4, 10, 11, 12 u. 15 und kann als die erste aus Finnland bekannte deutliche Darstellung der gewöhnlichsten Bestandteile des Halophänomens bezeichnet werden.

Aus Uleåborg stammen auch die zwei Halodarstellungen in den Fig. XIII u. XIV. Die Zeichnungen sind von dem in der alten Meteorologie Finnlands bekannten Beobachter Herrn Apotheker Joh. Julin ausgeführt und sind nach seinem in Stockholm in der Meteorologischen Zentralanstalt aufbewahrten Originale von mir 1911 dort kopiert. Ich gebe hier auch die Bemerkungen Julins zu den Erscheinungen an:

Zu Fig. XIII. „Observerad den 18 februari kl. 4-5 e. m. 1789 öfver SW- horisonten. Luften disig, men så att solen kunde bryta igenom. Vind NW, temperatur 19°. Solringen beskref en halfcirkel med solen midtuti. Hvardera cirkelfoten slutade sig nära horisonten med en ellips. Öfverst mot zenit uppstego 2:ne ljusa armar, formerande på cirkeln en vinkel, som tangerades af solstrålarna. På båda sidor om solen utgingo ljusa strålar mot ellipserna. Dessa utkastade ock ifrån sig ett långt sken, som svansar åt E och W Cirkelbågen, ellipserna och vinkeln emot zenit hade regnbågens, men något eldrödare färg."

Zu Fig. XIV. „År 1783 den 27 mars kl. 9-10 ½ f. m hade jag på en resa tillfälle att observera och aftaga den större solringen med sina 4 vädersolar. Himmeln var klar med några små strömoln, men själfva nedre luften knappt märkligt disig. Solen sken klart, temperaturen —13°, vind S[1]. Alla bågarna egde regnbågens färger, dock tycktes den yttre stora cirkeln vara något ljusare."

XII. Als letztes Beispiel gebe ich in Fig. XII die älteste für Finnland bekannte Zeichnung einer Haloerscheinung wieder. Dieselbe ist von mir schon früher[2] erwähnt und rührt von dem ersten finnländischen Klimabeschreiber, dem Feldmesser C. F. Stierwald her. Die Erscheinung wurde am 4. Aug. 1744 um 12 Uhr mittags beobachtet. Ziemlich deutlich ist, dass hier der kleine Ring und der Horizontalkreis mit 2 Nebensonnen in den Schnittpunkten vorliegt. Wie die Dreiecke um die Nebensonnen herum und der entfernt im SW gezeichnete Bogen zu deuten sind, bleibt fraglich. Für Stierwald war offenbar auch die landläufige prognostische Bedeutung

[1] Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk H. 72, N:o 4, S. 32.

[2] „ „ „ „ „ „ „ „ H. 75, N:o 1, S. 25.

der Haloerscheinungen bekannt und er kritisiert diese Auffassung. Er sagt (vgl. l. c.), dass freilich der erwähnte Fall von Gewitter und 3 Regentagen begleitet wurde, aber am 21. April 1749 wurde eine beinahe ähnliche Erscheinung und einige Tage später wiederum eine andere beobachtet, welche nur von Sonnenschein und beständigem Wetter begleitet waren.

II. Darstellung und Erklärung der einzelnen Gegenstände der Beobachtung.

Ich will nun diese Beobachtungen zusammenfassen und die Einzelerscheinungen so weit möglich auf früher beschriebene und erklärte Beobachtungen dieser Art zurückführen. Der Kürze halber tue ich es durch Hinweise auf die beiden bekannten Hauptarbeiten von Bravais[1] (B.) und Pernter[2] (P.) und zwar durch Anführen der Seiten oder Figuren bei diesen Verfassern. Die römischen Ziffern beziehen sich auf die obigen Figuren und Beobachtungen, die arabischen auf die früher hauptsächlich nach E. A. Biese durchgeführte Numerierung. Wir folgen der Klassifikation bei P. 228 u. f.

a) Halo von 22° Halbmesser N:o 10 (P. 228). Dieser ist von allen Beobachtern ausser VI gesehen. Eine ungefähre Messung des Halbmessers liegt nur bei IV vor und gab 25° ½. Ich habe aber versucht, nach einigen Zeichnungen diesen Halbmesser roh zu berechnen durch Abmessen entweder der Halbmesser oder Sehnen im Verhältnis zu dem Halbmesser des Horizontalkreises, wobei auch die Reduktion auf wahre Entfernung durchgeführt wurde (vgl. P. 305 Formel 7, oder $\sin \frac{A}{2} = \frac{\text{Sehne}}{\text{Durchmesser}} \times \cos$ für Sonnenhöhe). Für die ursprüngliche Zeichnung Bieses I nahm ich an, dass die unteren Enden des Kreises ein Paar Grade über dem Horizonte enden und bekam $A = 21$, durch Sehnenmessungen nach III u. V $A = 23$, nach IV 20 und nach VI (Nebensonnen) $A = 24°$. Im Mittel dieser 6 Werte bekommen wir somit etwa 22° ½[3]. Pernter fand nach mehreren alten Messungen 21° 52′ in guter Übereinstimmung mit der Theorie und mit der Annahme des Brechungsexponenten des Eises zu 1. 31, aber 117 bzw. 72 Messungen von J. F. J. Schmidt[4]) ergaben 23° 44′ und auch spätere Messungen haben grössere Werte als früher gegeben. Die Schätzungen in Kymmene gaben viel zu kleine Werte 13—15° (vgl. c.)

Dieser Ring ist durchgehends als regenbogenfarbig angegeben, nur VIII hat dabei die Farben rot, gelb und blau eingezeichnet, wobei die rote Farbe in der Nähe der Nebensonnen 2 und 4 am deutlichsten hervortritt. Bei VII ist nur der obere Teil des Kreises gesehen und ist mit einem kleineren Radius als die Entfernung von der Sonne gezeichnet. Vielleicht ist dieses ein Ausdruck der scheinbar eiförmigen Form aller Kreise in der Nähe des Horizontes (vgl. Pernter S. 33).

b) Umschriebener Halo. Dieser konnte in diesem Falle nicht gefunden werden, da

[1] Bravais N. A. Mémoire sur les halos et les phénomènes optiques qui les accompagnent. Journal de del'Ecole royale polytechnique. T. XVIII Paris 1847.

[2] Pernter J. M. Meteorologische Optik. Wien und Leipzig 1902.

[3] Zwei ganz rohe Messungen am 13. u 21. April d. J. gaben mir die Werte 24°.

[4] Nach Knoch K. Abh. des k. Pr. Meteor. Inst. N:o 243 Berlin 1911.

derselbe nach Pernter nur eine Unterart des oberen Berührungsbogens (vgl. f.) ist und erst bei einer Sonnenhöhe von etwa 30° einer Ellipse zu ähneln anfängt.[1]

c) Halo von 46° Halbmesser. N:o 11 (P. 237). Dieser wurde von 8 unter den 10 Beobachtern gesehen, nur von VII und IX nicht. Die rohe Messung von IV betrug 51° für den Halbmesser dieses Kreises. Durch ähnliche Schätzungen wie oben (für N:o 10) fand ich nach I 38°, nach III 45°, IV 49°, V 51° und VI 56°. Das Mittel von 6 Werten beträgt 48°. Das Verhältnis zwischen dem Halbmesser des grossen und kleinen Kreises ist somit im Mittel 2. 1, also etwa richtig. Dasselbe Verhältnis wird nach der Zeichnung Bieses 1.8 nach dem veränderten Verhältnisse auf dem Modell aber 2.6. Durch die scheinbare Abplattung des Himmelsgewölbes ist der verkleinerte Wert dieses Verhältnisses leicht zu verstehen, denn nach Pernters Berechnungen (S. 21) findet man den Wert 1.6 bei der wahren Sonnenhöhe $12°1/_2$ (auch der Abstand Horizont — obere Seite des kleinen Ringes = 2 mal die Sonnenhöhe wird hierdurch erklärlich).

Die Breite dieses grossen Ringes ist z. B. in II grösser als diejenige des kleinen Ringes (oder der Nebensonnen) gezeichnet, wie es nach der Theorie auch sein soll. In VI ist die Breite in der Mitte auch grösser als sonst angegeben. Fig. VIII gibt wie sonst die Farben rot, gelb und blau, Fig V rot, grün und blau an, die rote Farbe wie gewöhnlich nach innen.

d) Halo von 90° Halbmesser wurde nicht beobachtet.

e) Der Horizontalkreis (N:o 167 P. 241) ist von allen Beobachtern ausser VIII gesehen. In VII wurden nur Teile zwischen den Nebensonnen gesehen und als Wolkenbänder bezeichnet. Die Farbe wurde als weiss, blass oder hellblau angegeben.

f) Oberer Berührungsbogen des Halo von 22 (N:o 12 P. 242). Dieser Bogen ist ganz allgemein gesehen. Derselbe ist in verschiedenen Formen gezeichnet. In III, VII, IX, und X erscheint er als ein Kreisbogenstück konvex gegen die Sonne mit der Krümmung etwa des kleinen Ringes 10, in VII jedoch viel kleiner. In VIII (bei der kleinsten Sonnenhöhe etwa 6°) sieht man schon die äusseren Enden etwas zurückgebogen und in I, II und V sind diese Endpunkte übereinstimmend bis an die Schnittpunkte des grossen Halo und des Horizontalkreises gezogen. In I ist die Wellenform des Bogens am deutlichsten und die Abrundung des konvexen Mittelstücks noch flacher als die theoretische von Pernter in Fig. 130 S. 341 für 15° Sonnenhöhe angegebene. In II sind die beiden Äste in der Mitte ziemlich rechtwinklig auf einander und ebenso in V, wobei diese Äste als Kreisbogen mit dem Zentrum in den Nebensonnen gezeichnet sind. Eine eigenartige Kombination von 3 Kreisstücken wurde wie erwähnt im Falle IV beobachtet, der berührende Bogen als ein zircumzenitaler Kreis, welcher etwas ausserhalb des grossen Haupthalo 11 sich erstreckt und zu diesem ausser dem kleinen Kreise 2 andere berührende Kreisbogen. Als solche sind sie neu (39 u. 40), aber die äusseren Teile derselben und die Mitte des Berührungsbogens 12 bilden eine ähnliche Wellenlinie wie z. B. in I und anfangs wurde nur eine solche auch hier gesehen. Offenbar ist schliesslich in VI die eigentümlich gefärbte Lichterscheinung oberhalb der Sonne als ein solcher Berührungsbogen aufzufassen. Wenn man sich diesen Bogen verkehrt gezeichnet denken würde, wäre eine grosse Ähnlichkeit mit anderen

[1] Bei der Meldung dieser Abhandlung der Sozietät der Wissenschaften hat der permanente Sekretär der Sozietät Prof. A. Donner gemeldet, dass er einmal einen elliptischen Halo mit grösserer Horizontalaxe gesehen hat.

(z. B. VIII) erreicht. Als ein spitzer Winkel tritt der behandelte Bogen bei der alten Zeichnung JULINS (Fig XIII) auf und war die Sonnenhöhe hierbei auch sehr klein.

Es sei noch erwähnt, dass nach PERNTERS Berechnungen (S. 349) der berührende Bogen (oder umgeschriebener Halo) bei einer Sonnenhöhe von 20° den Horizontalkreis in dem Abstande 44° von der Sonne treffen würde (bei h=15° extrapoliert im Abstande 49°), so dass die obigen Ergebnisse mit der Theorie gut zusammengehen. PERNTER hat jedoch bezweifelt, ob die herabhängenden Äste noch bis zum Nebensonnenring bei einer Sonnenhöhe selbst von 25° zu sehen wären.

g) Unterer Berührungsbogen des Halo von 22° (P. 245) konnte wegen der niedrigen Sonnenhöhe nicht gesehen werden.

h) Oberer Berührungsbogen des Halo von 46° (N:o 15 P. 246). Dieser dürfte von allen Beobachtern auser VII gesehen worden sein. Die überhaupt sehr oberflächliche Zeichnung IX gibt eine sehr schiefe (östliche) Lage dieses Berührungsbogens an (auch der Bogen 11 ist schief, aber weniger und nach rechts gezeichnet). Von einigen z. B. I, III und V ist derselbe als breit und lichtstark angegeben, von VI schwächer als der Kreis gezeichnet und auch ein wenig ausserhalb desselben. Obwohl der Bogen in mehreren Fällen parallel mit dem Horizontalkreis angegeben ist, kann man diese Befunde nicht als sichere Bestätigungen der Theorie von BRAVAIS gegen diejenige GALLES ansehen, da keine Messungen vorliegen. In der Zeichnung auf dem Modell wendet der Bogen seine Enden nach oben. In der ursprünglichen Zeichnung VIII bei dem niedrigsten Sonnenstande von etwa 6° fehlte dieser Bogen, welche Tatsache den Ergebnissen BRAVAIS entsprechen würden.

i) Ungewöhnliche zircumzenitale Bogen (P. 247 B. § XVIII 130—137). Bogen dieser Art sind von einigen Beobachtern gesehen. Diese Bogen sind von BRAVAIS und PERNTER ganz kurz behandelt, weil nur vereinzelte Beobachtungen vorlagen.

Hierher gehört der farbige Bogen 41, beobachtet in Somero (VIII) zwischen den beiden gewöhnlichen Berührungsbogen 12 und 15 und etwa parallel mit diesen gezeichnet. Da derselbe etwas innerhalb der Mitte zwischen den beiden Hauptkreisen seinen niedrigsten Punkt hat, kann man die Entfernung dieses Punktes von der Sonne zu etwa 32—33° schätzen.

Ein zweiter Bogen (20) dieser Art ist teilweise von BIESE in NE gesehen und auf dem Halbkugelmodell ziemlich parallel mit dem Horizont und bis zu dem grossen Halo von 46° gezeichnet. Vielleicht ist es ein Teil desselben, welcher das Kreuz im S in II bildet und möglicherweise sind die ausserhalb des Horizontalkreises in III gezeichneten Bogen (33, 34) hierher gehörig. Zircumzenital ist auch der Bogen 27 in I. Zum Teil gehören wohl diese zu einer anderen Klasse der Erscheinungen.

k) Unterer Berührungsbogen des Halo von 46° (P. 247). Dieser kann hier nicht vorkommen.

l) Seitlich unten berührende Bogen des Halo von 46° (P. 247). Vielleicht kann der Bogen 18 in II als ein solcher aufgefasst werden. Aber offenbar ist der Bogen 18 bei IV hiermit identisch und da derselbe nach dieser Beobachtung den Kreis 11 zweimal schneidet, kann derselbe nicht als ein berührender Bogen angesehen werden. Es sei hier auch erwähnt, dass ähnliche obere von BRAVAIS vorausgesagte Bogen möglicherweise bei der Beob-

achtung von Herrn Grahn in Kulla wiedergefunden sind. Ein solcher ist auch von Besson 1910 beschrieben[1]).

m) Nebensonnen des Halo von 22° (2, 3 u. 4 P. 248). Die seitlichen von diesen (2 u. 4) sind von allen 10 Beobachtern gesehen und eingezeichnet. Überhaupt sind diese auf dem Halo und rund gezeichnet. Biese nennt dieselben elliptisch mit der langen Axe vertikal. Zum Teil müssen hier also schon andere Kristalle als diejenigen mit vertikal brechenden Kanten wirksam gewesen sein. Dasselbe gilt von der Beobachtung VI, wo die Nebensonnen als kleine Kreuze oder 4-eckige Sterne gesehen wurden. Auch in VII sind Strahlen nach oben und unten gezeichnet. Wenn etwas über die Farben gesagt wird, so werden diese farbig genannt. Nur in VIII befinden sich die Nebensonnen zum Teil ausserhalb des Halo, aber dieses ist weniger natürlich, da diese Beobachtung gerade die früheste war, mit der Sonnenhöhe etwa 6°. Ob schliesslich die grossen Ellipsen in der alten Zeichnung Julins (Fig. XIII) als Nebensonnen aufgefasst werden sollen, scheint fraglich. Die geringe Breite des Schweifes und die Form der Nebensonnen in der zweiten Zeichnung desselben Beobachters spricht nicht dafür.

Die Nebensonne 3, welche Pernter nur als eine hellere Stelle des Ringes wissen will, ist von 5 Beobachtern I, II, IV, VI u. X (am 20. März 1920 und 1842 von H. Nyman) gesehen und durchgehends als rund angegeben oder gezeichnet.

n) Nebensonnen des Halo von 46° (35 u. 36 P. 253). Diese seltenen Gebilde sind von 4 (III, VI, VII u. X) unter den 10 Hauptbeobachtern gesehen. Pernter fand in der Litteratur und in Beobachtungsreihen, welche in den 55 Jahren seit dem Erscheinen von Bravais Arbeiten gemacht wurden, nur eine Beobachtung dieser Nebensonnen, nämlich eine von Drygalski vom 26. März 1893. Näheres über diese Gegensonnen teilt nur der Beobachter VII mit, in dem er dieselbenals eiförmig und weiss angibt. Von der westlichen heisst es, wie erwähnt, dass sie „leuchtend weiss war, als wäre in derselben eine weisse elektrische Beleuchtung". Bravais und Pernter kannten nur einen Fall, wo man die Farben dieser Nebensonnen gesehen hat und Pernter bemerkt hierzu (S. 354) dass „die so erzeugten Nebensonnen schon bei einer mässigen Höhe der Sonne über dem Horizonte nur schwache Leuchtkraft besitzen können, so dass man die Farben schwer unterscheiden wird". In der Nähe des Horizontes müssten nach Pernter die Farben sehr deutlich und leuchtend auftreten, aber durch den Dunst sind hier meistens alle diese Erscheinungen unsichtbar gemacht. Die Beobachtungen Drygalskis und unsere obigen bezeugen jedoch, dass diese Nebensonnen in der Nähe des Horizontes sehr intensiv auftreten können, ohne dass Farben wahrgenommen werden. Der Beobachter VII fand weiter zwischen den beiden Nebensonnenpaaren ein „Wolkenband", welches offenbar Teile des Nebensonnenringes ausmachte. Bemerkenswert ist, dass dieses Wolkenband in W sehr lang und sich nach N biegend, das zweite in E aber als kürzer angegeben wird. Die äussere westliche Nebensonne war also in einer grösseren Entfernung von der Sonne als die entsprechende in E. Der Unterschied würde nach der Zeichnung und mit der Annahme von 22° für die Entfernung der inneren Nebensonne etwa 8° betragen (41 gegen 33). Nach der Theorie Pernters (S. 355) soll die äussere Nebensonne bei der Sonnenhöhe 15°in einer wahren Entfernung von 48° von der Sonne auftreten. Bravais nahm dagegen an, dass diese Nebensonne nur sekundär sei und von der inneren Nebensonne

[1] Comptes Rendus 1910 S. 693.

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY

hervorgerufen wäre. Die Entfernung wäre in diesem Falle 45°. Pernter hält beide Erscheinungsarten möglich „und kann es daher gewiss vorkommen, dass einmal die eine, das andere Mal die andere wirksam ist“ (S. 356). Man könnte also die Beobachtung VII so erklären, dass die östliche Nebensonne eine sekundäre war, dass aber die westliche von Eiskristallen mit vertikal brechenden Kanten von 90° hervorgerufen war. Die Zeichnung würde somit nur den Unterschied in der Entfernung übertreiben (und die Abweichung beider, vielleicht wegen der Knappheit des Papiers, im Verhältnis zu derjenigen der inneren Nebensonne, zu klein angeben). Es scheint aber sehr unwahrscheinlich, dass die verschiedenen Eiskristalle so unsymmetrisch verteilt wären, dass beide Erscheinungsarten gleichzeitig, aber auf verschiedenen Seiten der Sonne möglich wären. Vielleicht beruht die verschiedene Länge der „Wolkenbänder“ nur auf eine Augentäuschung (z. B. durch nahe Vergleichsobjekte in W, nicht in E).

o) Die Nebensonnen des Halo von 90° (N:o 5 u. 6 P. 290). Dieser Art waren offenbar die Nebensonnen in den Fällen I, II und VI. Auch in der Zeichnung Julins von 27. März 1783 kommt eine Nebensonne in der Mitte zwischen der Sonne und Gegensonne vor. Herr Biese hat die Nebensonnen, ebenso in dem Azimuthalabstand 90° von der Sonne gezeichnet und dieselben als elliptisch wie die meisten übrigen (2, 4, 8 u. 9) angegeben. Der andere Beobachter II in Kymmene zeichnet diese Sonnen etwas näher der Gegensonne als der Sonne, und misst man diesen Abstand auf der Zeichnung, so findet man denselben (d. h. den Azimuthalabstand, bei Pernter = D) zu 99°. Der Beobachter VI sah eine solche etwa in NNE nach der Zeichnung 108° von der Sonne. Der Wert II von 99 liegt also in der Mitte von den beiden übrigen (I = 90 und VI = 108) und kann somit als der wahrscheinlichste bezeichnet werden. Bravais (S. 159) kennt 5 Beobachtungen dieser Nebensonnen, aber von diesen nur eine rohe Messung von Mallet, welche 100° ergab. Pernter kann zwei Fälle von Sieberg und Odenbach zufügen, von diesen keine mit Messungen. Der von Bravais und Pernter angenomme hierfür erforderliche Strahlengang gibt D = 98°. Unser oben abgeleiteter Wert stimmt also sehr gut sowohl mit der Messung Mallets, wie mit der Theorie. Die Beobachter I und II geben diese Nebensonnen als weiss an, VI als hellblau, aber z. B. für den Horizontalkreis 16 dieselbe Farbe. Auch frühere Beobachter haben nicht die Brechungsfarben gesehen. Wie erwähnt, zeichnet der Beobachter II die östliche Sonne mit weissen Strahlen und dieselbe ist ebenso von VI als sternenförmig wie die übrigen Nebensonnen gezeichnet.

p) Die Gegensonne und die Nebengegensonnen (N:o 7, 8, 9 P. 256). Die Gegensonne (N:o 7) wurde in den Fällen I, II, III und V gesehen. Nur VI bezeichnet diese als regenbogenfarbig (vgl. Hevel nach P. S. 258). Pernter fand in 250 Jahren etwa 30 Beobachtungen dieser Sonne und 4 unter diesen mit Irisation. Biese gibt dieselbe rund an, übrige Zeichnungen sind unbestimmt.

Ausser den schon erwähnten Nebengegensonnen (vgl. **o.** N:o 5 u. 6) hat Biese auch weisse, solche näher der Gegensonne (8 u. 9) gezeichnet. In der ersten Zeichnung war der Abstand von 8 u. 9 zu 7 gleich gross wie die entsprechenden Abstände 1 zu 2 u. 3. Nach der obigen Schätzung wäre dieser also etwa 21 ° in Azimuth. Auf dem Modell findet man diesen Abstand 25 ° zu sein. Weiter hat der Beobachter III solche in 48°, und V in 58° Gegensonnenabstand gezeichnet. 7 Messungen eines solchen Nebensonnenabstandes gaben P. 55—61°, im Mittel 59°. In dem bekannten Petersburger-Phänomén kann man nach der Zeichnung Nebengegensonnen in etwa

49° Abstand von der Gegensonne messen.[1] B. hat 3 verschiedene Erklärungen von Nebensonnen in 60° Entfernung von der Gegensonne gegeben, aber P. verwirft diese und nimmt eine Erklärung von Mascart an. Die Beobachtung V stimmt also am besten mit den Messungen und der Theorie überein. Dagegen stimmt die Beobachtung III (D = 48°) am besten mit einer anderen von P. erklärten (S. 390) Nebensonne im Abstande 46° von der Gegensonne, besonders, da sowohl die Theorie als die Beobachtung Irisation ergibt. Auch Nebensonnen in etwa 36° Abstand von der Gegensonne haben Mascart und Pernter (S. 391) zu erklären versucht, aber keine sicheren Beobachtungen hierüber waren vorhanden (vgl. v).

q) Die schiefen Bogen der Gegensonne (N:o 23, 24, 25, 26 P. 257). Die Fig. I gibt 4 solche Bogen an, das eine Paar ist in III deutlich zu sehen und sicherlich ist die blattähnliche Figur oberhalb der Gegensonne in II als zwei solche Bogen anzusehen, obwohl sie hier oberhalb der Gegensonne sich schneidend gezeichnet sind. Offenbar hat der Beobachter V auch solche und die Gegensonne gesehen (vgl. oben). Nach I findet man den Winkel zwischen den äusseren gegen einander etwas konvex gekrümmten Bogen zu etwa 60°, wie es nach der Beugungstheorie Bravais sein soll. Diese Bogen stimmen etwa mit denjenigen in III überein. Das innere Paar gegen einander konkav in I bildet einen Winkel von nur etwa 20—30° und würde wohl dem mittleren lanzettartigen Blatt in II entsprechen. B. und P. erwähnen eine einzige Beobachtung (von Schult bei B. Fig. 139, bei P. 58), wo gleichzeitig 4 schiefe Bogen gesehen wurden, die äusseren mit einem Winkel von 110, die inneren von etwa 30—40° zwischen einander. Vielleicht wären die äussersten Bogen in N und W in Fig. II solche von etwa 120° Öffnungswinkel. Am nächsten liegt es wohl, die 3 Blätter in Fig. II alle als weniger genau gezeichnete schiefe Bogen durch die Gegensonne zu betrachten, so dass wir hier sämtliche sonst beobachteten 3 Bogenpaare mit etwa 30, 60 bzw. 120° zwischen den beiden Ästen gleichzeitig vor uns hätten.

r) Lichtsäulen und Kreuze (P. 259). Säulen von dem gewöhnlichen Aussehen sind nicht am 10. März beobachtet. Fig. VIII gibt jedoch eine Säule oberhalb der Sonne an, aber diese verbreitert sich nach oben und geht bis zur Berührungsstelle der Bogen 10 und 12. Hier ist die Breite beinahe zweimal diejenige der Sonne; aber unten sogar kleiner als die Sonnenbreite. Diese Säule ist gelb gezeichnet. Auch Biese hat dieselbe als einen oben von der Nebensonne 3 ausgehenden dort etwas breiteren Strahl gezeichnet, ganz ähnlich wie der entsprechende Teil des Horizontalringes. Schon P. erwähnt (S. 259), dass nach aussen verbreiterte Lichtsäulen beobachtet sind und erklärt diese (S. 399) durch Zusammenwirken von sekundären Halos der Nebensonnen 2 und 3. Diese Erklärung scheint hier nicht ganz befriedigend, da die Breite des Strahlenbündels erst oben in der Nähe des Halo 10 beträchtlicher wird. Vielmehr scheint es, als wären diese Säulen sekundär durch die obere Gegensonne 3 hervorgerufen. In der Zeichnung Julins (Fig. XIII) kann man aber das lang nach oben zugespitzte Lichtbündel als eine eigentliche Sonnensäule auffassen.

Ein deutliches Kreuz am E-Himmel beschreibt der Beobachter IX und sagt, dass in der Mitte ein Sonnenbild zu sehen war. Eine viertel Stunde später erschien ein ähnliches Kreuz mit einem Sonnenbild auf der S-Seite der Sonne. Man kann aber nicht wie Pernter die vertikalen

[1] Da P. hier 40° angibt, liegt wahrscheinlich ein Druckfehler vor.

Äste als gekrümmte Teile des Halos auffassen, denn der Beobachter sagt, dass die oberen und unteren Enden dieser Säulen erst später sich gegen einander krümmten. Noch deutlichere und längere Lichtsäulen nach oben und unten von den Nebensonnen 2 und 4 hat, wie erwähnt, Herr HURMALAINEN am 2. März gesehen und als blass bezeichnet. Da die Sonnenhöhe verhältnismässig gross (etwa 25°) war, kann man diese nicht als berührende Bogen auffassen. Vielleicht kann man auch diese als sekundäre Lichtsäulen der Nebensonnen ansehen. Die vertikalen Bogen in der Fig. 96 und 117 bei BRAVAIS sind die einzigen früher abgebildeten, welche hier am nächsten kommen, aber sie sind als seitliche Berührungsbogen erklärt. Durch ganz kurze Stücke von Haloerscheinungen sind wohl dagegen die viereckigen Formen der Nebensonnen in VI und die ovalen z. B. in VII u. s. w. entstanden. Der Beobachter I hat auch alle Bogenteile in der Nähe der Nebensonnen 2, 4, 8 und 9 stärker gesehen, so dass kreuzähnliche Bildungen entstanden.

s) Schiefer Nebensonnenring. (P. 261). Dieser ist die erste von den 6 Erscheinungen, welche PERNTER zu einer letzten Gruppe: „Abnormale, vereinzeltstehende Erscheinungen" zusammenfasste. Die eine vorhandene Beobachtung der betreffenden Art (s) ist nach P. eine von W. HALL am 18. Febr. 1796, wo der Ring durch den Mond ging und den Mondvertikal 180° vom Monde 40° niedriger traf. BRAVAIS führt hierher noch zwei Bogenpaare, beobachtet von LEA unterhalb der Sonne (B. Fig. 137). Bogen mit ganz entsprechenden Lagen kann man kaum in den Zeichnungen für den 10. März wiederfinden. Am nächsten kommen wohl die Bogen 19 in I und das schiefe Kreuz im W in Fig. II, aber weil die Art dieser Bogen noch ganz unbestimmt bleibt, führen wir dieselben besser zu einer Gruppe von neuen problematischen Gebilden.

t) Die seitlichen Berührungsbogen des Halo von 22° oder die schiefen Bogen von LOWITZ (P. 261). Am 10. März dürften keine Bogen dieser Art gesehen worden sein, aber es scheint als wären sicher solche am 23. März 1920 in Tammerfors vom Stadtgärtner O. KARSTEN gesehen. Sie entsprachen sehr gut denjenigen, welche BRAVAIS in Fig. 128 und 117 rechts abbildet. B. hat jedoch den ersten Fall anders erklärt (als Berührungsbogen des Halo von 46°), aber P. hat sie zu der behandelten Gruppe geführt[1] (vgl. P. S. 333).

u) Ringe mit abnormalen Radien (P. 262). Mit der Sonne konzentrische Ringe dieser Art dürften am 10. März nicht vorgekommen sein. Jedoch ist zu sagen, dass die in Beobachtung VII gesehene kleine Nebensonne 43, oberhalb der Sonne, als einen Teil eines solchen Ringes aufgefasst werden könnte. Nimmt man die Entfernung der gewöhnlichen Nebensonnen (2 u. 4) als etwa 22°an, so wäre der Abstand der kleinen Nebensonne nach der Zeichnung etwa 9°. Unter den extraordinären Halos, welche BESSON neulich zusammengestellt und erklärt hat, würde die von VAN BUIJSEN 8°40′ am besten mit diesem Wert stimmen. Der Bogen 41 in VIII (vgl. i) würde wiederum als ein berührender Bogen zu dem Halo von FEUILLEE (32—35°, vgl. Besson) aufzufassen sein. Nur nebenbei sei in diesem Zusammenhang auch an den kleinen in Dickursby beobachteten Bogen rechts von der Sonne und an den inneren Teil der Ellipse JULINS (vgl. Fig. XIII) erinnert. Auch sie könnten wohl möglicherweise tangierende Bogen zum

[1] Ähnliche Bogen hat SCHMIDT am 13. Febr. 1855 beobachtet, vgl. KNOCH K. in Abhandl. d. Preuss. Meteor. Inst. N:o 243. Mir scheinen diese Beobachtungen weniger gut mit der theoretischen Kurve (vgl. P. 328) übereinzustimmen.

[2] Comptes Reudus, 1920, N:is 6 et 10 p. 334 et 607.

kleineren Halo sein. Da in JULINS zweiter Zeichnung XIV 3 Halos vorkommen, ist einer zu dieser Gruppe zu rechnen.

v) Die Arctowski'schen Bogen (Bouguers Halo) (P. 267). Der Hauptbogen oder der Bouguer'sche Halo ist wahrscheinlich mit dem Bogen 22 in I identisch. Der Halbmesser ist offenbar, wie für die übrigen Halos zu klein gezeichnet, auf dem Modell zu etwa 25°. Würde man diesen Wert in demselben Verhältnis wie den richtigen Halbmesser des grossen Haupthalo von 46 zu dem Modellwert (31°) vergrössern, so würde man 37° erhalten. Dieser Wert ist ein am Ben Nivis gemessener und ein von PERNTER erklärter. (S. 394 u. 396). Nach P. hat man aber niemals Gegensonnen auf diesem Halo gesehen, aber hier hätten wir einen solchen Fall. Offenbar sind auch die Kreisteile, die in der Fig. III durch die Nebengegensonnen gehen und mit der Gegensonne konzentrisch gezeichnet sind, Teile desselben Bouguerschen Halos. Der Halbmesser ist hier aber (vgl. p) etwa 48°, etwa derselbe wie bei den Nebengegensonnen von LOVITZ. Die Nebengegensonnen in 46° Abstand sind ja auch erklärt, aber Halos durch dieselben, so viel ich weiss, nicht früher gesehen. Schliesslich könnte man mit gutem Willen auch die inneren Teile der beiden zugespitzen Bildungen in N und W Fig. VI als Teile eines schlecht aufgenommenen Halos ansehen, aber hier wäre der Halbmesser desselben nur etwa = 25°.

In der Beobachtung ARCTOWSKIS am 20. August 1898 (vgl. Fig. 78 bei P.), kamen aber ausser dem Haupthalo oder Bouguers Halo zwei seitliche gegen die ersten konvexe Bogen vor, die nach der Zeichnung etwa 60° von dem Vertikal der Gegensonne den Horizont trafen. P. betrachtet diese am nächsten als Berührungsbogen der Nebengegensonne von 60° Abstand, aber geht nicht näher auf diese ein, weil nur diese einzige Beobachtung ohne Messung vorlag. In unserer Sammlung vom 20. März finden wir einige Andeutungen zu Bogen derselben Art. Erstens haben wir in III zwei Bogen, welche durch die Nebensonnen gehen und dort den „Gegenhalo" schneiden. Nach der Zeichnung wären die Mittelpunkte dieser Bogen etwa 90° von den Hauptsonnen zu finden, die Bogen also als Halos um die hier nicht gesehenen Seitensonnen aufzufassen. Auch der Beobachter VI hat etwa an derselben Stelle Bogen gesehen, die in etwa 50° von der Gegensonne den Horizontalkreis trafen. Auch diese waren gegen die Gegensonne (hier nicht gesehen) konvex und trafen die konkaven schon erwähnten Bögen erst höher am Himmel, etwa halbwegs zum Zenith. Noch in einer dritten Beobachtung II könnte man das Bogenstück, das den Horizontalkreis in etwa 116° von der Gegensonne schneidet, als das andere Ende eines Halos, welcher die Seitensonnen in etwa 79 umgibt, auffassen. Das andere Ende würde also in etwa 42° von der Gegensonne zu suchen sein, also etwa dort, wo der Bouguersche Halo meistens endet. Würde man annehmen, dass auch in VI der betreffende Bogen die Nebengegensonne als Mittelpunkt hätte, so würden dessen Halbmesser nur etwa 22° sein. Die Werte 22, 37 und 42° sind also sehr verschieden, aber der Mittelwert 33° würde gut mit der Zeichnung ARCTOWSKIS übereinstimmen.

w) Ungewöhnliche Nebensonnen (P. 268). Nebensonnen dieser Art wurden nicht beobachtet, denn die ungewöhnlichen Nebensonnen des Halo von 46° (also 32, 33 und 42) rechnet PERNTER schon zur Gruppe **u**.

z) Aussergewöhnliche Spiegelungen (P. 270). So viel man weiss, kamen solche nicht vor.

Wir finden also, dass von den 23 Gruppen PERNTERS in diesem Falle möglicherweise 15 vertreten waren. Von den 8 Gruppen, die hier nicht vorkamen, sind übrigens 5 solche, die bei der Sonnenhöhe in dem behandelten Falle kaum auftreten können, in dem der elliptische Halo (Gruppe b PERNTERS) und LOVITZ' schiefer Bogen (t), die unteren berührenden Bogen g, k und l erst bei grösserer Höhe erscheinen. Nur der Halo mit etwa 90° Halbmesser (d) und andere aussergewöhnliche Halos mit kleinem Halbmesser nebst den Gruppen w und x waren diesma lnicht vertreten.

Aber es wurden auch mehrere Erscheinungen beobachtet, die, so viel ich weiss, nicht früher erwähnt sind. Dieses gilt von den weissen breiten Streifen 14 zwischen dem Bogen 13 und der Mitte des berührenden Bogens 12 in Fig. I. Andeutungen hierzu gibt auch die Beobachtung VIII an, in dem die gelbgefärbte Mitte von 12 hier sehr breit angegeben wurde. Früher unerwähnt dürften auch die von II und IV beobachteten Bogen 18 sein, wenigstens so wie der Beobachter IV diesen gezeichnet hat, indem derselbe nicht ein unterer seitlich berührender Bogen zu dem Halo 11 sein könnte. Neu sind weiter in der Beobachtung I die farbigen Bogen 28 und 29, welche die Nebensonnen 2 und 4 mit der Stelle der Nebensonne 42 verbinden. Es wäre möglich, dass diese sekundäre, von den Nebensonnen 4 und 2 hervorgerufene, grosse Halos waren. Die schiefen weissen Bogen 21 waren, wie erwähnt, auf der Halbkugel eingezeichnet, aber nicht von Herrn BIESE beobahtet, wesshalb wir diese nicht weiter behandeln. Die Bogen 37 und 38 in der Beobachtung III waren möglicherweise mit 21 oder 19 identisch, aber so eigentümlich gezeichnet, dass eine weitere Behandlung unmöglich wird. Der dritte Bogen 36 in derselben Beobachtung III kann, wie schon erwähnt, mit einem zircumzenithalen Kreis (20) identifiziert werden. Schliesslich sind die von Ingeniör HALL IV beobachteten eigentümlichen Verzweigungen des berührenden Bogens 12 nicht früher in der Litteratur erwähnt. Auch andere Beobachter haben in dieser Beziehung gleichartige Bildungen erwähnt, die weniger gut mit der geltenden Theorie des Bogens 12 übereinstimmen.

Als eine Übersicht und Zusammenfassung sind die beiden folgenden Verzeichnisse angeführt. Das erste gibt in kurzer Form eine Benennung der betreffenden Einzelerscheinungen, das zweite gibt für die behandelten und in den Figuren I—X dargestellten Beobachtungen alle wichtigere Daten an. Wir finden, dass in allem etwa 43 Einzelerscheinungen beobachtet wurden und von diesen hat ein einziger Beobachter Ingeniör E. A. BIESE 27 gesehen. Am allgemeinsten wurden die Nebensonnen 2 und 4 in etwa 23° Sonnenabstand, die beiden Haupthalos 10 und 11, deren obere Berührungsbogen 12 und 15 und der Horizontalkreis 16 gesehen. Soweit man feststellen kann, wurden 27 Gegenstände von wenigstens 2 Beobachtern gesehen.

Die Verzeichnisse gelten auch als Inhalts-Verzeichnisse, denn in A ist rechts die Seitenzahl angegeben, wo die Erscheinungen in den Gruppen PERNTERS eingereiht werden und in B ist unten angegeben, wo die 10 Beobachtungen näher referiert werden.

Verzeichnis der am 10. März 1920 beobachteten Einzelerscheinungen.

A. Die Art der Ersheinungen.

(Die Nummern 1—29 dieselben wie in Fig. I c.)

N:o		Gruppe Pernters
1	Die Sonne	—
2	Nebensonne in c:a 23° Sonnenabstand im W	m
3	„ „ „ „ „ oben	m
4	„ „ „ „ „ im E	m
5	„ „ „ 90° „ „ E	o
6	„ „ „ „ „ „ W	o
7	Gegensonne „ „ 108° „	p
8	Gegennebensonne im E von der Gegensonne	p
9	„ „ W „ „ „	p
10	Halo von c:a 23° Halbmesser	a
11	„ „ „ 46° „	c
12	Berührender Bogen zu Halo 23° oben (10)	f
13	Obere Grenze des Feldes 14.	—
14	Durch weisse Streifen beleuchtetes Feld in der Mitte der Einbuchtung von 12	—
15	Berührender Bogen zu Halo 46°, oben (11)	h
16	Horizontalkreis durch die Sonne	e
17	Vertikale Lichtsäule oberhalb der Sonne	r?
18 e	Gegen die Sonne konvexer Bogen von 16 nach unten im E	—
18 w	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ W	—
19 e	Bogen schief nach oben von dem Schnittpunkte 11—16 im E	s?
19 w	„ „ „ „ „ „ „ „ „ W	s?
20	Zweiter Horizontalkreis ,	i
21 e	Schiefer, weisser Bogen schneidend 16 in der Nähe von 5	—
21 w	„ „ „ „ „ „ „ „ „ 6	—
22	Halo Bouguers um die Gegensonne 7	v
23	Schiefer, äusserer Bogen durch die Gegensonne im W	q
24	„ „ „ „ „ „ „ E	q
25	„ innerer „ „ „ „ „ E	q
26	„ „ „ „ „ „ „ W	q
27	Dritter Horizontalkreis	i
28	Bogen vom Berührungspunkte 11—15 (=42) zu 2	—
29	„ „ „ 11—15 (=42) „ 4	—

N:o 1.

30	Ausserster Gegensonnenbogen in Fig. II im E	q?
31	„ „ „ „ „ „ W	q?
32	Nebensonne in c:a 46° Sonnenabstand im E	n
33	„ „ „ „ „ „ W	n
34	Ring umgebend die Nebensonne 6	v
35	„ „ „ „ 5	v
36	Der äussere Bogen in III oberhalb der Gegensonne 7 (vgl. = 20)	—
37	„ „ „ „ „ im E	—
38	„ „ „ „ „ „ W	—
39	Teile von einem Ringe mit dem Zentrum bei 2	—
40	„ „ „ „ „ „ „ „ 4	—
41	Zircumzenithaler Bogen in VIII (vgl. = 20)	l
42	Nebensonne in c:a 46° Sonnenabstand oben	n
43	Leuchtender Fleck oberhalb der Sonne in VII	u?

B. Die Beobachtungsorte, die Beobachter und die Gegenstände der Beobachtung.

(+ = beobachtet, — = nicht beobachtet, f = farbig, w = weiss.)

Figur	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		
Ort	Kuusankoski	Kuusankoski	Sippola	Kaipiainen	Kotka	Walkeala	Lovisa	Somero	Orimattila	Hausjärvi		
Länge v. Gr.	26° 39′	26° 39′	26° 59′	27° 6′	26° 56′	26° 47′	26° 14′	23° 31′	25° 46′	24° 50′		
Breite	60 54	60 54	60 44	60 54	60 28°	60 57	60 28	60 37	60 49	60 48		
Beobachter	Biese	Suursalmi	Hyttinen	Hall	Kukkola	Sammallahti	Gössling	Sorma	Kantola	Aro	Zahl	No
Zeit	8.30	8-11.30	8.30-9.30	10.30	9.30	8.30-10.20	8.50	7.20-7.40	8.20-9.5	8-11	d	
Sonnenhöhe	13°	19°	15°	22°	18°	18°	15°	7°	14°	22°	Beob.	
2	+ ellipt.	+ f, rund	+ f	+ f	+	+ f Sterne	+ f	+ f	+	+	10	2
3	+ rund	+ f, „	—	+ f	+	—	—	—	—	+	5	3
4	+ ellipt.	+ f, „	+ f	+ f	+	+ f „	+ f	+ f	+	+	10	4
5	+ „	+ w,m.Strahl.	—	—	—	—	—	—	—	—	2	5
6	+ „	+ w rund	—	—	—	—	—	—	+?	—	3?	6
7	+ rund	+ w „	+ f	—	+	—	—	—	—	—	4	7
8	+ ellipt.	—	+ f	—	+	+ oder 5	—	—	—	—	4	8
9	+ „	—	+ f	—	+	—	—	—	—	—	3	9
10	+ f	+ f	+ f	+ f	+ f	—	+ f	+ f	+	+	9	10
11	+ f	+ f	+ f	+ f	+ f	+ f	—	+ f	+?	+	9?	11
12	+ f	+ f	+ f	+ f zirkumzen.	+ f	+? f, eigentüml. Form	+ f	+ f	+ schief	+	10	12
13	+ w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	13
14	+ breite w. Str.	—	—	—	—	—	—	+?	—	—	2?	14
15	+ sehr breit	+ f	+ f	+ f	+ f	+ f	—	(+ später zugef.)	+ schief	+	9	15
16	+ w	+ f	+ w	+ w	+ w	+ w	+. w	(+ nur Schweif)	+ teilweise	+	10	16
17	+ unter 3	—	—	—	—	—	—	+	—	—	2	17
18 e	— nur auf dem Modell	+ f	—	+ f	—	—	—	—	—	—	2	18 e
18 w	— nach V. Krohn	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	18 w
19 e	+ w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	19 e
19 w	+ w	(+)? ein Stück	—	—	—	—	—	—	—	—	2?	19 w
20	+ teilweise	vielleicht = 34	—	—	—	—	—	—	—	—	1	20
21 e	— nur auf	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	21 e
21 w	— dem Modell	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	21 w
22	+ w	—	+ w	—	—	+?	—	—	—	—	3?	22
23	+ w	+ w	+ w	—	mögl.	—	—	—	—	—	3	23
24	+ w	+ w	+ w	—	licher.	—	—	—	—	—	3	24
25	+ w	+ w	—	—	wei	—	—	—	—	—	2	25
26	+ w	+ w	—	—	se	—	—	—	—	—	2	26
27	+ w im NW	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	27
28	+ f	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	28
29	+ f	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	29
30	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	1	30
31	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	1	31
32	—	—	+	—	+	—	+ w ellipt.	—	—	+	4	32
33	—	—	+	—	+	—	+ w „	—	—	+	4	33
34	—	(+)?	+ w	—	—	+?	—	—	—	—	3?	34
35	—	—	+ w	—	—	+?	—	—	—	—	2?	35
36	—	—	+ w	—	—	—	—	—	—	—	1	36
37	—	—	+ w	—	—	—	—	—	—	—	1	37
38	—	—	+ w	—	—	—	—	—	—	—	1	38
39	—	—	—	+ f	—	—	—	—	—	—	1	39
40	—	—	—	+ f	—	—	—	—	—	—	1	40
41	—	—	—	—	—	—	—	+ f	—	—	1	41
42	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	1	42
43	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—	1	43
Gesamtzahl	27	20	20	11	13 +	10	8	10	8	11	138	
Beschreibung Seite:	4	6	6	7	7	8	8	8	9	9		

Über Fig. XI—XIV vgl. S. 11.

Beilage.

Als Beilage werden hier 2 Tabellen angeführt. Die erste enthält die Jahressumme der Sonnen-(⊕) und Mondhalos ☋, der Sonnen-(⏀) und Mondkränze (☋) in Helsingfors 1882—1919 und in Fredriksberg Ilmala (Drachenstation) 1911—1919. Die zweite gibt den jährlichen Gang derselben Erscheinungen im Mittel für 20, bzw 9 Jahren an.

Zahl der Tage mit ⊕, ☋, ⏀ und ☋ in Helsingfors und Fredriksberg, Ilmala.

Helsingfors

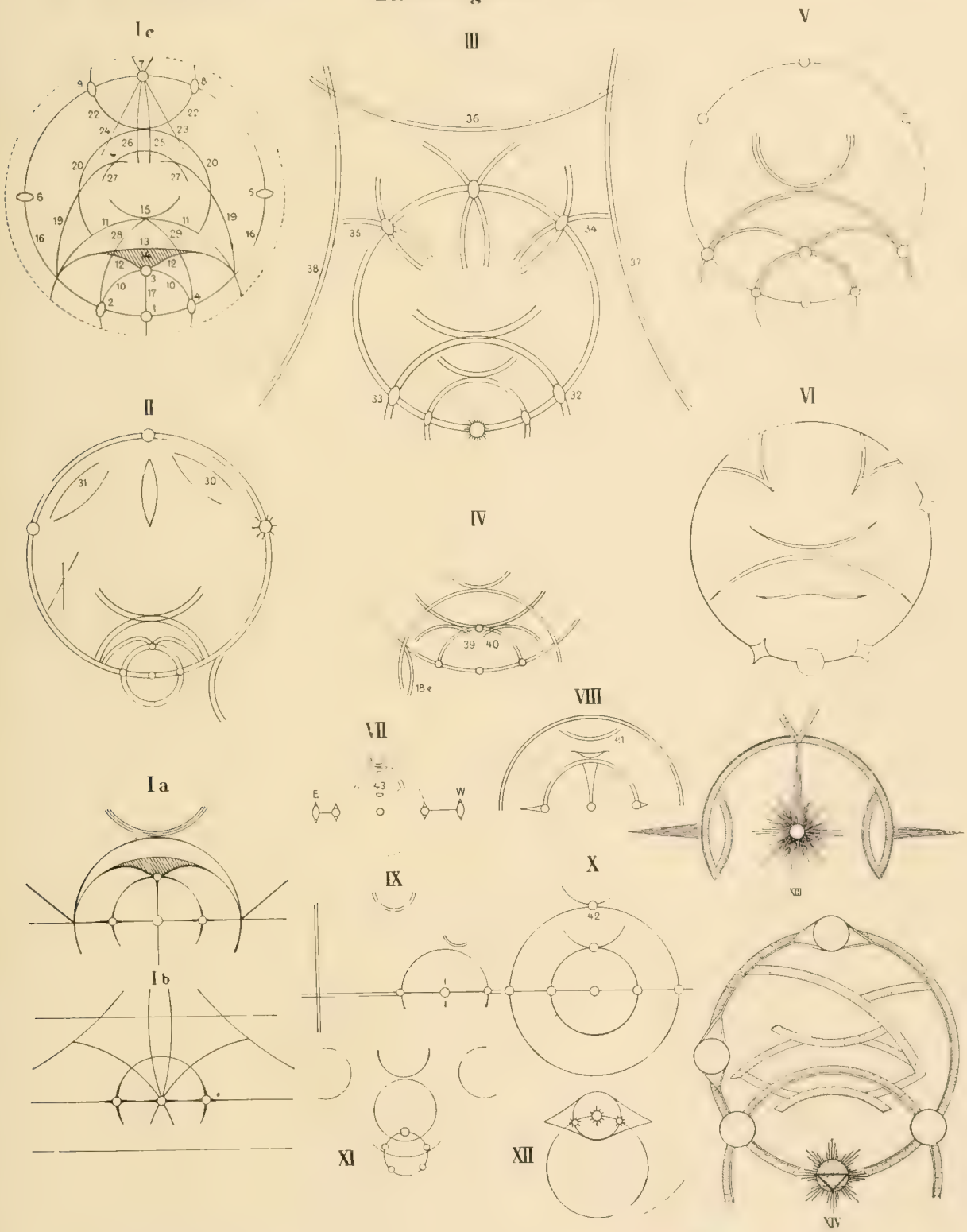
Jahr	⊕	☋	⏀	☋	Jahr	⊕	☋	⏀	☋
1882	0	4	0	5	1897	29	3	1	12
83	0	19	0	1	98	15	12	0	4
84	0	15	0	1	99	21	11	1	20
85	0	25	1	3	1900	24	6	2	17
86	3	8	0	5	01	19	8	1	13
87	6	22	0	6	02	36	5	0	19
88	4	14	0	7	03	6	5	12	15
89	4	7	0	9	04	18	2	0	17
90	1	12	0	27	05	17	4	1	14
91	4	14	0	31	06	26	8	0	13
92	16	8	1	17	07	11	1	0	14
93	20	7	2	27	08	39	7	1	20
94	25	13	0	49	09	65	9	19	28
95	17	10	1	19	10	51	5	8	17
1896	21	8	0	25	1911	36	4	4	29

	Helsingfors					Fredriksberg			
1911	36	4	4	29	1911	59	10	12	19
12	15	7	3	17	12	37	4	0	7
13	12	2	6	4	13	14	2	0	9
14	7	3	3	0	14	9	4	0	3
15	28	1	1	8	15	39	3	0	4
16	47	8	0	3	16	71	12	0	11
17	37	7	0	6	17	76	12	3	21
18	17	3	0	2	18	65	9	0	16
1919	4	3	0	0	1919	30	7	1	15
Mittel 1911—19	23.7	4.2	1.9	7.7		44.4	7.0	1.8	11.7

Jährlicher Gang der Zahl der Tage mit ⊕, ☋, ⏀ und ☋.

		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	Jahr
Helsingfors 1892—1911	⊕	0.4	1.0	2.2	2.9	**5.0**	4.4	2.9	3.0	2.0	1.0	0.6	0.2*	25.6
	☋	0.6	**1.1**	**1.1**	0.7	0.1	0.0*	0.0*	0.4	0.4	0.7	**1.1**	0.6	6.8
	⏀	0.0	0.0	0.2	**0.5**	0.3	0.4	0.2	0.4	**0.5**	0.2	0.0	0.0	2.7
	☋	**3.6**	2.6	2.4	1.5	0.8	0.0*	0.0*	0.5	1.0	1.8	3.1	2.8	20.0
Fredriksberg 1911—19	⊕	2.3	2.6	4.2	**7.1**	6.9	**7.1**	3.6	5.1	3.2	1.3	0.3*	0.7	44.4
	☋	1.1	1.2	0.9	0.7	0.4	0.0	0.0	0.1	0.6	0.8	0.8*	0.4	7.0
	⏀	0.1	0.2	0.1	0.0	0.1	0.3	**0.4**	**0.4**	0.0	0.0	0.0	0.0	1.8
	☋	**2.7**	1.8	1.3	1.0	0.0*	0.0*	0.0*	0.3	0.7	1.0	1.6	1.3	11.7

Die Haloerscheinung am 10. März 1920 nach den Beobachtern I—X und 4 ältere Zeichnungen XI—XIV.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 2.

LÖSNINGARS OPTISKA EGENSKAPER

EN HYPOTES RÖRANDE BYGGNADEN AV ELEKTROLYTERNAS MOLEKYLER

AV

JARL A. WASASTJERNA

(TRYCKT PÅ FÖRORD AV HERRAR L. W. ÖHOLM OCH HJ. TALLQVIST)

HELSINGFORS 1920
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI A.-B.

Inledning.

Den experimentella delen av föreliggande undersökning utgöres av bestämningar av brytningsexponenten och tätheten för vattenlösningar av en rad organiska salter, kalium- och natriumklorid samt oxalsyra. Flertalet undersökningar äro utförda vid två olika temperaturer samt vid varje temperatur för tre olika ljusvåglängder. På försöksresultaten äro vidlyftiga beräkningar baserade, vilka avse att giva kunskap om de lösta salternas molekylarrefraktion för olika våglängder samt dess beroende av lösningarnas koncentration och temperatur. Synnerlig vikt är fäst vid framställandet av möjligast rena substanser samt vid bestämmandet av lösningarnas koncentration.

Arbetet sin helhet har till ändamål att söka förklaringen till de åtminstone skenbart varandra motsägande resultat rörande dissociationens inverkan på lösta elektrolyters optiska egenskaper, till vilka tidigare författare ansett sig hava kommit. Vid min undersökning har jag icke letts av några förutfattade åsikter angående var förklaringsgrunden stode att söka, utan har det experimentella arbetet verkställts endast i den övertygelsen, att, såvida en åsyftad grad av noggrannhet kunde uppnås, fakta med all sannolikhet komme i dagen, som skulle belysa ovan antydda egendomliga sakförhållanden.

Jag vill ytterligare framhålla, att jag ansett ett i denna riktning gående försök vara av betydelse, enär den av de ovannämnda motsättningarna åstadkomna osäkerheten på detta spektrokemiska gebit verkat synbart hämmande på dess vidare utveckling.

Mina förhoppningar ha även i viss mån gått i uppfyllelse. Samtidigt har genom föreliggande undersökning vunnits resultat av allmänt intresse rörande byggnaden av elektrolyternas molekyler. De avvikelser från massverkningslagen, som uppträda i samband med de starka elektrolyternas dissociation, kunna i princip väntas. En närmare matematisk och experimentell undersökning av härmed sammanhängande frågor vore av största intresse

formel (1), som Lorenz härlett. Likheten har senare på enklare sätt härletts av Sagnac (*152*) med stöd av Clausius-Thomsons teori för dielektrika. Såväl Lorentz som Sagnac antaga, i likhet med Lorenz, att molekylerna äro klotformiga.

Likheten (1) innebär, att uttrycket $(n^2-1):(n^2+2)$ är proportionellt mot mängden substans per volymenhet. Består substansen av en blandning av m olika slag av molekyler, leder härledningen till den allmännare formeln

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_{h=1}^{m} g_h F_h, \tag{4}$$

där $g_1 \dots g_m$ beteckna massan av de olika komponenterna per volymenhet, och där $F_1 \dots F_m$ äro konstanter, som karakterisera de olika ämnena. Vi observera att

$$\sum_{h=1}^{m} g_h = d.$$

Innebörden av konstanterna inser man genom att sätta

$$g_1 \dots g_{h-1},\quad g_{h+1} \dots g_m = 0.$$

Vi finna

$$\frac{n_h^2-1}{n_h^2+2}\cdot\frac{1}{d_h} = F_h.$$

Av betydelse är, att enligt härledningen F_h betecknar summan av elementarsferernas volymer i ett gram av substansen i fråga. Formeln kan utvidgas till kemiska föreningar. Antagande att en molekyl med molekylarvikten M består av $\alpha_1 \dots \alpha_m$ atomer med atomvikterna $A_1 \dots A_m$, och att således

$$M = \sum_{h=1}^{m} \alpha_h A_h,$$

finner man med stöd av (4)

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{M}{\sum_{h=1}^{m} g_h} = \sum_{h=1}^{m}\left(M\cdot\frac{g_h}{\sum_{h=1}^{m} g_h}\cdot F_h\right).$$

Men

$$\frac{M g_h}{\sum_{h=1}^{m} g_h} = \alpha_h A_h,$$

och om vi ytterligare beteckna konstanten F för den ifrågavarande substansen med F_M, finna vi alltså

$$M F_M = \sum_{h=1}^{m} \alpha_h A_h F_h. \tag{5}$$

»Molekylarrefraktionen» $M F_M$ sammansättes således additivt av »atomrefraktionerna» $A_h F_h$. Vi kunna enligt föregående giva detta resultat en enkel tolkning. $M F_M$ betecknar den

faktiska volymen av en grammolekyl, $A_h F_h$ den faktiska volymen av en gramatom. Alltså: en molekyls volym utgör summan av de i densamma ingående atomernas volymer.

§ 3. Definition av begreppet molekylarrefraktion. Av det sagda framgår, att enligt de nämnda teorierna en funktion av n, nämligen $\frac{n^2-1}{n^2+2}$, besitter en rad anmärkningsvärda egenskaper. Innan vi gå vidare, vilja vi definiera några begrepp, som formellt förenkla de följande resonemangen. Vi ersätta i likheterna (1), (4) och (5) expressionen $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ med en tills vidare okänd funktion av n, som vi beteckna $\varphi(n)$. Denna funktion definiera vi icke genom något analytiskt uttryck, utan genom att den satisfierar de nämnda likheterna, nämligen

$$\varphi(n) = F d, \tag{1 a}$$

$$\varphi(n) = \sum_{h=1}^{m} g_h F_h, \tag{4 a}$$

$$\frac{M}{d}\varphi(n) = \sum_{h=1}^{m} a_h A_h F_h. \tag{5 a}$$

Dessa likheter skola uppfyllas även för ljus av ändlig våglängd, och konstanterna F bero endast av våglängden och ämnets kemiska natur, men icke av temperatur eller aggregationstillstånd, så länge de betraktade substanserna äro homogena och isotropa, samt sådana komplikationer som association, polymerisation, dissociation etc. icke förekomma. Beträffande likheten (5 a) förutsättes ytterligare, att molekylen är enkelt byggd och icke innehåller dubbelbindningar, tredubbelbindningar eller ringar. Vi införa benämningarna $\varphi(n) =$ den absoluta refraktionsförmågan, $F(n, d) = \frac{\varphi(n)}{d} =$ den specifika refraktionsförmågan, $R(M, n, d) = M F =$ molekylarrefraktionen och $R(A, n, d) = A F =$ atomrefraktionen.

Förutsatt att funktionen $\varphi(n)$ existerar, gälla alltså följande lagar:

a) Den specifika refraktionsförmågan och molekylarrefraktionen äro oberoende av temperatur och aggregationstillstånd.

b) Den absoluta refraktionsförmågan för en blandning sammansättes additivt av termer, representerande produkten av de olika komponenternas specifika refraktionsförmåga och massa per volymenhet.

c) Molekylarrefraktionen sammansättes additivt av atomrefraktionerna.

Det är tydligt, att existensen av funktionen $\varphi(n)$ icke är bevisad eller kan axiomatiskt antagas, men ur den långa rad av experimentella undersökningar, som på detta område utförts, börjande med Biots och Aragos kända arbeten år 1806 (*12*), har det framgått, att flere med varandra nära besläktade funktioner av ljusbrytningsexponenten n approximativt uppfylla de likheter, som definiera φ. De ovan nämnda teorierna, vilka äro av stor betydelse som hjälphypoteser, förklara detta sakförhållande, men de basera sig på antaganden, vilka icke stå i överensstämmelse med den moderna uppfattningen av atomens byggnad, med vilken uppfattning däremot den på elektronteorin grundade disper-

sionsteorin, till vilken vi nu övergå, väl kan förenas, och som för övrigt långt fullständigare än de tidigare teorierna förmår förklara hithörande fakta.

§ 4. Dispersionsteorin. Dispersionsteorin, som stöder sig på de Maxwell'ska likheterna i den speciella form, som de antaga för en omagnetiserbar homogen isolator, hänför den elektriska polarisationen till en förskjutning av de bundna elektronerna. Dispersionen förklaras genom antagandet av egensvängningar hos elektronerna. — Tanken, att dispersionsfenomenen kunna förklaras genom smådelars egensvängningar var för övrigt icke ny, den framfördes redan av Fresnel och Cauchy. Sellmeier (*161—163*), Ketteler (*102—105*) och Helmholtz (*89*) uppställde sedermera, utgående från antagandet av egensvängningar hos små partiklar i det ljusbrytande mediets molekyler sina dispersionsteorier. Genom Lorentz' (*122*), Koláčeks (*106—107*), Goldhammers (*82*), Helmholtz' (*90—91*) och Eberts (*54*) arbeten ställdes teorin på elektromagnetisk grund. Teorin i dess moderna form är en skapelse av Lorentz (*122—123*), Planck (*135—138*) och Drude (*51—52*).

Drudes teori är den enklaste. Drude identifierar fältstyrkan i etern med ljusvågens elektriska fältstyrka. Emellertid antar självfallet fältstyrkan i närheten av en elektron (i denna benämning innefatta vi här för korthetens skull även de positiva kärnorna) mycket höga värden, och om alltså de olika elektronerna besitta olika egensvängningsperioder, varigenom deras relativa läge oavbrutet förändras, måste hänsyn tagas till att en given elektron befinner sig i det av de övriga elektronerna alstrade elektriska fältet.

Lorentz och Planck beakta detta. Plancks teori skiljer sig från Lorentz', likasom från alla andra dispersionsteorier, genom antagandet av strålningen som enda orsak till den på elektronerna verkande dämpningen. Formellt taget är det emellertid för dispersionsteorin likgiltigt, varav dämpningen antages bero. Den strängare teorin är ännu icke utvecklad för flere rörliga elektronsystem, — den bleve i sådant fall mycket komplicerad. Man kan emellertid komma till rätta med att betrakta blott ett elektronsystem som rörligt, under förutsättning att den använda ljusvåglängden icke kommer för nära någon egensvängning, samt ligger väsentligt närmare de ultravioletta svängningsperioderna än de ultraröda. Därvid kunna de ultraviolett svängande elektronerna sammanfattas till ett enda system med ett visst medelsvängningstal, motsvarande våglängden λ_0 i tomrummet, medan elektronerna eller jonerna med ultraröd period kunna betraktas som orörliga.

Den Drude'ska och den Lorentz-Planck'ska teorin sammanfattas i likheten (*1*, II, p. 250).

$$\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{3}+s=\frac{\pi m e^2}{N' p e^2}\left(\frac{1}{\lambda_0^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right), \qquad (6)$$

där n = brytningsexponenten, s = en konstant, som bestämmer summan av de en given molekyl och dess elektroner påverkande yttre krafter, som utgå från de närliggande molekylernas elektroner, c = ljusets hastighet i tomrummet, N' = antalet molekyler i volymenheten, λ = den använda ljusvåglängden, medan betydelsen av λ_0 tidigare klargjorts. Vidare betecknar e elektronens laddning i elektrostatiska enheter, m dess massa och p elektronernas antal i en molekyl.

Vi behandla här först den Lorentz-Planck'ska teorin, enär den enklare Drude'ska teorin står i närmare samband med de frågor, som skola beröras i nästa §.

Teorin bör gälla för alla optiskt isotropa ämnen. Optiskt anisotropa ämnen komma icke i betraktande, enär teorin stöder sig på antagandet, att en monokromatisk ljusstråle i den ifrågavarande substansen i alla riktningar fortplantar sig med samma hastighet. Men även för optiskt isotropa kristaller måste man antaga, att konstanten $s \neq 0$, varav följer, att någon funktion $q\,(n)$, som samtidigt exakt uppfyller villkoren (1 a), (4 a) och (5 a) icke existerar för kroppar med ordnad molekylarstruktur.

För gaser och vätskor åter, i vilka molekylerna äro fritt rörliga, kan man med Planck antaga $s = 0$. Ur likheten (6) erhålles då efter en enkel omformning

$$\frac{M}{d}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N p e^2}{3\pi m c^2}\cdot\frac{\lambda_0^2}{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}, \tag{7}$$

där N = antalet molekyler i en grammolekyl. För en kemisk förening bestående av $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ atomer med atomvikterna $A_1 \ldots A_m$ gäller, om elektronerna antagas bundna vid sina atomer, och deras svängningstal icke vid den kemiska föreningen undergå förändringar (jfr. *123*, pag. 149), likheten

$$\frac{M}{d}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_{h=1}^{m}\frac{N\alpha_h p_h e_h^2}{3\pi m_h c^2}\cdot\frac{\lambda_h^2}{1-\left(\frac{\lambda_h}{\lambda}\right)^2} = \sum_{h=1}^{m}\alpha_h A_h F_h. \tag{8}$$

Vi hava påpekat, att vid härledningen av likheten (7) alla ultraviolett svängande elektroner i molekylen sammanfattats till ett system med ett visst medelsvängningstal, motsvarande våglängden λ_0. Enligt (8) är detta icke nödvändigt. Vi måste endast sammanfatta de i varje atom ultraviolett svängande elektronerna till ett system med ett visst medelfrekvenstal.

För en blandning av m molekyler gäller analogt likheten

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \sum_{h=1}^{m}\frac{N_h' p_h e_h^2}{3\pi m_h c^2}\cdot\frac{\lambda_h^2}{1-\left(\frac{\lambda_h}{\lambda}\right)^2} = \sum_{h=1}^{m} g_h F_h, \tag{9}$$

där då N_h' är antalet molekyler av slaget h i volymenheten. Enligt (8) kan varje term vidare utvecklas som en summa. Summationen (9) kan således utsträckas även till de olika atomerna i en blandning av molekyler.

Den Planck-Lorentz'ska teorin leder alltså till slutsatsen, att funktionen $q\,(n)$ existerar, samt

$$q\,(n) = \frac{n^2-1}{n^2+2}.$$

Formlerna (7—9) äro naturligtvis icke exakt riktiga. Oss intresserar speciellt riktigheten av likheten (9). Vi kunna enligt teorin antaga, att likheten (9) gäller med minst samma grad av noggrannhet som likheten (8), så länge icke några komplikationer vid bland-

ningen resp. lösningen uppkomma. Till sådana kunna vi omvänt sluta, om och endast om avsevärda avvikelser från likheten (9) förekomma.

Vi övergå till Drudes teori. Drudes antagande leder till $s = -1/3$. Därigenom försvinner nämligen i den Lorentz'ska härledningen den term, som representerar det i varje givet ögonblick av elektronerna alstrade elektriska fältet. Drudes teori leder till fullkomligt samma likheter (7—9) som ovan, med undantag av att den absoluta refraktionsförmågan $q(n)$, som i Lorentz' och Plancks formler är $(n^2-1):(n^2+2)$, enligt Drude erhåller utseendet $(n^2-1):3$. Men enligt Drude kan summan (8) utsträckas över de skilda elektronerna i atomerna.

§ 5. De svängande partiklarnas massa. Enligt Drudes teori gäller, som av vad ovan sagts följer, för en molekyl likheten

$$n^2 - 1 = \sum \frac{N' p_h e_h^2}{\pi m_h c^2} \cdot \frac{\lambda_h^2}{1 - \left(\frac{\lambda_h}{\lambda}\right)^2}, \tag{10}$$

således även

$$n^2 = 1 + \sum \frac{N' p_h e_h^2 \lambda_h^2}{\pi m_h c^2} + \sum \frac{N' p_h e_h^2 \lambda_h^2}{\pi m_h c^2} \cdot \frac{\lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2}, \tag{11}$$

och vidare[1])

$$n^2 = a + \frac{a_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{a_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \cdots, \tag{12}$$

där

$$a = 1 + \sum \frac{N' p_h e_h^2 \lambda_h^2}{\pi m_h c^2} \tag{13}$$

och

$$a_h = \frac{N' p_h e_h^2 \lambda_h^4}{\pi m_h c^2} = \frac{N' p_h e_h'^2 \lambda_h^4}{\pi m_h}, \tag{14}$$

där laddningen e' nu är uttryckt i elektromagnetiska enheter. Av (14) följer vidare

$$\alpha_h = \frac{a_h}{\lambda_h^4} = \left(\frac{N' p_h e_h'}{\pi}\right) \frac{e_h'}{m_h}. \tag{15}$$

Av stort intresse är, att konstanten α_h, som beräknas enligt (15) ur de experimentellt bestämda konstanterna a_h och λ_h i likheten (12), för de ultraröda perioderna erhållar ett

[1]) Ketteler-Helmholtz' dispersionsformel

$$n^2 = 1 + \frac{b_1 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{b_2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{b_3 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \cdots$$

är endast en annan form av (12), vilket omedelbart inses med stöd av likheten (10).

värde av annan storleksordning än för de ultravioletta perioderna. Ur dispersionsformeln (7) kan omedelbart för enkla gaser som väte och helium (där $p = 1$ resp. $p = 2$) den specifika laddningen för de ultraviolett svängande partiklarna beräknas. Därvid erhåller man det värde, som är karakteristiskt för de fria elektronerna, varav följer att de ultraviolett svängande partiklarna utgöras av elektroner. Enligt likheten (15) finner man då, att massan hos de ultrarött svängande partiklarna är av samma storleksordning som atomernas massa. Det är därmed klart, att de ultraröda svängningarna antingen utföras av positivt laddade atomkärnor eller av positivt eller negativt laddade atomer, atomdelar eller atomkomplexer (joner).

§ 6. *De ponderabla partiklarnas svängningstal.* Den tidigare anförda formeln (10) har utseendet

$$n^2 = 1 + \sum \frac{N' p_h e_h^2}{\pi m_h c^2} \cdot \frac{\lambda_h^2}{1 - \left(\frac{\lambda_h}{\lambda}\right)^2}.$$

Vi uppdela de svängande partiklarna i två grupper, nämligen de p_v ultraviolett svängande elektronerna med massan m_v, laddningen e_v och ett medelsvängningstal, motsvarande våglängden λ_v, samt de p_r ultrarött svängande ponderabla partiklarna med laddningen e_r, massan m_r och ett medelsvängningstal, motsvarande våglängden λ_r. Vi erhålla så likheten

$$n^2 = 1 + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^2} - \frac{N' p_r e_r^2}{\pi m_r c^2} \cdot \lambda^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^2}. \qquad (16)$$

Enär vidare λ_r är ett litet tal i förhållande till λ och λ ett litet tal i förhållande till λ_v gälla likheterna

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^2} = 1 + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^4 + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^6 + \cdots \qquad (17)$$

och

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^2} = 1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^4 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^6 + \cdots \qquad (18)$$

Enligt likheterna (16—18) finna vi således

$$n^2 = 1 + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} \cdot \frac{\lambda_v^2}{\lambda^2} + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} \cdot \frac{\lambda_v^4}{\lambda^4} + \cdots$$

$$- \frac{N' p_r e_r^2}{\pi m_r c^2} \cdot \lambda^2 - \frac{N' p_r e_r^2}{\pi m_r c^2} \cdot \frac{1}{\lambda_r^2} \cdot \lambda^4 - \cdots, \qquad (19)$$

eller, i det vi bortlämna termerna av högre ordning och införa förenklade beteckningar, vilkas betydelse omedelbart framgår av likheten (19)

$$n^2 = A' \lambda^2 + A + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^4} + \cdots \qquad (20)$$

I den synliga delen av spektrum, där λ^2 är ett litet tal, kan dispersionen enligt (20) approximativt återgivas genom likheten

$$n^2 = A + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^4}. \tag{21}$$

I det vi återgå till likheten (16), finna vi dielektricitetskonstanten

$$\varepsilon = \lim_{\lambda = \infty} n^2 = 1 + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} + \frac{N' p_r e_r^2 \lambda_r^2}{\pi m_r c^2}, \tag{22}$$

men enligt (19) och (20) är

$$A = 1 + \frac{N' p_v e_v^2 \lambda_v^2}{\pi m_v c^2} \tag{23}$$

och

$$A' = \frac{N' p_r e_r^2}{\pi m_r c^2} \tag{24}$$

och således enligt (22-24)

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{\varepsilon - A}{A'}}. \tag{25}$$

Vatten utgör ett gott exempel på substanser, för vilka en stor differens mellan ε och A förefinnes. I själva verket har vatten ett absorptionsgebit i ultrarött, vilket på ett tillfredsställande sätt svarar mot våglängden λ_r beräknad ur likheten (25).

Enligt dispersionsteorin kunna vi således bevisa, att i molekyler ponderabla elektriskt laddade partiklar utföra bestämda egensvängningar, vilkas svängningstal kunna beräknas och experimentellt bestämmas. Återstår frågan: utföras dessa svängningar av laddade atomer eller atomkomplexer (joner) eller atomdelar (t. ex. kärnor).

§ 7. De ponderabla partiklarnas natur. I en tvåatomig molekyl utföra de två kärnorna bestämda egensvängningar mot varandra. Till beviset härför återkomma vi senare. Man kunde tänka sig, att alla atomernas ursprungliga elektroner deltaga i dessa svängningar på sådant sätt, att kärnorna och elektronerna svänga som elektriskt neutrala system, eller att de båda atomerna för molekylens sammanhållning avstått samma antal elektroner, vilka allmänt uttryckt samtidigt tillhöra båda kärnorna. I en sådan molekyl utföras de ifrågavarande svängningarna av två laddade system med samma positiva laddning. Ett elektriskt växelfält påverkar icke svängningarna i molekyler, byggda på någotdera av ovan angivna sätt. För att de av ponderabla system i en tvåatomig molekyl utförda egensvängningarna skola kunna optiskt konstateras, måste sålunda de båda svängande systemen äga algebraiskt olika stora laddningar. En på detta sätt byggd molekyl kan man för korthetens skull säga bestå av joner, men det bör genast påpekas, att begreppet jon, enligt denna definition, är rätt tänjbart, i det att av joner bestående molekyler kunna tänkas uppbyggda på väsentligen olikartade sätt. I själva verket innebär denna benämning endast förekomsten av assymmetri hos de elektriska laddningarna. I fleratomiga t. ex. organiska molekyler är en sådan assymmetri a priori att betrakta såsom förhanden, och dessa molekyler uppvisa sålunda genomgående absorptionsband i ultrarött.

Vi vilja i det följande först egna några ord åt gaserna. Enligt kvantumteorin (*56*) kan man med kännedom om specifika värmet för en tvåatomig gas vid olika temperaturer lätt beräkna de ponderabla systemens egensvängningsperioder. Med stöd av en sådan beräkning finner Bjerrum (*13*) dessa egensvängningar för H_2 motsvara våglängden $\lambda = 3{,}0\ \mu$ samt för N_2, O_2 och CO motsvara våglängden $\lambda =$ c:a $3{,}5\ \mu$. I själva verket uppvisar CO absorptionsband vid 2,4 och 4,6 μ samt O_2 vid 3,2 och 4,7 μ. På grund av molekylernas rotation uppträder visserligen icke en bestämd absorptionslinje, utan fastmer absorptionsband eller en serie linjer med ekvidistanta svängningstal (*14*). Härpå kunna vi likväl icke för utrymmets skull närmare ingå. Däremot hava H_2 och N_2 icke några absorptionsband i ultrarött, oaktat kärnorna enligt ovanstående otvivelaktigt utföra bestämda egensvängningar. O_2 och CO bestå således i motsats till H_2 och N_2 av joner. För tre- och fleratomiga gaser uppträda, sannolikt på grund av koppling, endast mer eller mindre utpräglade absorptionsområden (*21*). Bjerrum (*13*) har visat, att specifika värmet även för fleratomiga gaser, såsom CO_2, H_2O och NH_3, rätt väl kan beräknas med stöd av de experimentellt bestämda absorptionsgebitens våglängder.

Hos fasta kristalliserade substanser återfinna vi fullkomligt analoga förhållanden. Belysa vi en kristall med strålar av en våglängd, som motsvarar en jons svängningstal, råka jonerna i livliga svängningar; ett resonansfenomen uppträder. På grund av resonatorernas starka utstrålning, vilken, som tidigare framhållits, av Planck betraktas som enda orsak till dämpningen, medan Drude dessutom antager existensen av något slags friktion, uppträder för den ifrågavarande våglängden en metallisk reflexion. Om man därför låter en stråle med kontinuerligt ultrarött spektrum i tur och ordning falla på en rad ytor av det material man vill undersöka, sålunda bringande strålen till upprepad reflexion, så reflekteras slutligen endast strålar av de våglängder, som svara mot jonernas egensvängningar. De sålunda erhållna strålarna benämnas som känt reststrålar. Undersökningen av reststrålarna utgör för kristalliserade substanser den ojämförligt bästa metoden att experimentellt bestämma de ponderabla systemens egensvängningar, för så vitt dessa över huvud kunna optiskt bestämmas. (Beträffande utförandet av försöken se t. ex. Jellinek, (*96*, p. 575.)

För diamant föreligga synnerligen noggranna undersökningar av specifika värmet, av Nernst utförda vid låga och av H. F. Weber vid höga temperaturer (*96*, p. 392). Av dessa följer enligt kvantumteorin, att ponderabla system utföra bestämda svängningar med ultraröd period. Av Reinkobers (*146*) undersökningar framgår emellertid med säkerhet, att diamant icke uppvisar något reflexionsmaximum i ultrarött. Molekylerna äro här således icke uppbyggda av joner. Helt annorlunda förhålla sig t. ex. de binära salterna, såsom KCl, $NaCl$, KBr och KJ. Innan vi gå vidare, ägna vi några ord åt dessa kristallers byggnad. De på Laues bekanta upptäckt baserade, med tillhjälp av röntgenstrålar utförda undersökningarna av kristaller hava som känt givit vid handen, att åtminstone i kristaller av detta enkla slag molekylerna icke spela samma roll som i gaser och vätskor. Kaliumkloridmolekylen existerar över huvud icke mera i kristallen. Man har sålunda icke att tänka sig saken så, att K och Cl atomerna eller jonerna utföra svängningar mot varandra, och molekyl-tyngdpunkten ytterligare för sig utför svängningar, utan fastmer så, att K och

Cl atomerna eller jonerna utföra bestämda och av varandra oberoende svängningar kring bestämda jämviktslägen i ett kubiskt rymdgitter (Jfr *19* och *20*).

Medan enligt föregående de svängande jonerna t. ex. i syremolekylen kunna vara av grundväsentligt annat slag än de fritt rörliga jonerna i en utspädd saltlösning, måste, om egensvängningar hos ponderabla resonatorer i en kristall av här nämnd byggnad optiskt kunna konstateras, och om vidare deras svängningstal överensstämma med de svängningstal, som enligt andra grunder kunna beräknas för atomerna, resonatorerna bestå av elektriskt laddade atomer. Därvid måste man tänka sig, att halogenatomen i t. ex. *KCl* svänger inclusive en av alkalimetallatomen, här av kaliumatomen berövad elektron (valenselektronen). Alkalimetallatomens algebraiska laddningssumma vore således lika med ett positivt elementarkvantum. De i en kaliumkloridkristall förefintliga jonerna vore då med hänsyn till byggnaden av fullkomligt samma slag som jonerna i en kaliumkloridlösning.

Svängningstalen för atomerna i en kristall av ett binärt salt kunna enkelt beräknas enligt Lindemanns och Korefs formler (*118*, *108*). Koref (*108*, p. 186) har sålunda beräknat egenfrekvenserna ν' svarande mot våglängderna λ' för de nämnda salterna. Insättas de sålunda erhållna värdena ν' i den Einstein'ska formeln för specifika värmet, erhållas för sistnämnda kvantitet värden, som vid alla olika temperaturer överensstämma med resultaten av utförda experimentella undersökningar. Därav följer, att de beräknade egenfrekvenserna ν' med säkerhet mycket nära överensstämma med atomernas eller jonernas faktiska egenfrekvenser ν.

Rubens och Hollnagel (*148-149*) hava emellertid för de tidigare nämnda salterna erhållit reststrålar i ultrarött. För alla dessa binära salter hava erhållits två reflexionsmaxima, av vilka genomgående det ena svarar mot den av Koref beräknade egenfrekvensen för alkalimetalljonen, medan det andra svarar mot egenfrekvensen för halogenjonen. På grund av sakens utomordentliga vikt för den föreliggande undersökningen avtrycka vi följande tabell (*108*, p. 186). Betydelsen av λ' har tidigare klargjorts, medan λ betecknar våglängden av de observerade reststrålarna.

		λ'	λ
KCl	*K*	73,6 μ	70,3 μ
	Cl	55,9	62,0
KBr	*K*	74,3	75,6
	Br	87,2	86,5
KJ	*K*	76,4	96,7 (medeltal)
	J	104,0	
NaCl	*Na*	43,9	46,9
	Cl	54,5	53,6

I saltkristallerna äro således jonerna färdigbildade.

§ 8. Atomernas byggnad. Innan vi övergå till den på dispersionsteorin baserade beräkningen av elektronernas antal i en atom, vilja vi med några ord omnämna de viktigaste resultaten av de moderna undersökningarna av atomernas byggnad.

Lenards viktiga undersökningar 1903 rörande absorptionen av katodstrålar ledde till den föreställningen, att en atom besitter en positivt laddad kärna av subatomära dimensioner, vars laddning approximativt är proportionell mot atomvikten. Rutherfords, Geigers och Marsdens undersökningar av α-partiklarnas spridning vid genomträngandet av tunna metallskikt ledde till överensstämmande men precisare resultat. Under antagande att kärnan är punktformig, är det lätt att beräkna fördelningen av α-partiklarna på de olika vinklarna, om kärnladdningen antages bekant. De nämnda forskarnas experimentella undersökningar ledde till slutsatsen, att kärnladdningen uttryckt i elektriska elementarkvanta är lika med elementets ordningstal eller approximativt lika med $^1/_2$ atomvikten. Då atomerna äro elektriskt neutrala, är enligt föregående resultat antalet elektroner i en atom lika med elementets ordningstal. Detta kan emellertid även direkt påvisas. Då primära röntgenstrålar träffa en radiator, uppstår som känt en sekundärstrålning med ett kontinuerligt spektrum. Denna strålnings relativa energi (i förhållande till primärstrålningens energi) dividerad med substansens täthet är en kvantitet proportionell mot antalet elektroner i massenheten och således även proportionell mot kvoten Z/M, där Z = antalet elektroner per atom och M = atomvikten. Barklas undersökningar ledde till resultatet $Z/M = {}^1/_2$. För element med högre atomvikt är visserligen absorptionen av primärstrålningen (vilken tjänar som mått på sekundärstrålningens energi) större, men sekundärstrålningen består därvid delvis av en sekundär egenstrålning. De anförda undersökningarna hava således lett till den bestämda slutsatsen, att en atoms kärnladdning, vilken är lika med antalet av dess elektroner, anges av elementets ordningstal. Moseleys lag för högfrekvensspektra utgör den slutliga bekräftelsen härav.

De radioaktiva sönderfallsserierna och speciellt bildningen och förekomsten av isotoper bevisa emellertid för det första, att kärnan består av elementarkärnor och kärnelektroner, varför med kärnladdningen bör förstås den algebraiska summan av elementarkärnornas och kärnelektronernas laddningar, och för det andra, att ett elements kemiska egenskaper bero endast av denna summas storlek och de yttre elektronernas antal och banor.

§ 9. De perifera elektronernas antal. Valenselektronerna. Om dessa yttre elektroners antal och banor ger oss emellertid dispersionsteorin värdefulla upplysningar. Enligt likheten (14) är

$$p_v = \frac{\pi m_v c a_v}{N' e_v e'_v \lambda_v^4}. \tag{26}$$

Enär vidare

$$\frac{1}{H} = \frac{N'}{d} \cdot M, \tag{27}$$

där M = molekylarvikten och H = väteatomens massa, gäller formeln

$$p_v = \frac{\pi c}{\left(\frac{e}{H}\right) \cdot \left(\frac{e'}{m}\right)} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{a_v}{\lambda_v^4} = 1{,}84 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{M}{d} \cdot \frac{a_v}{\lambda_v^4}. \tag{28}$$

Slutligen äro vanligtvis i serien (12)

$$n^2 = a + \frac{a_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{a_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \cdots \tag{12}$$

termerna från och med den fjärde av mycket liten betydelse. Vi kunna således uppdela de svängande partiklarna i tre system, nämligen de ultraröda svängningarna, motsvarande våglängden λ_r, de ultravioletta elektronsvängningarna med stora svängningsradier, motsvarande den jämförelsevis långa ultravioletta våglängden λ_v, samt slutligen de närmast kärnan kretsande elektronerna med egensvängningar, motsvarande den mycket korta våglängden λ_o. Vidare gäller enligt (13)

$$a = 1 + \sum \frac{N' p_h e_h^2 \lambda_h^2}{\pi m_h c^2}, \tag{13'}$$

och ytterligare, enligt (12) och (14), samt med införande av de nya beteckningarna ϑ, vilkas betydelse omedelbart inses,

$$a = 1 + \frac{a_r}{\lambda_r^2} + \frac{a_v}{\lambda_v^2} + \frac{a_o}{\lambda_o^2} = 1 + \vartheta_r + \vartheta_v + \vartheta_o \tag{29}$$

och således

$$a - \left(1 + \frac{a_r}{\lambda_r^2} + \frac{a_v}{\lambda_v^2}\right) = \frac{a_o}{\lambda_o^2} = \vartheta_o. \tag{30}$$

Det är klart, att dispersionen helt och hållet domineras av termen $\frac{a_r}{\lambda^2 - \lambda_r^2}$. Sålunda kan termen $\frac{a_o}{\lambda^2 - \lambda_o^2}$ över huvud icke mera direkt konstateras i likheten (12). Endast indirekt kunna vi, som vi nedan komma att se, med stöd av den ovan anförda likheten (30) sluta oss till dess existens.

Vi nämna några ord om den första substans, CaF_2, som Drude (*51*) med stöd av dessa formler undersökte. Han fann enligt formeln (28) $p_v = 4$. Vidare $\vartheta_v = 0{,}69$ och enl. (30) $\vartheta_o = 0{,}35$. Enligt (14) och (29) gälla likheterna

$$\frac{\vartheta_o}{\lambda_o^2} : \frac{\vartheta_v}{\lambda_v^2} = p_o : p_v, \tag{31}$$

$$\frac{a_o}{a_v} = \frac{\vartheta_o \lambda_o^2}{\vartheta_v \lambda_v^2} = \frac{\vartheta_o^2}{\vartheta_v^2} \frac{\lambda_o^2}{\lambda_v^2} \frac{\vartheta_v}{\vartheta_o} = \frac{\vartheta_o^2}{\vartheta_v^2} \cdot \frac{p_v}{p_o}, \tag{32}$$

$$\frac{a_o}{a_v} = 0{,}257 \frac{p_v}{p_o}. \tag{32'}$$

Enär vidare a_o är ett litet tal i förhållande till a_v, vilket framgår därav, att $\frac{a_o}{\lambda^2 - \lambda_o^2}$ försvinner i förhållande till de tidigare termerna i serien (12), följer av (32') att p_o är väsentligt större än p_v. Kring molekylens kärnor kretsa således ett stort antal elektroner

med jämförelsevis mycket korta egenperioder, medan andra elektroner, vilkas antal motsvarar molekylens valenssumma, svänga med väsentligt större radier. Det sammanlagda antalet elektroner i molekylen känna vi, enligt vad tidigare sagts, numera med säkerhet.

Här uppträdde första gången ett visst enkelt sammanhang mellan antalet dispersionselektroner och molekylens valenssumma. Vi vända oss nu till de fysikaliskt och kemiskt enklaste substanserna, nämligen gaserna. Vi framställa dispersionen genom den enkla empiriska Cauchy'ska formeln

$$n - 1 = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\lambda^2}\right). \tag{21 a}$$

Jämföra vi denna formel med likheten (21), finna vi

$$2\alpha = A - 1; \quad \beta = \frac{A_1}{A - 1}.$$

Men enligt (19) och (20) är då

$$\Delta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi m_r c^2}{N' p_r e_r^2}, \tag{33}$$

och, om antalet dispersionselektroner faktiskt överensstämmer med molekylens valenssumma v, således

$$v\,\Delta = \frac{2\pi c}{N' e \cdot \frac{e'}{m}} = \frac{2\pi c}{1{,}29 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}77\ 10^{7}} = 8{,}3 \cdot 10^{-7}. \tag{34}$$

Enligt en sammanställning hos Loria[1] (*128*) är i själva verket för H_2 ($v = 2$), O_2 ($v = 4$), N_2 ($v = 6$), CO_2 ($v = 8$), SO_2 ($v = 8$), H_2S ($v = 6$) och CO ($v = 4$) produkten $v\,\Delta$ konstant och lika med i medeltal $10{,}9 \cdot 10^{-7}$, om vi undantaga två starkt avvikande värden för CO_2 (Gruschke och Stuckert). Enligt mätningar av Koch och Rentschler erhålles emellertid även för CO_2 samma $v\,\Delta$ värde, som för de andra gaserna. Om vi sålunda bortse från den obetydliga skillnaden mellan $(v\,\Delta)_{teor.} = 8{,}3 \cdot 10^{-7}$ och $(v\,\Delta)_{obs.} = 10{,}9 \cdot 10^{-7}$ bekräftas alltså teorin fullständigt. En möjlig förklaring av den nämnda differensen är f. ö. funnen av Sommerfeld; vi återkomma senare till denna fråga.

Vi hava ovan angivit två olika sätt, på vilka antalet dispersionselektroner i en molekyl kan beräknas med stöd av konstanterna i enkla empiriska dispersionsformler. Vi skola i det följande se, huru beräkningen av p_r direkt kan anknytas till resultaten av två skilda mätningar av molekylarrefraktionen R för monokromatiska ljusstrålar av våglängderna λ' och λ''. I det vi beteckna $\varphi_D(n) = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$ och $\varphi_L(n) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$ omfatta vi i det följande samtidigt Drudes (φ_D) och Lorentz' och Plancks teorier (φ_L). Vi uppdela de svängande partiklarna i tre system, nämligen de ponderabla egensvängningarna, motsvarande våglängden λ_r, dispersionselektronernas egensvängningar, motsvarande våglängden λ_r, och

[1] Δ har hos Loria betydelsen $\frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha}$.

slutligen de närmast kärnan svängande elektronernas egensvängningar, motsvarande våglängden λ_0. Vi ha då

$$R(n) = \frac{M}{d} \cdot \varphi(n) = -\frac{N p_r e_r^2}{3\pi m_r c^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_r}\right)^2} + \frac{N p_v e_r^2}{3\pi m_v c^2} \cdot \frac{\lambda_v^2}{1-\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)^2}, \tag{35}$$

om vi antaga, att den optiska effekten av de närmast kärnan svängande elektronerna kan försummas. I det vi vidare utveckla den första termen enligt (18), och i denna serie försumma termerna av högre ordning än den första, samt införa beteckningen ξ för *den reducerade molekylarrefraktionen*, finna vi

$$\xi = R + k\lambda^2 = \frac{N p_v e_r^2}{3\pi m_r c^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2}, \tag{36}$$

där k är en för substansen karakteristisk konstant, vars betydelse framgår av likheten (35). Således

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\xi'} = \dfrac{3\pi m_r c^2}{N p_r e_r^2}\left\{\dfrac{1}{\lambda_r^2} - \dfrac{1}{\lambda'^2}\right\}, \\ \dfrac{1}{\xi''} = \dfrac{3\pi m_r c^2}{N p_r e_r^2}\left\{\dfrac{1}{\lambda_r^2} - \dfrac{1}{\lambda''^2}\right\}, \end{array}\right.$$

där λ' och λ'' beteckna två olika, använda våglängder. Av dessa formler följer

$$p_r \frac{e'}{m} = \frac{3\pi c}{N e} \cdot \frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 \lambda''^2} \cdot \frac{\xi' \xi''}{\xi'' - \xi'}. \tag{37}$$

Vi införa ytterligare konstanterna R och k i formeln (37). Av likheterna (36—37) följer

$$\frac{\partial \ln p_r}{\partial k} = \frac{R''^2 \lambda'^2 - R'^2 \lambda''^2}{R' R'' (R'' - R')}$$

och sålunda, i det vi försumma termerna av högre ordning än den första med afseende å k,

$$p_r \frac{e'}{m} = \frac{3\pi c}{N e} \cdot \frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 \lambda''^2} \cdot \frac{R' R''}{R'' - R'} \left\{1 + \frac{R''^2 \lambda'^2 - R'^2 \lambda''^2}{R' R'' (R'' - R')} \cdot k\right\}. \tag{38}$$

För att kunna bestämma p_r ur två mätningar, måste vi teoretiskt kunna beräkna k. Enligt definitionen är

$$k = \frac{N p_r e_r^2}{3\pi m_r c^2}.$$

Egentligen utgör självfallet k en summa

$$k = \frac{N}{3\pi c^2} \cdot \sum \frac{p_r e_r^2}{m_r},$$

men Drude har visat, att man erhåller ett praktiskt taget riktigt värde för k, om man antar, att molekylens hela massa svänger med en laddning lika med molekylens valenssumma v. Detta antagande innebär

$$\begin{cases} p_r = 1, \\ e_r = e \,.\, v, \\ m_r = M. \end{cases}$$

Således

$$k = \frac{N e^2}{3 \pi c^2} \cdot \frac{v^2}{M}. \tag{39}$$

Drude har ytterligare visat, att om de p dispersionselektronerna icke alla ha samma svängningstal, och om sålunda $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, där p_1 elektroner ha egenfrekvensen ν_1, p_2 elektroner egenfrekvensen ν_2 o. s. v., varvid $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_n$, gäller olikheten $p_1 < p_r < p$.

Vi hava, enligt den vid härledningen av likheterna (35—39) givna definitionen av funktionen $\varphi(n)$, betecknat molekylarrefraktionen enligt Drudes teori med $\frac{1}{3}\frac{M}{d}(n^2-1)$ och enligt Lorentz' och Plancks teori med $\frac{M}{d}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2}$; detta för att i samma formler kunna omfatta båda teorierna. Medan den sistnämnda funktionen utgör den Lorentz'ska expressionen för molekylarrefraktionen och i denna avhandling längre fram betecknas R_3, menas med molekylarrefraktionen enligt Drude alltid i litteraturen, så och längre fram i denna avhandling, funktionen $\frac{M}{d}(n^2-1)$, vilken vi beteckna R_2. Vi erhålla sålunda likheterna

$$p_r \cdot \frac{e'}{m} = \frac{\pi c}{N e} \cdot \frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 \lambda''^2} \cdot \frac{R'_2 R''_2}{R''_2 - R'_2} \left\{ 1 + 3k \cdot \psi(R'_2, R''_2, \lambda', \lambda'') \right\}, \tag{40}$$

$$p_r \cdot \frac{e'}{m} = \frac{3\pi c}{N e} \cdot \frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda''^2 \lambda'^2} \cdot \frac{R'_3 R''_3}{R''_3 - R'_3} \left\{ 1 + k \cdot \psi(R'_3, R''_3, \lambda', \lambda'') \right\}, \tag{41}$$

där betydelsen av funktionen ψ omedelbart inses vid jämförelse med formeln (38). Vi annotera i korthet de resultat, till vilka Drude kommit vid beräkningen av $p_r \frac{e'}{m}$. Han finner, att detta uttryck för en organisk molekyl, likasom molekylarrefraktionen, additivt kan beräknas ur motsvarande uttryck för de i molekylen ingående atomerna, under förutsättning, att vissa konstitutiva inflytanden observeras. Genom dubbelbindning går antalet dispersionselektroner nedåt; han finner sålunda för benzolringen

$$p_r \frac{e'}{m} = -9{,}6 \text{ à } -13{,}2.$$

Det ligger nära till hands att antaga, att vid en dubbelbindning mellan två kolatomer i vardera atomen en elektron övergått från en yttre bana till en inre, och atomerna sålunda vore labilt trevärda. Denna slutsats kan emellertid icke utsträckas till en sådan dubbelbindning som $O = O$, vilket framgår av vad tidigare sagts om antalet dispersionselektroner i O_2 molekylen. Icke heller kan man a priori antaga, att den nämnda hypotesen äger sin riktighet

för dubbelbindningen $>C=O$. Vi anföra följande värden för $p_r \cdot \frac{e'}{m} \cdot 10^{-7}$, vilka enligt Drude gälla för alifatiska föreningar: $H = 1{,}5$; $C = 3{,}7$; $OH = 4{,}5$; $CO = 4{,}7$; eter $-O = 2{,}7$; O i fettsyrorna och fettsyreestrarna $= 4{,}4$; $Cl = 6{,}2$. Värdet för kombinationen $CO \cdot O$ är mycket säkert fastställt, enär detsamma beräknats ur ett stort antal observationer rörande fettsyror och estrar. Uppdelningen av $CO \cdot O$ i CO och O är däremot gjord med stöd av mätningsresultaten för ett fåtal ketoner och aldehyder, ur vilka bestämts CO. Vi vilja verkställa denna uppdelning på ett annat sätt. Enligt Drude är $CO \cdot O = 9{,}1$. Å andra sidan är O i hydroxylgruppen $= 3{,}0$, varav följer $CO = 6{,}1$. Jämför man denna nya uppdelning med de experimentella resultaten, finner man, att den i själva verket på intet sätt står i strid med desamma. Den är nödvändig på grund av den rådande överensstämmelsen mellan molekylarrefraktionen och molekylardispersionen för hydroxylen i fettsyrorna och hydroxylen i alkoholerna, vilken överensstämmelse är oförenlig med uppfattningssättet att karboxylens hydroxylsyre skulle äga 4 och alkoholernas hydroxylsyre 2 dispersionselektroner, vilket vore en följd av Drudes $p\frac{e'}{m}$ värden. Vi erhålla så för alifatiska föreningar följande tabell för $p_r \frac{e'}{m}$

$$H = 1{,}5$$
$$O \quad 2{,}7 \quad 3{,}0$$
$$C = 3{,}7$$
$$Cl = 6{,}2$$

För p_r erhållas för de olika atomerna sålèdes värden, vilka äro lika med eller mindre än den av elementets ställning i det periodiska systemet enligt Abegg angivna normalvalensen. Undantag härifrån utgöra halogenerna. Då en metallsaltmolekyl sönderfallit i joner, är metallatomen berövad ett antal elektriska elementarkvanta lika med metallens valenstal (enligt Faradays lag). Det ligger då nära till hands att antaga, att de från metallatomerna lätt utträdande elektronerna, (valenselektronerna), vilka måste antagas speciellt svagt bundna vid kärnan, svänga med de längsta radierna. Dessa elektroner komma då att vara identiska med dispersionselektronerna. Då emellertid ett element i många fall kan i olika föreningar uppträda med olika valens, är det klart, att endera valenselektronernas radier kunna undergå förändringar, eller att dessa radier för de olika valenselektronerna i en atom a priori äro olika stora. I vartdera fallet följer för p_r för flertalet atomer ett lägre värde än maximalvalensen. Så snart vi emellertid betrakta elektriciteten ur en unitarisk ståndpunkt, vilket innebär, att vi med en positiv laddning mena ett minus av elektroner, inses att samma resonemang icke kan tillämpas på de negativa elementen. I själva verket har ju även Cl ett ganska stort antal dispersionselektroner. Drude preciserar sina resultat som följer: Abeggs positiva valenstal för ett element, både som normalvalens och som kontravalens, betecknar antalet vid atomen löst bundna elektroner. Abeggs negativa valenstal v' betecknar atomens förmåga att beröva andra atomer v' elektroner. Drude erhåller sålunda en visserligen ännu svävande, men dock löftesrik tolkning av den fruktbara Abegg'ska valensteorin.

Det förefaller vid ett ytligt betraktande, som om de resultat beträffande p_r för lösta salter, till vilka Chéneveau i sin stora och förtjänstfulla avhandling (*41*, jfr *40*) kommit, skulle stå i strid med de relaterade Drude'ska slutsatserna. Chéneveau erhåller nämligen för salterna p_r värden, vilka rätt väl överensstämma med summan av atomernas normalvalenser och icke med summan av deras positiva valenser. Sålunda för KCl värdet 2, för $BaCl_2$ värdet 4, för $AlCl_3$ ungefär värdet 6 o. s. v. Vi påpeka genast, att för dissocierade salter $k = 0$ i likheterna (40—41). Chéneveaus avvikande resultat bero därpå, att han beräknat p_r enligt likheten (40) (Chéneveaus likhet skiljer sig endast formellt från (40), men i denna formel insatt de Lorentz'ska konstanterna R_3. Under sådana förhållanden erhåller han självfallet för låga p_r-värden. Vid jämförelse av likheten (40) med likheten (41) finner man omedelbart, att de riktiga p_r-värdena äro lika med 3 gånger Chéneveaus värden. Man erhåller så för KCl ungefär värdet 6, för $BaCl_2$ ungefär 12 och för $AlCl_3$ ungefär 18 i full överensstämmelse med Drudes teori.

Till den Drude'ska hypotesen beträffande de yttre elektronernas antal samt till en klarare bild av den negativa valensens betydelse kan man komma genom ett alldeles allmänt resonemang (*109*). Vi hava redan tidigare påpekat, att de kemiska egenskaperna (speciellt en så allmän egenskap som valensen) med säkerhet äro att betrakta som funktioner av de yttersta elektronernas antal och banor. Detta uppfattningssätt bekräftas till fullo av den monotona förändringen av K-frekvensen, betraktad som funktion av elementets ordningstal. Av den Moseley'ska lagen framgår nämligen, att den periodicitet i elektronanordningen i atomerna, vilken allena kan förklara det Mendelejeff'ska systemet, icke utsträckes till anordningen av de inre elektronerna, rörande vilka man måste antaga, att deras banradier och svängningstal endast bero av kärnladdningens storlek.

De kemiska egenskapernas periodicitet utvisar som sagt emellertid, att konfigurationen av de yttre elektronerna icke kontinuerligt förändras, då vi betrakta elementen i den av deras ordningstal angivna följden. Tvärtom måste man antaga, att en analog konfiguration periodiskt återkommer. Fästa vi för enkelhetens skull endast avseende vid de små perioderna, bör, efter det 8 elektroner tillkommit, i huvudsak samma konfiguration återupprepas. Detta kunna vi enklast förklara genom att anordna de yttre elektronerna på koncentriska ringar eller sferer, vilka på grund av tills vidare okända stabilitetsprinciper icke kunna innehålla flere än 8 elektroner. Då en ring (eller sfer) är fullsatt, påbörjas en ny, yttre ring.

Den lätthet, med vilken en alkalimetallatom förlorar en elektron, icke blott vid jonisationen i lösning, utan även t. ex. vid belysning av metallen med polariserat ultraviolett ljus av bestämd frekvens (den s. k. selektiva fotoelektriska effekten, till vilken vi senare skola återkomma) låter oss antaga, att för alkalimetallerna den på elektronerna verkande attraktionen mot kärnan når sitt minsta värde. Vi måste med andra ord antaga, att alkalimetallatomen besitter endast *en* yttre elektron, vilken då står under inflytande av den effektiva kärnladdningen $+1$, varvid vi ha att uppfatta saken så, att resten av den totala kärnladdningen $+Q$ avskärmas av de $(Q-1)$ inre elektronerna. Gå vi 8 steg vidare, ha vi att vänta oss en speciellt stabil anordning, och vi finna här i själva verket ädelgaserna. Halogenatomerna ha vi att anse såsom atomer, vilka på sätt och vis sakna en elektron i

den yttersta ringen; vi känna dem i verkligheten såsom element, vilka med lätthet förmå upptaga en elektron. Konfigurationen hos ädelgaserna med 8 yttre elektroner är således att betrakta som ett slags stabilaste prototyp, vilken de närliggande elementen genom avgivande respektive upptagande av elektroner sträva att bilda. I det vi konsekvent utsträcka resonemanget till de övriga familjerna i det periodiska systemet, erhålla vi fullkomligt samma uppfattning som Drude rörande den reella innebörden av Abeggs positiva valens, men betydelsen av den negativa valensen har vunnit i klarhet. Jonernas egenskaper i en lösning belysa för övrigt teorins användbarhet: Att jonerna sakna atomernas karakteristiska aktiva egenskaper beror därpå, att jonerna, i motsats till atomerna, besitta ädelgasernas stabila konfiguration.

Ovan relaterade, av Kossel uppställda hypotes karakteriseras av antagandet, att alla de yttre elektronerna i en atom befinna sig på samma ring eller sfer. Detta antagande kan icke, och behöver icke heller för tankegångens giltighet i övrigt, upprätthållas. I själva verket måste vi endast antaga, att atomens perifera elektroner, vilka kunna nå maximiantalet 8, alla tillhöra samma, på något bestämt sätt definierade elektronsystem, vilket system närmare bestämmes av nummern för den horisontalrad i det periodiska systemet, i vilken elementet befinner sig. På denna fråga kunna vi dock först något längre fram närmare ingå.

Överensstämmelsen mellan antalet perifera elektroner och Abeggs positiva valens leder till uppfattningen, att atomernas bindning i molekylen förmedlas av dispersionselektronerna. Då uppställer sig till besvarande frågan: gives det en sådan gruppering av kärnorna och de närmast kärnorna svängande elektronerna, betraktade som positiva system, å ena sidan, samt dispersionselektronerna å andra sidan, genom vilken gruppering de ifrågavarande laddningarna skulle befinna sig i ett dynamiskt jämviktstillstånd. Vi ha därvid att särskilja tvenne principiellt olika slag av molekyler, nämligen de homöopolära och de heteropolära (*109*). Bohrs (*15*) molekylmodell utgör ett möjligt svar på frågan för de homöopolära och Kossels (*109*) modell för de heteropolära molekylernas vidkommande. Av de relaterade undersökningarna rörande gaserna framgår, att H_2 molekylen har 2, O_2 molekylen 4 och N_2 molekylen 6 *yttre* valenselektroner. Enligt den tidigare framförda teorin har emellertid O_2 molekylen 12 och N_2 molekylen 10 valenselektroner. Vi måste således antaga, att i O-atomen 4 valenselektroner svänga i en inre och 2 i en yttre ring, medan i N-atomen 2 svänga i en inre och 3 i en yttre ring. Redan härigenom se vi, att den Kossel'ska atombilden icke i detalj kan upprätthållas. Enligt Bohr (*15*) och Sommerfeld (*165*) är nu en homöopolär molekyl, såsom H_2, N_2 och O_2, uppbyggd så, att de yttre valenselektronerna svänga i ett plan mellan kärnorna och beläget vinkelrätt mot dessas sammanbindningslinje, varigenom det eftersträvade dynamiska jämviktstillståndet uppkommer. Därav följer, att båda atomerna i en tvåatomig homöopolär molekyl avstått samma antal elektroner till det gemensamma mellan kärnorna belägna elektronplanet. Debye (*47*) har visat, att vätets dispersion står i överensstämmelse med den Bohr'ska modellen. De heteropolära molekylerna såsom HCl och CaO anser Kossel uppbyggda så, att vardera atomen avstått sina valenselektroner till en gemensam, av 8 elektroner bestående ring, eller allmännare till ett gemensamt, mellan kärnorna beläget elektronplan, innehållande 8

elektroner. Denna anordning medför en assymmetri i laddningarnas fördelning, vilken assymmetri möjliggör, såsom för HCl, ett optiskt konstaterande av kärnsvängningarna. Däremot äro absorptionsbanden för O_2 omöjliga att förklara enligt den Bohr'ska modellen, vilken därför åtminstone i detta fall ännu måste förändras.

I varje fall inse vi, och detta följer redan av vår uppfattning om dispersionselektronernas betydelse för molekylens sammanhållning, oberoende av huru vi i detalj tänka oss molekylen byggd, att elektronbindningen icke är lika stark i alla riktningar, att med andra ord elektronbindningen är anisotrop. På grund av ringanordningens cyklicitet äro visserligen de olika elektronernas motsvarande egenfrekvenser lika, men för en bestämd elektron äro de axiala, radiala och azimutala egenfrekvenserna olika. Elektronbindningens isotropi är emellertid ett i dispersionsteorin ingående antagande. Sommerfeld (*166*) har visat, att man genom att till grund för härledningen av dispersionsformeln lägga den Bohr'ska modellen, på grund av elektronbindningens anisotropi, i stället för likheten (33) erhåller likheten (33 a)

$$\Delta = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi m c^2}{N' p e^2} \cdot \Phi, \tag{33 a}$$

där Φ är en funktion av molekylens byggnad och i detta fall kan uttryckas som en funktion av antalet elektroner i den sammanhållande ringen. Enär $\frac{d\Phi}{dp} = 0$ ungefär för $p = 2$, kan Φ inom det oss intresserande området betraktas som approximativt konstant. För Φ finner Sommerfeld värdet 1,3. Likheten 34 övergår då i likheten

$$v\Delta = \frac{2\pi m c^2}{N' e^2} \cdot \Phi = 10{,}8 \cdot 10^{-7}, \tag{34 a}$$

vilket värde nästan precis motsvarar det experimentella värdet $v\Delta = 10{,}9 \cdot {}^{-7}$. Den tidigare funna differensen mellan teori och verklighet är därmed försvunnen.

§ 10. Valenselektronernas antal i olika atomer beräknade med stöd av Eisenlohrs konstanter för atomrefraktionerna och atomdispersionerna. Det är lätt, att finna en ny och i flere avseenden intresseväckande metod att beräkna antalet dispersionselektroner i en atom. Detta antal kan nämligen beräknas med kännedom endast om de Eisenlohr'ska konstanterna för atomrefraktionen för två olika strålar (*57*, jfr. *58*). Egendomligt nog har, så vitt mig är bekant, en sådan beräkning icke tidigare utförts. Vi jämföra först formlerna (33) och (33 a) med formeln (41). I likheterna (33) och (33 a) ingår implicit antagandet $k = 0$. För att göra oss oberoende av det i den klassiska dispersionsteorin ingående antagandet, att elektronbindningen är isotrop, multiplicera vi högra membrum i likheten (41) med den tills vidare okända faktorn σ. Enligt Cauchys formel hava vi

$$n - 1 = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\lambda^2}\right)$$

och således för en gas (n approximativt $= 1$) och om vi operera med de båda strålarna H_α och H_γ

$$\frac{R_\gamma - R_\alpha}{R_\alpha R_\gamma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d}{M} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_\gamma^2} - \frac{1}{\lambda_\alpha^2}\right)$$

LIBRARY

och enligt (33 a) och i det vi observera att $N = N' \frac{M}{d}$

$$\frac{R_\gamma - R_\alpha}{R_\alpha R_\gamma} = \frac{3\pi m c^2}{N p e^2} \cdot \psi \cdot \frac{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2}{\lambda_\alpha^2 \lambda_\gamma^2},$$

medan vi enligt (41) hava

$$\frac{R_\gamma - R_\alpha}{R_\alpha R_\gamma} = \frac{3\pi m c^2}{N p e^2} \cdot \sigma \cdot \frac{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2}{\lambda_\alpha^2 \lambda_\gamma^2}$$

och alltså

$$\sigma = \psi. \tag{42}$$

Vi införa beteckningarna

$$\frac{3\pi m c^2}{N e^2} = C'$$

samt

$$\frac{\lambda'^2 - \lambda''^2}{\lambda'^2 \lambda''^2} = \frac{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2}{\lambda_\alpha^2 \lambda_\gamma^2} = C''.$$

På grund av molekylarrefraktionens utpräglade additivitet, kunna vi antaga (jfr. formeln 36)

$$\xi = R \cdot C''',$$

där C''' är en konstant. Av likheterna (37—38) följer då

$$1 + k\psi = C'''.$$

Enär atomdispersionen direkt beräknats, och sålunda är att betrakta som långt säkrare än differensen $R_\gamma - R_\alpha$, införa vi atomdispersionen i formeln, samt beteckna denna $\delta_{\gamma\alpha}$, medan vi, ytterligare förenklande, ersätta produkten $R_\alpha R_\gamma$ med R_D^2, där R_D betecknar atomrefraktionen för Na-ljus. Vi erhålla så för väte, vid användande av den Lorentz'ska formeln och beaktande, att väteatomen endast besitter *en* elektron, likheten

$$1 = C' C'' C''' \cdot \frac{R_D^2}{\delta_{\gamma\alpha}} \cdot \sigma_0, \tag{43}$$

där σ_0 likasom i följande formler betecknar faktorn σ för väte. Av (43) följer

$$C' C'' C''' = \frac{\delta_{\gamma\alpha}}{R_D^2} \cdot \frac{1}{\sigma_0} = \frac{C}{\sigma_0}. \tag{44}$$

För en atom av ett annat element följer då

$$p = C \frac{\sigma}{\sigma_0} \cdot \frac{R_D^2}{\delta_{\gamma\alpha}} = C \cdot \eta \frac{R_D^2}{\sigma_{\gamma\alpha}}. \tag{45}$$

Vi kunna vidare, stödande oss på erfarenheten rörande gaserna, samt även beaktande resultatet av Sommerfelds deduktion, antaga $\sigma = \sigma_0$ eller $\eta = 1$. Det är att observera, att detta antagande är långt allmännare än den klassiska dispersionsteorins antagande $\sigma = \sigma_0 = 1$. Vi erhålla så likheten

$$p = C \cdot \frac{R_D^2}{\delta_{\gamma\alpha}}. \tag{46}$$

Vi vilja särskilt påpeka, att i denna formel icke ingår några som helst andra konstanter, än de experimentellt bestämbara atomrefraktionerna. I följande tabell anföras de enligt formeln (46) beräknade p värdena jämte de för beräkningen behövliga atomrefraktionerna och atomdispersionerna enligt Eisenlohr (57). v betecknar atomens positiva valens. Betydelsen av Z förklaras längre fram.

	R_D	$\delta_{r\alpha}$	p_r		Z	v
H	1,100	0,029	1,0		1,0	1
C	2,418	0,056	2,5		3,0	4
Hydroxyl O	1,525	0,015	3,7	3,5	4,2	6
Eter O	1,643	0,019	3,4			
Cl	5,967	0,168	5,1			
Br	8,865	0,340	5,5	5,6	4,7	7
J	13,900	0,775	6,0			

I det vi observera, att tidigare enligt Drude angivits $p_r \cdot \frac{e'}{m} \cdot 10^{-7}$ värdena, medan ovan tabellerats p_r värdena, konstatera vi här en långt bättre överensstämmelse med Drudes teori än vi tidigare funnit, speciellt för halogenerna, vilka i detta fall, såsom enligt teorin ägande det största antalet yttre elektroner, böra anses utslaggivande. För *O* närma vi oss här totalantalet valenselektroner.

§ 11. Bohrs teori och därmed sammanhängande frågor. Sedan vi numera med stöd av dispersionsteorin erhållit en om ock vag uppfattning om atomens perifera elektroners antal och konfiguration, skola vi ägna några ord åt den Rutherford-Bohr'ska atommodellen, vilken huvudsakligen stöder sig på erfarenheterna rörande de av glödande gaser utsända spektralserierna.

Vi vilja påpeka, att den av oss ovan accepterade Rutherford'ska modellen med en positiv kärna av ytterst ringa utsträckning redan som sådan står i strid med den klassiska teorin, i det att elektronerna på grund av sin mot kärnan riktade acceleration enligt elektrodynamiken böra utsända en strålning, vilket emellertid innebure en kontinuerlig förändring av atom- och molekylbyggnaden och a priori är oförenligt med antagandet av karakteristiska och oföränderliga egenfrekvenser. För att undgå denna motsägelse antog J. J. Thomson den positiva kärnan vara av stor utsträckning — det låg nära till hands att antaga hela den sferiska atomvolymen positivt laddad — medan elektronerna, approximativt punktformiga, skulle utföra sina egensvängningar inom denna positivt laddade sfer. De tidigare nämnda försöken rörande α-partiklarnas spridning lämna emellertid ett oemotsägligt bevis för, att α-partiklarna under sin gång genom ett metallskikt passera av positiva kärnor alstrade kraftfält av sådan styrka, att de endast kunna tänkas alstrade av approximativt punktformiga kärnor.

Utgående från den Rutherford'ska modellen, antar Bohr (*15-17*), att den klassiska dynamiken och den klassiska elektrodynamiken gäller för och endast för de stationära tillstånden, dock med undantag av att ingen energiutstrålning äger rum. Vidare antar Bohr, att endast vissa, av kvantumteorin så bestämda elektronbanor äro möjliga, att elektronernas rotationsmoment P utgör en heltalsmultipel av $\frac{h}{2\pi}$, där h är den Planck'ska konstanten. Detta villkor har således formen

$$2\pi P = nh,$$

där n är ett helt tal. Slutligen antar Bohr, att en elektron vid övergången från ett stationärt tillstånd med energin E_1 till ett annat stationärt tillstånd med energin E_2 ($E_1 > E_2$) emitterar en monokromatisk strålning, vars svängningstal ν bestämmes av likheten

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

Den utomordentliga överensstämmelsen mellan den på dessa godtyckliga grundantaganden baserade Bohr'ska teorins konsekvenser och verkligheten ger vid handen, att dessa antaganden trots allt innehålla en, visserligen tills vidare obegriplig sanning, för vilken sanning de dock knappast kunna betraktas som ett adekvat uttryck.

Man frågar sig nu, huruvida över huvud den på de klassiska teorierna baserade dispersionsteorin har någon reell betydelse, då uppfattningen om de inom atomerna och molekylerna härskande lagarna i och med ett accepterande av de Bohr'ska antagandena i grund förändras. Ett intressant inlägg i denna fråga har gjorts av Sommerfeld (*166*). Jag kan här endast hänvisa till Sommerfelds arbete, påpekande, att i detta fall de klassiska teorierna kunna tillämpas, emedan ljussvängningen kan betraktas som en oändligt långsam företeelse i förhållande till elektronernas omloppshastighet. Den av ljusvågen förorsakade förändringen av elektronernas svängningstal är att uppfatta som en långsam förändring av banelementen. Strålningen uppstår sålunda, i överensstämmelse med den Bohr'ska teorin, i samband med en förändring av elektronbanornas radier. De direkta motsättningarna mellan dispersionsteorin och den Bohr'ska teorin upplösa sig sålunda till en viss grad. Därmed är emellertid ingalunda en på den Bohr'ska teorin baserad lösning av dispersionsproblemet given. Samma resonemang kan för övrigt icke tillämpas på fall, där ljusets svängningstal närmar sig elektronernas omloppstal. Den klassiska behandlingen av resonansfenomenen i närheten av absorptionslinjerna har sålunda enligt Bohrs teori intet berättigande.

Vi kunna tillfoga för det första, att de många påtagligt riktiga resultaten av dispersionsteorin utan vidare giva vid handen, att det till grund för teorin liggande uppfattningssättet är användbart, och för det andra, att även den klassiska behandlingen av den anomala dispersionen (*136, 138, 51, 52*), likasom den på den klassiska elektrodynamiken vilande tolkningen av gasernas absorptionslinjer[1]), reststrålarna och den selektiva fotoelektriska

[1]) Speciellt även de ekvidistanta absorptionslinjerna för *HCl*, beroende på molekylens av kvantumteorin bestämda möjliga rotationshastigheter.

effekten leder till så oförtydbart riktiga och enligt andra teoretiska grunder numeriskt precis väntade resultat, att berättigandet av de klassiska teoriernas tillämpning på resonansfenomenen icke inom molekylen och knappast inom atomen kan ifrågasättas. Däremot må medgivas, att den klassiska teorin för atomernas vidkommande med all sannolikhet har karaktären av en hjälphypotes, vilken icke bör och icke kan få utesluta den matematiska riktigheten av de Bohr'ska antagandena.

De i den Bohr'ska teorin ingående antagandena äro emellertid av stor betydelse även för vår uppfattning om atomens perifera elektroner. Vi hava nämnt, att valenselektronerna icke alltid befinna sig på samma ring eller sfer, men samtidigt antagit, att valenselektronerna alla tillhöra samma på något bestämt sätt definierade elektronsystem. Enligt Bohrs teori är det nu lätt att fullt bestämt definiera ett elektronsystem, utan att därför behöva antaga, att alla de till systemet hörande elektronerna befinna sig på samma ring. Vi definiera valenselektronerna i en atom som alla hörande till samma kvantumtal. Därvid bevaras för de särskilda elektronerna inom vissa gränser möjligheten att, utan att därmed övergå till ett annat system, likväl övergå till en inre bana, beroende på att den effektiva kärnladdningen, på grund av minskad avskärmning, samtidigt ökas. Vid varje följande horisontalrad tillkomma de nya elektronerna ytterom de tidigare, vilka på grund av kärnladdningens successiva ökning allt mera närma sig kärnan, medan de nytillkomna elektronerna, som system betraktade, definieras av ett högre kvantumtal n än de inre elektronerna, vilket tal n åter måste antagas stå i något bestämt samband med den ifrågavarande horisontalradens nummer.

Vi hava påpekat, att enligt de nämnda molekylarmodellerna elektronbindningen är anisotrop, medan dispersionsteorin förutsätter en isotrop bindning. Dispersionsteorin innehåller emellertid även ett annat antagande, som, om vi acceptera dessa molekylarmodeller, icke kan upprätthållas. Likheten (8) vilar på antagandet, att elektronerna i en molekyl äro bundna endast vid sina ursprungliga atomer, och att deras svängningstal vid bildningen av molekylen icke undergå förändringar. Enligt de nämnda molekylmodellerna måste vi emellertid tillskriva varje speciell bindning mellan två atomer en viss bestämd refraktion och dispersion, varjämte en viss refraktion (och eventuellt även en viss dispersion) ytterligare måste tillskrivas atomens inre elektroner (jfr *145*). För att en sådan uppdelning av refraktions och dispersionsförmågan, till vilken vi förr eller senare måste komma, skall kunna teoretiskt verkställas och utnyttjas, måste vi äga en bestämd uppfattning om molekylernas byggnad.

Nu uppställer sig till besvarande frågan, huruvida de Bohr-Sommerfeld'ska och Kossel'ska modellerna kunna anses riktiga för en tvåatomig molekyl samt den därmed sammanhängande frågan, huru en fleratomig molekyl är byggd.

Enligt dispersionsteorin kan vinkelhastigheten ω för dispersionselektronerna i en tvåatomig molekyl beräknas. Resultaten bekräftas till fullo genom undersökningarna beträffande den magnetiska vridningen av ljusets polarisationsplan. Men vi kunna även beräkna ω under antagande, att den Bohr-Nicholson'ska regeln

$$2\pi P = h,$$

vilken gäller för de enskilda elektronerna i atomerna i den första horisontalraden, jämväl gäller för den enskilda elektronen i den för atomerna gemensamma ringen. De sålunda beräknade ω-värdena överensstämma icke med de enligt dispersionsteorin funna värdena. För att en överensstämmelse skall ernås, måste det Bohr-Nicholson'ska villkoret ersättas med regeln

$$2\pi P = h \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2}},$$

där μ är antalet elektroner i den sammanhållande ringen. — Den Bohr-Sommerfeld'ska molekylmodellen medför således nya, fullkomligt godtyckliga och obegripliga antaganden.

Vi hava tidigare påpekat, att Bohr-modellen icke kan förklara förekomsten av ultraröda absorptionsband för syre, då motsvarande band icke återfinnas hos väte och kväve. Vidare är syremolekylen i överensstämmelse med modellen paramagnetisk, men väte- och kvävemolekylerna, vilka även enligt teorin böra vara paramagnetiska, äro diamagnetiska. Mot molekylmodellen kunna ytterligare andra speciella invändningar göras, vid vilka vi dock icke här kunna uppehålla oss (jfr. Sommerfeld *166* och *167*, p. 533). Däremot vilja vi påpeka, att kristallstrukturen, om vi fasthålla vid ringanordningen, är obegriplig. Den tetraedriska anordningen av atomerna i diamant och den kubiska anordningen av jonerna i alkalihaloiderna kan icke förklaras, då valenselektronerna svänga i ett plan. Born (*20*) har visat, att kompressibiliteten hos alkalihaloidkristallerna är mindre, än den Bohr'ska modellen gåve vid handen. Däremot erhålles ett riktigt värde för kompressibiliteten, om till grund för beräkningen lägges en kubisk atommodell. I varje fall måste en kubisk symmetri hos de olika elektronernas rotationsaxlar förutsättas. Därigenom förklaras samtidigt kristallstrukturen.

I det vi försöka föreställa oss en fleratomig molekyl, såsom CH_4, inse vi omedelbart, om vi i princip fasthålla vid den tidigare nämnda uppfattningen om molekylernas byggnad, att C-atomens elektroner numera svänga i fyra olika plan. Vidare bör dubbelbindningens inverkan på refraktionsförmågan enligt den Bohr'ska modellen vara beroende av vilka atomer, som äro bundna vid gruppen $C = C$. Ty av Drudes undersökningar följer, att vid en dubbelbindning mellan två kolatomer dispersionselektronernas antal, och därmed även kärnornas effektiva laddning förändras. Erfarenheten visar emellertid, att dubbelbindningen har ett alldeles konstant refraktionsvärde.

Vi måste således konstatera, att vårt vetande om de tvåatomiga molekylernas och i ännu högre grad om de fleratomiga molekylernas byggnad är ytterst ofullständigt och osäkert.

§ 12. Atomvolymens betydelse. En arbetshypotes. Enär föreliggande arbete har till mål att finna grunden till de egendomliga och hittills oförklarade fakta, vilka framkommit vid undersökningarna rörande elektrolyters molekylarrefraktion i lösning, och vilka fakta måste antagas stå i nära samband med den i lösningen försiggående dissociationen, intresserar det oss speciellt att finna en metod att teoretiskt förutsäga vilken förändring en elektrolyts refraktionsförmåga undergår, då elektrolyten sönderfaller i joner. Av vad ovan framhållits rörande molekylmodellernas tillförlitlighet framgår, att den här behandlade disper-

sionsteorin på vårt vetandes nuvarande utvecklingsstadium icke ger oss någon möjlighet att teoretiskt beräkna jonernas refraktionsförmåga. Dispersionsformeln kan emellertid under vissa förenklande antaganden givas en annan interpretation, varigenom vinnes en synnerligen intressant arbetshypotes, vilken som sådan tillfredsställer långt gående fordringar, och enligt vilken jonernas refraktionsförmåga i vissa enkla fall kan beräknas. Då ytterligare de med stöd av denna hypotes vunna nya resultaten i stor utsträckning kunna underkastas en direkt kontroll och därvid visa sig överensstämma med fakta, hava vi rättighet, att inom vissa gränser förlita oss på hypotesens användbarhet.

Vi hava tidigare (*180*) visat, att den Lorentz-Planck'ska dispersionsformeln för en atom kan skrivas

$$R = \frac{A}{d} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4}{3} N \pi \varrho^3 \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}, \tag{47}$$

där ϱ är dispersionselektronernas svängningsradie, under förutsättning, att de p elektronerna alla befinna sig på samma avstånd från den positiva kärnan, samt om kärnans effektiva laddning Z, med hänsyn till att icke någon fri elektrisk laddning uppträder, enkelt antages $= pe$. Definiera vi atomvolymen V såsom den kring kärnan som centrum konstruerade sfer, på vilken elektronerna befinna sig, samt införa vi beteckningen ν_h för elektronernas egenfrekvens och beteckningen ν för frekvensen av den använda ljusstrålen, kan likheten (47) givas formen

$$R = \frac{NV}{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^2}. \tag{48}$$

Denna formel är intresseväckande redan på grund av sin enkelhet, men i än högre grad genom att densamma för ljus av oändlig våglängd övergår i likheten

$$\frac{A}{d} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{A}{d} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = NV,$$

som är identisk med den likhet, som ernås med stöd av den Clausius-Thomson'ska teorin för dielektrika. Atomvolymen har emellertid härigenom fått en bestämd och plausibel tolkning. Innehåller atomen flere koncentriska elektronsystem, utvidga vi formeln (48) i analogi med dispersionsteorins resultat. Vi finna sålunda för en atom

$$R = \sum \frac{NV_h}{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^2} = N \sum \frac{V_h}{1 - \left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^2}. \tag{49}$$

Om vi vidare antaga atomernas elektronsystem oförändervliga, följer giltigheten av de allmänna likheterna (4a—5a).

Vi hava tidigare framhållit, att enligt Bohrs teori dispersionen måste förklaras bero på inträdande förändringar av elektronbanornas radier, eller, annorlunda uttryckt, av atomvolymen. Dessa förändringar åter bero av konstanterna V_h och ν_h samt av variabeln ν.

Likheten (49) kan sålunda, likasom den försonat den Clausius-Thomson'ska hjälphypotesen med dispersionsteorin, även tänkas utgöra bryggan mellan den klassiska teorin och kvantumteorin.

För formelns användbarhet fordras emellertid, att vi införa något bestämt antagande rörande elektronernas inbördes läge på den atomvolymen definierande sferens yta. En rymdgruppering enligt Born skulle ställa helt nya uppgifter för kvantumteorin. Vi föredraga därför Bohrs ringanordning. Låtom oss antaga, att formeln exakt gäller samt undersöka, i vilken grad den förmår sammanfatta och riktigt återgiva hithörande fakta. Vi observera omedelbart, att vid uträkning av atomvolymen V, den Lorentz'ska formeln återfås fullständigt oförändrad, med undantag av att p numera icke betecknar antalet dispersionselektroner, utan kärnans effektiva laddning uttryckt i elementarkvanta, för vilken kvantitet vi infört beteckningen Z. Vi inse utan vidare, att $Z < p$, på grund av den repellerande verkan av $(p-1)$ elektroner, varvid likhetstecknet gäller endast för $p = 1$. Av ovanstående framgår sålunda, att alla dispersionsteorins tidigare framförda och kontrollerade resultat förbli oförändrade, med undantag av att vid en beräkning, formellt överensstämmande med den klassiska dispersionsteorins beräkning av valenselektronernas antal, som resultat bör utkomma kärnans effektiva laddning. I det vi antaga riktigheten av Drudes valensteori, beräkna vi den effektiva laddningen för kärnorna i de 8 familjerna i det periodiska systemet. Vi antaga elektronerna symmetriskt fördelade på en storcirkel i sferen. Genom en enkel räkning finner man för en ring av p elektroner (*15*, *167*)

$$Z = p - \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{p}}. \qquad (50)$$

Enligt denna likhet erhålles följande tabell

p	1	2	3	4	5	6	7	8
Z	1,00	1,75	2,42	3,04	3,62	4,17	4,70	5,20

I samband med de tidigare av oss angivna kvantiteterna p_r och v (sid. 21), ha även angivits de mot v svarande teoretiska Z värdena. Vi finna, att i denna punkt, där den klassiska dispersionsteorin och vår nya arbetshypotes leda till olika resultat, den nya formeln bättre än den klassiska teorin överensstämmer med Drudes hypotes.

Formlerna (48—49) leda emellertid även till en hel serie andra slutsatser. Vi tänka oss en molekyl med molekylarvikten M bestå av m atomer med atomvikterna $A_1 \ldots A_m$. Molekylarvolymen beteckna vi W, atomvolymerna $V_1 \ldots V_m$. Konstanten b i van der Waals' formel har som känt betydelsen (jfr härmed *83*, *171*)

$$b = 4\,NW. \qquad (51)$$

Man finner därjämte lätt genom analytisk diskussion av van der Waals' formel likheten

$$v_c = 3\,b, \tag{52}$$

där v_c är den kritiska volymen. Beteckna vi den kritiska tätheten d_c, gäller likheten

$$v_c = \frac{M}{d_c}. \tag{53}$$

Således, enligt (51—53)

$$12\,NW = \frac{M}{d_c}. \tag{54}$$

Enligt (5 a) och (48) är emellertid

$$\frac{M}{d_c}\cdot\frac{n_c^2-1}{n_c^2+2} = \sum_{h=1}^{m}\frac{NV_h}{1-\left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^2}, \tag{55}$$

där n_c betecknar brytningsexponenten vid den kritiska punkten. Om vi i jämförelse med 1 försumma termen $\left(\frac{\nu}{\nu_h}\right)^2$, som är av liten storleksordning, finna vi alltså

$$N\cdot\sum_{h=1}^{m} V_h = \frac{M}{d_c}\cdot\frac{n_c^2-1}{n_c^2+2} \tag{56}$$

varav, genom jämförelse med (54) och under antagande att $W = \sum_{h=1}^{m} V_h$, följer

$$\frac{n_c^2-1}{n_c^2+2} = \frac{1}{12} \quad \text{och} \quad n_c = 1{,}128. \tag{57}$$

Brytningsexponenten n_c vid den kritiska punkten kan enklast beräknas ur F_3, som enligt teorin är oberoende av temperaturen,

$$n_c = \sqrt{\frac{1+2F_3\cdot d_c}{1-F_3\cdot d_c}}.$$

Smith (*164*) och Prud'homme (*142—143*) hava för n_c funnit följande värden

Gaser	n_c		*Organiska vätskor*	n_c	
Syre	1,126	*Smith.*	*n. Pentan*	1,125	*Smith.*
Etylen	1,124		*Etyleter*	1,122	
Koldioxid	1,109		*Metylacetat*	1,119	
Svaveldioxid	1,128		*Etylacetat*	1,120	
Kvävoxid	1,110		*Etylalkohol*	1,124	
			i-Amyl-alkohol	1,124	

Oorganiska vätskor. (kondenserade gaser).	n_r	
Ammoniak	1,120	*Smith.*
Klor	1,131	
Klorväte	1,109	
Bromväte	1,126	
Koldioxid	1,101	
Fosforväte	1,137	
Syre	1,124	
Svaveldioxid	1,126	

Organiska vätskor.	n_r	
Benzol	1,127	*Prud'homme.*
Fluorbenzol	1,128	
Klorbenzol	1,127	
Brombenzol	1,128	
Jodbenzol	1,127	
Paraffiner (medeltal)	1,122	
Estrar (medeltal)	1,117	

Rörande detta resultat bör dock framhållas, att riktigheten av likheten (48) därmed endast formellt bekräftats. Däremot innebär den nådda överensstämmelsen icke en experimentell bekräftelse av den teoretiskt vunna tolkningen av atomvolymens betydelse. Det experimentella beviset för formeln (48) är fullständigt först i och med det vi lyckas direkt kontrollera överensstämmelsen mellan atomradien i Clausius-Thomsons atom och elektronbanans radie. Detta är i själva verket icke svårt. Enligt de till grund för den Clausius-Thomson'ska teorin för dielektrika liggande antagandena tangera i en metallisk ledare atomerna varandra. Är vår tolkning av atomvolymen riktig, är således i en metall avståndet mellan två varandra tangerande atomers kärnor lika med 2ϱ, där ϱ är elektronbanans radie. Detta antagande har redan tidigare försöksvis gjorts av Lindemann (*119*); dess teoretiska berättigande följer, som framhållits, av den Rutherford'ska modellen och dispersionsteorin. Vi antaga med Lindemann en tetraedrisk lagring av atomerna. Den uppmätta atomvolymen $V_0 = \frac{A}{d}$ har då betydelsen

$$V_0 = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} N V,$$

men

$$V = \frac{Z e^2}{3 \pi m c^2} \cdot \lambda_0^2,$$

där λ_0 är den mot valenselektronernas egenfrekvens svarande våglängden. Lösas dessa ekvationer med avseende å λ_0, erhålles (jfr i detta sammanhang *120* och *84*)

$$\lambda_0 = \pi \cdot \left(\frac{e}{N e \cdot \frac{e'}{m} \cdot \sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{V_0}{Z}} \cdot 10^7 \ \mu\mu, \tag{58}$$

eller uträknat

$$\lambda_0 = 63{,}9 \sqrt{\frac{V_0}{Z}} \ \mu\mu. \tag{58 a}$$

Den selektiva fotoelektriska effekten (*59-61, 139, 140, 141*) gör det möjligt att direkt bestämma λ_0. Av de experimentella undersökningarna framgår, att λ_0 kan beräknas enligt likheten

$$\lambda_0 = 65{,}3 \cdot \sqrt{\frac{V_0}{p}}\ \mu\mu, \tag{59}$$

där p är antalet valenselektroner. Den selektiva fotoeffekten har observerats endast för alkalimetallerna samt för barium. Då de andra metallerna alla endera ha högre valens eller mindre atomvolym, ligger för dessa den selektiva effekten så långt i ultraviolett, att den av tekniska grunder icke kunnat konstateras. Enär således $p = 1$ eller $p = 2$, vilket motsvarar $Z = 1$ resp. $= 1{,}75$, är riktigheten av den antagna identiteten mellan atomdiametern och elektronbanans diameter genom överensstämmelsen mellan formlerna (58 a) och (59) experimentellt bevisad [1]. Det är anmärkningsvärt, att Z i formeln (58 a) överensstämmer med metallens kemiska valens, varigenom fastslås, att de svängande elektronerna utgöras av metallens valenselektroner.

§ 13. Atomvolymens och atomrefraktionens beroende av atomens elektriska laddningssumma. Vi skola nu göra ett försök att beräkna vilken förändring av atomvolymen, en negativ laddning av s elementarkvanta medför. Vi måste antaga, att valenselektronringen därigenom erhåller ett tillskott av s elektroner. I den oladdade atomen må valenselektronernas antal vara p. För övrigt utmärka vi alla kvantiteter, som hänföra sig till den oladdade atomen med index a och de, som hänföra sig till den laddade atomen eller jonen med index i. Vinkelhastigheten $= \omega$ och radien $= \varrho$. I det vi sätta attraktionskraften mot kärnan lika med elektronens massa multiplicerad med accelerationen mot centrum, erhålla vi den klassiska likheten

$$m\,\omega^2\,\varrho = \frac{Z\,e^2}{\varrho^2} \tag{60}$$

Vi hava tidigare antagit, att alla valenselektroner i en atom, oberoende av om de svänga i samma ring eller i olika koncentriska ringar, höra till samma kvantumtal. Det ligger nära till hands, att utvidga antagandet därhän, att valenselektronerna även i jonen höra till samma kvantumtal som i atomen. Matematiskt innebär detta, att elektronernas rotationsmoment förblir oförändrat. Alltså

$$m\,\varrho_a^2\,\omega_a = m\,\varrho_i^2\,\omega_i \tag{61}$$

och enligt (60-61) (jfr t. ex. Debyes beräkning av K_α-emissionen *48*)

$$\frac{\varrho_i}{\varrho_a} = \frac{Z_a}{Z_i} \tag{62}$$

och därmed den önskade relationen mellan V_i, V_a, p och s

$$V_i = V_a \cdot [f(p, s)]^3, \tag{63}$$

där, enligt likheten (50),

[1] Det bör uttryckligt påpekas, att enligt ovanstående atomvolymen otvivelaktigt är proportionell mot ϱ^3. Jämför Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien p. 111.

$$f(p,s) = \frac{p - \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{p}}}{p + s - \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{p+s-1} \frac{1}{\sin \frac{\pi k}{p+s}}} \tag{64}$$

Av den totala atomrefraktionen må bråkdelen Θ vara en effekt av de inre elektronerna. Således, enligt (49) och om vi försumma dispersionen,

$$\begin{aligned} R_a - \Theta R_a &= N V_a, \\ R_i - \Theta R_a &= N V_i, \end{aligned} \tag{65}$$

varav följer, om vi införa beteckningen $\Delta_{i,a} = R_i - R_a$,

$$\Delta_{i,a} = R_a (1 - \Theta)(f^3 - 1). \tag{66}$$

För element med lågt ordningstal och stort antal valenselektroner kan, som man lätt inser, den sammanlagda volymen ΘR_a av de, av de inre elektronerna definierade, koncentriska sfererna försummas. Likheten (66) övergår därmed i den enkla formeln

$$\Delta_{i,a} = R_a (f^3 - 1). \tag{67}$$

Slutligen kan den yttersta elektronsferens volym V, som för element med högre ordningstal självfallet icke är lika med $R_a : N$, med lätthet beräknas, om vi känna $\Delta_{i,a}$, enär denna differens är oberoende av de inre elektronerna. Vi finna

$$NV = \frac{\Delta_{i,a}}{f^3 - 1}. \tag{68}$$

Det har visat sig, att man oberoende av syran erhåller ständigt samma värde för en metalls atomrefraktion, då man beräknar densamma sålunda, att man från molekylarrefraktionen för lösta organiska metallsalter subtraherar den med stöd av atomrefraktionerna för de organogena elementen beräknade refraktionen för syreresten. Det är klart, att den sålunda erhållna kvantiteten varken betecknar volymen av metallatomen eller metalljonen, enär syreresten, på grund av att densamma uppträder som jon, genom den erhållna laddningen undergått en volymförändring, som i beräkningen försummats. Den nämnda erfarenheten innehåller dock ett viktigt faktum, nämligen att en karbonsyras volymförändring bestämmes av karboxylgruppen och är oberoende av syrans övriga atomer och dessas konfiguration. Vi ha sålunda rätt att anse laddningen och volymförändringen lokaliserad vid hydroxylsyret, vilket står i full harmoni med den på elektrokemiska grunder vilande uppfattningen om laddningens läge i molekylen.

Vi hava tidigare framhållit, att syreatomen otvivelaktigt innehåller 4 inre och 2 yttre valenselektroner. Den effektiva kärnladdningen utgör således för de yttre elektronerna $Z_1 = 1{,}75$ och för de inre $Z_2 = 5{,}04$. Enär dessa elektroner alla höra till samma kvantumtal, gäller likheten (62) även för detta fall, om vi utbyta indices a och i mot 1 resp. 2. Syre-

atomen äger ytterligare två elektroner närmast kärnan (Heliumelektronerna), vilka vi emellertid kunna betrakta som optiskt inaktiva. Således gäller likheten

$$\frac{\Theta}{1-\Theta} = \left(\frac{1{,}75}{5{,}04}\right)^3,$$

varav följer, att Θ i likheten (66) kan försummas och $\Delta_{i,a}$ beräknas enligt formeln (67), där den i funktionen f ingående variabeln p har värdet 2, och variabeln s har värdet 1. Likheten (64) ger oss

$$f(p, s) = 1{,}23.$$

Enär R_a för syre i organiska föreningar har ett något varierande värde, och på grund av att de konstitutiva orsaker, som betinga syrets speciella värde i karboxylens hydroxylgrupp, oaktat dissociationen kvarstå, bör tydligen vid beräkningen av R_i för den organiska jonen förfaras så, att till den med stöd av de Eisenlohr'ska konstanterna beräknade refraktionen för resten adderas

$$\Delta_{i,a} = (1{,}23^3 - 1) \cdot R_a,$$

där R_a utgör atomrefraktionen beräknad ur gasformigt syre. Brühl anger i sitt sammanställande arbete rörande molekylarrefraktionen för gasformiga föreningar (*28*) $R_a = 2{,}_{05}$, med vilket värde nyare mätningar (*44*, *147*) väl överensstämma. Vi finna således

$$(\Delta_{i,a})_O = +\,1{,}_{76}. \tag{69}$$

För klor åter måste, som tidigare framhållits, de 7 valenselektronerna antagas befinna sig på samma ring. De inre elektronerna kunna, såsom hörande till ett lägre kvantumtal, försummas. Enär således $\Theta = 0$, $p = 7$ och $s = 1$, finna vi

$$R_i = [f(p, s)]^3_{\substack{p=7 \\ s=1}} \cdot R_a.$$

R_a har i det närmaste samma värde i organiska föreningar som för gasformigt Cl_2. För organiska föreningar finner Eisenlohr $R_a = 5{,}_{98}$, medan Brühl (*28*) för gasformigt Cl_2 anger $R_a = 5{,}_{78}$. Enär det för resultatet är tämligen likgiltigt vilketdera värdet vi välja, lägga vi medeltalet $5{,}_{88}$ till grund för beräkningen. Vi finna sålunda

$$(\Delta_{i,a})_{Cl} = +\,2{,}_{36}. \tag{70}$$

Vi äro i tillfälle att på ett utmärkt sätt pröva riktigheten av likheterna (69—70). Om, såsom hittills gjorts, den negativa jonen av ett organiskt salt tillskrives samma refraktionsvärde, som ur atomrefraktionerna beräknas för den oladdade syreresten, erhålles enligt formeln (69) för metalljonen ett värde, som är $1{,}_{76}$ enheter för stort. Subtraheras detta skenbara värde för metalljonens refraktion från det experimentellt bestämda värdet för metallkloriden, erhålles för klorjonens refraktion ett värde, som är $1{,}_{76}$ enheter för litet och alltså enligt (70) ett värde, som är $0{,}_{60}$ enheter större än atomrefraktionen för klor.

Enligt Le Blanc (*116*) är den skenbara refraktionen för Na-jonen $= 2{,}_{69}$, medan av Chéneveaus (*41* p. 299) undersökningar framgår, att molekylarrefraktionen för dissocierat

$NaCl$ är = 9,17. Vi finna således för klorjonen det skenbara värdet 6,48, eller med andra ord ett värde, som är precis 0,60 enheter större än atomrefraktionen för klor. Det bör påpekas, att med hänsyn till storleken av de möjliga experimentella felen, denna precisa överensstämmelse är att betrakta som en tillfällighet. Av vår beräkning följer dock, att någon nämnvärd skillnad mellan det teoretiska och det experimentella resultatet icke kan förefinnas. Därigenom är ett tidigare obegripligt faktum kvantitativt förklarat.

Formlerna (69—70) leda emellertid till ytterligare och synnerligt viktiga slutsatser. Enär väteatomen, vars atomrefraktion är 1,100, består av en kärna, kring vilken kretsar endast *en* elektron, är således volymen och refraktionsvärdet för vätejonen lika med noll. Då en karbonsyra dissocieras, bör alltså enligt likheten (69) dess molekylarrefraktion växa med 0,66. Enär Le Blanc (*116*) för svaga, enkelt konstituerade karbonsyror för differensen δ mellan Na-saltets och syrans molekylarrefraktioner finner följande värden:

Myrsyra	1,58	
Ättiksyra	1,60	
Glykolsyra	1,61	medeltal $\delta = 1{,}59$
Propionsyra	1,56	
Etylidenmjölksyra	1,60	

bör således, enligt teorin, för starkare karbonsyror denna differens δ med växande dissociationsgrad närma sig värdet $1{,}59 - 0{,}66 = 0{,}93$. Le Blanc finner för den praktiskt taget ännu fullständigt odissocierade monoklorättiksyran $\delta = 1{,}60$, däremot för diklorättiksyran $\delta = 1{,}34$, för triklorättiksyran $\delta = 1{,}16$ och för triklorsmörsyran $\delta = 0{,}95$. Detta Le Blancs resultat, vilket olika författare fåfängt sökt bortresonera, är sålunda jämväl teoretiskt förklarat.

Den molekylarrefraktion, som saltsyran uppvisar i lösning, utgör den slutliga kontrollen av likheten (70). Vi beräkna teoretiskt för den dissocierade saltsyran följande värde:

$$H' = 0{,}00$$
$$Cl' = 8{,}24 = (5{,}88 + 2{,}36)$$
$$[H' + Cl'] = 8{,}24.$$

Chéneveau (*41*, p. 214) finner för den mest koncentrerade av honom undersökta saltsyrelösningen molekylarrefraktionen 8,23. Le Blanc (*116*) har erhållit värdet 8,30 och Zecchini (*183*) värdet 8,26. Vår arbetshypotes har sålunda även i detta fall bekräftats.

Vi vilja nu återgå till en fråga, som redan tidigare i korthet berörts. Vi hava nämnt, att valenselektronerna i en atom måste antagas höra till ett bestämt system, vilket definieras av kvantumtalet n. Vi hava även tidigare framhållit, att detta tal n på något bestämt sätt fastställes av nummern för den horisontalrad i det periodiska systemet, som elementet tillhör. Vi hava sålunda att vänta oss, att den yttersta elektronringens radie med växande atomvikt inom varje bestämd grupp växer enligt samma lag.

Existensen av den ultravioletta Lyman-serien för väte bevisar, att för den första horisontalraden i det periodiska systemet $n = 1$. Vidare vilja vi tillskriva de båda horison-

talraderna i en stor period samma kvantumtal. I de stora perioderna existera nämligen i den första radens 8:de familj element, vilka kunna uppvisa valensen 8, medan den stabila slutformen med valensen 0 uppträder först i andra radens 8:de familj, varigenom riktigheten av det ovan gjorda antagandet bekräftas. De två små perioderna, börjande med *Li* och *Na*, vilja vi jämväl för symmetrins skull tillskriva samma kvantumtal, 2.

I själva verket har Cuthbertson [1] funnit, att atomrefraktionen för gaserna (vilken enligt teorin approximativt betecknar atomvolymen) i V, VI, VII och VIII familjerna inom en bestämd grupp med växande atomvikt växer enligt samma bestämda, genom hela tal angivbara lag. Vi utvälja VII och VIII familjerna som exempel. »N:o» betecknar radens nummer, n kvantumtalet och a en för familjen och gruppen karakteristisk enhet, lika med volymen av den av kvantumtalet $n = 1$ definierade sferen.

N:o	VII	VIII	n	$[NV : a_7]_{VII}$
1	—	$He = a_8$	1	1
2	$F = 2\,a_7$	$Ne = 2\,a_8$	2	2^1
3	$Cl = 8\,a_7$	$A = 8\,a_8$	2	2^3
4			3	3^2
5	$Br = 12\,a_7$	$Kr = 12\,a_8$		
6			4	4^2
7	$J = 20\,a_7$	$X = 20\,a_8$		

Däremot finna vi icke på detta sätt något enkelt sammanhang mellan atomvolymens storlek och kvantumtalet. Det är utan vidare klart, att för atomer med högre ordningstal $R > NV$, enär kvantiteten R utgör summan av alla de koncentriska sferer, som definieras av de olika elektronbanorna. Nu uppställer sig till besvarande frågan, om vi kunna beräkna volymen NV av den yttersta sferen ur experimentellt bestämbara data. Enligt formeln (68) är detta möjligt för halogenerna. Vi hava tidigare beräknat och experimentellt lyckats kontrollera likheten

$$(\Delta_{i,a})_{Cl} = +2{,}36. \tag{70}$$

Emellertid finner Le Blanc (*116*)

$$[K^{\cdot} + Br'] - [K^{\cdot} + Cl'] = 3{,}45 \qquad [K^{\cdot} + J'] - [K^{\cdot} + Cl'] = 10{,}00$$
$$[Rb^{\cdot} + Br'] - [Rb^{\cdot} + Cl'] = 3{,}33 \qquad [NH_4^{\cdot} + J'] - [NH_4^{\cdot} + Cl'] = 10{,}03$$
$$\therefore \quad (Br' - Cl') = 3{,}39 \qquad \therefore \quad (J' - Cl') = 10{,}015.$$

Härav följer:

$$(\Delta_{i,a})_{Br} = (Cl - Br) + 2{,}36 + 3{,}39; \quad (\Delta_{i,a})_{J} = (Cl - J) + 2{,}36 + 10{,}02.$$

[1] Cuthbertsons resultat äro i korthet refererade hos Loria (*128*, p. 75).

Enligt (70) följer vidare, då $(Cl - Br)$ och $(Cl - J)$ beräknas enligt Eisenlohr (*57*)

$$\left[\frac{NV}{a_7}\right]_{Br} = 8\frac{(\Delta_{i,a})_{Br}}{(\Delta_{i,a})_{Cl}} = 9{,}7; \qquad \left[\frac{NV}{a_7}\right]_{J} = 8\frac{(\Delta_{i,a})_{J}}{(\Delta_{i,a})_{Cl}} = 15{,}1.$$

Med hänsyn till att $\left[\frac{NV}{a_7}\right]$ här beräknas såsom kvoten av två små tal, av vilka speciellt täljaren utgör den algebraiska summan av relativt stora och osäkra tal med motsatta tecken, överensstämma de erhållna resultaten fullt tillfredsställande med antagandet

$$\left[\frac{NV}{a_7}\right]_{Br} = 3^2 \quad \text{och} \quad \left[\frac{NV}{a_7}\right]_{J} = 4^2.$$

Härigenom erhålles, som av den tidigare anförda tabellen framgår, ett tydligt sammanhang mellan kvantumtalet n och den av valenselektronerna definierade sferens relativa volym $\left[\frac{NV}{a_7}\right]$. Utan att fästa överdrivet avseende vid detta resultat, hava vi dock icke velat underlåta att omnämna detsamma, enär Cuthbertsons bekanta regel därigenom erhåller en ny belysning, och användbarheten av vår arbetshypotes samtidigt ådagalägges.

Vi vilja slutligen uttryckligt påpeka, att vår arbetshypotes på intet sätt har karaktären av en teori, som skulle vilja göra anspråk på att exakt motsvara verkligheten. Detta framgår redan därav, att den försummar att beakta den roll, valenselektronerna utan tvivel spela för molekylens sammanhållning. På grund därav betraktas även enligt denna arbetshypotes molekylarrefraktionen som en rent additiv egenskap, medan speciellt Brühl (*28*) och C. och M. Cuthbertson (*43*, *45*) ha visat, att atombindningen i molekylen förändrar refraktionsförmågan. Fördelarna av en sådan arbetshypotes, betraktad i rätt ljus och *icke* såsom *exakt* representerande verkliga sakförhållandet äro dock påtagliga.

Innan vi avsluta detta kapitel, vilja vi ännu framhålla, att C. Cuthbertson (*42*), med stöd av experimentella undersökningar, för ädelgaserna lyckats påvisa vissa enkla relationer mellan antalet dispersionselektroner p per atom och Sutherlands temperaturkoefficient C för den inre friktionen samt mellan p och radien σ av atomens verkningssfer.

II.

Resultaten av tidigare experimentella undersökningar.

§ 1. Den specifika refraktionsförmågans analytiska definition. Stödande sig på Newtons emissionsteori visade Laplace (*114*), att expressionen $(n^2-1):d$ bör vara oberoende av temperatur och tryck, och att således, enligt den av oss införda beteckningen, likheten (1 a) satisfieras för $\varphi(n) = n^2 - 1$. Biot och Arago (*12*) påvisade den approximativa riktigheten av denna likhet för gaser, samt funno samtidigt för gasblandningar rent experimentellt den efter dem benämnda lagen om den specifika refraktionsförmågans additiva karaktär. Medan forskningen på detta område[1] under tiden 1806—1850 i huvudsak icke ledde till några som helst nya resultat, utfördes mellan 1850 och 1870 ett stort antal undersökningar rörande vätskor och lösningar, delvis i avseende att verificera de båda ovannämnda lagarna även för sistnämnda slag av substanser (*72—76, 78—79, 111—113, 151, 155—160, 182*). Därvid konstaterades avvikelser, vilka icke helt kunde rubriceras som experimentfel, oaktat apparaturen enligt moderna föreställningar var mycket primitiv. Schrauf föreslog därför ersättandet av n i Newton-Laplace's formel, $\frac{n^2-1}{d} =$ konstant, med kvantiteten A i Cauchys formel

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}.$$

Icke heller därigenom vanns emellertid avsevärt bättre resultat. En annan väg inslogs av Gladstone och Dale (*73*). De definierade $\varphi(n) = n - 1$. Därigenom erhölls en märkbart bättre överensstämmelse med verkligheten än enligt Newton-Laplace's formel, som under tiden även förlorat sin teoretiska betydelse genom undulationsteorins seger, och av ovan antydda två orsaker rätt snart kom ur bruk. Den har först på senaste tid genom Drudes dispersionsteori återvunnit en viss betydelse. Gladstone själv ersatte senare försöksvis i formeln $(n-1):d$ n med A i Cauchys formel, och såväl Wüllner (*182*) som Borner (*22*) och Damien (*46*) ansågo därmed en bättre överensstämmelse ernås, men redan Rühlmann

[1] Den äldre litteraturen finnes till stor del omnämnd i två arbeten av Schrauf (*155*) och Gladstone (*74*).

(*151*) hade påpekat olämpligheten och onödigheten av ett sådant förfaringssätt, då likväl endast en approximativ överensstämmelse uppnåddes.

Genom nämnda undersökningar, av vilka Gladstones och Landolts äro mest anmärkningsvärda, men i än högre grad genom Gladstones (*77, 80, 81*), Brühls (*23-33*) och Kanonnikoffs (*98-99*) senare arbeten, för att blott nämna de viktigaste, framgick, att Biots och Aragos lag även kunde utsträckas till kemiska föreningar, eller att med andra ord molekylarrefraktionen additivt kunde beräknas ur atomrefraktionerna. Brühls intill våra dagar sig sträckande undersökningar rörande organiska substanser utgöra den klassiska grundstommen i den utomordentligt rika forskningen inom den organiska kemin på detta spektrokemiska gebit. Det må framhållas, att Brühls ensidigt starka betoning av ringbildningens inaktivitet med hänsyn till refraktions- och dispersionsförmågan ledde till en viss överskattning av den spektrokemiska metodens användbarhet för konstitutionsbestämningar, varigenom den utomordentligt snabba utvecklingen på detta speciella organiska område får sin förklaring. Senare undersökningar (*3*) hava givit vid handen, att omättade ringar och mättade ringar, i vilka spänning förekommer, utöva ett icke alldeles obetydligt inflytande på föreningarnas optiska egenskaper. Observerande bestämda konstitutiva inflytanden, till en början endast av dubbelbindningar och tredubbelbindningar, senare även konjugation, anhopning av radikaler o. s. v., kunde man snart med rätt stor noggrannhet ur atomrefraktionerna och dispersionerna teoretiskt beräkna molekylarrefraktionen och molekylardispersionen för en given substans. Den åsikten befäste sig allt mera, att man, om man blott finge reda på det riktiga uttrycket för den specifika refraktionsförmågan, med observerande av bestämda konstitutiva inflytanden, utomordentligt exakt skulle kunna beräkna molekylarrefraktionen för varje given förening. Sålunda säger redan Rühlmann: »Jag anser det överflödigt, att försöka införa någon ny relation mellan ljusets fortplantningshastighet och kroppens täthet, enär de matematiska undersökningarna säkert snart skola giva den önskade upplysningen, varefter blott en jämförelse mellan teori och experiment återstår.»

Såsom tidigare nämnts hade Lorentz och Lorenz 1880 teoretiskt för $\varphi(n)$ deducerat uttrycket

$$\varphi(n) = \frac{n^2 - 1}{n^2 \quad 2}.$$

Denna likhet adopterades småningom av kemisterna och har, som av Lorentz' och Plancks senare på elektronteorin grundade deduktion framgår, utan tvivel fördelen av att äga den mest precisa fysikaliska betydelsen. Gladstone-Dales formel har, trots dess enkelhet, icke kunnat givas någon teoretisk interpretation.

Icke heller Lorenz-Lorentz' formel uppfyller generellt exakt de likheter, vilka vi låtit definiera begreppet $\varphi(n)$. Men mer eller mindre omedvetet hade tron på existensen av denna funktion rotfäst sig, säkerligen till stor del på grund av att man successivt funnit uttryck för $\varphi(n)$, vilka allt bättre satisfierade de definierande likheterna. Det saknas sålunda icke i litteraturen försök att empiriskt finna ett fullt tillfredsställande analytiskt uttryck för denna funktion. Av dessa vilja vi omnämna Hibberts (*95*) formel, enligt vilken

$$(n^2 - 1)(1 - \beta d) = \text{konstant},$$

där β är den del av volymen, som molekylerna verkligen intaga, Johsts formel (*97*), enligt vilken

$$\varphi(n) = \sqrt{n} - 1,$$

Eykmans formel (*62—68*), enligt vilken

$$\varphi(n) = \frac{n^2 - 1}{n + 0.4}$$

och slutligen Edwards' formel (*55*), som definierar

$$\varphi(n) = \frac{n - 1}{n}.$$

Om vi emellertid på basen av elektronteorin skulle utveckla en dispersionsteori, därvid observerande flere rörliga elektronsystem, kunna vi a priori förutsäga, att en generell funktion $\varphi(n)$ icke kunde framkomma. O. Wiener (*181* jfr *153*) har utvecklat en formel för dielektricitetskonstanten ε, utan att i likhet med Lorentz göra något antagande beträffande molekylernas form. Han finner på så sätt

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + u} = \text{konstant},$$

i vilken formel u betecknar en konstant, som beror av molekylens form. För sferiska molekyler antar u värdet 2, men med tilltagande avvikelse från klotformen avviker u alltmera från detta värde. Enligt denna teori utgör Gladstone-Dales formel ett specialfall, likaväl som Lorenz-Lorentz' formel, i det att den förstnämnda formeln för bestämda avvikelser från klotformen bör uppfylla villkoret (1 a).

Både på teoretisk och experimentell väg har man numera således kommit till det resultatet, att en funktion $\varphi(n)$, som exakt skulle uppfylla de föreskrivna villkoren, icke existerar. Det är under sådana förhållanden självfallet fullkomligt onödigt att operera med alltför många eller invecklade formler, och det må påpekas, att enär egenskaperna av funktionen φ, som man lätt inser, bestämmas genom derivatan

$$\frac{d \ln \varphi(n)}{d n},$$

de olika formlernas användbarhet fullkomligt kan överskådas, om, vid en undersökning som den föreliggande, alla kvantiteter uträknas enligt de tre olika formlerna

$$\varphi(n) = n^2 - 1 \qquad \text{(Newton-Laplace-Drude)}$$
$$\varphi(n) = n - 1 \qquad \text{(Gladstone-Dale)}$$
$$\varphi(n) = (n^2 - 1) : (n^2 + 2) \qquad \text{(Lorenz-Lorentz-Planck)}$$

§ 2. Den specifika refraktionsförmågans konstans. I överensstämmelse med våra slutpåståenden i föregående paragraf inskränka vi oss här till att i korthet anföra de resultat, till vilka den experimentella forskningen lett, beträffande de tre i nämnda paragraf sär-

skilt framhållna analytiska uttryckens invariabilitet under olika förhållanden. Vi begynna därvid med att granska i vilken mån den specifika refraktionsförmågan håller sig konstant vid varierande temperatur.

Undersökningarna beträffande gaser hava lett till varandra delvis motsägande resultat. Förbigående de äldre arbetena på detta område, omnämna vi Walkers (*179*) resultat beträffande luft, H_2, CO_2 och SO_2. Framställa vi brytningsexponenten som funktion av temperaturen genom likheten

$$(n-1)(1+\alpha t) = \text{konstant},$$

samt jämföra vi koefficienten α med utvidgningskoefficienten a, finna vi enligt Walker för luft och H_2 $\alpha < a$ och för CO_2 och SO_2 $\alpha > a$. Scheel (*154*) finner vid låga temperaturer (till $-190°$) ävenledes avvikelser, vilka han dock anser kunna bero på experimentfel. Ayres (*4*) har undersökt refraktionen av H_2, O_2, N_2 och CO_2 mellan temperaturerna 0° och $-189°$, varvid han beräknat tätheterna för CO_2 och för N_2 vid $-189°$ enligt van der Waals' formel, medan han för H_2 och O_2 använt den enkla Boyle'ska formeln. Ayres finner, att Gladstones och Lorentz' formler lika väl överensstämma med verkligheten. En möjlighet att avgöra, vilken av de tre expressionerna för $\varphi(n)$ här är att föredraga framom de andra, föreligger icke tills vidare.

Medan för flytande vatten formeln $(n^2-1):(n^2+2)$ avgjort bäst motsvarar de experimentella resultaten, är förhållandet i allmänhet ett annat med flytande organiska substanser. Sammanfattande de säkraste resultaten på detta område (Eykman (*62—68*), Falk (*69*)) kunna vi säga, att formeln $\frac{n^2-1}{d}$ genomgående har en negativ och formeln $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$ i allmänhet en positiv temperaturkoefficient, medan temperaturkoefficienten för expressionen $\frac{n-1}{d}$ för olika substanser är varierande positiv och negativ. Det är måhända skäl att påpeka, att isotropa ämnen med mycket stor inre friktion, såsom särskilda glassorter (*71*), förhålla sig på tills vidare fullkomligt oförklarligt sätt och här helt måste lämnas ur räkningen. Anisotropa ämnen vilja vi, av teoretiska orsaker, som i det föregående framhållits, icke ägna uppmärksamhet.

En märkbar variation av tätheten och därmed även av $\varphi(n)$ med varierande tryck förekommer självfallet endast hos gaserna. Medan Mascart (*131*), Chappuis och Rivière (*36*) samt Gale (*70*) och Statescu (*168—169*) icke lyckats observera avvikelser från Gladstone-Dales formel, beroende på att de arbetat vid jämförelsevis låga tryck — Mascart under 8, Chappuis och Rivière samt Gale under 20 och Statescu under 2 atmosfärer, utförde Magri (*130*) 1905 en utomordentligt omsorgsfull undersökning rörande luft intill ett tryck av 200 atmosfärer, varvid även tätheten direkt med stor noggrannhet bestämdes. Därvid framgick, att den specifika refraktionsförmågan enligt $\frac{n-1}{d}$ formeln stiger med stigande tryck, medan $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}$ är fullkomligt konstant.

Varieras temperaturen eller trycket inom sådana gränser, att den betraktade substansen förändrar aggregationstillstånd, varigenom såväl $d(t)$ som $\varphi(n)$ uppvisar en diskon-

tinuitet, erhålles självfallet en ypperlig kontroll av de nämnda formlernas användbarhet. För sådana fall har det visat sig, att Lorenz-Lorentz' formel äger avgjort företräde framom de övriga. Exemplen härpå äro så klassiska och välkända, att vi icke här ha skäl att närmare uppehålla oss vid desamma (*144*). Beroende på dess teoretiskt precisa betydelse och på den grund, som här till sist framhållits, äger Lorenz-Lorentz' formel den ojämförligt största betydelsen.

§ 3. Molekylarrefraktionens additivitet. Beträffande molekylarrefraktionens additivitet vilja vi framhålla, att de vidlyftiga arbetena på den organiska kemins område synas hava utvisat, att Gladstone-Dales formel är känsligare än Lorenz-Lorentz' formel för konstitutiva inflytanden, varför additiviteten för den senare formeln måste betraktas såsom mera utpräglad. Brühl finner (*25*), att konstanten $R = \frac{M}{d}(n-1)$ är allmänt användbar endast för mättade alifatiska föreningar. För substanser med starkare dispersion måste denna formel förkastas och ersättas med formeln $R = \frac{M}{d} \cdot \frac{n^2-1}{n^2+2}$, vars användbarhet icke inskränkes till någon bestämd klass av föreningar. Därmed jämförligt är, att enligt Hallwachs (*85—88*), Borgesius (*18*), Dijken (*49*) och andra de vanligtvis inträffande stegringarna av molekylarrefraktionen för lösta salter med växande utspädning (dessa stegringar inträffa först för utomordentligt starkt utspädda lösningar) enligt Lorenz-Lorentz' formel äro minst framträdande. Vid sistnämnda faktum bör dock icke överdriven vikt fästas, enär formelns natur för dylika fall icke utövar något större inflytande på molekylarrefraktionens gång.

Eykman (*66—68*) påpekar, att molekylarrefraktionen och speciellt molekylardispersionen för en bestämd atom eller atomgrupp kan betraktas som konstant, endast så länge atomen eller atomgruppen i de olika föreningarna har en fullt identisk funktion. Som vi i slutet av föregående kapitel framhållit, kan icke heller molekylarrefraktionen för en gas exakt beräknas ur atomrefraktionerna, bestämda ur andra föreningar. Dessa fakta äro icke överraskande, och vi hava redan tidigare, i kapitel I, förklarat dem vara en nödig konsekvens av valenselektronernas funktion. Att emellertid valenselektronerna icke i allt för hög grad vid molekylbildningen förändra sina banor framgår, utom av rent energetiska betraktelser, även av det faktum, att molekylarrefraktionerna för gaserna, såsom H_2, Cl_2, HCl o. s. v., dock approximativt, och i själva verket med ett förvånansvärt litet fel, kunna beräknas ur atomrefraktionerna, bestämda ur organiska föreningar. Ett noggrant studium av konstitutiva inflytanden på molekylarrefraktionen och dispersionen har ett synnerligt stort praktiskt värde, men det må dock uttryckligt påpekas, att molekylarrefraktionen, så länge vi undersöka rena flytande eller gasformiga substanser, som icke äro associerade eller dissocierade, är att betrakta som en additiv egenskap.

§ 4. Biots och Aragos lag. För blandningar av gaser gäller Biots och Aragos lag med stor precision. För gasformiga ämnen, där n approximativt är lika med 1, är det självklart, att formelns natur endast mycket obetydligt inverkar på resultaten. För gaser gäller vid icke alltför stora tryck praktiskt taget

$$\frac{n^2-1}{d}-(n+1)\frac{n-1}{d}=2\frac{n-1}{d}\cdot$$

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d}=\frac{n+1}{n^2+2}\frac{n-1}{d}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n-1}{d}$$

För lösningar såväl av icke elektrolyter som av elektrolyter åter, förekomma däremot avvikelser av sådan storlek, att desamma, jämförda med de differenser, som uppträda mellan den observerade och den beräknade molekylarrefraktionen för kemiska föreningar, med bestämdhet utvisa, att komplikationer uppkomma, vilka erfordra alldeles särskilda undersökningar. Sådana lösningar ge oss alltså icke, åtminstone icke omedelbart, några uppgifter om de olika formlernas användbarhet.

§ 5. Benders lag. Enligt Biots och Aragos lag gäller för en saltlösning vid en bestämd temperatur formeln

$$\varphi(n)=\frac{\varphi(n_0)}{d_0}\left(d-c\,M\,10^{-3}\right)+c\,R\,10^{-3},$$

där n_0 är lösningsmedlets och n lösningens brytningsexponent, d_0 lösningsmedlets och d lösningens täthet, c lösningens koncentration i grammolekyler per liter, M saltets molekylarvikt och R dess molekylarrefraktion. Vi beteckna $d-d_0=\Delta d$ och $n-n_0=\Delta n$. Låtom oss vidare för ett annat salt, till exempel kaliumklorid, införa beteckningarna $\Delta\bar{n}$, $\Delta\bar{d}$, $\bar{M}$ och $\bar{R}$, varvid $\Delta\bar{n}$ och $\Delta\bar{d}$ må hänföra sig till samma koncentration c, som kvantiteterna Δn och Δd. Utveckla vi vidare $\varphi(n)$ i form av en Taylor serie, samt subtrahera vi från vartdera membrum kvantiteten $\varphi(n_0)$, finna vi följande par ekvationer:

$$\varphi'(n_0)\cdot(\Delta n)+\frac{1}{2}\varphi''(n_0)\cdot(\Delta n)^2+\cdots=\frac{\varphi(n_0)}{d_0}\cdot\Delta d-\frac{\varphi(n_0)}{d_0}c\,M\,10^{-3}+c\,R\,10^{-3},$$

$$\varphi'(n_0)\cdot(\Delta\bar{n})+\frac{1}{2}\varphi''(n_0)\cdot(\Delta n)^2+\cdots=\frac{\varphi(n_0)}{d_0}\cdot\Delta\bar{d}-\frac{\varphi(n_0)}{d_0}c\,\bar{M}\,10^{-3}+c\,\bar{R}\,10^{-3}.$$

Genom Valsons (*172*, *175*) och Benders (*5*) arbeten är känt, att vi kunna uttrycka tätheten d genom tätheten d och två moduler a_1 och b_1 karakteristiska för saltets joner; således

$$d=d+c\,(a_1+b_1).$$

Vidare uttrycka vi molekylarvikten M som en summa av jonernas vikter a_2 och b_2 samt molekylarrefraktionen R som en summa av jonrefraktionerna a_3 och b_3. Genom subtraktion av den senare likheten från den förra finna vi sålunda, om vi försumma termerna av högre ordning,

$$\varphi'(n_0)\left[\Delta n-\Delta\bar{n}\right]=\frac{\varphi(n_0)}{d_0}\cdot c\,(a_1+b_1)-\frac{\varphi(n_0)}{d_0}c\cdot10^{-3}(a_2-\bar{a}_2+b_2-\bar{b}_2)+$$

$$+c\cdot10^{-3}(a_3-\bar{a}_3+b_3-\bar{b}_3);$$

$$\Delta n - \Delta \bar{n} = c\left[\frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,a_1 - \frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\cdot 10^{-3}(a_2 - a_2) + \frac{10^{-3}}{\varphi'(n_0)}(a_3 - a_3)\right] +$$

$$+ c\left[\frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,b_1 - \frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\cdot 10^{-3}(b_2 - b_2) + \frac{10^{-3}}{\varphi'(n_0)}(b_3 - b_3)\right],$$

och alltså

$$\Delta n = \Delta n + c\,(A + B),$$

där A och B äro två moduler, som bero endast av de båda jonernas natur. Således genom införande av n

$$n_c = n_c + c\,(A + B).$$

Av härledningen följer, att ovanstående formel endast är approximativt riktig. Den saknar, såsom varande en indirekt konsekvens av Biots och Aragos lag, varje större teoretiskt intresse, men den äger utan tvivel stor praktisk betydelse, till exempel för optiska koncentrationsbestämningar. Den erhållna likheten är identisk med den av Valson (*173*, *176*) och Bender (*6* jfr *7-10*) experimentellt funna lagen rörande additiviteten av brytningsindex för saltlösningar.

§ 6. Heydweillers lag. Genom Heydweillers (*92-93*) tidigare arbeten rörande täthetens beroende av dissociationsgraden har framgått, att $\frac{\Delta d}{c}$ kan uttryckas genom den lineära likheten

$$\frac{\Delta d}{c} = A_d\,i + B_d\,(1 - i),$$

där i betecknar saltets dissociationsgrad, och A_d och B_d äro två konstanter. Biots och Aragos lag kan således skrivas

$$\varphi(n) = \varphi(n_0) + \frac{\varphi(n_0)}{d_0}\cdot c\left\{A_d\,i + B_d\,(1 - i)\right\} - \frac{\varphi(n_0)}{d_0}\cdot c\,M.\,10^{-3} + c\,R.\,10^{-3}$$

och, i det vi åter utveckla $\varphi(n)$ som en serie och försumma termerna av högre ordning,

$$\varphi'(n_0)\cdot\Delta n = c\left\{\frac{\varphi(n_0)}{d_0}\,A_d\,i + \frac{\varphi(n_0)}{d_0}\,B_d\,(1 - i) - \frac{\varphi(n_0)}{d_0}\,M.\,10^{-3} + R.\,10^{-3}\right\}.$$

Enär R kan tänkas bero av dissociationsgraden, beteckna vi $R = R_a\,i + R_b\,(1 - i)$. Vi hava alltså

$$\frac{\Delta n}{c} = \left(\frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,A_d + \frac{R_a.\,10^{-3}}{\varphi'(n_0)} - \frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,M.\,10^{-3}\right)\cdot i +$$

$$+ \left(\frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,B_d + \frac{R_b\cdot 10^{-3}}{\varphi'(n_0)} - \frac{\varphi(n_0)}{d_0\,\varphi'(n_0)}\,M.\,10^{-3}\right)\cdot(1 - i)$$

och, genom införande av enklare beteckningar,

$$\frac{\Delta n}{c} = A_n\cdot i + B_n\cdot(1 - i).$$

Denna lag har experimentellt konstaterats av Heydweiller (*92*, *94*, jfr *129*). Enligt densamma beror Δn således av dissociationsgraden, förutsatt, att $A_n \neq B_n$. Av deduktionen framgår emellertid, att $A_n \neq B_n$ så snart $A_a \neq B_b$, oberoende av huruvida $R_a \neq R_b$ eller $R_a = R_b = R$. Att Δn visar sig vara en funktion av dissociationsgraden bevisar således på intet sätt, att det lösta saltets optiska egenskaper genom dissociationen skulle förändras.

§ 7. Molekylarrefraktionen för lösta icke-elektrolyter. För att rätt kunna bedöma de egendomligheter, som molekylarrefraktionen för lösta elektrolyter uppvisar, är det nödigt att först i korthet undersöka, till vilka resultat forskningen kommit beträffande molekylarrefraktionen för lösta icke-elektrolyter. Vi hava redan vid ett tidigare tillfälle nämnt, att för lösningar avvikelser av betydande storlek från Biots och Aragos lag uppträda. Medan här antydda fakta med tydlighet framträtt redan i äldre författares undersökningsresultat (*182*, *97*, *35*), fästes dock till en början icke tillbörlig vikt vid desamma. Så trodde sig Ostwald (*134*) ännu 1891 kunna konstatera, att de nämnda anomalierna skulle uppträda endast i samband med dissociation. Men redan samma år visade Nasini och Costa (*132*), att molekylarrefraktionen för av dem undersökta icke-elektrolyter varierar såväl med koncentrationen som med naturen av lösningsmedlet. Visande i samma riktning, men mindre säkra, voro Berghoffs (*11*) och van Aubels (*2*) resultat. Det visade sig snart (*30*, *150*), att speciellt lösningsmedlets natur starkt inverkar på den lösta substansens molekylarrefraktion och i än högre grad på dess molekylardispersion. Däremot föreföll koncentrationens inverkan på molekylarrefraktionen vara mindre starkt framträdande (*110*, *117*, *177*). Det är för oss av särskilt intresse att göra oss förtrogna med storleksordningen av dessa avvikelser, varför vi i korthet vilja anföra några siffror, baserade på Zopellaris (*184*) undersökning 1905. Siffrorna hänföra sig till Lorenz-Lorentz' formel. Först några ord om den noggrannhet, som vid dylika bestämningar uppnås. Experimentfelet vid bestämningen av n och d inverkar på molekylarrefraktionen med en kvantitet omvänt proportionell mot koncentrationen. Ett konstant procentiskt koncentrationsfel förskjuter molekylarrefraktionen med en konstant kvantitet, varför ett sådant fel i detta sammanhang är av underordnad betydelse. För övrigt kunna koncentrationsfelens storlek självfallet icke överskådas, och deras inverkan på molekylarrefraktionen beror på skillnaden mellan den specifika refraktionsförmågan för den lösta substansen och lösningsmedlet. Det största *tillfälliga* felet bör dock, vid noggrant arbete, härflyta ur bestämningarna av brytningsexponenten och tätheten. Zopellaris undersökningar av rörsockerlösningar utvisa, att vid en koncentration av ungefär 35 % den beräknade refraktionsförmågans fel knappast överstiger 0,3—0,5 %. Han finner vidare, att molekylarrefraktionen för naftalin i benzol med stigande koncentration (4 %—22 %) sjunker från 44,69 till 44,04 eller med ungefär 1,5 %. Naftalin i aceton sjunker från 45,28 till 45,01 med stigande koncentration (6 %—23 %). Molekylarrefraktionen för naftalin ökas sålunda med 2 %, om vi i stället för benzol använda aceton som lösningsmedel. Tymol visar vid en liknande övergång från benzol till aceton ävenledes en ökning av ungefär 2 %, medan molekylarrefraktionen för nämnda substans är ungefär densamma i aceton som i metylalkohol. Kamfer förhåller sig på liknande sätt till de tre nämnda lösningsmedlen, och dess molekylarrefraktion sjunker i metylalkohollösning monotont med stigande koncentration (6 %—43 %) med ungefär 1 %.

Av de ovan anförda siffrorna kunna vi draga den synnerligt viktiga slutsatsen, att vi, då det är fråga om lösta elektrolyter, icke ha någon orsak att a priori betrakta sådana förändringar av molekylarrefraktionen, som icke överstiga 1—2 % såsom direkt beroende av själva jonspjälkningen. Det är sålunda tänkbart, att avvikelser av här nämnt slag kunna bero på de olika associationsfenomen, som i lösningar lätt kunna uppträda, om än i vissa fall förklaringsgrunden möjligen måste sökas på annat håll (*150*). På nämnda grunder måste vi vänta oss, att för elektrolyter i vattenlösning dissociationen genom jonernas utpräglade förmåga att associera vattenmolekyler *indirekt* inverkar på molekylarrefraktionen. Ävenledes påverkas vattnets polymerisationsgrad med all sannolikhet, och därmed även dess specifika refraktionsförmåga, av de i lösningen befintliga jonerna. Speciellt för starkare utspädda lösningar kunna således betydande förändringar av molekylarrefraktionen för den lösta substansen väntas, enär förändringen av lösningsmedlets specifika refraktionsförmåga här matematiskt tillskrives ett jämförelsevis ringa antal lösta molekyler.

§ 8. *Molekylarrefraktionen för elektrolyter upplösta i lösningsmedel av olika natur.* Walden (*178*) har bestämt molekylarrefraktionen för tetraetylammoniumjodid, $N(C_2H_5)_4 \cdot J$ löst i vatten, glykol, formamid, acetonitril, nitrometan, metylrodanid, furfurol, benzylcyanid, salicylaldehyd, benzylalkohol och metylalkohol samt molekylarrefraktionen för tetrapropylammoniumjodid $N(C_3H_7)_4 \cdot J$ i vatten, metylalkohol, isoamylalkohol, epiklorhydrin, benzylcyanid, kinolin och kanelaldehyd, samt slutligen molekylarrefraktionen för fenyl-etyl-dimetyl-ammoniumjodid löst i vatten, nitrometan, metylrodanid, furfurol, benzylcyanid och kanelaldehyd. Därvid har han funnit, att molekylarrefraktionen för tetraetylammoniumjodid varierar mellan 58,18 i glykol och 61,49 i metylrodanid, medan molekylarrefraktionen för tetrapropylammoniumjodid varierar mellan 76,95 i isoamylalkohol och 78,77 i benzylcyanid och kinolin för att i kanelaldehyd slutligen uppvisa värdet 85,87. Sistnämnda värde innesluter dock sannolikt ett mera betydande experimentfel. Fenyl-etyl-dimetyl-ammoniumjodid uppvisar en molekylarrefraktion varierande mellan 63,97 i vatten och 67,06 i metylrodanid. För tetraetylammoniumjodid och fenyl-etyl-dimetyl-ammoniumjodid skilja sig de yttersta värdena för molekylarrefraktionen således från varandra med ungefär 5 %, medan den nämnda differensen för tetrapropylammoniumjodid är mindre säker, men i varje fall av samma storleksordning. Walden påpekar, att om dessa avvikelser bero på den lösta substansens dissociation, för lösningar med ungefär samma dissociationsgrad under alla förhållanden ungefär samma molekylarrefraktion bör uppträda, medan åter lösningar med mycket olika dissociationsgrad böra för den lösta substansen uppvisa från varandra starkt avvikande molekylarrefraktioner. Med stigande utspädning avtager R, varför man måste vänta sig det minsta R-värdet för lösningar med den största dissociationsgraden. Ingen av dessa tre slutsatser står emellertid i överensstämmelse med Waldens resultat, varför han drager slutsatsen, att inflytandet av den elektrolytiska dissociationen icke kan tjäna som grund till en förklaring av de observerade avvikelserna för det lösta saltets molekylarrefraktion i olika lösningsmedel.

Waldens slutsatser äro emellertid berättigade endast under vissa bestämda förutsättningar. Då en molekyl dissocieras, försvinner en ultraröd frekvens. Därigenom förändras med säkerhet molekylarrefraktionen, men den ifrågavarande förändringen är av så liten

storlek, att den i allmänhet icke kan tänkas göra sig märkbar. Därförutom måste vi tänka oss, att vissa elektronbanor vid jonbildningen undergå förändringar. Det viktigaste problem, som uppställer sig till besvarande, är således följande: kunna de observerade avvikelserna förklaras bero av dessa förändringar, vilka äro en direkt följd av jonspjälkningen eller, annorlunda uttryckt, äro de observerade avvikelserna en *direkt* följd av dissociationen? — Denna sistnämnda fråga kunna vi enligt de av Walden framhållna grunderna besvara nekande. I samband med dissociationen uppträda emellertid sekundära fenomen. Speciellt associera jonerna det omgivande mediets molekyler, och inverka samtidigt på lösningsmedlets polymerisationsgrad. Därigenom förskjutes i allmänhet lösningens specifika refraktionsförmåga och därmed den beräknade molekylarrefraktionen för den lösta substansen. Sålunda inverkar dissociationen *indirekt* på molekylarrefraktionen, och denna inverkan beror icke endast av dissociationsgraden, utan fastmer även, och i högsta grad, av lösningsmedlets natur. Vi kunna således av Waldens undersökningar draga den slutsatsen, att de av honom funna avvikelserna för de lösta substansernas molekylarrefraktion i olika lösningsmedel *icke* kunna betraktas som en direkt, men möjligen, och på grund av deras storlek *sannolikt*, som en indirekt följd av den lösta substansens dissociation. En direkt inverkan av dissociationen är därmed självfallet icke utesluten, men den överkompenseras, om den existerar, av en indirekt inverkan, varförutom molekylarrefraktionen ytterligare sannolikt påverkas av andra, ännu okända orsaker.

Brühls och Schröders (*34*) undersökningar rörande molekylarrefraktionen av kamfokarbonsyreestrarnas *Na*-salter i metyl-, etyl- och amylalkohollösningar äro i detta sammanhang av stort intresse. I experimentellt avseende äro de synbart utförda med stor omsorg och noggrannhet. Av detta arbete framgår, att vi erhålla ett allt riktigare värde för homologidifferensen mellan de olika estersaltens molekylarrefraktioner, ju mera koncentrerade lösningar vi undersöka. Därav följer, att om vi omvänt ur de tre estersalten beräkna den skenbara atomrefraktionen för natrium, värden erhållas, som överensstämma desto noggrannare ju högre koncentrationen är. Avvikelserna vid lägre koncentrationer bero sannolikt endera direkt eller indirekt på dissociationen. Brühls och Schröders teoretiska resonemang sakna däremot delvis reell grund. Speciellt är beviset för att natriumatomens refraktionskonstant vid saltbildningen icke undergått förändring ett cirkelslut, och resultatet en matematisk konsekvens av de gjorda antagandena.

Till Brühls och Schröders ovan omnämnda viktiga experimentella resultat finner man en viss motsvarighet även hos andra författare. Redan Gladstone och Hibbert (*80*, p. 861), vilka ansågo, att vid bestämningen av refraktionsekvivalenterna för atomerna, de erhållna molekylarrefraktionerna för de kristalliserade salterna böra läggas till grund för räkningarna, förutsatt att kristallerna icke äro dubbelbrytande, framhålla att man, om beräkningarna göras med stöd av mätningar för vattenlösningar, först måste undersöka, huruvida molekylarrefraktionen är konstant, eller möjligen är en funktion av koncentrationen. I sistnämnda fall böra olika koncentrerade lösningar undersökas, och om möjligt molekylarrefraktionen för utspädningen noll genom extrapolation bestämmas. I överensstämmelse härmed finner Dinkhauser (*50*), att molekylarrefraktionen, då den visar sig vara en funktion av koncentrationen, för alla lösta salter, beräknad enligt Lorenz-Lorentz' formel, med

stigande koncentration närmar sig det värde, som molekylarrefraktionen antar för saltet i fast form.

Slutligen vilja vi nämna några ord om molekylarrefraktionen för en stark elektrolyt, som litiumklorid, i olika lösningsmedel. Man finner hos Chéneveau (*39*) en sammanställning av den specifika refraktionsförmågan för *Li Cl* i vattenlösning enligt mätningar av Gladstone och Hibbert, Walter, Chéneveau, Beer och Kremers, Conroy samt Dijken samt i metylalkohollösning enligt Chéneveau, i etylalkohollösning enligt Chéneveau samt Gladstone och Hibbert och slutligen i amylalkohollösning enligt Andrews och Ende. En inverkan av lösningsmedlets natur kan icke skönjas.

Enligt vad ovan framhållits rörande molekylarrefraktionen av elektrolyter i lösningsmedel av olika natur, kan således sammanfattande sägas, att en *direkt* inverkan av dissociationen på de optiska egenskaperna icke gör sig märkbar.

Annorlunda förhåller det sig emellertid med t. ex. saltsyra (*81*). I en koncentrerad vattenlösning utvisar saltsyran en molekylarrefraktion av $R_1 = 14{,}14$. I andra lösningsmedel sjunker R_1 i ordningsföljden metyl-, etyl-, amyl-, capryl-alkohol, etyleter och amyleter. I sistnämnda lösningsmedel antar R_1 värdet $10{,}36$, som nära sammanfaller med det värde, som observerats för vattenfri flytande saltsyra. Här förefaller således, i motsats till vad ovan sagts, ett utomordentligt starkt inflytande av dissociationen göra sig gällande, detta så mycket mera, som dissociationsgraden i en koncentrerad vattenlösning redan är rätt liten. Man kunde tänka sig, att dessa avvikelser skulle betingas av lösningsmedlens polymerisationsgrad (*53*), men ett sådant antagande stöter, som man lätt inser, på de allvarligaste betänkligheter.

§ 9. Molekylarrefraktionen för elektrolyter i vattenlösning. Vi hava ovan framhållit, att molekylarrefraktionen för litiumklorid i huvudsak är oberoende av det använda lösningsmedlets natur. I vattenlösning visar sig emellertid molekylarrefraktionen för nämnda salt rätt starkt variera med koncentrationen, *möjligen* beroende på dissociationen. Gladstone och Hibbert (*80*) angiva sålunda för R_1 följande värden.

Procent i lösning.	Molekylarrefraktionen.
10,02	15,45
14,53	15,09
25,87	14,89
39,52	14,51

De flesta salter visa dock i vattenlösning en tämligen konstant molekylarrefraktion. Vi hänvisa speciellt till Gladstones och Hibberts (*80*) samt Chéneveaus (*41*) stora arbeten. Vidare finna Gladstone och Hibbert (*81*), att värdena, bestämda för de kristalliserade substanserna och beräknade ur de för lösningar bestämda konstanterna, i allmänhet praktiskt taget sammanfalla. En differens mindre än 1 % anse de ligga inom gränserna för experimentfelen. Till och med större fel kunna förklaras genom osäkerheten vid bestämningen av tätheten för de undersökta kristallerna. Slutligen är den funna differensen i vissa fall negativ och i andra positiv. Chéneveau, som tydligt pointerar, att dissociationen icke påverkar molekylarrefraktionen, finner likväl, att additiviteten icke är så sträng, att be-

stämda, och för alla fall giltiga ekvivalentrefraktioner skulle kunna beräknas. Hallwachs (*85—88*), Borgesius (*18*) och Dijken (*49*), som undersökt utomordentligt utspädda lösningar, finna för dessa en med tilltagande utspädningsgrad växande molekylarrefraktion. Den här antydda tillväxten är emellertid så pass obetydlig, speciellt enligt Lorenz-Lorentz' formel, och den uppträder först för så stora utspädningar, att den icke kan anses direkt betingad av dissociationen.

Det bör emellertid med eftertryck påpekas, att atomrefraktionerna för klor, brom och jod, då dessa beräknas ur lösta salter, icke sammanfalla med atomrefraktionerna för nämnda element i organiska föreningar, och Le Blanc och Rohland (*116*) finna, att atomrefraktionerna för atomerna i de utomordentligt svagt dissocierade kadmiumsalterna och likaledes i kvicksilvercyanid icke ha samma värden, som för starkt dissocierade salter.

Vidare uppvisa några starka mineralsyror, speciellt saltsyra och salpetersyra, med stigande utspädning starkt stigande refraktionsvärden. Vi anföra några enligt Lorenz-Lorentz' formel beräknade data.

Saltsyra.

%	Le Blanc & Rohland	Zecchini	Chéneveau
36		8,26	8,23
28	8,30		
15	8,40		
8	8,48		
6		8,54	
4		8,64	8,48

Salpetersyra.

%	Le Blanc & Rohland	Zecchini
99		10,10
70	10,14	
47		10,18
38	10,20	
8	10,43	
3		11,07

Vi hava med avsikt utvalt siffror från olika arbeten, för att vår uppfattning om den viktiga fråga, som här berörs, icke må bli beroende av möjliga systematiska fel hos någon experimentator.

För andra syror, såsom svavelsyra (Gladstone, Le Blanc, Chéneveau, Zecchini), fosforsyra och fluorvätesyra (!) (Zecchini) är molekylarrefraktionen tämligen konstant.

Beträffande de svaga organiska syrorna bör det framhållas, att dessa vanligen i vattenlösning visa utomordentligt konstanta (av koncentrationen oberoende) refraktionsvärden. Sålunda kunna enligt Zecchini (*183*) för ättiksyra och propionsyra icke de minsta avvikelser konstateras. De starkare organiska syrorna förhålla sig på annat sätt (*116*). Hithörande fakta hava redan i Kap. I, § 13 i korthet omnämnts, varvid även en teoretisk förklaring av dessa avvikelser givits.

Sammanfattande kunna vi således säga, att vissa fakta med bestämdhet tyda på att dissociationen förändrar de lösta substansernas optiska egenskaper, medan i andra fall en sådan inverkan av dissociationen förefaller utesluten. Den vidare diskussionen uppskjuta vi till Kap. IV, för att sålunda förfoga även över de genom föreliggande experimentella arbete vunna resultaten.

III.

Experimentella undersökningar.

§ 1. De undersökta lösningarna.

K Cl.

Saltet var levererat av firman C. A. F. Kahlbaum, Adlershof, Berlin. Sedan detsamma hade renats genom omkristallisation, torkats och pulveriserats, glödgades det i platinaskål. Lösningarna *K*—*S* (Tab. 1) framställdes sålunda, att den uppvägda saltmängden [1] löstes i mätflaska, [2] vilken, innan de sista dropparna vatten tillfogades, under $^1/_2$—1 timmes tid hölls i termostat vid $+ 18{,}00^\circ$ C. Lösningarna *B*—*J* framställdes genom utspädning. Koncentrationerna för sistnämnda lösningar beräknades med stöd av erhållna data för den elektrolytiska ledningsförmågan, som för annat ändamål bestämdes. [3]

Na Cl.

Saltet levererat av Kahlbaum och behandlades som *K Cl.* Alla lösningar framställdes genom direkt vägning av saltet, vilket upplöstes i mätflaska i termostat vid $+ 18{,}00^\circ$ Celsius.

H . COONa.

Professor Ossian Aschan hade vänligheten att ställa en stor kvantitet av detta salt till mitt förfogande, varför jag här till professor Aschan ber att få uttala mitt förbindliga tack. Saltet tvättades med eter, varefter detsamma underkastades fraktionerad kristallisation. Av det så erhållna saltet framställdes en standard-lösning, vars koncentration bestämdes sålunda, att ett antal avvägda prov av lösningen indunstades, torkades och glödgades, varigenom formiatet överfördes i oxalat och slutligen i karbonat. Sedan ur två prov överensstämmande värden erhållits, varvid karbonatet vägdes och ytterligare titre-

[1] Alla vägningar äro reducerade till lufttomt rum.

[2] Alla flaskor, som vid föreliggande undersökning kommit till användning, voro omsorgsfullt utkokade med saltsyra, destillerat vatten och överhettad vattenånga. Volymerna av mätflaskorna bestämdes noggrant vid två olika temperaturer.

[3] I detta enda fall verkställdes utspädningen utan särskild omsorg med pipett. På denna grund kunde koncentrationerna icke direkt med tillräcklig noggrannhet beräknas.

rades med $\frac{1}{10}$ norm. HCl, framställdes övriga lösningar genom viktutspädning av den nämnda standardlösningen (*J.* Tab. 17).

$$CH_3 . COOK.$$

Levererat av Kahlbaum. Omkristalliserades vid + 100° C. Torkades på sandbad under 3—4 timmar, smältes och infördes som stelnande smälta i en torr mätflaska, som omedelbart tillslöts. Sedan flaskan med innehåll antagit rumstemperatur, öppnades korken ett ögonblick för utjämnande av trycket, varefter vägningen utfördes. Lösningen *E* (Tab. 25) framställdes genom upplösning av det erhållna saltet i vatten, varefter lösningarna *B*—*D* erhöllos genom utspädning av *E*. Lösningen *G* framställdes på samma sätt som *E* och slutligen *F* genom blandning av uppvägda mängder *E* och *G*.

$$CH_3 . COONa.$$

Kahlbaum-preparat. Omkristalliserades. Lösningarna *C*, *E*, *G*, *I* och *K* (Tab. 33) framställdes genom vägning av det kristallvattenhaltiga saltet och upplösning i mätflaska vid + 18,00° C. Lösningarna *B*, *D*, *F*, *H* och *J* framställdes genom blandning av lika volymer av de närliggande lösningarna.

$$CO\begin{matrix} OK \\ \diagdown \\ OK. \end{matrix}$$

Tekniskt preparat. Omkristalliserades upprepade gånger och torkades genom glödgning i nickeldegel. Lösningen *Q* (Tab. 41) framställdes direkt genom upplösning av avvägd mängd salt i mätflaska vid + 20,00° C. i termostat, lösningarna *C*, *E*, *G*, *I*, *K*, *M* och *O* framställdes genom volymutspädning av *Q*, varefter *B*, *D*, *F*, *H*, *J*, *L*, *N* och *P* bereddes genom blandning av vägda kvantiteter av de närliggande lösningarna.

$$CO\begin{matrix} ONa \\ \diagdown \\ ONa. \end{matrix}$$

Behandlades fullkomligt som K_2CO_3. Sålunda motsvaras även beteckningarna i tabell 41 av samma beteckningar i tabell 49.

$$\begin{matrix} CO . OK \\ | \\ CO . OK. \end{matrix}$$

Lösningen *I* (Tab. 57) framställdes genom neutralisation av en K_2CO_3 lösning med den beräknade mängden kristalliserad oxalsyra. Totala vikt-minskningen av flaskan, genom vilken en torr luftström genomprässades, bestämdes. Likaså bestämdes vikten av den av CO_2 gasen och luftströmmen medförda och av ett $CaCl_2$ rör absorberade vattenångan. Därigenom kunde den bildade CO_2 mängden beräknas. Resultatet var fullt tillfredsställande. Slutligen kontrollerades att lösningen var neutral, varvid fenolftaleïn användes som indikator (het lösning). Lösningarna *B*—*H* framställdes genom viktutspädning.

$$\begin{array}{l} CO\,.\,ONa \\ | \\ CO\,.\,ONa. \end{array}$$

Lösningen *H* (Tab. 65) framställdes som lösningen *I* (Tab. 57), men den avgående CO_2 mängden bestämdes icke. Viktutspädning.

$$\begin{array}{l} CH_2\,.\,COOK \\ | \\ CH_2\,.\,COOK. \end{array}$$

Saltet framställdes genom neutralisation av en K_2CO_3 lösning med den beräknade mängden upprepade gånger omkristalliserad bernstenssyra (Kahlbaum). Ett prov av lösningen titrerades på vattenbad med fenolftaleïn som indikator. Det visade sig, att lösningen var alkalisk, beroende på att den använda bernstenssyran varit avsevärt fuktig. Den lösta substansen bestod av $98{,}_{58}\,\%$ $K_2C_4H_4O_4$ och $1{,}_{42}\,\%$ K_2CO_3. Större delen av den erhållna lösningen *I* (Tab. 70 *B*) användes likväl, och behandlades, likasom de av densamma genom viktutspädning erhållna lösningarna *B*—*H* (Tab. 70 *B*), matematiskt taget som en blandning av $0{,}_{9858}\,.\,p\,\%$ $K_2C_4H_4O_4$, $0{,}_{0142}\,.\,p\,\%$ K_2CO_3 och $(100-p)\,\%$ vatten. En annan del neutraliserades med den beräknade mängden syra, indunstades, torkades försiktigt på sandbad och slutligen i 10—20 mm vacuum vid $+100°$ C., varvid en torr luftström hela tiden inleddes i flaskans botten. Av det sålunda erhållna saltet framställdes de båda lösningarna *a* och *b* (Tab. 70 *A*).

$$\begin{array}{l} CH_2\,.\,CO.OK \\ | \\ C(OH)\,.\,CO.OK \\ | \\ CH_2\,.\,CO.OK. \end{array}$$

Lösningen *I* (Tab. 78) framställdes genom neutralisation av en koncentrerad K_2CO_3 lösning med den beräknade mängden kristallvattenhaltig citronsyra. Den använda tekniska citronsyran underkastades därförinnan en systematisk fraktionerad kristallisation. F. ö. bestämdes CO_2 som för $K_2C_2O_4$ med den skillnaden, att en speciell apparat för ändamålet konstruerades. Lösningen var fullkomligt neutral (fenolftaleïn på vattenbad). Lösningarna *B*—*H* erhöllos genom viktutspädning.

$$\begin{array}{l} CO.OH \\ | \\ CO.OH. \end{array}$$

Syran omkristalliserades och titrerades med K_2CO_3 på sådant sätt, att först de beräknade kvantiteterna $H_2C_2O_4$ och K_2CO_3 upplöstes, varefter den erhållna lösningen prövades med fenolftaleïn på vattenbad.

De mycket starkt utspädda Na_2CO_3 lösningarna (Tab. 95) erhöllos genom volymutspädning av den mest koncentrerade lösningen, vilken på vanligt sätt genom vägning direkt framställts.

§ 2. Bestämningen av tätheterna. Tätheterna bestämdes med tillhjälp av två enkla flask-pyknometrar. Den ena pyknometerns volym befanns vid + 18,00° C. vara 27,4696 ccm och vid + 25,00° C. vara 27,4742 ccm. Glasets kubiska utvidgningskoefficient vore således 0,000024 och dess lineära utvidgningskoefficient alltså 0,000008. För vanliga glassorter är den lineära utvidgningskoefficienten 7 à $8 . 10^{-6}$. På detta sätt uppnåddes en kontroll av de erhållna volymerna. Den andra pyknometern användes endast för de 9 mest utspädda Na_2CO_3 lösningarna (Tab. 95). Dess volym befanns vid + 15,00° och + 25,00° vara 52,9892 ccm respektive 53,0002 ccm. Den lineära utvidgningskoefficienten vore således = 0,000007.

Vid själva bestämningarna av tätheterna förfors så, att pyknometern fylldes med en avkyld lösning, placerades i termostat, och förvarades där under $^1/_2$—$^3/_4$ timmes tid, varvid, under de sista 15 minuterna, termostatens temperatur oavbrutet kontrollerades. På så sätt undvekos temperaturfluktuationer överstigande ungefär 0,02°. Sedan vätskepelaren med ett filtrerpapper avskurits, överflyttades pyknometern försiktigt i ett kärl med vatten av lägre temperatur, varigenom lösningen kontraherades. Därigenom möjliggjordes en omsorgsfull torkning och vägning av pyknometerflaskan.

Termostaterna uppvärmdes med gaslåga och voro samtidigt försedda med blykylledningar. Kylströmmens intensitet i sistnämnda ledningar kunde uppskattas med tillhjälp av en manometer, som angav det verksamma vattentrycket, vilket efter behag kunde regleras. Omröringsapparaterna drevos av en elektrisk motor. För täthetsbestämningarna voro oavbrutet två termostater i användning, av vilka den ena hölls vid 18° eller 20° och den andra i regeln vid 25°.

Termometrarna voro indelade i 0,1° och tilläto en rätt säker uppskattning av 0,01°. De voro kontrollerade endast vid + 18° och + 25°, men sinsemellan jämförda för alla temperaturer mellan + 15° och + 25°. Fel överstigande 0,03—0,04° äro att betrakta såsom med säkerhet uteslutna. Temperaturfel åter av mindre storlek, än ovan angivna tal, utöva icke inflytande på resultaten, enär motsvarande fel uppträder vid bestämningen av pyknometerns volym, varigenom i de slutligt angivna tätheterna felet praktiskt taget fullständigt försvinner.

§ 3. De använda optiska apparaterna och utförandet av mätningarna. För flertalet bestämningar användes en Pulfrich refraktometer (N:r 4023) av nyaste Zeiss modell. Prisma N:r I^b; brytningsexponenten vid + 20° C. $n_D = 1{,}62197$, $n_{H_\alpha} = 1{,}61705$ och $n_{H_\beta} = 1{,}63436$. Genom särskilda försök konstaterades att de å cirkelskivan inetsade strecken representerande $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{1}$ grader voro ekvidistanta, samt att jämväl noniens linjer icke erfordrade korrektion. Nollpunktskorrektionen var däremot högst betydande, i det den belöpte sig till — 5′ 12″ som medeltal av ett stort antal försök. Sistnämnda korrektion beräknades likväl under antagandet, att brytningsexponenten för vatten mot vacuum för *Na*-ljus och + 18° C. vore 1,33348, vilket värde t. ex. Dinkhauser (Sitzungsberichte der Wiener Akad. *114*, II a, 1001, 1905) anger som medeltal av de tillförlitligaste äldre undersökningarna, medan jag likväl senare funnit, att det riktiga värdet synbarligen är något högre, eller 1,33355. För konsekvensens skull har likväl den gamla nollpunktskorrektionen genom hela arbetet bibehållits, på vilken grund de angivna brytningskoefficienterna sålunda genomgående äro förskjutna med ungefär — 0,00007. Däraf påverkas likväl icke de beräknade

molekylarrefraktionerna, enär ju samma förskjutning återfinnes hos brytningsexponenten för vatten. Bestämningarna utfördes för *Na*-ljus ($\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$) samt för H_α-ljus ($\lambda = 656{,}3\ \mu\mu$) och H_β-ljus ($\lambda = 486{,}1\ \mu\mu$). Tabeller uträknades angivande n för varje avläst $\frac{1'}{1}$.

För ernående av konstant temperatur uppställdes tämligen högt en stor termostat, från vilken en vattenström leddes till refraktometern och vidare till en lång hävert, varigenom en jämförelsevis stor strömhastighet åstadkoms. Enär rumstemperaturen självfallet icke exakt sammanföll med termostatens temperatur, undergick vattenströmmen vid sin passage genom det till refraktometern ledande c:a 2 m. långa röret en liten temperaturförändring, vars storlek var beroende av strömmens hastighet. Genom anbringande av en kran kunde denna hastighet förändras och därigenom en obetydlig men nödig temperaturkorrektion åstadkommas. Jag har uppehållit mig vid sistnämnda faktum, enär det av praktiska orsaker är av vital betydelse att bekvämt, samtidigt som man sitter vid refraktometern, kunna hålla refraktometertemperaturen fullkomligt konstant.

Vid mätningarna förfors sålunda, att då refraktometercylindern tömdes, tvättades och torkades, dessa operationer verkställdes utan att prismat och cylindern lösskruvades från refraktometerstativet. På så sätt behövde nollpunktskorrektionen icke oavbrutet ånyo bestämmas. Sedan refraktometerns temperatur blivit konstant och lika med den temperatur, som önskades, infördes 1-2 ccm av lösningen, varefter cylindern omedelbart tillslöts. Temperaturen undergick därigenom en obetydlig förändring ($0{,}0 - 0{,}2°$). Efter ungefär 10 minuters förlopp avlästes vinklarna för de tre olika våglängderna, vilka avläsningar efter ett par minuters paus återupprepades. För det fall, att vid de båda avläsningarna exakt samma värde (uttryckt i $^1/_2$ minuter) erhölls, ansågs resultatet riktigt; då avvikelse uppträdde, vilket jämförelsevis sällan var fallet, gjordes flere mätningar.

Vid undersökningen av mycket utspädda lösningar ($Na_2C_2O_4$, Tabb. 65—69 och Na_2CO_3 Tab. 94.) användes det till samma Pulfrich-refraktometer konstruerade differentialprismat N:o IV^b. Dess brytningsexponent vid + 20° *C.* var $n_{H_\alpha} = 1{,}61705$, $n_D = 1{,}62197$, $n_{H_\beta} = 1{,}61436$. Differentialprismat saknar vattenmantel, varför det var nödvändigt att mycket länge låta lösningarna ligga i refraktometerkärlet innan bestämningarna utfördes. För att förhindra en avdunstning av lösningen, eller en destillation av lösningsmedlet från det ena kärlet till det andra, gjordes en kopparplatta med hål för termometern, vilken platta på undre sidan överdrogs med ett tjockt paraffinskikt och därefter prässades som lock på cylindern. De därigenom uppkomna, i paraffinet inprässade skårorna beströkos med ren vaselin. Detta lock visade sig motsvara alla anspråk. Skillnaden i brytningsexponent bestämdes för varje lösning och varje våglängd 3-5 gånger medelst den å refraktometern anbrakta mikrometerskruven, varvid dödgång självfallet med omsorg undveks. Skalan å mikrometerskruven var indelad i $0{,}1'$.

För de utomordentligt starkt utspädda Na_2CO_3 lösningarna (Tab. 95) gav differentialprismat icke mera tillräckligt noggranna resultat. Dessa lösningar undersöktes med den av Löwe konstruerade interferentialrefraktometern (Zeitschrift für Instrumentenkunde *30*, 321 (1910). Då för densamma vitt ljus kom till användning, är det klart, att en större

noggrannhet icke kunde ernås. (Jfr. Hallwachs' Ann. d. Physik. *47*, 380 (1892)). Enär emellertid täthetsbestämningarna icke kunde tillmätas en större noggrannhet, än vad som motsvarar de med interferentialrefraktometern med vitt ljus erhållna värdena, hade det likväl varit fullkomligt ändamålslöst att använda monokromatiskt ljus. Då interferentialrefraktometern, beroende på dess konstruktion, icke kunde bibringas önskad temperatur, förfors så, att först hela mätningsserien utfördes vid låg rumstemperatur (16°—17°) varefter rummet starkare uppvärmdes, och bestämningarna ånyo verkställdes vid 19° – 20°. Genom interpolation erhöllos Δn värdena för 18°. ($\Delta n = n$ för lösningen $- n$ för vatten). Samtidigt erhölls även kännedom om temperaturkoefficienten för Δn.

§ 4. De experimentella resultaten och den matematiska behandlingen av de erhållna siffrorna. De första undersökningarna gällde *KCl* och *NaCl*. I tabellerna 1 och 9 har jag angivit koncentrationerna och tätheterna. Koncentrationerna äro uttryckta i grammolekyler per liter vid den av index utmärkta temperaturen. Jag har vidare i nämnda tabeller betecknat varje given lösning med en bestämd bokstav. I tabellerna 2-7 och 10-15 betecknar n_0 den observerade brytningsexponenten mot vacuum.

Om jag med $n_{w,t}$ betecknar brytningsexponenten för vatten vid temperaturen t och för en viss given våglängd λ, samt med $d_{w,t}$ betecknar tätheten för vatten vid samma temperatur, gäller enligt Biots och Aragos lag

$$\varphi(n_0) = \frac{\varphi(n_{w,t})}{d_{w,t}} \left| d_4^t - c_t . M . 10^{-3} \right| + c_t . 10^{-3} R, \qquad (1)$$

där n_0 betecknar lösningens brytningsexponent mot vacuum, och där M betecknar saltets molekylarvikt. Genom införande av uttrycket för den specifika refraktionsförmågan för vatten erhåller jag således

$$\varphi(n_0) = F_w \cdot \left(d_4^t - c_t . M . 10^{-3} \right) + c_t . 10^{-3} . R. \qquad (2)$$

Jag har till en början antagit vattnets specifika refraktionsförmåga vara oberoende av temperaturen, och beräknat F_w för de tre använda våglängderna ur angivna data för $n_{w,18°}$ och $d_{w,18°}$. Därefter har jag beräknat molekylarrefraktionen R för varje lösning, R_1 enligt Gladstone-Dales formel, R_2 enligt Newton-Laplace's formel och R_3 enligt Lorenz-Lorentz' formel. Dessa kvantiteter finnas angivna i de tidigare nämnda tabellerna 2-7 och 10-15. Slutligen har jag antagit riktigheten av vissa bestämda värden för molekylarrefraktionen för varje salt och varje våglängd, samt med stöd av dessa konstanter enligt formeln (2) beräknat de så att säga teoretiska n-värdena n_1, n_2 och n_3. De nämnda konstanterna R, vilka äro att betrakta som närmevärden, äro angivna i tabell 8 för *KCl* och i tabell 16 för *Na Cl*, samt äro betecknade med runda klammer: (R). Vidare betecknar jag $(n_0 - n_1) \cdot 10^5 = \Delta_1$, $(n_0 - n_2) . 10^5 = \Delta_2$ och $(n_0 - n_3) . 10^5 = \Delta_3$, detta vid den lägre temperaturen (18°), medan motsvarande kvantiteter vid den högre temperaturen (25°) betecknats Δ_1', Δ_2' och Δ_3'. Avsättande Δ-värdena som ordinata och c-värdena som abscissa har jag erhållit diagrammen 1-6. Av dessa diagram framgå intressanta fakta. För det första se vi omedelbart, att kurvorna Δ_1, Δ_2 och Δ_3 kunna fås att praktiskt taget sammanfalla genom vridning kring origo, samt att Δ_1', Δ_2' och Δ_3' kurvorna även de kunna fås att sammanfalla genom

parallellförflyttning och därpå följande vridning kring origo. Betydelsen av dessa operationer är rätt enkel. Genom förändring av F_w åstadkommes en parallellförflyttning och en samtidig vridning, vars storlek likväl icke intresserar oss. Beräknas F_w för varje våglängd och varje temperatur direkt ur mätningarna för vatten, sammanfalla självfallet alla kurvorna i origo. Derivera vi funktionen $\varphi(n)$ partiellt med avseende å R, finna vi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial R} = c \cdot 10^{-3}, \tag{3}$$

eller med införande av beteckningarna Δ, och om vi med ϱ beteckna en viss förändring av (R), uttryckt i enheter av andra decimalen, således

$$-\partial \Delta = \frac{1}{\varphi'(n)} \cdot \varrho \cdot c. \tag{4}$$

$\varphi'(n)$ är enligt Gladstones och Dales formel lika med 1, enligt Newton-Laplace's formel lika med $2n$ och slutligen enligt Lorenz-Lorentz' formel lika med $\frac{6n}{(n^2+2)^2}$. I detta sammanhang kan i varje fall $\varphi'(n)$ betraktas som konstant. En bestämd vridning kring origo motsvarar således en bestämd förändring av den antagna molekylarrefraktionen. Härav framgår omedelbart, att det för nämnda salter är omöjligt att ur en enstaka observationsserie (t. ex. *Na*-ljus, 18°) utröna vilken formel, som bäst motsvarar verkligheten.

Vidare se vi av diagrammen, att kurvorna Δ_3 och Δ_3' i allmänhet ligga närmast varandra och speciellt att $\Delta_3 - \Delta_3'$ ofta växlar tecken. Däremot ligga Δ_2 och Δ_2' längst ifrån varandra, varjämte genomgående $\Delta_2 - \Delta_2' > 0$. Kurvorna Δ_1 ligga mellan Δ_2 och Δ_3. Härav följer omedelbart, att brytningsexponentens beroende av temperaturen bäst återgives genom Lorenz-Lorentz' formel, nästan lika väl, men vid större utspädningar dock avgjort sämre genom Gladstone-Dales formel och otvivelaktigt sämst genom Newton-Laplace's formel.

Nu uppställer sig närmast till besvarande frågan, huruvida detta är en följd endast av vattnets eller möjligen jämväl av det lösta saltets optiska egenskaper. I det senare fallet vore en vidare beräkning av R_1 och R_2 utan nämnvärt intresse. För utrönandet härav har jag beräknat n_1 och n_2 serierna för 25° jämväl under antagande av F_w värden, beräknade ur de $n_{w,25°}$ värden, som enligt Lorenz-Lorentz' formel svara mot $n_{w,18°}$. Detta innebär, att Δ_1' och Δ_2' förskjutits så, att de för $c = 0$ sammanfalla med Δ_3' kurvorna. Vidare har jag för varje kurva bestämt den korrektionsterm $\varrho \cdot 10^{-2}$, som bör adderas till närmevärdet (R), för att de nya, mot det korrigerade R värdet svarande differenserna Δ må uppfylla villkoret $\Sigma \Delta^2 =$ minimum. Således enligt (4)

$$\frac{\partial \Sigma \Delta^2}{\partial \varrho} = \frac{\partial \Sigma \left(\Delta - \frac{\varrho c}{\varphi'}\right)^2}{\partial \varrho} = 0, \tag{5}$$

$$-\frac{2}{\varphi'} \sum \left(\Delta - \frac{\varrho c}{\varphi'}\right) \cdot c = 0$$

och

$$\varrho = q' \frac{\Sigma c \Delta}{\Sigma c^2} . \qquad (6)$$

De sålunda korrigerade R värdena äro betecknade $[R] = (R) + \varrho \cdot 10^{-2}$, och återfinnas i tabellerna 8 och 16. Dessa $[R]$ värden äro att betrakta som de sannolikaste R värdena, och jag vill speciellt betona, att det sannolikaste R värdet icke är identiskt med medeltalet av de observerade R värdena.

Vi finna nu, att alla de tre formlerna giva av temperaturen tämligen oberoende värden för $[R]$. De förhållanden, som tidigare konstaterades, och enligt vilka den Lorenz-Lorentz'ska formeln vore att föredraga framom de övriga, böra således tillskrivas det faktum, att vattnets brytningsexponent som funktion av temperaturen ojämförligt bäst angives av denna formel.

Vidare vill jag framhålla, att en lineär förändring av R med koncentrationen skulle motsvara en parabel för Δ-värdena. En sådan krökning hos Δ-kurvan har icke kunnat konstateras för dessa två salter, för vilka tvärtom Δ-värdena synas vara fullkomligt godtyckligt strödda kring axeln, eller rättare kring en genom origo gående, mot värdet $[R]$ svarande stråle.

Om noggrannheten av de erhållna $[R]$-värdena får man en god föreställning, då man betraktar diagrammen 1-6, där de mot olika $[R]$-värden svarande strålarna äro inritade.

För salterna $CH_3 . COOK$ och $CH_3 . COONa$ ha kvantiteterna F_w för R_3 antagits vara oberoende av temperaturen och beräknats ur de experimentella värdena för $n_{w,18°}$ och $d_{w,18°}$. Konstanterna F_w för R_1 och R_2 ha vid 18° självfallet beräknats direkt ur kvantiteterna $n_{w,18°}$ och $d_{w,18°}$, men vid den högre temperaturen bestämts genom villkoret $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ för $c = 0$. För alla övriga salter ha konstanterna $F_{w,t}$ direkt beräknats ur de experimentellt bestämda värdena för $n_{w,t}$ och $d_{w,t}$ vid samma temperatur t. Praktiskt taget är det tämligen likgiltigt vilkendera beräkningsmetoden man använder, men har jag dock ansett ovanstående för fullständighetens skull böra meddelas.

I övrigt äro beräkningarna även för $H . COONa$ (Tabb. 17-24), $CH_3 . COOK$ (Tabb. 25-32), $CH_3 . COONa$ (Tabb. 33-40), $K_2 CO_3$ (Tabb. 41-48), $Na_2 CO_3$ (Tabb. 49-56), $K_2 C_2 O_4$ (Tabb. 57-64), $Na_2 C_2 O_4$ (Tabb. 65-69), $K_2 C_4 H_4 O_4$ (Tabb. 70 A-76 A), $K_3 C_6 H_5 O_7$ (Tabb. 78-85) och $H_2 C_2 O_4$ (Tabb. 86-93) utförda på samma sätt som för KCl och $NaCl$. För $Na_2 C_2 O_4$, som jag undersökt med tillhjälp av differentialprismat, har jag i stället för kvantiteterna n_0, n_1, n_2 och n_3 angivit kvantiteterna Δ_0, Δ_1, Δ_2 och Δ_3, vilka beteckna skillnaden mellan nämnda brytningsindex n för lösningen i fråga och för vatten. Vidare har jag i tabell 70 A angivit procenttalet p i stället för den molekylära koncentrationen c. Med dessa undantag äro beteckningarna i alla dessa tabeller fullkomligt oförändrade. Sålunda äro även $[R]$-värdena beräknade på tidigare angivet sätt.

Olika behandlade äro däremot $K_2C_4H_4O_4$ lösningarna i tabellerna 70 B—76 B och 77. Jag har tidigare angivit, att den lösta substansen består av en blandning av 98,58 % $K_2C_4H_4O_4$ och 1,42 % K_2CO_3. Om jag med R' betecknar molekylarrefraktionen, med M'

molekylarvikten och med c' den molekylära koncentrationen för K_2CO_3, samt bibehåller beteckningarna R, M och c för $K_2C_4H_4O_4$, gäller enligt Biots och Aragos lag

$$\varphi(n) = F_w \cdot \left\{ d_4^t - \frac{p \cdot d_4^t}{100} \right\} + c \,.\, R \,.\, 10^{-3} + c' \,.\, R' \,.\, 10^{-3} \qquad (7)$$

Under beaktande av ekvationerna

$$\begin{cases} c \,.\, M = 10 \,.\, p \,.\, d \,.\, 0{,}9858 \\ c' \,.\, M' = 10 \,.\, p \,.\, d \,.\, 0{,}0142 \end{cases}$$

finner jag således

$$\varphi(n) = F_w \left(d - \frac{p \,.\, d}{100} \right) + p \,.\, d \,.\, 10^{-2} \, R \,.\, \left(\frac{0{,}9858}{M} + \frac{0{,}0142}{M'} \cdot \frac{R'}{R} \right). \qquad (8)$$

För beräknandet av R enligt formeln (8) fordras sålunda en approximativ kännedom om storleken av kvotienten $R' : R$. Ur tabellerna 48 och 70 A—76 A har jag erhållit värdena för R' och R och sålunda för denna kvot funnit

$$\frac{R_1'}{R_1} = 0{,}545\,; \quad \frac{R_2'}{R_2} = 0{,}560\,; \quad \frac{R_3'}{R_3} = 0{,}533\,.$$

I tabellerna 70 B—76 B och 77 hänföra sig beteckningarna R, (R) och $[R]$ till de enligt ovanstående formel (8) beräknade värdena för rent succinat.

Slutligen vill jag förklara tabellerna 94 och 95. I tabell (95) betecknar Δ skillnaden mellan lösningens och vattnets brytningsexponent, bestämd medelst interferentialrefraktometern och angiven i tills vidare okända enheter. För att kunna utnyttja Δ-värdena i tabell 95 var jag tvungen, att på något sätt bestämma Δn för den starkast koncentrerade Na_2CO_3 lösningen, vars koncentration $c_{18°} = 0{,}1071$ motsvarar procenttalet $1{,}1239$. Jag beslöt, att för detta ändamål använda mig av Pulfrich-differentialprismat. Ett tillfälligt fel i bestämningen av Δn för denna lösning eller ett tillfälligt koncentrationsfel skulle emellertid förskjutit alla enligt tabell 95 beräknade R värden. På den grund undersökte jag icke endast en lösning av procenthalten $p = 1{,}1239$, utan därjämte en rad lösningar av något lägre procenthalt (Tab. 94 a). Den vid temperaturen t avlästa vinkeln för ljus av våglängden λ betecknar jag α. Enär emellertid denna vinkel α kan skrivas

$$\alpha = (\text{konst.})\, p,$$

vilket framgår av den lineära stegringen av $\bar{\Delta}$ med koncentrationen (Tab. 95), har jag omedelbart uttryckt α som en produkt av två faktorer, nämligen som $\frac{p}{1{,}1239} \cdot X$. Sålunda kommer X att oberoende av den angivna koncentrationen p hänföra sig till koncentrationen $p = 1{,}1239\ \%$. Nederst å tab. 94 a har jag angivit medeltalen av de beräknade vinklarna X, samt i tabell b de därur beräknade värdena $\Delta n =$ (n för lösningen $-$ n för vatten). Slutligen ha dessa värden korrigerats till 18° med stöd av en temperaturkoefficient, vilken erhållits på sätt, som i § 3 av detta kapitel förklarats.

Med hänsyn till ändamålet för dessa mätningar var det egentligen endast nödvändigt att bestämma Δn för ljus av *en* våglängd, t. ex. $\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$. Genom att bestämma Δn även för $\lambda = 656{,}3\ \mu\mu$ och $\lambda = 486{,}1\ \mu\mu$ erhöll jag emellertid en utomordentlig kontroll av Δn värdet för $\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$, enär även ett mindre fel i något av Δn-värdena gåve sig tydligt till känna i dispersionen. I själva verket leda siffrorna i tabell 94 b till samma dispersion för Na_2CO_3, som enligt tabell 56 kunde väntas.

Konstanterna R för $\lambda = 589{,}3\ \mu\mu$ i tabell 95 har jag således slutligen kunnat beräkna med stöd av likheten

$$\Delta n = \frac{\Delta}{8654} \cdot 0{,}00255.$$

Vi tänka oss $f_{12}(c) = \Delta_1 - \Delta_2$ och $f_{13}(c) = \Delta_1 - \Delta_3$ utvecklade i form av serier med stigande potenser av c. Vi inse omedelbart, att varje sådan serie f antar värdet 0 för $c = 0$, enär enligt definitionen av F_{ic} $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$ för $c = 0$, samt vidare, att vi genom lämpligt val av konstanterna (R) kunna göra $f_{12}(c) = f_{13}(c) = 0$ för vilken given koncentration som helst, och speciellt även för den högsta koncentrationen C. Därav följer, att för att funktionerna f för koncentrationer $c < C$ skola antaga från 0 märkbart avvikande värden, koncentrationen C måste vara så stor, att termerna av högre ordning i serierna f icke kunna försummas.

I annat fall leda de olika formlerna till fullständigt identiska Δ värden, under förutsättning, att konstanterna (R) bestämts på sätt, som ovan antytts. Ett exempel på detta sakförhållande finna vi i $CH_3.COONa$ (Tab. 33—40). Grafiskt äro Δ kurvorna framställda i diagrammen 7—9.

Helt andra förhållanden träda i dagen t. ex. för $H.COONa$ (Tab. 17—24) och $CH_3.COOK$ (Tab. 25—32). Den bästa uppfattningen härom erhålla vi genom att betrakta diagrammen 10—21. Värdena Δ_1, Δ_2 och Δ_3 äro i dessa diagram utmärkta genom olika betecknade punkter. För att kort i siffror kunna sammanfatta de här uppträdande nya fakta, vilja vi antaga, att de observerade avvikelserna Δ lämpligen kunna representeras genom parabler. Ekvationen för en sådan parabel må vara $\delta = qc + pc^2$. På grund av tillfälliga försöksfel uppträda likväl differenser $\bar{\Delta} = \Delta - \delta$. Vi definiera nu den sannolikaste parabeln δ genom villkoret

$$\Sigma \bar{\Delta}^2 = \text{minimum}.$$

Således

$$\frac{\partial \Sigma \bar{\Delta}^2}{\partial q} = 0; \qquad \frac{\partial \Sigma \bar{\Delta}^2}{\partial p} = 0$$

och

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma \Delta c = q \cdot \Sigma c^2 + p \cdot \Sigma c^3 \\ \Sigma \Delta c^2 = q \cdot \Sigma c^3 + p \cdot \Sigma c^4. \end{array} \right.$$

Det är emellertid utan vidare klart, att det värde, som vi sålunda erhålla för konstanten q, är beroende av huru vi valt närmevärdet (R). Vi bestämma därför, på samma sätt som tidigare, strålen $[R]$ och taga denna stråle till c-axel. Därigenom erhåller parabeln ekvationen

$$[\delta] \quad \left(q \quad \frac{\varrho}{q'}\right) \cdot c \quad p \cdot c^2$$

och är numera entydigt definierad av försöksdata. Vidare måste denna parabel $[\delta]$ anses vara i stort sett oberoende, icke blott av små temperaturförändringar (18°, 25°), utan även av våglängden, enär i annat fall dispersionen skulle vara en ytterst snabbt varierande funktion av koncentrationen, vilket står i strid såväl med äldre undersökningar som med resultaten av föreliggande arbete. Vi låta t_1 och t_2 beteckna de båda temperaturer, för vilka undersökningarna utförts, samt införa indexbeteckningarna h

$$\begin{aligned} h &= 1 \text{ för } t_1 \text{ och } \lambda = 656{,}3\ \mu\mu \\ h &= 2 \quad » \quad t_2 \quad » \quad \lambda = 656{,}3\ \mu\mu \\ h &= 3 \quad » \quad t_1 \quad » \quad \lambda = 589{,}3\ \mu\mu \\ &\text{— — — . — —} \\ h &= 6 \quad » \quad t_2 \quad » \quad \lambda = 486{,}1\ \mu\mu. \end{aligned}$$

Enligt ovanstående kunna vi då för ett visst givet salt sammanfatta resultaten i två koefficienter Q och P, vilka ha betydelsen

$$Q = \frac{1}{6}\sum_{h=1}^{6}\left\{q - \frac{\varrho}{q'}\right\}_h = \frac{1}{6}\sum_{h=1}^{6}\left\{q - \frac{[R] - (R)}{q' \cdot 10^{-2}}\right\}_h$$

$$P = \frac{1}{6}\sum_{h=1}^{6} p_h .$$

De nämnda parablerna δ äro inritade i diagrammen 10 - 21 för *H.COONa* och $CH_3.COOK$.

Analoga förhållanden återfinna vi för K_2CO_3 (Tabb. 40—48) och Na_2CO_3 (Tabb. 49—56). Värdena Δ och kurvorna δ äro framställda i diagrammen 22—30. För dessa salter är synbarligen krökningen av δ_1 mycket svag; kurvan δ_1 visar sig än vara konkav uppåt, än konvex uppåt, tydligen beroende av fördelningen av experimentfelen. Däremot är kurvan δ_3 för dessa salter, i motsats till för *H.COONa* och $CH_3.COOK$, genomgående konkav uppåt, medan δ_2 här, likasom tidigare, är starkt konvex uppåt. Att kurvan δ_2 överallt visar sig vara konvex uppåt sammanhänger tydligt med att den Newton-Laplace'ska formeln har en för hög derivata. Den varierande krökningen av kurvorna δ_1 och δ_3 påkallar emellertid en närmare undersökning.

För detta ändamål ha konstanterna Q och P för de flesta här undersökta salter uträknats. De äro sammanställda i tabell 96.

Vi observera vidare, att värdet $[R]$, vilket, så snart en krökning av δ-kurvan förekommer, icke mera har karaktären av det sannolikaste värdet i allmänhet, numera betecknar det sannolikaste värdet för den koncentration c, som bestämmes av likheten

$$c = \frac{Q}{P}.$$

Den högsta undersökta koncentrationen c_h må motsvara procenttalet p_h. För denna koncentration är det sannolika R-värdet

$$[R]_h = [R] + (Q + Pc_h) \cdot \varphi'_h \cdot 10^{-2}$$

och för koncentrationen $c = 0$.

$$[R]_0 = [R] + Q \cdot \varphi'_0 \cdot 10^{-2}.$$

Således

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \left\{ (Q + Pc_h)\, \varphi'_h - Q\, \varphi'_0 \right\} \frac{10^{-2}}{p_h}.$$

I tabell 97 har jag angivit kvantiteterna p_h, R_h och $\frac{\partial R}{\partial p}$. Här betecknar R_h medeltalet av de $[R]_h$-värden, som på ovan angivet sätt erhållits för de båda olika temperaturerna. Endast för de mycket starkt utspädda Na_2CO_3-lösningarna (Tab. 95) ha R och $\frac{\partial R}{\partial p}$ beräknats direkt ur de experimentella värdena för $c = 0{,}1071$ och $c = 0{,}01429$.

Vidare har jag i tabell 98 angivit de ur de tidigare tabellerna enkelt beräknade värdena för $\frac{\partial R}{\partial t} \cdot \frac{10^4}{R}$. Därvid har jag likväl bortlämnat de siffror, som hänföra sig till Na_2CO_3 och $H_2C_2O_4$, enär i det förra fallet tydligen jämförelsevis stora experimentfel förekomma, samt då i det senare fallet en så långt driven noggrannhet, som erfordras för bestämmandet av här ifrågavarande kvantiteter, under inga förhållanden kan förutsättas, beroende på oxalsyrans relativa svårlöslighet.

Slutligen har jag i tabell 99 angivit de ur tabell 97 beräknade värdena för $\frac{\partial R}{\partial p} \cdot \frac{10^4}{R}$. Därvid har jag utelämnat de kvantiteter, som hänföra sig till de starkt utspädda Na_2CO_3 lösningarna, samt desslikes de som hänföra sig till $Na_2C_2O_4$ lösningarna, enär även här de egendomligheter, som uppträda för mycket starkt utspädda lösningar, göra sig märkbart gällande.

Tabellerna 97—99 innehålla sålunda på sätt och vis det sammanträngda experimentella resultatet av hela den föreliggande undersökningen.

Av tabell 98 synes, att temperaturkoefficienten för molekylarrefraktionen för lösta salter enligt Newtons och Laplace's formel genomgående är negativ, enligt Gladstones och Dales formel omväxlande positiv och negativ och slutligen enligt Lorenz' och Lorentz' formel genomgående positiv. I detta avseende förhålla sig lösta salter således på fullkomligt samma sätt som flytande organiska ämnen.

Tabell 99 åter utvisar, att i vattenlösningar uttrycket $\frac{\partial R}{R \cdot \partial p}$ enligt Newton-Laplace's formel med ett undantag är negativt, medan samma derivata enligt Gladstones och Dales formel och jämväl enligt Lorenz' och Lorentz' formel är omväxlande negativ och positiv,

varvid dock enligt sistnämnda formel avvikelserna från 0 nå betydligt högre värden än enligt Gladstones och Dales formel.

Villkoren

$$\frac{\partial R}{R \cdot \partial t} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial R}{R\,\partial p} = 0$$

uppfyllas således enligt tabellerna 98 och 99 bäst av Gladstones och Dales formel.

Tabell 100 innehåller de enligt tabell 97 beräknade, för det inom parenteser angivna procenttalet uppträdande differenserna mellan ekvivalentrefraktionerna för *K* och *Na* samt jämväl dispersionsdifferensen *D*.

Tabell 101 anger de enligt Lorenz-Lorentz' formel beräknade refraktionerna och dispersionerna för den oladdade syraresten.

Vid nämnda beräkning har jag likväl varit tvungen att stöda mig på vissa i tabellen angivna värden för depressionen resp. exaltationen för molekylarrefraktionen för K_2CO_3 och $K_2C_2O_4$. I avsikt att kontrollera exaltationsvärdet + 0,43 för oxalsyraresten, har jag bestämt molekylarrefraktionen för oxalsyra (Tab. 97). Molekylarrefraktionen = 15,35. Syran kan betraktas som en enbasisk syra med dissociationsgraden 0,5, varför den ena väteatomen kan tillskrivas refraktionsvärdet 1,10 och den andra det skenbara refraktionsvärdet $\frac{1}{2}(1{,}10 + 1{,}76) = 1{,}43$. Oxalsyraresten har då refraktionsförmågan $15{,}35 - 1{,}10 - 1{,}43 = 12{,}82$. Med hänsyn till osäkerheten såväl av talet 15,35 som av ovan anförda beräkning är överensstämmelsen tillfredsställande.

Tabell 102 slutligen innehåller den skenbara atomrefraktionen *R* för kalium, beräknad enligt Lorenz-Lorentz' formel, för en lösning av procenthalten *p*, derivatan $\frac{\partial R}{\partial p}$, det extrapolerade värdet *R* för $p = 100\ \%$ samt den skenbara atomdispersionen *D*. *R*-värdena och deras beroende av koncentrationen äro grafiskt framställda i figur 31. Man finner omedelbart, att den skenbara atomrefraktionen för kalium för alla salter konvergerar mot värdet $R = 4{,}70$ för koncentrationen $p = 100\ \%$. Detta resultat är fullkomligt oväntat. Den skenbara dispersionen har värdet 0,11.

IV.

En hypotes rörande byggnaden av elektrolyternas molekyler.

Enär, som jag i slutet av föregående kapitel framhållit, och vilket omedelbart följer av tabellerna 97, 99 och 102, molekylarrefraktionen för lösta salter i allmänhet är en funktion av koncentrationen, och således i allmänhet $\frac{\partial R}{\partial p} \neq 0$, gäller det närmast att undersöka, huruvida nämnda faktum är att betrakta som en direkt följd av dissociationen eller icke. Man ser omedelbart (tabellerna 97 och 102 samt figur 31), att de observerade avvikelserna icke äro större än de avvikelser, som uppträda för lösta icke-elektrolyter. Man har sålunda icke någon anledning att a priori betrakta dessa avvikelser som en följd av dissociationen.

Om likväl orsaken till olikheten $\frac{\partial R}{\partial p} \neq 0$ stode att söka i en övergång av en elektron från en bana till en annan, skulle kurvorna för R_K konvergera mot en punkt ($p = 0$, $R_K = R_{K^+}$ + konst.). I själva verket är detta icke fallet. Kurvorna R_K konvergera tvärtom, som man ser av figur 31, mot en punkt ($p = 100$, $R_K = 4{,}_{70}$). Härav följer, att en *direkt* inverkan av dissociationen är utesluten, vilket emellertid icke hindrar, att olikheten $\frac{\partial R}{\partial p} \neq 0$, åtminstone delvis, indirekt kan betingas av dissociationen, t. ex. av jonernas hydratation och associationen av odissocierade molekyler.

Ovan relaterade förhållanden kunna förklaras på olika sätt. Endera äro jonerna färdigbildade i salternas molekyler, eller är den minskning av refraktionsvärdet för kalium, som uppträder i samband med atomens övergång i jonform, identisk med den ökning av molekylarrefraktionen, som karboxylgruppen erfar, då densamma erhåller ett tillskott av en elektron. Sistnämnda ökning kan emellertid under inga förhållanden antagas vara lika med differensen mellan klorjonens och kloratomens refraktion. Om således jonerna icke vore färdigbildade i de lösta salternas molekyler, så skulle enligt ovanstående molekylarrefraktionen för KCl icke kunna vara oberoende av koncentrationen, vilket likväl är fallet.

Den funna molekylarrefraktionen för KCl i lösning är att betrakta som summan av jonrefraktionerna för $K^{\cdot}$ och Cl', ty denna molekylarrefraktion överensstämmer fullstän-

digt med det värde för ovannämnda kvantitet, som bestämts för det kristalliserade saltet, i vilket, som jag tidigare framhållit, jonerna äro färdigbildade och identiska med jonerna i en *KCl*-lösning. Då för de lösta *K*- och *Na*-salterna av samma syra ständigt praktiskt taget samma differens uppträder, nämligen i medeltal 2,055 (enligt Lorenz-Lorentz' formel), kan man således med säkerhet antaga, att denna differens utgör skillnaden mellan jonrefraktionerna för *K* och *Na*.

Om vid bildningen av den odissocierade molekylen en utjämning av laddningarna skulle inträffa, så skulle emellertid differensen *K*—*Na* förändras. Detta följer av det faktum, att valenselektronernas banradier och frekvenstal icke äro identiska för *K*- och *Na*-atomerna, vilket framgår av vad tidigare sagts rörande den fotoelektriska effekten. Av tabell 102 och figur 31 följer, i motsats härtill, att samma differens *K*—*Na* uppträder även för $p = 100\,\%$, således för odissocierade molekyler. Man ledes alltså till slutsatsen, att i den odissocierade molekylen jonerna äro färdigbildade.

Till samma resultat kommer man även genom ett annat resonemang. Om man antar, att den odissocierade molekylen vore byggd på samma sätt som t. ex. en organisk icke-elektrolyts molekyl, och att alltså molekylarrefraktionen additivt sammansättes av atomrefraktionerna, följer att det värde 4,70, som erhållits för atomrefraktionen för kalium, utgör den faktiska atomrefraktionen. Enär molekylarrefraktionen för *KCl* oberoende av koncentrationen = 11,27, bör således differensen $11{,}27 - 4{,}70 = 6{,}57$ utgöra atomrefraktionen för klor. Atomrefraktionen för klor ligger emellertid med säkerhet under 6.

En helt annan överensstämmelse mellan teori och fakta ernår man, om man antar, att jonerna äro färdigbildade i den odissocierade molekylen. Av detta antagande följer för det första, att den skenbara atomrefraktionens avvikelser från 4,70 för kalium vid lägre koncentrationer icke äro en direkt följd av dissociationen, samt vidare, att då man vill bestämma summan av jonrefraktionerna icke starkt utspädda, utan möjligast starkt koncentrerade lösningar böra undersökas. Således kan man förutse, att molekylarrefraktionen för ett salt i lösning med tilltagande koncentration närmar sig molekylarrefraktionen för saltet i fast form, vilket, som jag i Kap. II framhållit, överensstämmer med verkligheten.

För klorjonen erhålles sålunda ur de mest koncentrerade *HCl*-lösningarna ungefär värdet 8,25. Den faktiska jonrefraktionen för kalium vore då $11{,}27 - 8{,}25 = 3{,}02$ och för natrium $3{,}02 - 2{,}05 = 0{,}97$. Därav kan jag draga slutsatsen, att gruppen *CO . O* vid övergång i jonform ökar sin refraktion med $4{,}70 - 3{,}02 = 1{,}68$.

Enär emellertid svaga elektrolyter existera, som samtidigt uppträda som syror och som baser, tvingas man till antagandet, att i de svaga elektrolyternas molekyler jonerna icke äro färdigbildade. Differensen mellan refraktionsförmågan för en stark syras *Na*-salt och molekylarrefraktionen för syran själv är naturligtvis lika med jonrefraktionen för *Na*, enär jonrefraktionen för väte måste antagas vara lika med noll. Denna differens är således = 0,97. För en svag syra bör refraktionen för gruppen *CO . O* i och med förlusten av laddningen sjunka med 1,68, medan väteatomens refraktion 1,10 uppträder som en ny positiv kvantitet. Minskningen av syrans molekylarrefraktion är alltså = 0,58 och

differensen mellan *Na*-saltets och den svaga syrans molekylarrefraktioner bör således uppnå värdet 1,55.

Jag framhåller, att dessa slutsatser rörande refraktionsförmågan för svaga och starka syror, vilka slutsatser tillfullo bekräftats av erfarenheten, äro en direkt följd av rent experimentella resultat kombinerade med antagandet, att jonerna äro färdigbildade i de starka elektrolyternas molekyler.

Slutligen påminner jag om, att jag i Kap. I givit en teoretisk tolkning av de enligt ovanstående antagande existerande differenserna

$$Cl' - Cl = 2{,}4$$
$$CO \,.\, O' - CO \,.\, O = 1{,}7.$$

Genom ovannämnda antagande förklaras slutligen även det tidigare obegripliga faktum, att saltsyran i koncentrerad lösning icke uppvisar den beräknade molekylarrefraktionen $H + Cl = 1{,}1 + 5{,}9 = 7{,}0$, utan värdet 8,3. Löses emellertid saltsyran i olika lösningsmedel med avtagande dielektricitetskonstant, sjunker molekylarrefraktionen monotont och närmar sig det värde, som HCl uppvisar i gasform, och som tillfredsställande överensstämmer med det för den opolariserade molekylen beräknade värdet.

Man kunde anmärka, att saltsyran i gasform uppvisar absorptionslinjer i ultrarött. Jag har emellertid redan i Kap. I § 7 framhållit, att därmed på intet sätt är bevisat, att jonerna vore färdigbildade, om vi därmed förstå det slag av joner, som uppträda i en saltlösning, utan att fastmer endast en assymmetrisk fördelning av laddningarna genom nämnda absorption ger sig tillkänna.

Enligt här framförda hypotes kan man vidare förutse

att molekylarrefraktionen för lösta salter icke i nämnvärt högre grad beror av koncentrationen än molekylarrefraktionen för lösta icke-elektrolyter.

att differensen mellan molekylarrefraktionerna för bromider och klorider samt för jodider och bromider för svaga elektrolyter antar andra och mindre värden än för starka elektrolyter,

att i allmänhet lösningsmedlets natur och dissocierande kraft icke i nämnvärt högre grad påverkar elektrolyternas molekylarrefraktion än molekylarrefraktionen för icke-elektrolyter, men

att i vissa fall en djupgående förändring i molekylbyggnaden kan inträffa, medförande en stark förskjutning av molekylarrefraktionen.

Man inser slutligen, om riktigheten av den här framförda hypotesen förutsättes, att dispersionen för kalium, alltså dispersionen för $K^{\cdot}$-jonen, vilken saknar valenselektroner, är nära lika med noll. I det jag stöder mig på den tidigare använda arbetshypotesen, finner jag enligt formlerna 48, 61, 62 och 64 (Kap. I) genom en enkel räkning, att dispersionen D_i för en negativ, enatomig jon kan uttryckas genom formeln

$$D_i = D_a \cdot [f(p, s)]^7$$

där D_a = dispersionen för den oladdade atomen. För klorjonen erhåller jag på så sätt

$$D_i = 0{,}107 \,.\, 2{,}19 = 0{,}234,$$

medan dispersionen för *KCl*, bestämd direkt ur värdena för *KCl* och beräknad ur *NaCl*, i medeltal erhåller värdet 0,254. Man finner sålunda för K'-jonen dispersionen + 0,02 och för Na'-jonen dispersionen + 0,005. Den tidigare funna atomdispersionen för *K* är således enligt denna hypotes, som man kunde vänta, skenbar, i det den största delen av denna dispersion (0,11), nämligen 0,09, utgör en av den negativa laddningen förorsakad ökning av karboxylgruppens dispersion.

Sammanfattning.

1:o Valenselektronernas antal för olika atomer har beräknats direkt ur Eisenlohrs konstanter för atomrefraktionerna. Resultaten överensstämma med Drudes valensteori.

2:o Den Lorentz-Planck'ska dispersionsformeln har givits en ny interpretation, varigenom vunnits en arbetshypotes, enligt vilken bland annat den selektiva fotoelektriska effekten kan beräknas.

3:o Enligt denna hypotes kan vidare den förändring, som refraktionsförmågan och dispersionsförmågan undergår, då en atom övergår i jonform, i vissa enkla fall beräknas.

4:o Experimentellt har påvisats, att temperaturkoefficienten för molekylarrefraktionen för lösta salter enligt Newton-Laplaces formel städse är negativ, enligt Gladstones och Dales formel omväxlande negativ och positiv, eller i medeltal lika med noll, samt enligt Lorenz-Lorentz' formel genomgående positiv,

5:o att jämväl Biots och Aragos lag angående den specifika refraktionsförmågans additivitet för blandningar, tillämpad på saltlösningar, i allmänhet exaktast uppfylles av Gladstones och Dales formel, samt

6:o att den skenbara atomrefraktionen för kalium med växande koncentration hos de undersökta lösningarna konvergerar mot värdet **4,70**, medan den skenbara dispersionen $(H_\beta - H_\alpha)$ har värdet **0,11**.

7:o Av resultaten framgår sålunda, att vid bestämningen av molekylarrefraktionen för lösta salter möjligast starkt koncentrerade lösningar böra undersökas och om möjligt molekylarrefraktionen för koncentrationen 100 % genom extrapolation beräknas.

8:o Saltlösningarnas optiska egenskaper kunna enkelt förklaras endast genom antagandet, att jonerna äro färdigbildade i de starka elektrolyternas molekyler, medan de svaga elektrolyternas molekyler icke kunna anses vara på ovannämnt sätt polariserade.

TABELLER OCH DIAGRAM

1. *KCl.*

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99862	0·0000	0·99707
B	1000	1·00338	0998	1·00166
C	2002	00809	1999	00634
D	2972	01263	2967	01081
E	3985	01737	3978	01563
F	5000	02220	4991	02031
G	5970	02658	5959	02462
H	7443	03329	7428	03118
I	7955	03563	7939	03356
J	8967	04024	8949	03816
K	1·0000	04493	9979	04274
L	1909	05366	1·1884	05149
M	3143	05911	3119	05721
N	6000	07172	5965	06936
O	8000	08059	7959	07815
P	2·0000	08909	9954	08656
Q	4000	10647	2·3944	10387
R	8000	12339	7933	12071
S	3·2000	14028	3·1924	13757

2. *KCl.* $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3268	18·9	47·6	11·2	3269	3267	3269
C	3367	19·0	6	2	3367	3365	3367
D	3463	0	7	2	3461	3459	3463
E	3562	0	7	2	3560	3558	3562
F	3668	1	9	2	3662	3659	3664
G	3758	19·10	47·86	11·22	3751	3748	3754
H	3899	12	90	25	3889	3885	3892
I	3940	02	63	19	3937	3933	3940
J	4040	07	79	21	4032	4027	4035
K	4133	03	68	19	4128	4123	4131
L	4310	00	60	18	4307	4302	4312
M	4420	00	58	18	4418	4411	4421
N	4677	02	63	19	4671	4664	4675
O	4850	18·98	52	17	4849	4843	4854
P	5015	98	48	17	5016	5010	5021
Q	5366	19·00	53	18	5362	5355	5367
R	5692	18·98	47	17	5692	5686	5697
S	6020	97	45	17	6023	6015	6028

3. *KCl.* $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108			–	1·33117	1·33123	1·33111
B	3203	18·1	13·5	11·0	3211	3218	3206
C	3302	6	15·7	2	3309	3315	3304
D	3395	8	16·3	2	3401	3407	3396
E	3487	6	6	6	3493	3498	3498
F	3586	7	4	1	3600	3604	3596
G	3676	18·80	16·70	11·13	3687	3692	3682
H	3817	94	17·12	20	3820	3825	3815
I	3866	93	13	19	3870	3874	3865
J	3957	91	08	16	3964	3968	3960
K	4058	19·00	33	21	4056	4061	4052
L	4230	18·92	19	17	4237	4239	4233
M	4341	90	14	15	4355	4357	4353
N	4581	90	12	15	4594	4598	4592
O	4764	94	20	17	4774	4774	4767
P	4937	90	38	20	4934	4938	4931
Q	5278	98	30	19	5270	5283	5275
R	5616	19·01	15	21	5608	5612	5603
S	5930	18·96	32	18	5936	5941	5932

4. *KCl.* $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348				1·33348	1·33348	1·33348
B	3450	10·2	18·2	11·3	3450	3449	3449
C	3552	3	1	3	3550	3548	3550
D	3654	5	0	1	3645	3644	3647
E	3749	3	3	3	3746	3743	3747
F	3848	2	1	2	3848	3845	3850
G	3940	19·18	18·00	11·27	3939	3936	3940
H	4084	24	20	30	4078	4075	4081
I	4133	23	23	20	4127	4123	4129
J	4230	24	24	30	4223	4219	4225
K	4320	15	03	20	4321	4316	4322
L	4503	16	06	20	4503	4496	4505
M	4617	18	10	28	4614	4608	4616
N	4877	20	13	28	4871	4864	4873
O	5047	13	17·01	24	5052	5045	5054
P	5225	18	18·00	28	5221	5214	5222
Q	5509	15	17·07	20	5572	5564	5574
R	5906	15	07	20	5908	5896	5908
S	6220	12	87	25	6242	6233	6243

5. *KCl.* $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33296	1·33303	1·33291
B	3388	18·7	45·0	11·4	3392	3399	3386
C	3489	19·1	46·8	4	3491	3498	3485
D	3579	0	8	3	3584	3591	3580
E	3686	1	47·4	3	3687	3693	3683
F	3773	18·9	0	2	3786	3791	3781
G	3868	19·07	47·41	11·26	3874	3879	3869
H	4012	20	83	34	4009	4014	4004
I	4056	12	64	29	4059	4064	4054
J	4157	19	85	32	4155	4159	4149
K	4251	18	85	31	4249	4253	4243
L	4427	13	74	28	4431	4434	4426
M	4534	03	52	22	4552	4553	4547
N	4788	12	75	27	4794	4797	4788
O	4961	10	69	25	4973	4977	4967
P	5144	18	92	30	5139	5143	5132
Q	5483	14	82	28	5489	5491	5481
R	5818	15	84	28	5822	5825	5813
S	6145	13	79	27	6156	6159	6147

6. *KCl.* $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t + = 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	3870	19·7	49·7	11·6	3868	3867	3868
C	3976	8	9	6	3970	3968	3970
D	4075	7	7	6	4068	4066	4068
E	4178	7	6	5	4171	4168	4171
F	4268	3	48·7	4	4276	4272	4276
G	4374	19·58	49·31	11·49	4369	4365	4369
H	4515	55	19	46	4511	4507	4512
I	4567	57	25	48	4560	4557	4562
J	4664	55	19	46	4659	4655	4660
K	4764	55	18	46	4758	4754	4760
L	4946	51	07	44	4944	4939	4946
M	5068	57	23	47	5058	5053	5060
N	5320	49	48·99	43	5320	5315	5322
O	5509	51	49·04	44	5506	5501	5509
P	5676	48	48·94	43	5679	5674	5681
Q	6040	50	49·00	44	6038	6032	6041
R	6381	49	48·96	44	6381	6376	6383
S	6726	50	98	44	6724	6718	6726

7. *KCl.* $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_a	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33712	1·33718	1·33706
B	3807	19·1	46·4	11·6	3811	3816	3804
C	3904	1	47·2	5	3912	3917	3905
D	3997	1	5	4	4007	4013	4001
E	4105	3	48·1	4	4112	4117	4106
F	4198	2	47·9	4	4213	4218	4207
G	4293	19·33	48·25	11·39	4302	4308	4297
H	4440	48	69	48	4441	4446	4435
I	4492	50	75	48	4491	4497	4486
J	4590	50	78	48	4589	4595	4583
K	4688	51	84	49	4686	4691	4679
L	4862	40	59	42	4872	4876	4866
M	4981	38	57	40	4995	4998	4990
N	5242	49	82	46	5243	5247	5236
O	5422	47	78	45	5426	5431	5419
P	5595	48	82	46	5596	5602	5589
Q	5946	46	77	44	5954	5960	5946
R	6291	48	81	45	6295	6301	6287
S	6626	46	77	44	6636	6642	6628

8. *KCl.*

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	18·98	47·41	11·185	18·988	47·495	11·179
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	98	41	185	982	424	185
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	19·16	91	11.27	19·152	960	263
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	16	91	27	154	910	274
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+18°$	49	48·91	44	500	48·987	442
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	49	91	44	486	896	444

9. *NaCl.*

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99862	0·0000	0·99707
B	1000	1·00278	0998	1·00123
C	2000	00686	1997	00523
D	5000	01915	4990	01729
E	7000	02726	6986	02528
F	1·0000	03914	9979	03699
G	5000	05870	1·4966	05633
H	2·0000	07776	9950	07509
I	5000	09647	2·4936	09365
J	3·0000	11468	9922	11179
K	5000	13321	3·4903	13008
L	4·0000	15083	—	—
M	5000	16899	4·4871	1·16565
N	5·0000	18632	9851	18278

10. *NaCl.* $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3270	15·8	40·2	9·2	3269	3269	3269
C	3367	6	39·9	1	3368	3366	3368
D	3667	8	40·1	2	3664	3662	3665
E	3858	15·69	39·91	9·11	3858	3856	3861
F	4150	78	40·14	18	4141	4138	4144
G	4608	71	39·96	14	4605	4600	4608
H	5058	73	98	15	5051	5046	5056
I	5491	71	92	14	5487	5481	5492
J	5911	71	92	14	5905	5900	5910
K	6339	70	91	13	6335	6327	6342
L	6740	71	91	14	6733	6727	6740
M	7154	70	90	13	7150	7141	7161
N	7546	70	91	14	7539	7531	7551

11. *NaCl.* $\lambda = 656{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33117	1·33123	1·33111
B	3220	15·9	39·0	9·6	3218	3224	3212
C	3306	3	38·1	1	3313	3319	3308
D	3595	6	39·1	1	3602	3608	3597
E	3784	15·56	39·26	9·10	3793	3799	3789
F	4065	63	51	13	4071	4076	4066
G	4528	70	74	16	4527	4533	4523
H	4963	68	71	15	4964	4971	4960
I	5393	68	72	15	5395	5402	5390
J	5809	68	73	15	5812	5819	5807
K	6230	68	74	14	6233	6241	6230
M	7042	69	78	14	7043	7049	7042
N	7428	69	79	14	7427	7434	7429

12. *NaCl.* $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18.^{\circ}$

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	3450	15·8	40·3	9·2	3450	3450	3450
C	3552	9	6	3	3550	3549	3550
D	3860	16·1	9	3	3850	3848	3851
E	4052	15·91	40·54	9·24	4047	4044	4048
F	4337	88	45	22	4333	4329	4335
G	4801	83	31	20	4802	4797	4805
H	5259	87	39	22	5254	5248	5257
I	5699	86	35	22	5695	5689	5698
J	6123	85	33	22	6119	6113	6122
K	6560	86	36	22	6554	6545	6559
L	6961	85	32	21	6958	6950	6963
M	7374	83	27	20	7380	7369	7388
N	7768	83	27	20	7775	7763	7783

13. *NaCl.* $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33296	1·33303	1·33291
B	3390	15·0	36·4	9·0	3398	3405	3393
C	3493	7	39·1	3	3495	3502	3491
D	3788	8	9	3	3787	3793	3782
E	3980	15·83	39·99	9·25	3981	3986	3976
F	4259	81	40·02	23	4262	4267	4256
G	4718	80	04	21	4724	4729	4718
H	5165	83	14	23	5167	5172	5160
I	5599	82	13	22	5604	5609	5596
J	6025	84	18	23	6026	6032	6018
K	6452	84	19	22	6453	6458	6446
M	7272	84	21	22	7274	7276	7268
N	7651	82	16	21	7662	7666	7657

14. *NaCl.* $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +18$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	3870	16·3	41·7	9·5	3860	3868	3860
C	3975	3	9	5	3971	3969	3971
D	4286	3	7	5	4278	4276	4280
E	4485	16·23	41·50	9·40	4480	4477	4483
F	4779	21	44	40	4774	4769	4777
G	5257	17	33	38	5255	5249	5259
H	5732	23	45	41	5719	5713	5724
I	6174	17	30	38	6171	6165	6178
J	6617	19	34	39	6607	6601	6613
K	7054	16	27	37	7053	7044	7062
L	7475	18	30	38	7468	7459	7478
M	7894	14	22	36	7902	7891	7916
N	8308	16	26	37	8308	8295	8327

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY LIBRARY WOODS HOLE MASS.

15. *NaCl.* $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33712	1·33718	1·33706
B	3817	16·2	39·8	9·7	3816	3822	3811
C	3906	15·7	1	3	3916	3922	3910
D	4211	16·1	40·6	4	4215	4222	4210
E	4404	16·02	40·61	9·35	4414	4419	4409
F	4695	09	85	37	4702	4707	4697
G	5172	14	41·03	39	5176	5181	5172
H	5637	20	20	41	5630	5636	5626
I	6077	15	11	39	6079	6084	6074
J	6508	15	10	38	6511	6517	6508
K	6949	16	14	39	6950	6956	6948
M	7784	14	11	37	7793	7797	7795
N	8184	14	12	37	8193	8197	8199

16. *NaCl.*

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	15·69	39·82	9·141	15·709	39·921	9·138
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	69	82	141	698	836	142
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	84	40·24	213	844	40·323	206
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	84	24	213	845	266	217
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+18°$	16·16	41·19	383	16·170	41·288	371
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	16	19	383	160	203	376

17. *H.COONa.*

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99862	0·0000	0·99707
B	0·6562	1·02645	0·6549	1·02447
C	1·6032	06476	1·5994	06222
D	2·7264	10866	2·7189	10560
E	3·3328	13141	3·3235	12824
F	4·7202	18246	4·7054	17875
G	5·2082	19984	5·1914	19596
H	5·9112	22494	5·8918	22092
I	6·8774	25786	6·8538	25354
J	7·2718	27117	7·2465	26674

18. *H.COONa.* $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3720	16·91	42·28	9·97	3719	3715	3722
C	4463	96	34	10·00	4453	4448	4456
D	5281	93	22	9·99	5272	5268	5274
E	5697	94	22	10·00	5682	5681	5682
F	6589	90	06	9·99	6588	6594	6584
G	6893	91	07	99	6888	6897	6880
H	7305	87	41·95	97	7322	7335	7311
I	7829	85	85	97	7865	7890	7845
J	8039	84	81	96	8083	8112	8060

19. *H.COONa.* $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3641	16·83	41·97	9·93	3647	3643	3650
C	4378	17·00	42·35	10·04	4366	4361	4370
D	5184	16·96	23	02	5173	5168	5178
E	5598	97	23	03	5583	5579	5586
F	6480	93	08	01	6478	6479	6478
G	6774	92	05	01	6774	6778	6773
H	7175	87	41·89	9·98	7207	7213	7203
I	7712	87	87	99	7746	7761	7735
J	7919	87	83	99	7962	7981	7948

20. *H.COONa.* $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	3911	17·13	42·88	10·08	3906	3902	3909
C	4668	17	92	11	4649	4644	4653
D	5487	08	64	07	5479	5474	5482
E	5901	07	57	07	5895	5893	5897
F	6807	03	45	05	6814	6818	6811
G	7108	03	42	05	7118	7126	7113
H	7526	16·99	31	04	7559	7569	7550
I	8049	96	18	03	8111	8132	8094
J	8271	97	18	03	8332	8357	8311

21. *H.COONa.* $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	3826	16·91	42·21	9·97	3833	3830	3838
C	4572	17·12	70	10·10	4556	4552	4564
D	5386	09	59	08	5368	5364	5378
E	5796	07	52	08	5780	5778	5791
F	6691	04	41	07	6680	6684	6691
G	6988	04	38	07	6978	6986	6988
H	7394	16·99	23	04	7413	7423	7423
I	7931	98	19	05	7955	7975	7960
J	8136	97	14	04	8173	8197	8175

22. *H.COONa.* $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	4339	17·42	43·73	10·23	4333	4329	4336
C	5109	44	70	25	5090	5086	5095
D	5956	39	54	23	5937	5934	5942
E	6378	37	45	22	6362	6362	6365
F	7295	31	25	19	7301	7307	7300
G	7593	28	17	18	7611	7622	7608
H	8014	24	03	16	8061	8075	8055
I	8573	24	01	17	8626	8651	8611
J	8789	23	42·97	17	8852	8882	8834

23. *H.COONa.* $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33701	1·33701	1·33701
B	4255	17·31	43·34	10·18	4256	4252	4260
C	5020	47	71	28	4996	4991	5003
D	5850	40	50	25	5828	5822	5836
E	6283	42	52	26	6251	6246	6259
F	7182	33	26	22	7175	7174	7181
G	7480	32	20	21	7481	7483	7486
H	7889	25	02	18	7927	7932	7932
I	8454	27	04	20	8485	8499	8484
J	8661	25	12·97	19	8708	8726	8705

24. *H.COONa.*

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, + 18°	16·90	42·09	9·98	16·874	41·951	9·977
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, + 25°	16·925	07	10·01	894	952	998
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, + 18°	17·05	51	06	998	42·313	10·040
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, + 25°	02	37	07	17·005	274	054
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, + 18°	32	43·32	20	267	43·106	178
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, + 25°	32	22	22	294	119	202

25. $CH_3.COOK.$

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0.0000	0·99862	0·0000	0·99707
B	0·6346	1·02966	0·6334	1·02774
C	1·8091	08268	1·8050	08021
D	3·0494	13718	3·0422	13448
E	3·4130	15244	3·4042	14947
F	5·1609	22424	5·1460	22070
G	8·3676	34403	8·3405	33967

26. $CH_3.COOK.$ $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3895	27·78	68·69	16·51	3893	3887	3895
C	5087	75	44	51	5085	5080	5087
D	6312	80	57	53	6295	6286	6299
E	6637	78	49	52	6625	6617	6630
F	8173	76	43	51	8164	8155	8171
G	1·40556	70	17	50	1·40592	1·40604	1·40580

27. $CH_3.COOK.$ $\lambda = 656{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25^\circ$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33111	1·33111	1·33111
B	3817	27·64	68·20	16·44	3822	3817	3825
C	4997	73	29	51	4995	4992	4998
D	6216	78	40	53	6198	6196	6203
E	6535	77	40	53	6520	6512	6524
F	8060	76	38	52	8040	8031	8046
G	1·40436	72	17	51	1·40440	1·40453	1·40431

28. $CH_3.COOK.$ $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18^\circ$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	4084	28·02	69·33	16·63	4077	4072	4081
C	5294	00	13	64	5279	5275	5281
D	6520	27·99	12	63	6497	6489	6503
E	6851	97	06	63	6831	6824	6830
F	8392	93	68·93	60	8383	8374	8389
G	1·40787	86	65	58	1·40829	1·40844	1·40820

29. $CH_3.COOK.$ $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25^\circ$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	4008	27·90	68·91	16·58	4008	4003	4011
C	5208	99	69·04	65	5191	5187	5192
D	6426	98	03	64	6401	6393	6406
E	6740	94	68·89	62	6726	6719	6731
F	8275	93	86	61	8258	8251	8265
G	1·40669	88	65	60	1·40678	1·40692	1·40670

30. $CH_3.COOK$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +18^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33704	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	4515	28·46	70·63	16·86	4505	4499	4509
C	5749	43	38	86	5727	5721	5728
D	6991	39	28	84	6966	6958	6971
E	7323	36	18	82	7306	7298	7311
F	8807	33	10	81	8883	8874	8890
G	1·41339	26	69·81	78	1·41374	1·41388	1·41366

31. $CH_3.COOK$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33706	1·33706	1·33706
B	4425	28·15	69·70	16·69	4434	4429	4437
C	5652	37	70·16	84	5637	5633	5637
D	6889	36	13	83	6868	6860	6873
E	7216	34	07	82	7199	7191	7203
F	8775	32	01	81	8757	8749	8763
G	1·41204	27	69·77	79	1·41222	1·41235	1·41212

32. $CH_3.COOK$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18^{\circ}$	27·744	68·335	16·51	27·731	68·303	16·504
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25^{\circ}$	725	226	51	740	261	518
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18^{\circ}$	915	839	60	904	804	594
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25^{\circ}$	896	727	60	910	760	607
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+18^{\circ}$	28·306	69·980	80	28·303	69·970	798
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25^{\circ}$	288	870	80	295	888	805

33. $CH_3.COONa$.

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{24\cdot25°}$	$d_4^{24\cdot25}$
A	0·0000	0·99862	0·0000	0·99726
B	2707	1·01016	2703	1·00866
C	5413	02136	5404	01972
D	7834	03126	7821	02951
E	1·0254	04103	1·0236	03917
F	2939	05169	2914	04968
G	5624	06231	5593	06021
H	7759	07057	7722	06833
I	9893	07876	9851	07650
J	2·3540	09269	2·3486	09019
K	7184	10644	7122	10393

34. $CH_3.COONa$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168		
B	3475	24·4	60·7	14·4	3476		
C	3766	3	5	4	3773		
D	4032	4	7	5	4035		
E	4293	24·47	60·82	14·47	4293		
F	4575	48	85	49	4572	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$
G	4850	46	79	47	4850		
H	5058	42	67	45	5066		
I	5278	46	78	47	5279		
J	5640	46	78	47	5640		
K	5991	44	74	46	5997		

35. $CH_3.COONa$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +24{\cdot}25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33116	—	—	—	1·33119		
B	3420	24·4	60·5	14·4	3423		
C	3709	4	4	4	3714		
D	3963	3	4	4	3971		
E	4221	24·40	60·57	14·45	4225		
F	4492	38	51	44	4499	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$
G	4773	43	64	47	4774		
H	4980	42	59	46	4984		
I	5197	44	67	48	5196		
J	5562	50	80	50	5548		
K	5907	45	69	48	5905		

36. $CH_3.COONa$. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 18$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	↑	↑
B	3656	24·5	61·0	14·5	3658		
C	3954	6	1	5	3958		
D	4222	6	3	6	4221		
E	4476	24·58	61·13	14·52	4480		
F	4759	59	17	54	4762	$n_2 = n_1$	$n_3 - n_1$
G	5046	64	30	56	5042		
H	5259	61	23	55	5259		
I	5479	64	30	57	5474		
J	5835	60	19	54	5837		
K	6201	63	28	56	6196	↓	↓

37. $CH_3.COONa$. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 24{\cdot}25$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33299	—	—	—	1·33297	↑	↑
B	3605	24·7	61·4	14·6	3603		
C	3892	5	60·9	5	3897		
D	4149	5	9	5	4157		
E	4415	24·64	61·23	14·56	4412		
F	4693	64	22	57	4689	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$
G	4970	63	21	56	4966		
H	5183	64	21	57	5178		
I	5397	63	21	57	5390		
J	5761	66	28	58	5747		
K	6105	60	13	55	6105	↓	↓

38. $CH_3.COONa$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +\ 18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	↑	↑
B	4081	25·0	62·5	14·7	4080		
C	4385	0	4	7	4386		
D	4650	24·9	3	7	4655		
E	4916	24·98	62·31	14·73	4919		
F	5210	25·03	45	77	5206	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$
G	5497	03	46	77	5493		
H	5717	02	42	76	5714		
I	5935	01	40	76	5932		
J	6306	01	39	75	6304		
K	6668	00	35	74	6671	↓	↓

39. $CH_3.COONa$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +\ 24{\cdot}25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33711	—	—	—	1·33713	↑	↑
B	4018	24·7	61·7	14·6	4025		
C	4323	9	62·2	7	4325		
D	4583	9	1	7	4590		
E	4847	24·95	62·19	14·73	4850		
F	5125	93	11	72	5132	$n_2 = n_1$	$n_3 = n_1$
G	5414	98	25	75	5414		
H	5629	97	22	74	5630		
I	5846	97	21	74	5848		
J	6220	25·02	34	77	6211		
K	6575	24·98	23	74	6576	↓	↓

40. $CH_3.COONa$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, + 18°	24·465	60·790	14·47	24·447	60 740	14·463
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, + 24·25°	440	655	47	443	666	472
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, + 18°	615	61·225	55	622	61·248	553
$\lambda = 589\ 3\ \mu\mu$, + 24·25°	600	125	55	620	178	563
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, + 18°	25·005	62·380	75	25·012	62·392	753
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, + 24·25°	24·980	250	75	24·980	240	748

41. K_2CO_3.

	$c_{20°}$	d_4^{20}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99823	0·0000	0·99707
B	2117	1·02390	2114	1·02247
C	4300	04959	4293	04799
D	6054	06966	6044	06792
E	8590	09799	8575	09609
F	9822	11147	9804	10949
G	1·2862	14416	1·2838	14204
H	5213	16889	5185	16670
I	7114	18856	7082	18631
J	8765	20538	8729	20307
K	2.1336	23120	2·1294	22878
L	2526	24300	2482	24058
M	5535	27247	5486	27002
N	8009	29622	7954	29367
O	9702	31224	9644	30969
P	3·1768[a]	33159	3·1706	32898
Q	3839	35069	3774	34809

42. K_2CO_3. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33151	—	—	—	1·33151	1·33151	1·33151
B	3635	28·49	74·11	16·29	3641	3636	3644
C	4115	65	44	39	4120	4111	4126
D	4483	71	53	44	4486	4476	4493
E	4988	71	43	46	4992	4981	4999
F	5227	74	46	48	5229	5218	5236
G	5792	75	38	50	5793	5784	5799
H	6210	75	31	51	6212	6205	6215
I	6535	74	22	51	6539	6535	6541
J	6812	74	20	52	6815	6813	6814
K	7228	74	13	53	7232	7235	7227
L	7413	73	06	53	7420	7426	7413
M	7873	72	73·97	54	7883	7896	7870
N	8235	72	89	54	8248	8268	8228
O	8475	71	84	55	8490	8516	8465
P	8761	71	77	55	8778	8812	8748
Q	9040	71	73	56	9058	9100	9020

43. K_2CO_3. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3586	28·60	74·27	16·38	3588	3584	3591
C	4057	61	22	39	4061	4054	4067
D	4417	62	18	41	4422	4414	4429
E	4921	69	26	46	4923	4914	4930
F	5152	66	14	45	5157	5148	5164
G	5714	69	13	48	5717	5709	5722
H	6132	71	12	50	6133	6127	6136
I	6458	72	09	51	6458	6454	6460
J	6735	73	09	53	6732	6731	6731
K	7154	76	10	55	7145	7149	7141
L	7341	75	06	56	7333	7339	7326
M	7805	76	00	57	7794	7808	7783
N	8164	75	73·91	57	8156	8176	8138
O	8406	74	87	58	8397	8423	8375
P	8689	73	79	58	8684	8717	8655
Q	8966	72	71	58	8963	9004	8928

44. K_2CO_3. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33330	—	—	—	1·33330	1·33330	1·33330
B	3824	28·99	75·54	16·55	3823	3818	3826
C	4307	98	42	56	4305	4297	4312
D	4677	29·00	38	58	4674	4664	4681
E	5187	28·99	24	59	5183	5173	5191
F	5427	29·00	23	61	5421	5411	5429
G	5993	28·97	04	61	5990	5981	5996
H	6416	97	74·99	62	6411	6405	6416
I	6741	94	85	61	6741	6737	6744
J	7020	95	83	62	7018	7017	7019
K	7444	97	81	64	7438	7442	7435
L	7623	92	65	62	7627	7634	7622
M	8090	93	59	64	8094	8108	8082
N	8446	89	42	63	8461	8483	8443
O	8692	90	41	64	8705	8733	8682
P	8979	89	34	64	8995	9031	8967
Q	9261	89	30	65	9277	9321	9241

45. K_2CO_3. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33290	—	—	—	1·33290	1·33290	1·33290
B	3772	28·83	74·95	16·48	3774	3770	3778
C	4246	81	83	49	4251	4243	4257
D	4612	88	94	54	4615	4606	4622
E	5124	97	75·11	61	5120	5110	5128
F	5354	91	74·89	58	5356	5346	5363
G	5918	91	80	59	5920	5912	5927
H	6339	92	77	61	6339	6333	6345
I	6668	93	74	62	6667	6664	6672
J	6946	94	72	63	6943	6942	6946
K	7372	98	77	66	7360	7364	7359
L	7552	94	62	64	7550	7556	7547
M	8015	92	52	65	8015	8028	8007
N	8379	92	46	65	8380	8400	8366
O	8621	92	40	66	8624	8650	8606
P	8907	90	33	66	8913	8946	8889
Q	9187	90	27	67	9195	9236	9165

46. K_2CO_3. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33747	—	—	—	1·33747	1·33747	1·33747
B	4248	29·39	76·81	16·74	4247	4242	4251
C	4737	36	64	74	4736	4728	4742
D	5111	36	55	75	5110	5100	5117
E	5629	37	45	77	5627	5617	5635
F	5871	37	41	78	5869	5858	5876
G	6450	38	33	80	6446	6437	6452
H	6877	37	24	81	6874	6867	6877
I	7213	37	20	82	7209	7204	7210
J	7493	36	12	82	7490	7489	7490
K	7921	37	07	83	7917	7920	7911
L	8109	35	75·99	83	8109	8115	8101
M	8574	32	82	82	8582	8596	8568
N	8947	32	76	83	8956	8977	8935
O	9193	31	71	84	9203	9230	9178
P	9484	30	63	84	9498	9533	9466
Q	9765	29	54	84	9784	9828	9745

47. K_2CO_3. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25^\circ$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33700	—	—	—	1·33700	1·33700	1·33700
B	4191	29·33	76·48	16·73	4192	4187	4195
C	4674	31	36	73	4676	4669	4682
D	5045	34	37	76	5046	5037	5053
E	5561	38	39	80	5559	5549	5566
F	5801	38	34	81	5799	5789	5806
G	6377	39	28	83	6372	6365	6379
H	6802	38	18	83	6799	6793	6803
I	7134	37	10	83	7132	7129	7135
J	7415	37	06	84	7413	7412	7414
K	7844	39	06	86	7837	7841	7834
L	8029	36	75·93	85	8030	8036	8025
M	8507	37	91	86	8504	8517	8493
N	8869	34	75	86	8875	8896	8858
O	9118	34	72	86	9123	9149	9102
P	9407	33	63	86	9417	9451	9390
Q	9690	32	56	87	9704	9746	9670

48. K_2CO_3

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20^\circ$	28·76	74·22	16·53	28·719	73·958	16·539
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25^\circ$	715	03	52	734	928	559
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20^\circ$	94	79	62	915	74·557	934
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25^\circ$	925	67	63	921	506	648
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+20^\circ$	29·35	76·06	81	29·328	75·841	830
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25^\circ$	36	02	835	350	834	855

49. Na_2CO_3.

	$c_{20°}$	d_4^{20}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99823	0·0000	0·99707
B	1076	1·01017	1075	1·00886
C	1982	01993	1979	01856
D	2914	02971	2910	02819
E	3962	04061	3956	03897
F	4880	04997	4872	04828
G	5940	06070	5930	05895
H	6933	07057	6921	06871
I	7914	08024	7900	07835
J	8519	08610	8504	08414
K	9883	09924	9864	09718
L	1·0951	10942	1·0930	10729
M	1849	11792	1826	11578
N	2544	12438	2519	12216
O	3809	13602	3781	13371
P	4816	14518	4786	14284
Q	5765	15376	5733	15141

50. Na_2CO_3. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +\ 20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33151	—	—	—	1·33151	1·33151	1·33151
B	3405	21·96	59·08	12·22	3407	3404	3408
C	3610	22·00	08	26	3612	3608	3615
D	3813	04	08	30	3815	3811	3818
E	4037	04	00	31	4039	4035	4043
F	4228	06	58·99	34	4230	4226	4233
G	4445	06	94	35	4448	4443	4451
H	4644	08	95	37	4645	4642	4648
I	4840	13	59·03	40	4838	4835	4840
J	4954	11	58·95	39	4953	4951	4955
K	5214	13	96	41	5211	5210	5212
L	5412	13	91	42	5409	5410	5409
M	5570	07	72	39	5574	5576	5572
N	5701	13	86	43	5697	5701	5695
O	5913	07	63	40	5918	5925	5913
P	6095	13	78	44	6091	6099	6084
Q	6254	12	71	44	6251	6262	6242

51. Na_2CO_3. $\lambda = 656{\cdot}3$ μμ, $t = + 25°$.

	n_1	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108		—		1·33108	1·33108	1·33108
B	3350	21·85	58·03	12·10	3358	3356	3360
C	3550	78	36	16	3561	3558	3564
D	3750	96	70	28	3759	3755	3761
E	3973	80	47	20	3979	3975	3982
F	4164	97	62	31	4168	4164	4171
G	4380	22·10	93	39	4383	4379	4386
H	4572	21·98	55	33	4577	4574	4580
I	4793	98	53	34	4798	4795	4771
J	4876	99	51	34	4881	4879	4883
K	5140	22·10	75	41	5135	5135	5136
L	5328	02	52	38	5331	5332	5330
M	5492	03	50	38	5495	5497	5494
N	5615	04	52	40	5616	5616	5613
O	5838	08	58	43	5833	5840	5829
P	6011	11	63	45	6004	6013	5998
Q	6179	14	68	47	6164	6175	6157

52. Na_2CO_3. $\lambda = 589{\cdot}3$ μμ, $t = + 20°$.

	n_1	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33330			—	1·33330	1·33330	1·33330
B	3587	22·23	50·88	12·35	3588	3586	3590
C	3795	30	96	41	3795	3792	3798
D	4000	31	88	44	4000	3996	4004
E	4226	29	79	44	4227	4222	4231
F	4420	33	78	47	4420	4415	4423
G	4641	35	79	49	4639	4635	4643
H	4841	35	74	50	4839	4835	4842
I	5037	36	73	51	5034	5031	5037
J	5153	35	68	51	5150	5148	5153
K	5413	34	66	52	5411	5410	5412
L	5613	34	55	52	5611	5612	5611
M	5773	28	37	49	5777	5779	5777
N	5903	33	46	52	5902	5906	5901
O	6113	23	15	48	6125	6132	6122
P	6298	31	32	52	6300	6308	6294
Q	6450	30	27	53	6462	6473	6455

53. Na_2CO_3. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33290	—	—	—	1·33290	1·33290	1·33290
B	3529	21·00	56·46	11·70	3542	3540	3544
C	3732	47	57·62	97	3747	3743	3750
D	3934	82	58·40	12·19	3946	3942	3949
E	4164	22·12	59·15	37	4168	4164	4171
F	4355	16	20	40	4359	4354	4362
G	4575	22	33	44	4576	4571	4579
H	4769	20	22	44	4771	4767	4774
I	4961	19	17	44	4964	4961	4966
J	5077	22	21	46	5078	5075	5080
K	5336	25	23	48	5334	5333	5335
L	5532	23	16	48	5532	5532	5531
M	5699	25	17	49	5697	5698	5696
N	5819	23	10	49	5819	5821	5816
O	6042	26	12	51	6038	6044	6034
P	6211	23	02	50	6211	6218	6205
Q	6371	22	58·96	50	6372	6382	6365

54. Na_2CO_3. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33747	—	—	—	1·33747	1·33747	1·33747
B	4008	22·58	61·02	12·51	4009	4007	4011
C	4220	69	20	59	4220	4216	4223
D	4428	68	07	61	4428	4424	4431
E	4656	62	60·82	59	4659	4654	4662
F	4853	66	85	62	4854	4849	4858
G	5077	67	85	64	5077	5073	5081
H	5280	67	80	64	5280	5276	5283
I	5478	68	76	65	5478	5475	5481
J	5598	69	78	67	5597	5594	5598
K	5863	69	72	68	5862	5861	5862
L	6068	70	72	69	6065	6066	6064
M	6234	68	61	68	6235	6236	6233
N	6366	71	69	70	6362	6365	6358
O	6580	62	37	66	6589	6595	6583
P	6766	68	51	70	6766	6774	6758
Q	6931	68	47	70	6931	6942	6922

55. Na_2CO_3. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33700	—	—	—	1·33700	1·33700	1·33700
B	3955	22·48	60·59	12·49	3957	3955	3959
C	4162	47	49	49	4166	4163	4169
D	4367	60	70	59	4370	4366	4373
E	4591	55	49	58	4596	4592	4600
F	4790	67	77	65	4791	4787	4794
G	5013	70	80	67	5012	5008	5016
H	5213	70	75	68	5212	5209	5215
I	5405	63	54	65	5409	5406	5412
J	5529	73	76	71	5526	5523	5528
K	5790	71	66	71	5788	5787	5789
L	5993	72	65	72	5989	5990	5989
M	6151	63	37	67	6159	6160	6158
N	6286	71	57	72	6283	6286	6282
O	6503	65	37	70	6508	6514	6504
P	6687	71	48	73	6684	6693	6679
Q	6850	69	41	73	6850	6860	6843

56. Na_2CO_3.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20°$	22·105	58·86	12·40	22·110	58·815	12·412
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	22·05	61	39	068	596	407
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20°$	32	59·515	51	309	59·427	508
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	23	59·15	12·475	224	097	479
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+20°$	68	60·66	12·67	676	60·602	680
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	69	58	70	686	518	702

57. $K_2C_2O_4$.

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99862	0.0000	0·99707
B	0824	1·00887	0823	1·00721
C	2120	02457	2116	02273
D	3301	03869	3295	03667
E	4227	04944	4219	04740
F	6279	07308	6266	07084
G	6838	07941	6823	07711
H	8449	09762	8430	09519
I	9642	11073	9620	10816

58. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 656{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3355	36·60	92·91	21·32	3363	3362	3364
C	3652	37·37	94·81	77	3656	3654	3657
D	3911	40	84	80	3916	3914	3918
E	4110	55	95·16	90	4110	4108	4111
F	4532	54	03	91	4533	4533	4533
G	4645	56	06	92	4644	4645	4644
H	4965	55	00	93	4965	4967	4963
I	—	—				—	

59. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 656{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25°$. .

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3293	36·76	93·18	21·44	3299	3298	3300
C	3581	37·28	94·40	75	3586	3585	3588
D	3833	28	35	76	3841	3839	3842
E	4034	52	94	91	4034	4033	4035
F	4455	60	95·05	96	4451	4451	4451
G	4557	48	94·70	90	4561	4561	4560
H	4876	52	77	93	4877	4879	4875
I	-					-	

60. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	3544	37·77	96·11	21·96	3544	3543	3545
C	3837	68	95·74	94	3838	3837	3840
D	4101	78	95	22·00	4100	4098	4102
E	4297	80	91	02	4295	4294	4296
F	4718	72	59	21·99	4720	4721	4720
G	4827	68	45	98	4832	4834	4831
H	5157	78	70	22·04	5154	5158	5152
I	—	—	—	—	—	—	—

61. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	3478	37·08	94·12	21·60	3483	3482	3484
C	3766	45	96	84	3772	3771	3773
D	4028	73	95·63	22·00	4028	4027	4030
E	4222	73	57	01	4222	4222	4223
F	4643	77	58	04	4641	4642	4641
G	4751	73	43	03	4752	4753	4751
H	5072	76	50	05	5070	5073	5069
I	—	—	—	—	—	—	—

62. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	3955	37·34	95·15	21·68	3965	3963	3965
C	4264	38·38	97·81	22·29	4266	4264	4268
D	4533	45	94	34	4534	4532	4536
E	4734	49	94	37	4734	4732	4735
F	5171	51	90	40	5170	5169	5170
G	—	—	—	—	—	—	—
H	5613	46	71	39	5615	5617	5614
I	5848	50	75	41	5847	5851	5843

63. $K_2C_2O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33701	1·33701	1·33701
B	3898	38·48	98·03	22·35	3899	3897	3900
C	4192	39	97·66	33	4195	4193	4197
D	4463	68	98·36	49	4459	4457	4460
E	4657	51	97·86	41	4658	4657	4660
F	5089	54	84	44	5090	5089	5090
G	—	—	—	—	—	—	—
H	5533	57	86	47	5531	5533	5530
I	5763	58	84	48	5760	5763	5757

64. $K_2C_2O_4$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	37·55	95·06	21·915	37·534	95·011	21·907
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	53	94·865	925	503	94·787	913
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	75	95·72	22·01	744	95·647	22·009
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	74	55	03	743	513	032
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+18°$	38·49	97·825	39	38·483	97·774	394
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	55	85	45	567	871	464

65. $Na_2C_2O_4$.

	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0199	0·999983
B	0391	1·00161
C	0805	0603
D	1200	1029
E	1382	1231
F	1603	1464
G	1788	1664
H	1989	1886

66. $Na_2C_2O_4$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	$\triangle_0$	R_1	R_2	R_3	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
A	0·00055	26·08	69·96	14·55	0·00064	0·00062	0·00066
B	94	29·98	77·87	17·16	97	96	97
C	0·00187	30·77	79·45	69	0·00186	0·00186	0·00186
D	275	83	52	74	273	273	273
E	315	67	11	65	315	315	315
F	362	68	08	67	362	363	361
G	408	97	84	83	403	404	402
H	451	79	39	73	449	449	448

67. $Na_2C_2O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	$\triangle_0$	R_1	R_2	R_3	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
A	0·00056	26·57	71·38	14·81	0·00065	0·00062	0·00067
B	95	30·27	78·73	17·31	98	97	98
C	0·00188	93	79·98	77	0·00188	0·00188	0·00188
D	277	31·04	80·16	85	276	276	276
E	319	00	09	82	318	319	318
F	366	30·98	79·95	82	366	366	365
G	413	31·29	80·79	18·00	407	408	406
H	458	19	53	17·93	453	454	453

68. $Na_2C_2O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	$\triangle_0$	R_1	R_2	R_3	$\triangle_1$	$\triangle_2$	$\triangle_3$
A	0·00056	26·55	71·56	14·75	0·00066	0·00064	0·00068
B	98	31·11	81·18	17·74	0·00100	99	0·00101
C	0·00196	32·02	83·08	18·34	193	0·00193	193
D	282	31·56	81·73	10	283	283	283
E	323	39	31	00	327	327	326
F	377	76	82·25	22	375	376	374
G	424	32·01	90	36	418	418	417
H	466	31·69	07	18	465	466	464

69. $Na_2C_2O_4$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = 25°$	30·67	79·18	17·64	30·76	79·38	17·71
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = 25°$	96	80·03	79	31·11	80·34	88
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = 25°$	31·65	82·07	18·13	71	82·19	18·19

70 A. $K_2C_4H_4O_4$.

	p	d_4^{18}	d_4^{25}
a	14·336	1·08977	1·08759
b	29·832	19859	19568

70 B. 98·58 % $K_2C_4H_4O_4$ 1·42 % K_2CO_3.

	p	d_4^{18}	d_4^{25}
A	0·000	0·99862	0·99707
B	3·701	1·02157	1·01979
C	8·491	05187	05005
D	14·849	09378	09140
E	18·987	12213	11954
F	26·015	17265	16979
G	31·269	21103	20798
H	39·821	27767	27440
I	41·871	29473	29132

71. $K_2C_4H_4O_5$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +18°$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35247	52·72	132·05	31·01	1·35247	1·35248	1·35245
b	7635	70	02	30·99	7638	7638	7639

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3694	52·56	131·64	30·92	3697	3697	3697
C	4395	91	132·55	31·12	4386	4387	4385
D	5332	77	19	04	5327	5328	5326
E	5954	69	131·99	30·99	5957	5957	5956
F	7062	68	132·02	97	7068	7065	7071
G	7880	68	131·97	97	7889	7887	7892
H	9297	71	132·08	98	9300	9296	9308
I	9619	57	131·72	90	9661	9654	9673

72. $K_2C_4H_4O_5$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35159	52·60	131·61	30·97	1·35167	1·35168	1·35165
b	7551	78	132·13	31·05	7536	7537	7537

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3623	52·35	130·94	30·83	3630	3630	3629
C	4312	58	131·56	95	4317	4318	4317
D	5245	75	98	31·05	5241	5243	5239
E	5870	76	132·02	05	5864	5866	5863
F	6977	77	12	04	6967	6965	6970
G	7791	74	04	03	7782	7782	7785
H	9178	66	131·85	30·97	9188	9183	9197
I	9528	64	81	95	9545	9538	9558

73. $K_2C_4H_4O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18^{\circ}$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35449	53·14	133·27	31·23	1·35440	1·35441	1·35438
b	7850	05	04	16	7847	7847	7846

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	3885	53·26	133·62	31·29	3881	3881	3880
C	4578	12	20	22	4574	4575	4572
D	5527	10	16	20	5521	5522	5519
E	6150	52·99	132·87	14	6155	6155	6153
F	7272	53·03	133·04	14	7273	7270	7274
G	8099	03	02	15	8099	8098	8100
H	9515	01	00	13	9520	9515	9526
I	9846	52·90	132·70	06	9883	9876	9893

74. $K_2C_4H_4O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25^{\circ}$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35362	53·00	132·78	31·17	1·35363	1·35364	1·35362
b	7760	08	133·03	20	7749	7749	7750

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	3808	52·60	131·69	30·95	3816	3816	3816
C	4503	90	132·51	31·12	4508	4509	4507
D	5444	53·09	99	22	5438	5440	5436
E	6073	09	133·02	22	6065	6067	6064
F	7181	05	132·99	18	7176	7173	7178
G	8006	07	133·01	19	7997	7996	8000
H	9400	52·97	132·79	13	9412	9407	9421
I	9749	94	71	10	9771	9763	9784

75. $K_2C_1H_1O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +18°$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35902	53·94	135·64	31·63	1·35892	1·35894	1·35890
b	8345	83	39	56	8342	8343	8343

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	4307	53·89	135·53	31·60	4306	4306	4305
C	5018	97	71	65	5011	5012	5009
D	5987	96	71	64	5975	5976	5973
E	6621	83	37	56	6620	6621	6618
F	7750	77	27	51	7758	7755	7760
G	8590	77	24	52	8599	8598	8602
H	1·40039	79	33	52	1·40046	1·40042	1·40055
I	0365	64	134·92	43	0416	0409	0429

76. $K_2C_1H_4O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1$ $\mu\mu$, $t = +25°$.

A

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
a	1·35811	53·82	135·20	31·59	1·35811	1·35813	1·35810
b	8253	89	42	61	8242	8244	8244

B

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33701	1·33701	1·33701
B	4232	53·64	134·71	31·49	4236	4236	4235
C	4939	79	135·13	57	4941	4942	4940
D	5898	95	53	66	5888	5890	5886
E	6537	93	48	64	6527	6529	6525
F	7659	84	32	57	7658	7657	7661
G	8498	84	32	58	8495	8495	8499
H	9917	75	10	51	9938	9934	9949
I	1·40276	73	06	50	1·40305	1·40297	1·40320

77. $K_2C_4H_4O_4$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu,\ t = +18°$	52·72	132·07	31·00	52·655	131·937	30·949
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu,\ t = +25°$	70	131·91	01	685	907	986
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu,\ t = +18°$	53·03	133·00	15	979	132·906	31·112
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu,\ t = +25°$	02	132·86	17	995	836	140
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu,\ t = +18°$	82	135·36	55	53·743	135·189	192
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu,\ t = +25°$	83	28	58	781	183	534

78. $K_3C_6H_5O_7$.

	$c_{18°}$	d_4^{18}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99862	0·0000	0·99707
B	1491	1·02898	1488	1·02711
C	3466	06763	3459	06550
D	4871	09453	4861	09218
E	6868	13173	6853	12927
F	8202	15630	8183	15359
G	1·0404	19569	1·0379	19284
H	3554	25092	3522	24792
I	4457	26633	4423	26337

79. $K_3C_6H_5O_7$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu,\ t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33168	—	—	—	1·33168	1·33168	1·33168
B	3849	79·78	201·48	46·65	3852	3851	3852
C	4799	80·10	202·20	84	4705	4705	4703
D	5294	02	201·98	79	5292	5292	5290
E	6096	01	96	79	6093	6094	6091
F	6613	79·91	70	72	6618	6618	6617
G	7448	99	91	76	7446	7447	7446
H	8588	92	78	71	8595	8593	8597
I	8911	98	95	74	8910	8908	8913

80. $K_3C_6H_5O_7$. λ 656·3 $\mu\mu$, t · 25 ·

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3773	79·39	200·16	46·48	3782	3782	3782
C	4025	91	201·47	78	4638	4629	4627
D	5208	97	62	80	5210	5211	5208
E	6009	80·00	74	82	6009	6010	6008
F	6522	79·94	58	78	6527	6528	6527
G	7360	80·07	96	84	7353	7354	7354
H	8501	01	87	79	8500	8497	8506
I	8821	04	95	80	8817	8813	8824

81. $K_3C_6H_5O_7$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +18^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33348	—	—	—	1·33348	1·33348	1·33348
B	4040	80·70	204·11	47·13	4037	4037	4037
C	4908	84	35	23	4897	4897	4896
D	5492	58	203·66	08	5489	5489	5487
E	6303	61	72	09	6297	6298	6295
F	6820	44	30	46·99	6826	6827	6826
G	7663	53	54	47·04	7662	7662	7662
H	8810	45	36	46·97	8820	8818	8824
I	9135	50	52	47·00	9137	9135	9142

82. $K_3C_6H_5O_7$. $\lambda = 589{\cdot}3$ $\mu\mu$, $t = +25^{\circ}$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	3962	79·99	201·92	46·78	3970	3970	3969
C	4817	80·37	202·86	47·01	4821	4822	4820
D	5406	48	203·15	06	5407	5409	5405
E	6212	50	24	07	6212	6213	6210
F	6728	43	06	02	6734	6735	6732
G	7573	58	48	09	7565	7566	7565
H	8717	48	29	02	8720	8717	8721
I	9046	55	50	05	9039	9035	9045

83. $K_3C_6H_5O_7$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +18°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33764	—	—	—	1·33764	1·33764	1·33764
B	4463	81·60	206·91	47·56	4464	4463	4464
C	5348	98	207·79	79	5336	5337	5335
D	5935	59	206·75	57	5937	5938	5936
E	6765	75	207·17	66	6757	6759	6756
F	7291	59	206·76	56	7295	7295	7294
G	8151	71	207·10	62	8143	8144	8143
H	9312	58	206·80	53	9320	9317	9324
I	9638	61	88	55	9642	9640	9647

84. $K_3C_6H_5O_7$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33701	1·33701	1·33701
B	4387	81·42	206·14	47·51	4391	4391	4390
C	5256	66	68	65	5256	5258	5255
D	5850	63	62	63	5852	5853	5850
E	6674	73	91	68	6670	6672	6668
F	7197	62	65	62	7201	7202	7200
G	8056	76	207·05	68	8046	8047	8047
H	9220	66	206·86	61	9221	9218	9227
I	9541	64	80	59	9545	9542	9553

85. $K_3C_6H_5O_7$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$[R_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	79·97	201·88	46·75	79·961	201·871	46·742
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	80·005	79	81	80·016	846	801
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+18°$	80·52	203·52	47·03	504	203·493	47·013
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	50	29	05	510	342	047
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+18°$	81·64	206·91	58	81·635	206·913	569
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	67	815	635	672	836	622

86. $H_2C_2O_4$.

	$c_{20°}$	d_4^{20}	$c_{25°}$	d_4^{25}
A	0·0000	0·99823	0·0000	0·99707
B	1132	1·00336	1131	1·00210
C	1697	0580	1695	0452
D	2263	0821	2260	0690
E	3394	1290	3390	1156
F	4242	1645	4236	1501
G	5090	1996	5083	1846
H	5938	2343	5929	2195
I	6786	2696	6776	2540

87. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33151	—	—	—	1·33151	1·33151	1·33151
B	3270	25·36	62·62	15·07	3273	3272	3274
C	3321	10	61·86	14·94	3331	3330	3332
D	3387	68	63·36	15·27	3387	3386	3388
E	3487	44	62·64	15	3495	3494	3495
F	3578	70	63·30	30	3577	3576	3577
G	3660	72	33	32	3657	3657	3658
H	3734	62	05	26	3737	3737	3737
I	3817	65	13	28	3818	3819	3818

88. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33108	—	—	—	1·33108	1·33108	1·33108
B	3222	25·21	62·10	15·00	3225	3224	3226
C	3270	24·86	61·12	14·82	3281	3280	3282
D	3335	25·49	62·78	15·18	3335	3334	3335
E	3439	46	62	18	3440	3439	3440
F	3512	37	33	13	3517	3517	3517
G	3595	50	66	21	3594	3594	3594
H	3672	47	58	19	3672	3673	3672
I	3750	48	61	20	3750	3750	3749

89. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33331	—	—	—	1·33331	1·33331	1·33331
B	3458	26·15	64·76	15·51	3455	3454	3456
C	3513	25·89	00	37	3513	3512	3514
D	3575	26·12	56	51	3570	3569	3571
E	3678	25·85	63·76	38	3679	3678	3679
F	3765	95	64·00	43	3762	3762	3762
G	3844	88	63·81	40	3844	3844	3844
H	3924	88	76	40	3924	3925	3924
I	4004	84	67	38	4007	4007	4006

90. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33291	—	—	—	1·33291	1·33291	1·33291
B	3406	25·38	62·60	15·09	3409	3408	3410
C	3458	23	17	02	3465	3464	3466
D	3521	71	63·40	30	3520	3519	3521
E	3623	58	62·97	24	3626	3625	3626
F	3702	62	63·04	27	3704	3704	3704
G	3788	79	46	36	3782	3782	3782
H	3860	64	07	28	3861	3861	3861
I	3940	68	15	30	3939	3940	3938

91. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +20°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33748	—	—	—	1·33748	1·33748	1·33748
B	3877	26·51	65·83	15·69	3874	3873	3875
C	3933	26	07	56	3933	3932	3934
D	3997	53	75	72	3992	3991	3992
E	4105	34	16	63	4103	4103	4103
F	4188	29	64·99	61	4188	4188	4188
G	4271	28	94	61	4272	4272	4271
H	4352	26	88	60	4354	4355	4353
I	4436	26	87	60	4438	4439	4437

92. $H_2C_2O_4$. $\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $t = +25°$.

	n_0	R_1	R_2	R_3	n_1	n_2	n_3
A	1·33701	—	—	—	1·33701	1·33701	1·33701
B	3828	26·63	66·02	15·78	3824	3823	3824
C	3877	25·96	64·18	41	3882	3881	3883
D	3944	26·48	65·53	71	3939	3938	3940
E	4048	22	64·76	58	4049	4048	4049
F	4130	24	78	60	4130	4130	4130
G	4213	28	86	62	4211	4212	4211
H	4293	23	72	60	4294	4294	4293
I	4373	21	67	59	4375	4376	4374

93. $H_2C_2O_4$.

	(R_1)	(R_2)	(R_3)	$[R_1]$	$[R_2]$	$R[_3]$
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20°$	25·67	63·20	15·29	25·634	63·115	15·266
$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	48	62·62	195	452	62·549	181
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+20°$	88	63·80	40	882	63·811	402
$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$, $+25°$	66	14	29	660	143	291
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+20°$	26·29	64·99	61	26·284	64·959	612
$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$, $+25°$	24	78	60	236	764	601

94. Na_2CO_3.

a

p	α ($\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$)	t	α ($\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$)	t	α ($\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$)	t
1·1239 ($c_{18°} = 0{\cdot}1071$)	31·3′	19·0°	32·3′	18·8°	36·5′	19·3°
	31·4′	„	32·3′	„	36·4′	„
	31·2′	„	32·4′	„	36·2′	„
1·1091	$\frac{1{\cdot}1091}{1{\cdot}1239} \times 31{\cdot}8'$	19·3°	$\frac{1{\cdot}1091}{1{\cdot}1239} \times 32{\cdot}9'$	19·3°	$\frac{1{\cdot}1091}{1{\cdot}1239} \times 36{\cdot}5'$	19·3°
	$\times 31{\cdot}7'$	„	$\times 32{\cdot}8'$	„	$\times 36{\cdot}7'$	„
	$\times 31{\cdot}7'$	„	$\times 32{\cdot}6'$	„	$\times 36{\cdot}6'$	„
1·0943	$\frac{1{\cdot}0943}{1{\cdot}1239} \times 31{\cdot}8'$	19·4°	$\frac{1{\cdot}0943}{1{\cdot}1239} \times 32{\cdot}9'$	19·3°	$\frac{1{\cdot}0943}{1{\cdot}1239} \times 36{\cdot}2'$	19·4°
	$\times 31{\cdot}8'$	„	$\times 32{\cdot}7'$	„	$\times 36{\cdot}4'$	„
	$\times 32{\cdot}0'$	„	$\times 33{\cdot}0'$	„	$\times 36{\cdot}3'$	„
1·0794	$\frac{1{\cdot}0794}{1{\cdot}1239} \times 31{\cdot}1'$	19·4°	$\frac{1{\cdot}0794}{1{\cdot}1239} \times 33{\cdot}0'$	19·4°	$\frac{1{\cdot}0794}{1{\cdot}1239} \times 36{\cdot}4'$	19·4°
	$\times 31{\cdot}5'$	„	$\times 33{\cdot}1'$	„	$\times 36{\cdot}3'$	„
	$\times 31{\cdot}5'$	„	$\times 32{\cdot}7'$	„	$\times 36{\cdot}6'$	„
1·0498	$\frac{1{\cdot}0498}{1{\cdot}1239} \times 31{\cdot}5'$	19·4°	$\frac{1{\cdot}0498}{1{\cdot}1239} \times 32{\cdot}7'$	19·4°	$\frac{1{\cdot}0498}{1{\cdot}1239} \times 36{\cdot}7'$	19·4°
	$\times 31{\cdot}3'$	„	$\times 32{\cdot}5'$	„	$\times 36{\cdot}5'$	„
	$\times 31{\cdot}2'$	„	$\times 32{\cdot}6'$	„	$\times 36{\cdot}4'$	„
1·1239	31·5′	19·30°	32·7′	19·24°	36·45′	19·36°

b

$c_{18°}$	Δn ($\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$)	t	Δn ($\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$)	t	Δn ($\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$)	t
0·1071	0·00252	19·30°	0·00254	19·24°	0·00258	19·36°
0·1071	0·00253	18·00°	0·00255	18·00°	0·00259	18·00°

95. Na_2CO_3.

$c_{18°}$	d_4^{18}	Δ	R_1 ($\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$)	R_2 ($\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$)	R_3 ($\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$)
0·01429	1·000313	1079	18·08	49·62	9·90
2143	1151	1673	96	51·93	10·40
2857	1929	2241	19·83	53·99	93
3572	2702	2858	20·81	56·45	11·50
4286	3510	3303	01	54·29	05
5001	4295	3918	59	55·76	39
5715	5095	4497	75	56·18	48
6429	5876	5048	86	40	55
7143	6654	5676	21·26	57·47	78
0·07858	1·00738	6231	21·53	58·09	11·95
8571	816	6878	88	98	12·15
9286	894	7494	22·07	59·47	26
0·1000	973	8040	21·99	26	22
029	1·01004	8329	22·19	78	33
043	017	8412	19	75	33
057	031	8527	24	88	37
071	043	8654	38	60·24	45

96.

	R_1		R_2		R_3	
	Q	P	Q	P	Q	P
$NaCHO_2$	+ 16·7	− 2·81	+ 23·0	− 3·87	+ 11·8	− 1·98
$KC_2H_3O_2$	+ 10·7	− 1·63	+ 16·0	− 2·43	+ 7·3	− 1·10
K_2CO_3	+ 5·8	− 2·20	+ 29·8	− 11·38	− 13·4	+ 5·11
Na_2CO_3	− 4·6	+ 3·77	+ 12·9	− 10·57	− 18·0	+ 14·76
$K_2C_2O_4$	− 10·0	+ 14·31	+ 0·9	− 0·95	− 19·2	+ 27·37
$Na_2C_2O_4$	− 30·8	+ 189·3	− 23·0	+ 141·0	− 36·9	+ 228·0
$K_2C_4H_4O_4$	+ 18·3	− 8·08	+ 14·3	− 6·30	+ 25·4	− 11·19
$K_3C_6H_5O_7$	+ 3·4	− 2·86	− 2·0	+ 1·75	+ 12·5	− 10·6

97.

	λ	p	R_1	R_2	R_3	$\frac{\partial R_1}{\partial p} \cdot 10^2$	$\frac{\partial R_2}{\partial p} \cdot 10^2$	$\frac{\partial R_3}{\partial p} \cdot 10^2$	t
KCl	656·3 $\mu\mu$	20·92	18·985	47·460	11·182	0·0	0·0	0·0	21·5
	589·3 $\mu\mu$		19·153	47·944	11·268				
	486·1 $\mu\mu$		19·493	48·941	11·443				
NaCl	656·3 $\mu\mu$	24·64	15·703	39·878	9·140	− 0·0	− 0·0	− 0·0	21·5
	589·3 $\mu\mu$		15·844	40·294	9·211				
	486·1 $\mu\mu$		16·165	41·245	9·373				
$NaCHO_2$	656·3 $\mu\mu$	38·91	16·847	41·810	9·973	− 0·525	− 1·940	− 0·206	21·5
	589·3 $\mu\mu$		16·964	42·152	10·032				
	486·1 $\mu\mu$		17·243	42·971	10·176				
$KC_2H_3O_2$	656·3 $\mu\mu$	61·09	27·706	68·160	16·501	− 0·223	− 0·899	− 0·083	21·5
	589·3 $\mu\mu$		27·878	68·660	16·590				
	486·1 $\mu\mu$		28·270	69·807	16·791				
$NaC_2H_3O_2$	656·3 $\mu\mu$	20·15	24·445	60·703	14·467	—	—	—	21·1
	589·3 $\mu\mu$		24·621	61·213	14·558				
	486·1 $\mu\mu$		24·996	62·316	14·750				
K_2CO_3	656·3 $\mu\mu$	34·62	28·710	73·700	16·570	− 0·215	− 2·997	+ 0·277	22·5
	589·3 $\mu\mu$		28·902	74·289	16·662				
	486·1 $\mu\mu$		29·323	75·595	16·863				
Na_2CO_3	656·3 $\mu\mu$	14·48	22·102	58·603	12·439	+ 0·410	− 3·087	+ 0·898	22·5
	589·3 $\mu\mu$		22·279	59·159	12·523				
	486·1 $\mu\mu$		22·694	60·457	12·720				
Na_2CO_3	656·3 $\mu\mu$	1·12	22·38	60·24	12·45	+ 440	+ 1090	+ 260	18·0
	589·3 $\mu\mu$								
	486·1 $\mu\mu$								
$K_2C_2O_4$	656·3 $\mu\mu$	12·79	37·539	94·902	21·932	+ 0·945	− 0·166	+ 1·011	21·5
	589·3 $\mu\mu$		37·764	95·583	22·042				
	486·1 $\mu\mu$		38·546	97·825	22·452				
$Na_2C_2O_4$	656·3 $\mu\mu$	2·62	30·83	79·51	17·76	+ 14·4	+ 28·6	+ 9·7	25·0
	589·3 $\mu\mu$		31·18	80·47	17·93				
	486·1 $\mu\mu$		31·78	82·32	18·24				
$K_2C_4H_4O_4$	656·3 $\mu\mu$	41·87	52·631	131·837	30·938	− 0·531	− 1·113	− 0·409	21·5
	589·3 $\mu\mu$		52·948	132·786	31·097				
	486·1 $\mu\mu$		53·723	135·101	31·484				
$K_3C_6H_5O_7$	656·3 $\mu\mu$	34·98	79·981	201·873	46·756	− 0·118	+ 0·194	− 0·244	21·5
	589·3 $\mu\mu$		80·500	203·432	47·015				
	486·1 $\mu\mu$		81·646	206·889	47·580				
$H_2C_2O_4$	656·3 $\mu\mu$	5·95	25·54	62·83	15·22	—	—	—	22·5
	589·3 $\mu\mu$		25·77	63·48	15·35				
	486·1 $\mu\mu$		26·26	64·86	15·60				

$\frac{\partial R}{R \cdot \partial t} \cdot 10^4$

	Newton–Laplace–Drude $R = M\,(n^2-1)\,/d$			Gladstone–Dale $R = M\,(n-1)\,/d$			Lorenz–Lorentz–Planck $R = M\,(n^2-1)\,/(n^2+2)\cdot d$		
	$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$	$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$	$\lambda = 656{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$	$\lambda = 486{\cdot}1\ \mu\mu$
KCl	− 2·1	− 1·5	− 2·7	− 0·5	+ 0·2	− 1·0	+ 0·8	+ 1·4	+ 0·3
NaCl	− 3·0	− 2·0	− 2·9	− 1·0	+ 0·1	− 0·9	+ 0·6	+ 1·7	+ 0·8
$NaCHO_2$	+ 0·0	− 1·3	+ 0·4	+ 1·7	+ 0·6	+ 2·2	+ 3·0	+ 2·0	+ 3·4
$KC_2H_3O_2$	− 0·9	− 0·9	− 1·7	+ 0·5	+ 0·3	− 0·4	+ 1·2	+ 1·1	+ 0·6
$NaC_2H_3O_2$	− 2·0	− 1·8	− 3·9	− 0·3	− 0·1	− 2·0	+ 1·0	+ 1·1	− 0·5
K_2CO_3	− 0·8	− 1·4	− 0·2	+ 1·0	+ 0·4	+ 1·5	+ 2·4	+ 1·7	+ 3·0
$K_2C_2O_4$	− 3·4	− 2·0	+ 1·4	− 1·2	− 0·0	+ 3·1	+ 0·4	+ 1·5	+ 4·5
$K_2C_4H_4O_4$	− 0·3	− 0·8	− 0·1	+ 0·8	+ 0·4	+ 1·0	+ 1·7	+ 1·3	+ 1·9
$K_3C_6H_5O_7$	− 0·2	− 1·1	− 0·5	+ 1·0	+ 0·1	+ 0·6	+ 1·8	+ 1·0	+ 1·6
Medeltal	− 1·41	− 1·42	− 1·13	+ 0·22	+ 0·22	+ 0·46	+ 1·43	+ 1·42	+ 1·73
	− 1·3			+ 0·3			+ 1·5		

99.

	$\frac{\partial R}{R \cdot \partial p} \cdot 10^4$			
	p %	Newton–Laplace $R = \frac{M}{d}(n^2-1)$	Gladstone–Dale $R = \frac{M}{d}(n-1)$	Lorenz–Lorentz $R = \frac{M}{d}\cdot\frac{n^2-1}{n^2+2}$
KCl	0 – 21	0·0	0·0	0·0
NaCl	0 – 25	– 0·0	0·0	0·0
$NaCHO_2$	0 – 39	– 1·0	3·1	2·0
$KC_2H_3O_2$	0 – 61	– 1·3	– 0·8	– 0·5
K_2CO_3	0 – 35	– 1·0	– 0·7	+ 1·7
Na_2CO_3	0 – 14	– 5·2	+ 1·8	+ 7·2
$K_2C_2O_4$	0 – 13	– 0·2	2·5	+ 4·6
$K_2C_4H_4O_4$	0 – 42	– 0·8	– 1·0	– 1·3
$K_3C_6H_5O_7$	0 – 35	– 0·1	– 0·1	– 0·5
	Medeltal	– 1·8	– 0·2	+ 1·0

100.

	$\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$			D_1 $(H_\beta - H_\alpha)$	D_2 $(H_\beta - H_\alpha)$	D_3 $(H_\beta - H_\alpha)$
	R_1	R_2	R_3			
KCl – NaCl	3·309	7·650	2·057	+ 0·046	+ 0·114	+ 0·028
$KC_2H_3O_2$ – $NaC_2H_3O_2$ (20·15 %)	3·348	7·815	2·066	+ 0·013	+ 0·034	+ 0·007
$\frac{1}{2}$ (K_2CO_3 – Na_2CO_3) (14·48 %)	3·333	7·867	2·042	+ 0·010	+ 0·020	+ 0·006
$\frac{1}{2}$ ($K_2C_2O_4$ – $Na_2C_2O_4$)	—	—	—	+ 0·028	+ 0·056	+ 0·020
K – Na (medeltal)	3·33	7·78	2·055	+ 0·03	+ 0·06	+ 0·015

101.

	$R = \frac{M}{d} \cdot \frac{n^2 - 1}{n_2 + 2}$	$D = (H_\beta - H_\alpha)$
$CHO_2 = CHO''O'$	7·254	0·111
$C_2H_3O_2 = C_2H_3O''O'$	11·872	0·182
$CO_3 = CO''O_2' - A$	7·379	0·094
$C_2O_4 = C_2O_2''O_2' + B$	12·738	—
$C_4H_4O_4 = C_4H_4O_2''O_2'$	21·544	0·318
$C_6H_5O_7 = C_6H_5O_3''O_4'$	32·741	0·460

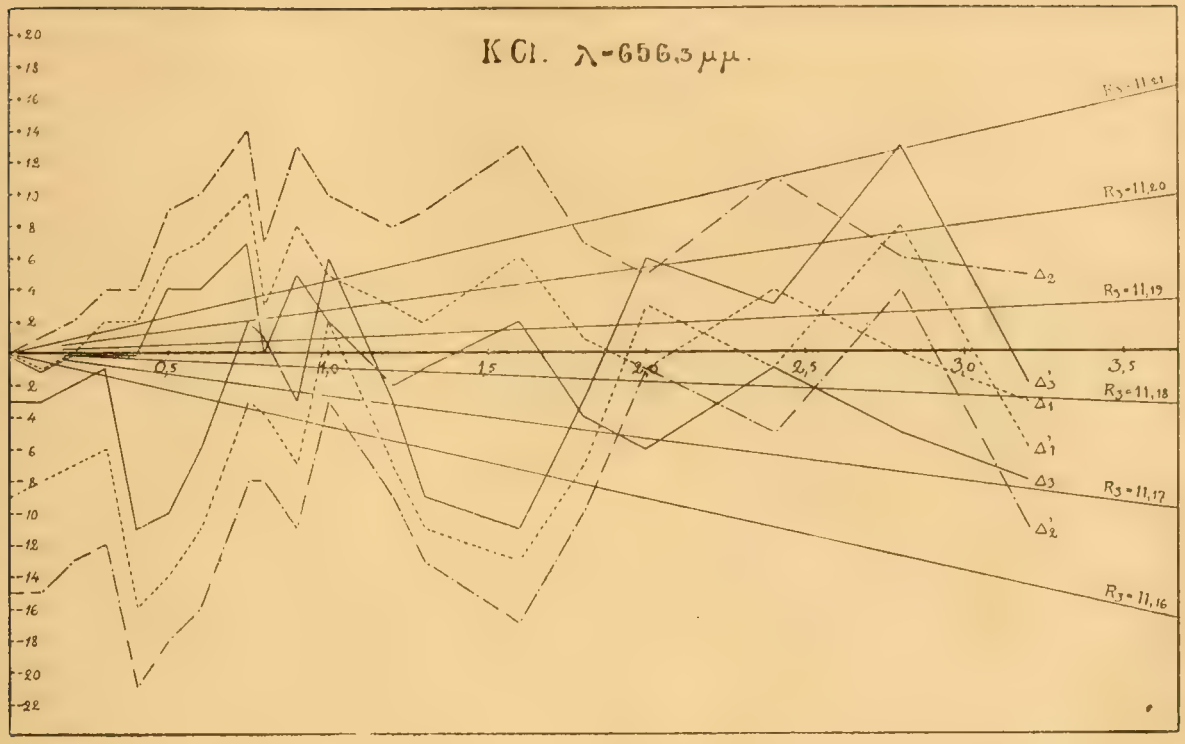
Refraktionerna hänföra sig till $\lambda = 589{\cdot}3\ \mu\mu$. Beräkningarna äro baserade på Eisenlohrs konstanter, Zeitschr. f. phys. Chemie *75*, 585 (1910). Kolsyredietylestern uppvisar depressionen 0·23 och kolsyredimetylestern depressionen 0·37 (Karvonen, Ann. Acad. Scient. Fennicæ A, X, 6, sida 6; 1918). Med stöd av dessa data har jag antagit, att kolsyreresten uppvisar en depression $A = 0{\cdot}30$. På grund av den konjugerade dubbelbindningen i oxalsyreresten $O=C-C=O$ (O' O') uppträder en exaltation B, som jag antagit vara lika med exaltationen för glyoxal $O=C-C=O$ (H H), nämligen + 0·43. (Karvonen, Ann. Acad. Scient. Fennicæ A, X, 5, sida 4, 1918).

102.

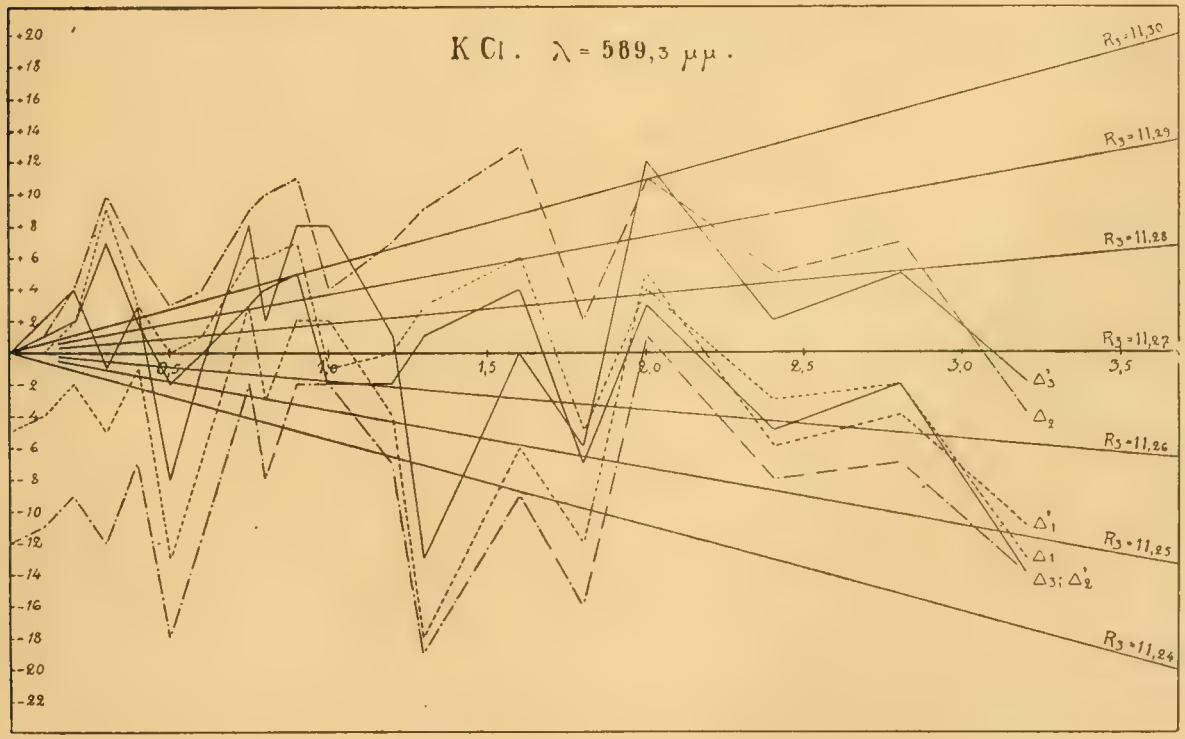
Den skenbara atomrefraktionen och atomdispersionen för kalium beräknad enligt Lorenz—Lorentz' formel.

	p	R	$\frac{\partial R}{\partial p} \cdot 10^2$	R för $p = 100\ \%$ Extrapolerat	$D = (H_\beta - H_\alpha)$
$NaCHO_2 - CHO_2^-$ + (K − Na)	38·9	4·833	− 0·206	4·707	0·107
$KC_2H_3O_2 - C_2H_3O_2$	61·1	4·718	− 0·083	4·686	0·108
$NaC_2H_3O_2 - C_2H_3O_2$ + (K − Na)	20·2	4·741	—	—	0·116
½ ($K_2CO_3 - CO_3$)	34·6	4·641	+ 0·138	4·731	0·100
½ ($Na_2CO_3 - CO_3$) + (K − Na)	14·5	4·627	+ 0·449	—	0·108
½ ($Na_2CO_3 - CO_3$) + (K − Na)	1·1	4·590	+ 130·		
½ ($K_2C_2O_4$) − C_2O_4)	12·8	4·652	+ 0·505	—	—
½ ($Na_2C_2O_4 - C_2O_4$) + (K − Na)	2·6	4·650	+ 4·8		
½ ($K_2C_4H_4O_4 - C_4H_4O_4$)	41·9	4·776	− 0·205	4·657	0·114
⅓ ($K_3C_6H_5O_7 - C_6H_5O_7$)	35·0	4·758	− 0·081	4·705	0·121
K, medeltal				4·70	0·111

1.

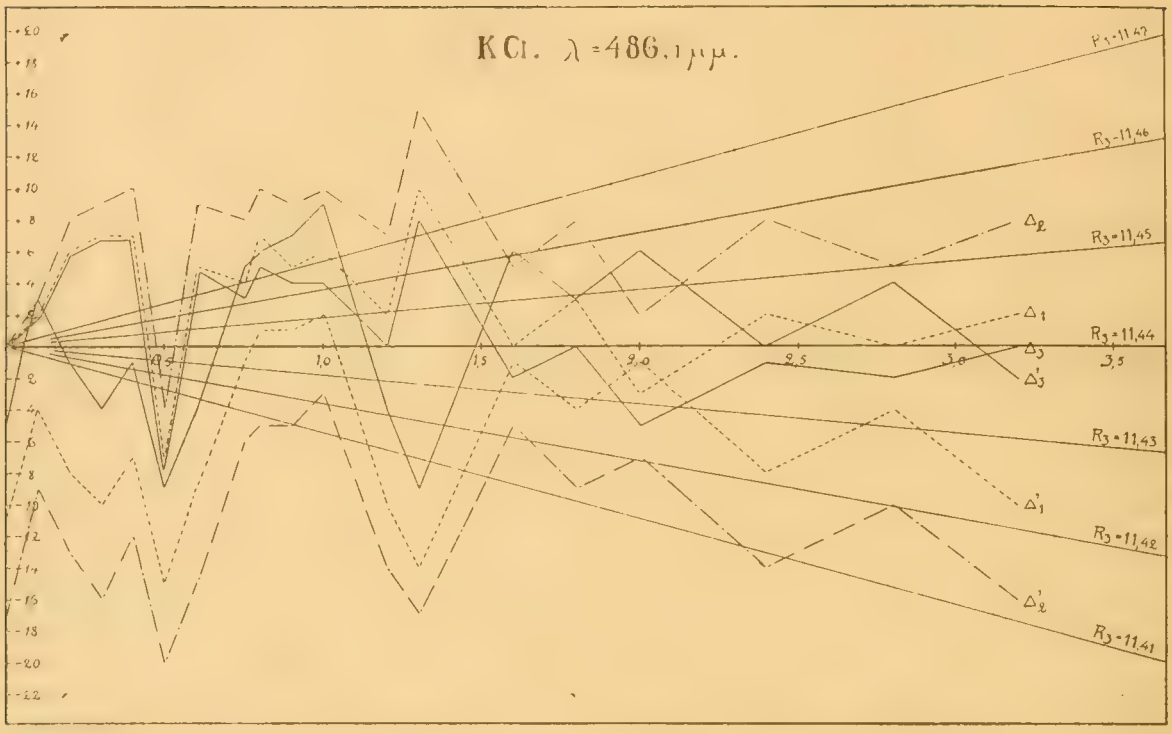

K Cl. λ=656,3 μμ.
R3=11,21
R3=11,20
R3=11,19
R3=11,18
R3=11,17
R3=11,16
Δ2
Δ'3
Δ1
Δ'1
Δ3
Δ'2
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5

2.

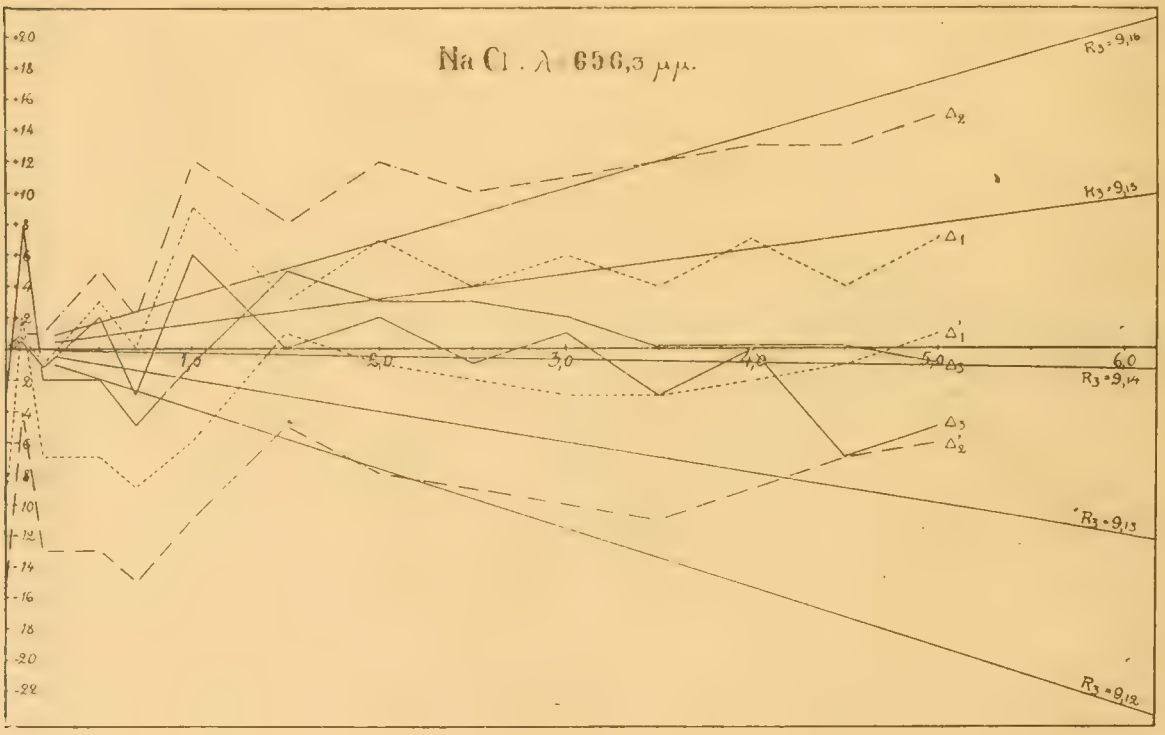

K Cl. λ = 589,3 μμ.
R3=11,30
R3=11,29
R3=11,28
R3=11,27
R3=11,26
R3=11,25
R3=11,24
Δ'3
Δ2
Δ'1
Δ1
Δ3; Δ'2
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5

N:o 2.

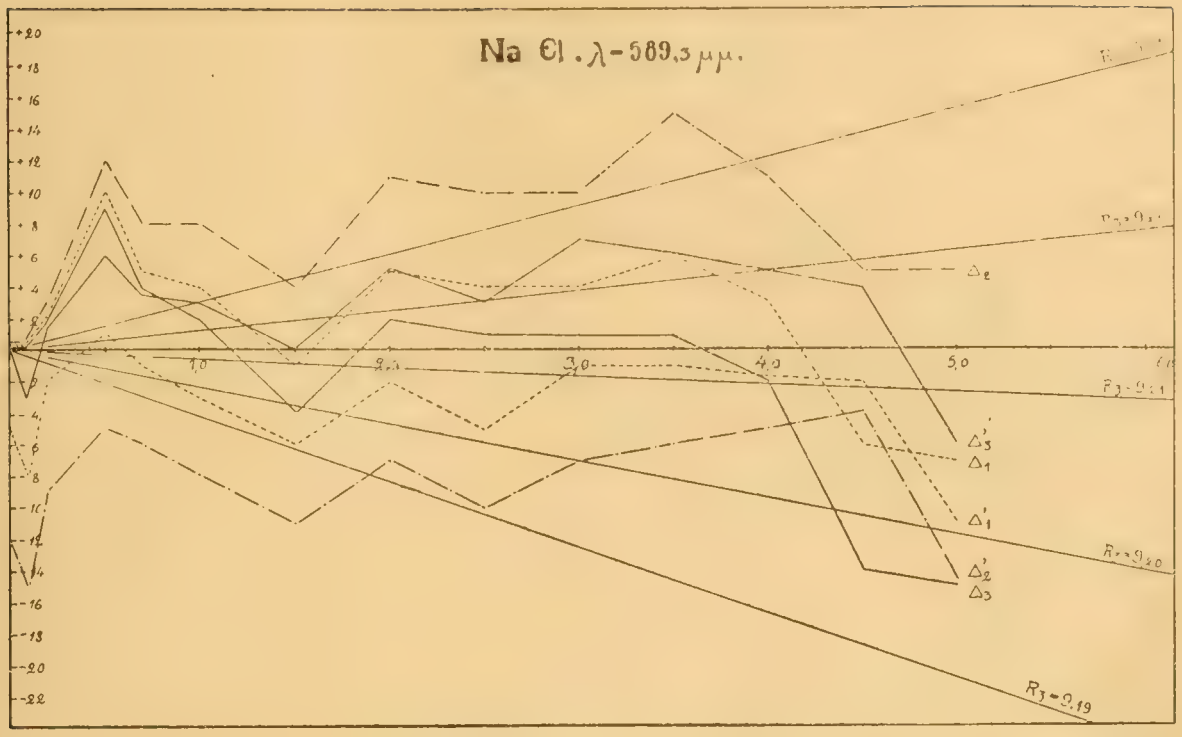
3.


KCl. λ = 486,1 μμ.
R3 = 11,47
R3 = 11,46
R3 = 11,45
R3 = 11,44
R3 = 11,43
R3 = 11,42
R3 = 11,41
Δ2
Δ1
Δ3
Δ'3
Δ'1
Δ'2
3,5

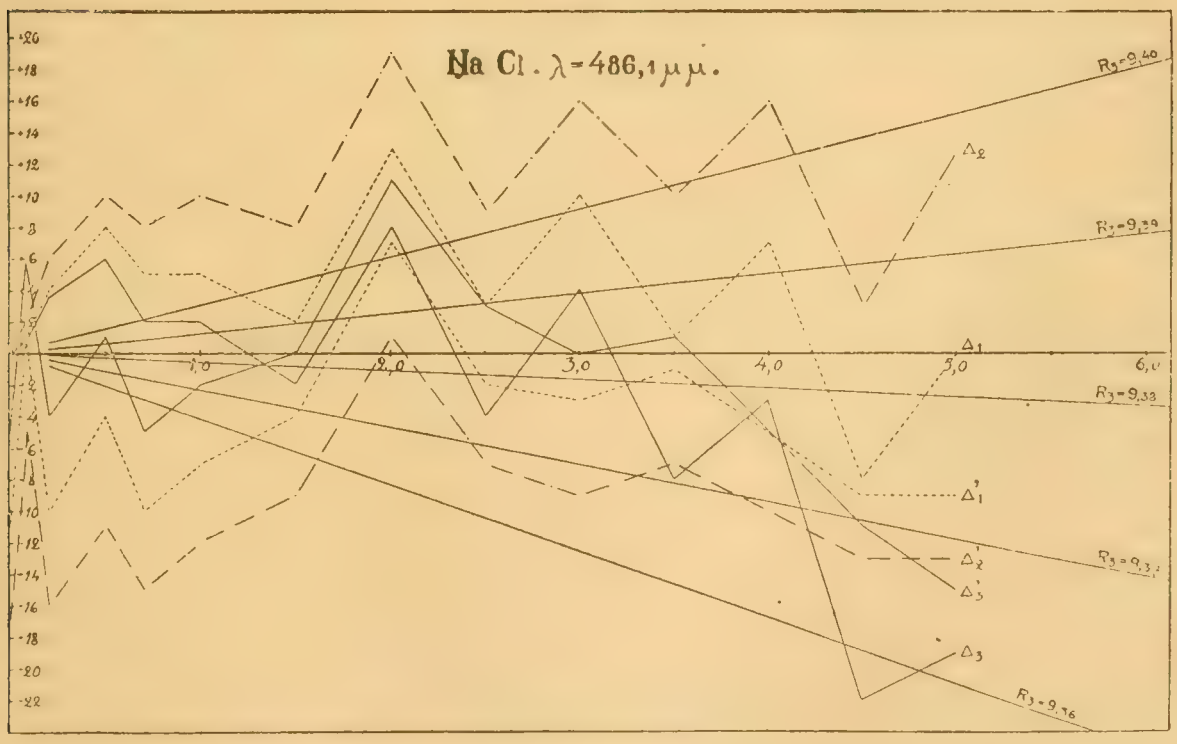
4.


Na Cl. λ = 656,3 μμ.
R3 = 9,16
R3 = 9,15
R3 = 9,14
R3 = 9,13
R3 = 9,12
Δ2
Δ1
Δ'1
Δ3
Δ'2
6,0

5.

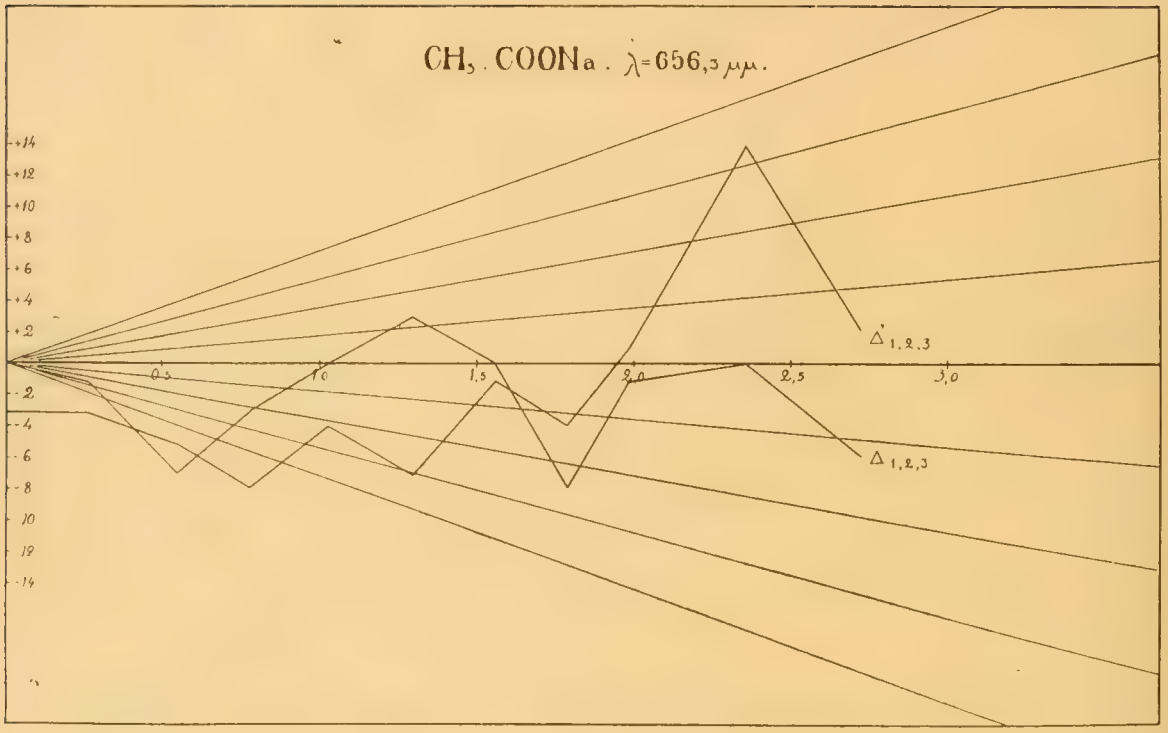

Na Cl . λ=589,3 μμ.
Δ2
Δ'3
Δ1
Δ'1
Δ'2
Δ3
R3=9,19

6.

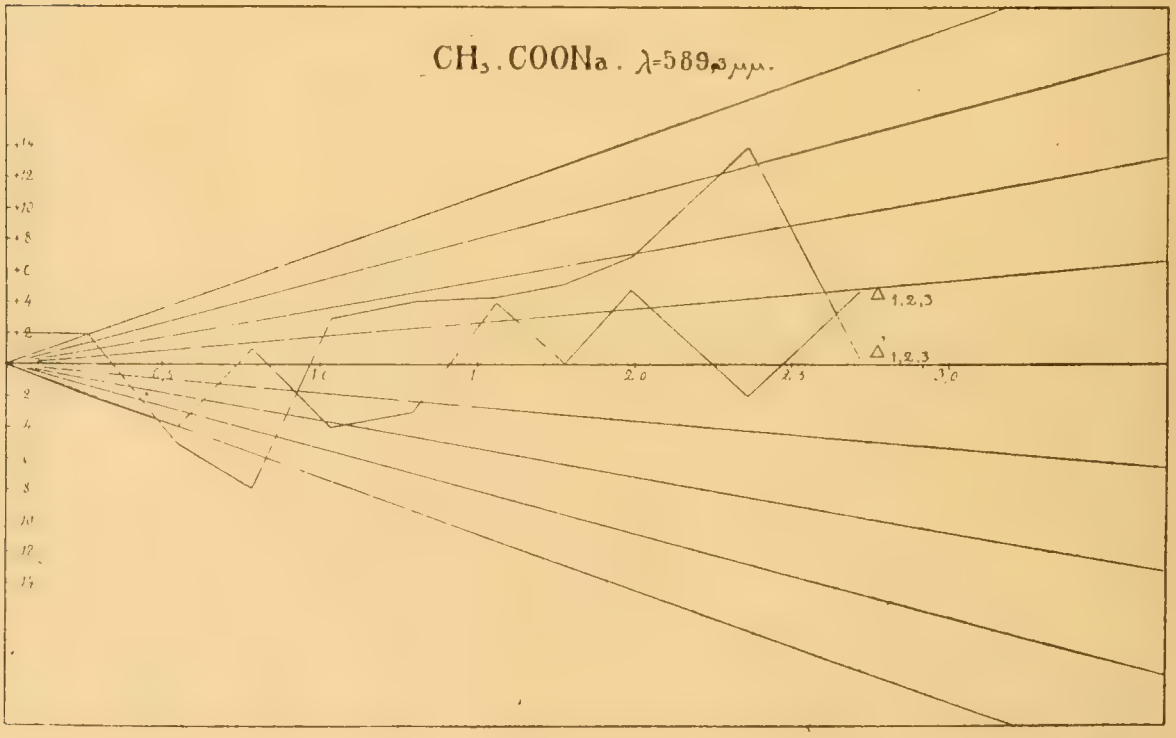

Na Cl . λ=486,1 μμ.
R3=9,40
Δ2
R3=9,29
Δ1
R3=9,33
Δ'1
Δ'2
Δ'3
Δ3
R3=9,36

N:o 2.

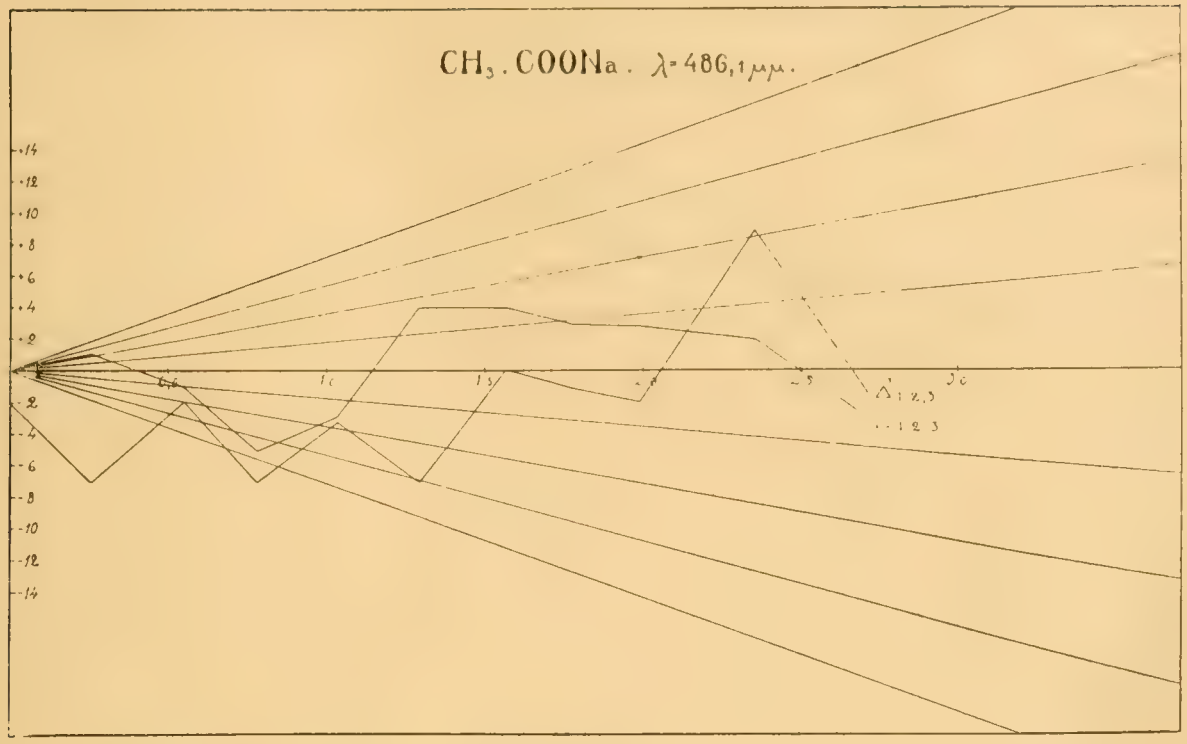
7.


$CH_3.COONa$. λ=656,3 $\mu\mu$.
+14
+12
+10
+8
+6
+4
+2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
$\Delta_{1,2,3}$
$\Delta_{1,2,3}$

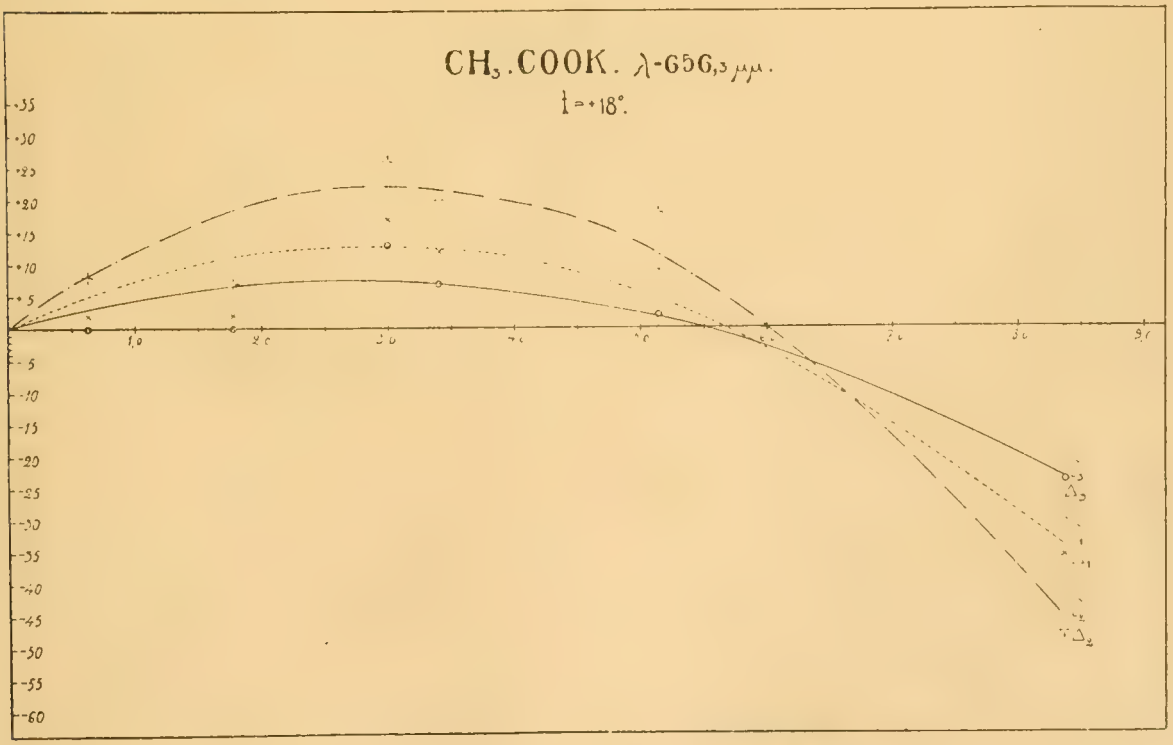
8.


$CH_3.COONa$. λ=589,3 $\mu\mu$.
+12
+10
+8
+6
+4
+2
-2
-4
-8
-10
-12
-14
0,5
1,0
1
2,0
2,5
3,0
$\Delta_{1,2,3}$
$\Delta_{1,2,3}$

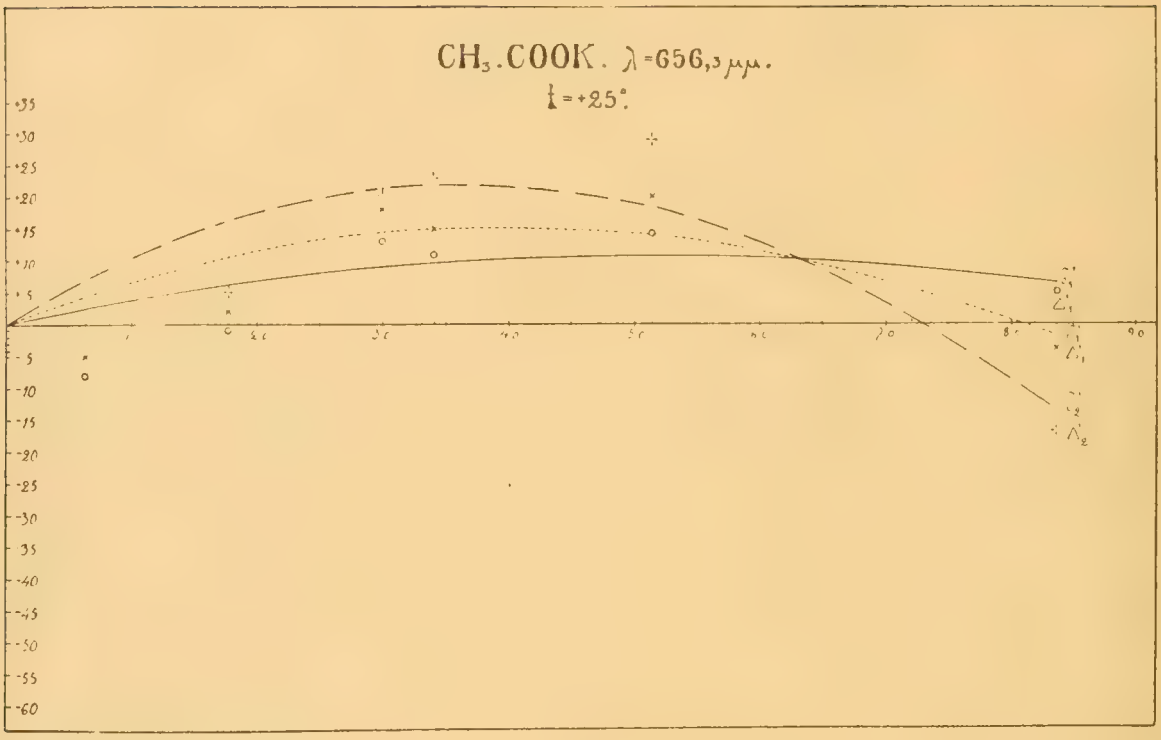
9.


$CH_3.COONa$. λ=486,1 $\mu\mu$.
+14
+12
+10
+8
+6
+4
+2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
$\Delta_{1,2,3}$
1 2 3

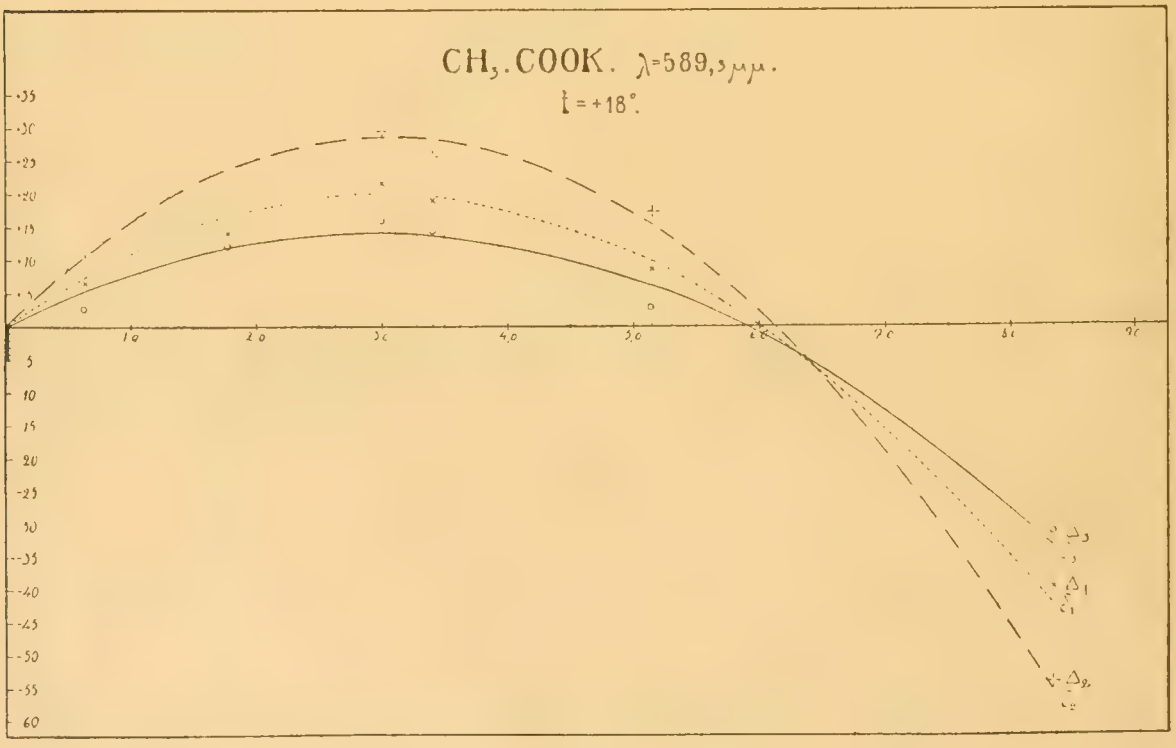
10.


$CH_3.COOK$. λ=656,3 $\mu\mu$.
t=+18°.
+35
+30
+25
+20
+15
+10
+5
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
Δ_3
Δ_2

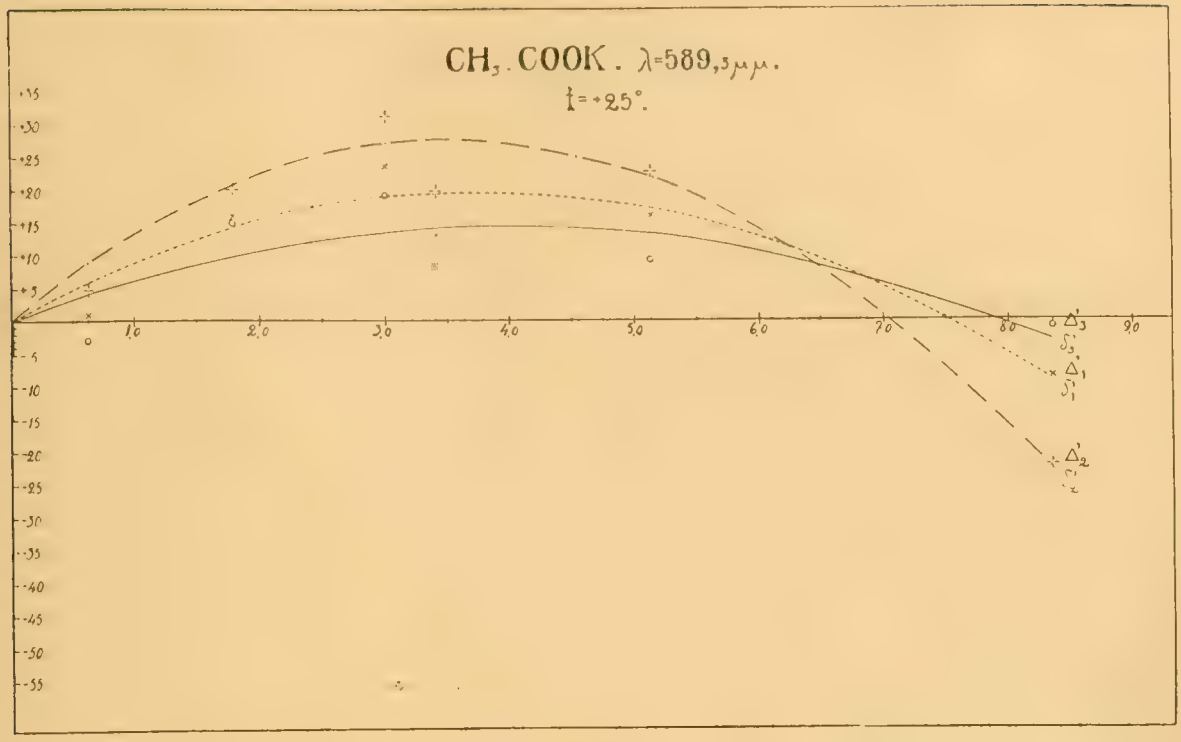
11.



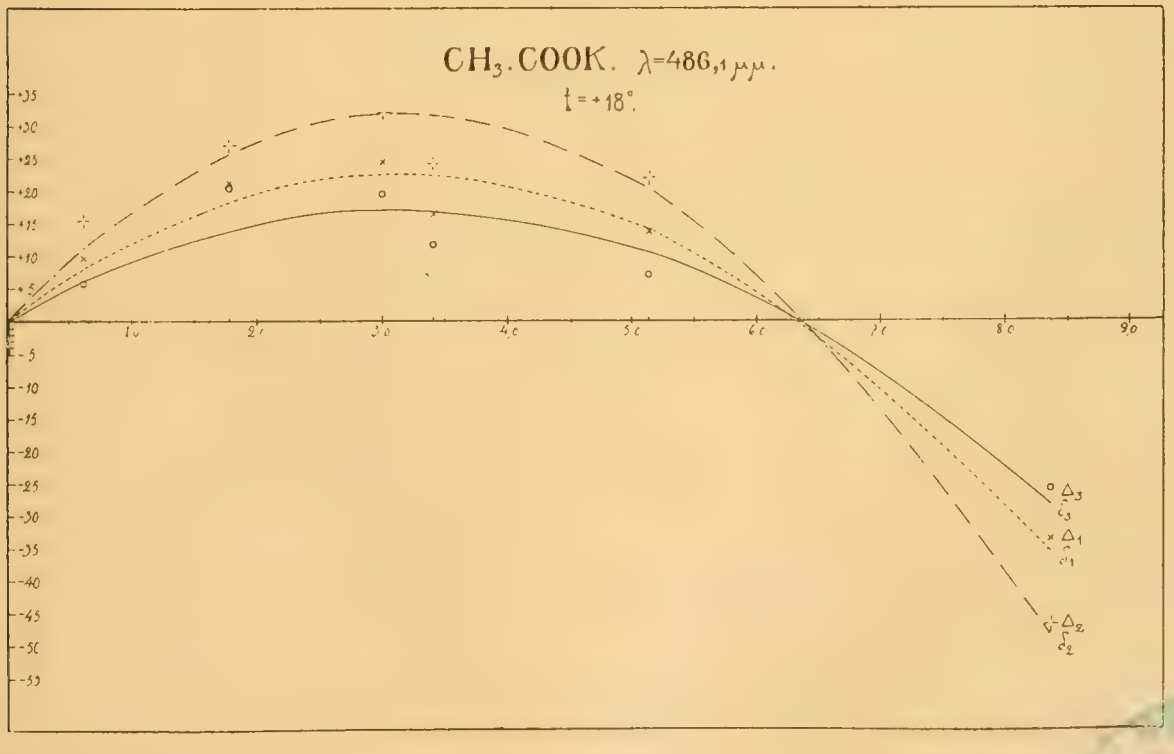
12.



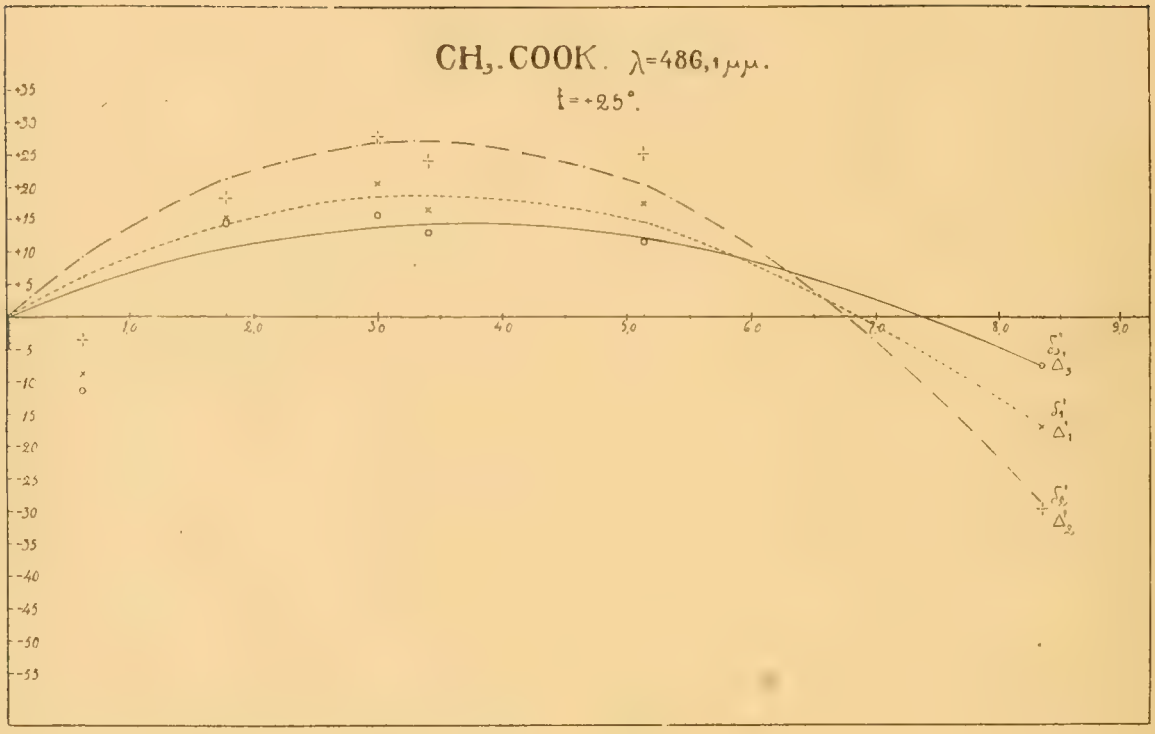
13.



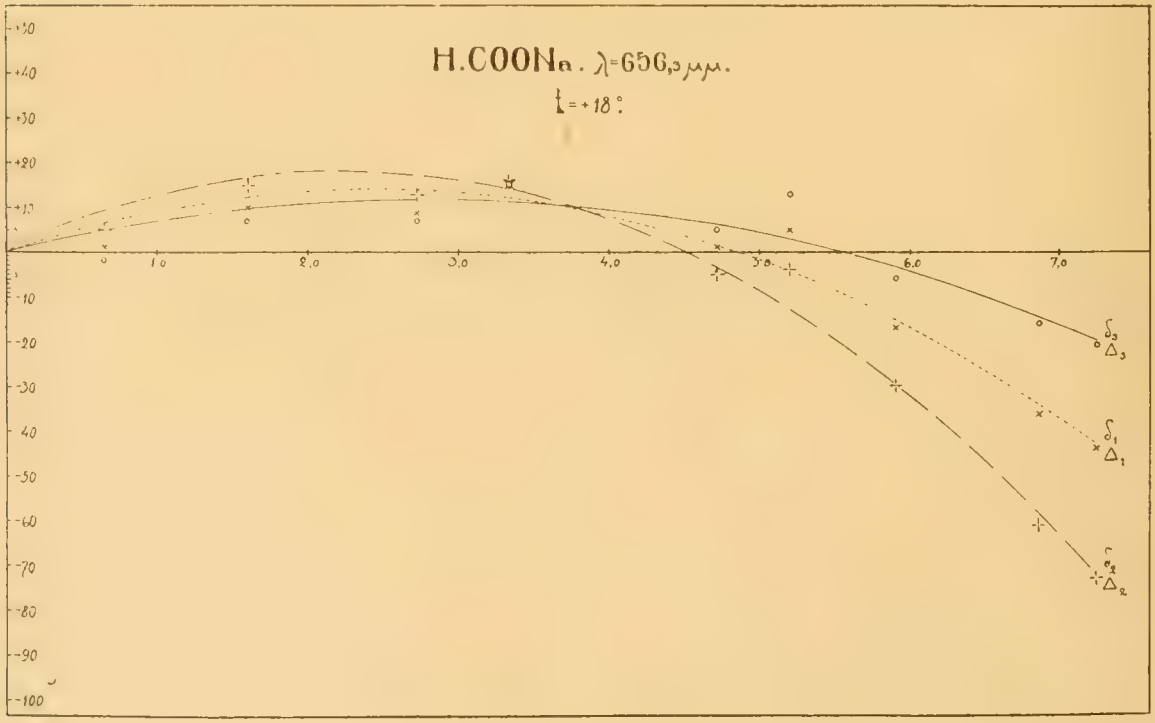
14.



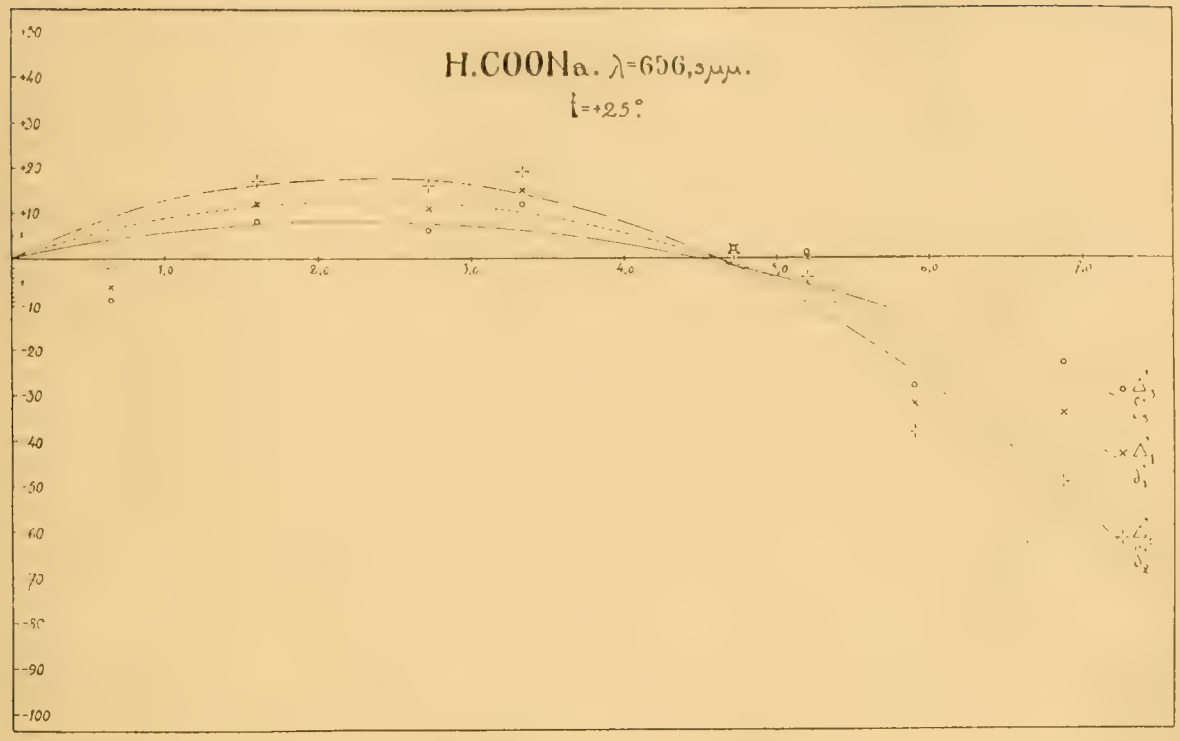
15.


$CH_3.COOK$. λ=486,1 $\mu\mu$.
t=+25°.
+35
+30
+25
+20
+15
+10
+5
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
8,0
9,0
δ_3' Δ_3'
δ_1' Δ_1'
δ_2' Δ_2'

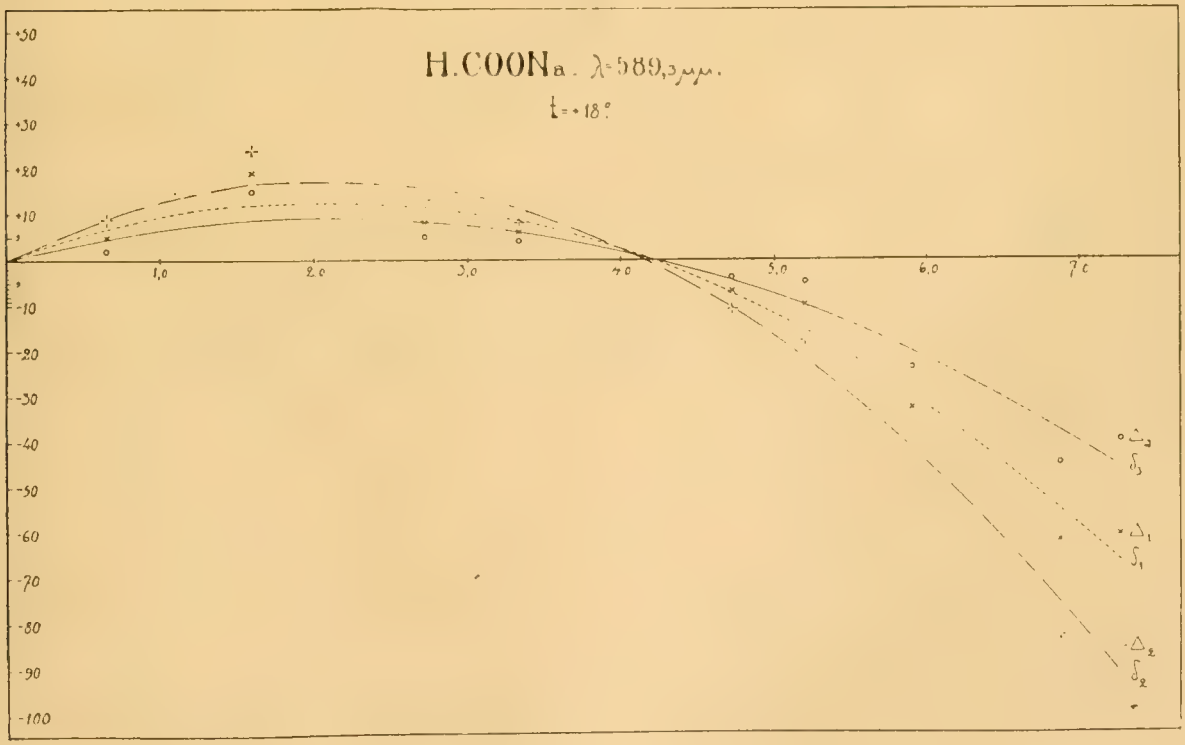
16.


$H.COONa$. λ=656,3 $\mu\mu$.
t=+18°.
+50
+40
+30
+20
+10
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
δ_3 Δ_3
δ_1 Δ_1
δ_2 Δ_2

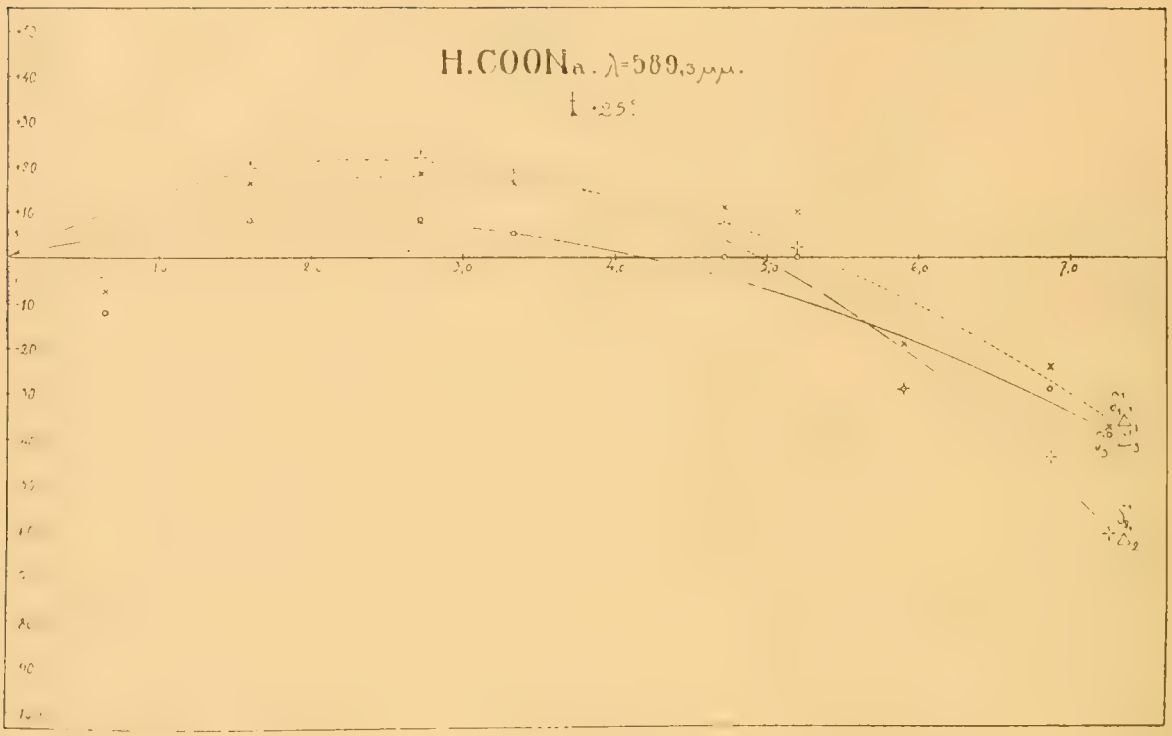
17.


H.COONa. λ=656,3μμ.
t=+25°
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0

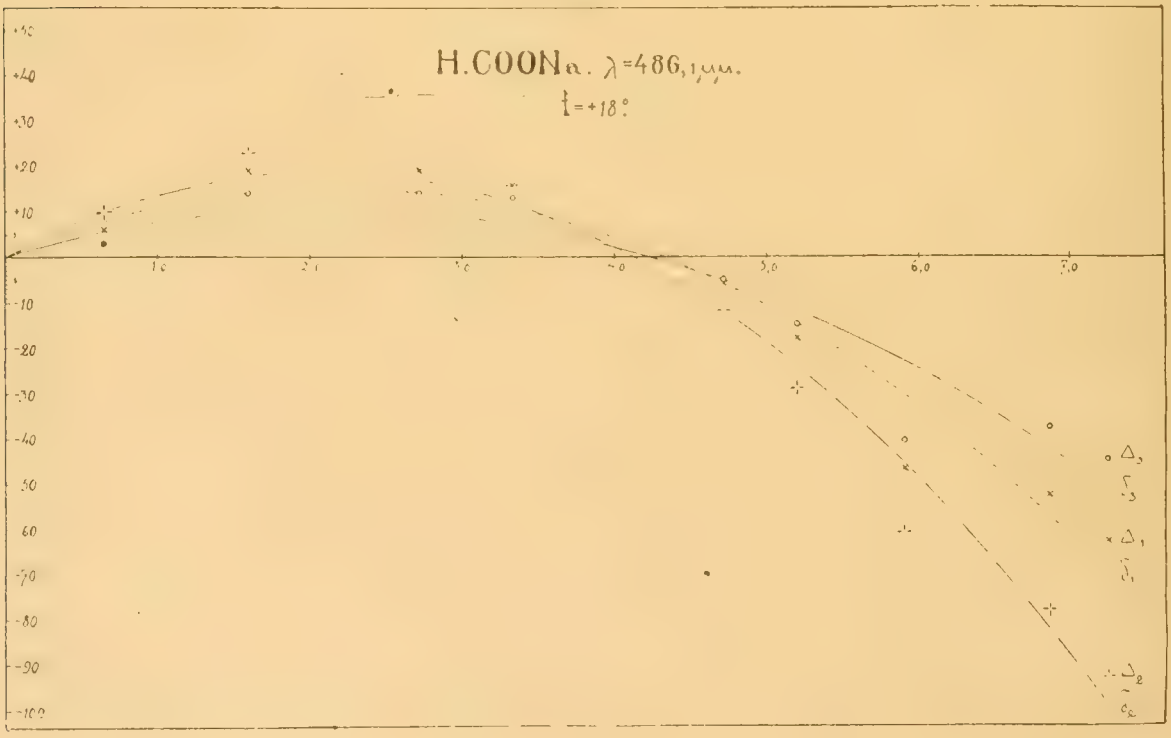
18.


H.COONa. λ=589,3μμ.
t=+18°
+50
+40
+30
+20
+10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0

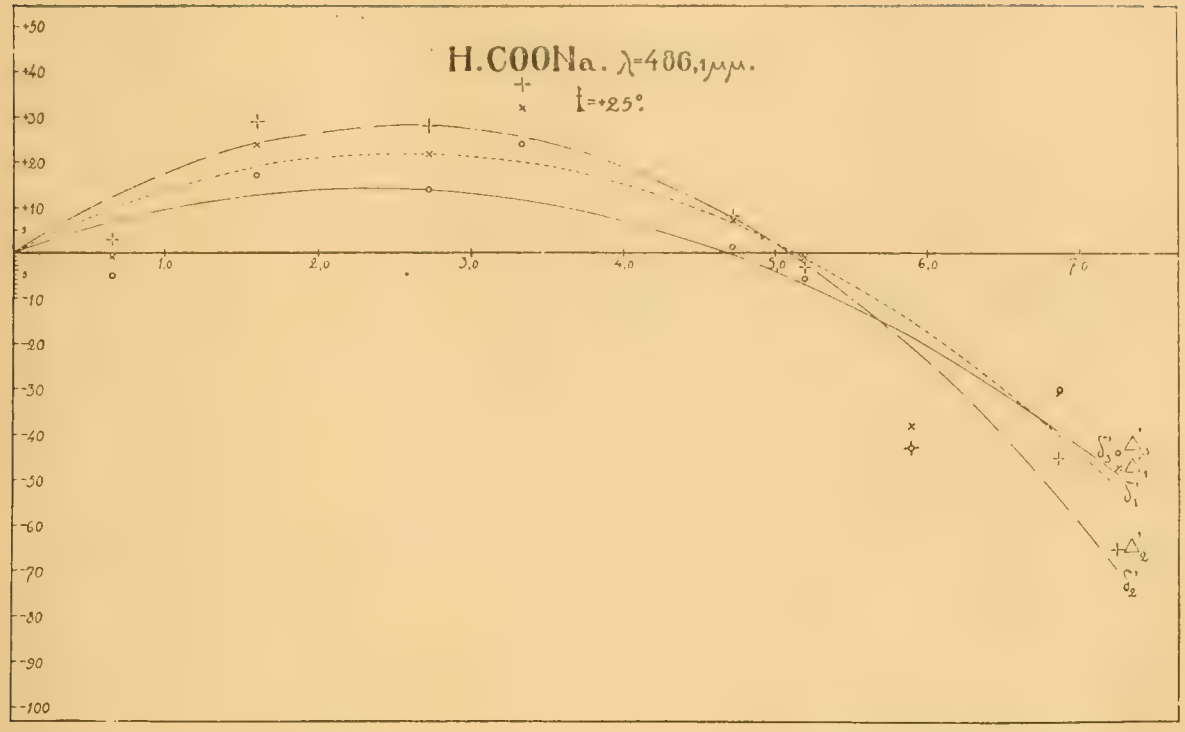
19.



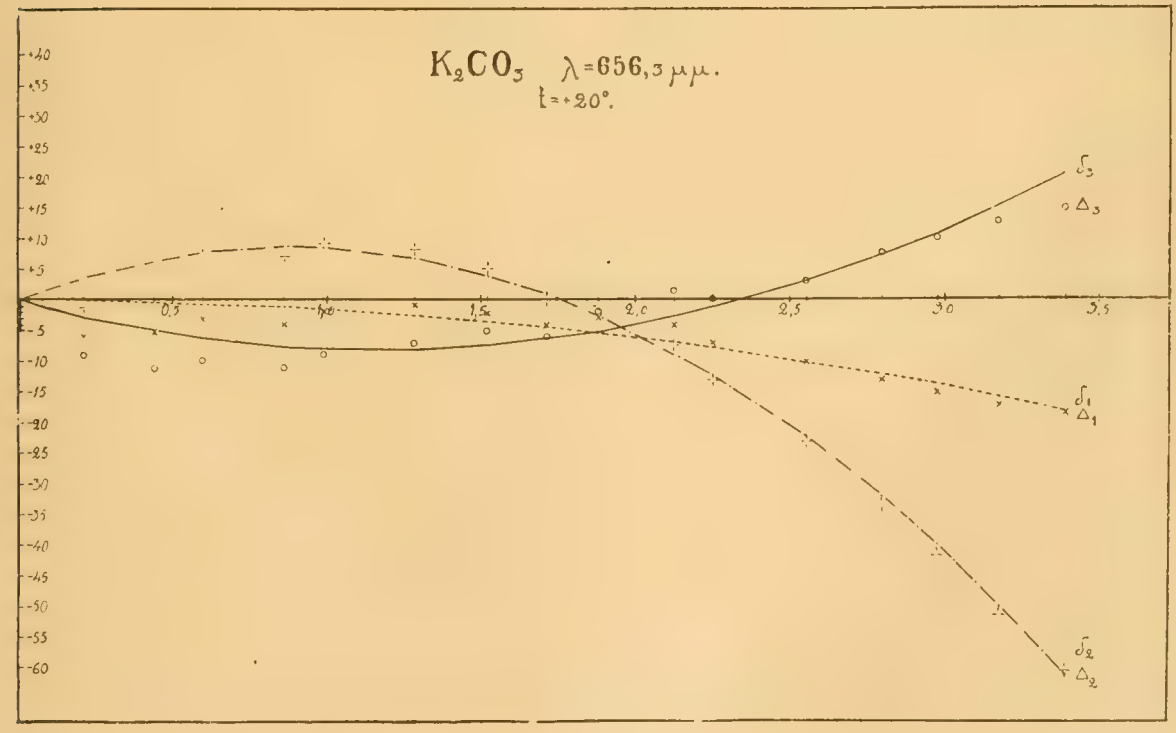
20.



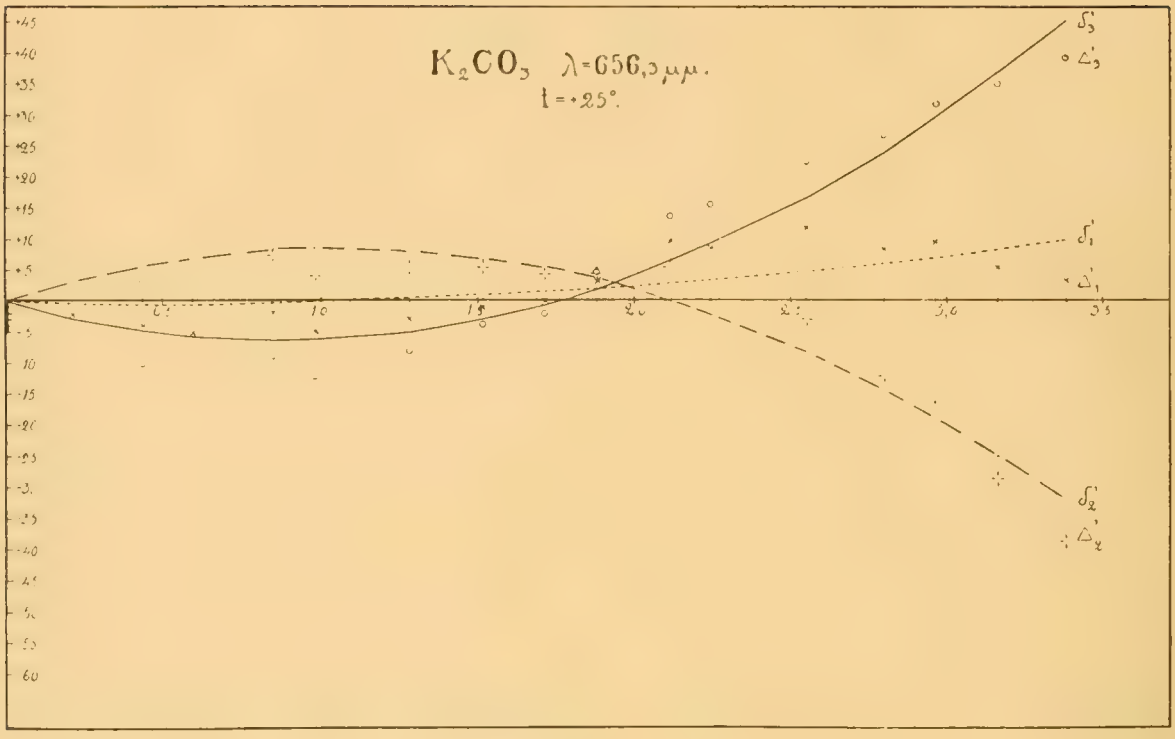
21.


H.COONa. λ=486,1 μμ.
t=+25°.
+50
+40
+30
+20
+10
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
-100
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
δ'3 Δ'3
δ'1 Δ'1
δ'2 Δ'2

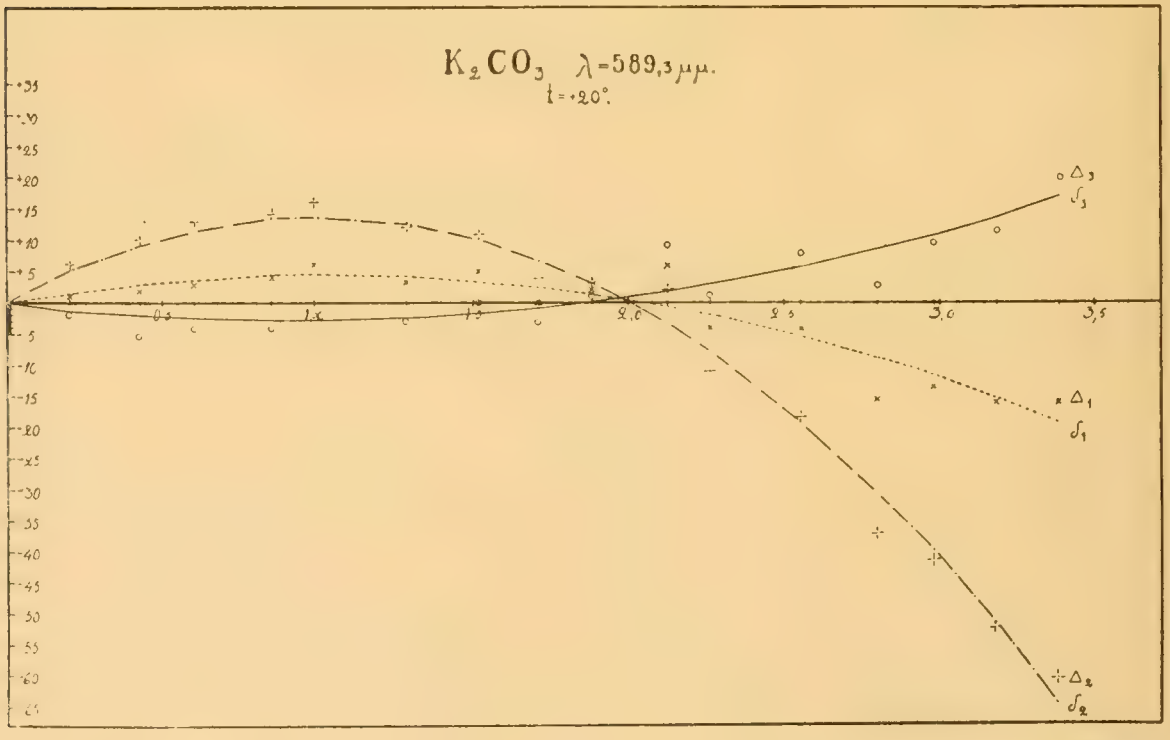
22.


K2CO3 λ=656,3 μμ.
t=+20°.
+40
+35
+30
+25
+20
+15
+10
+5
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
-50
-55
-60
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
δ3 Δ3
δ1 Δ1
δ2 Δ2

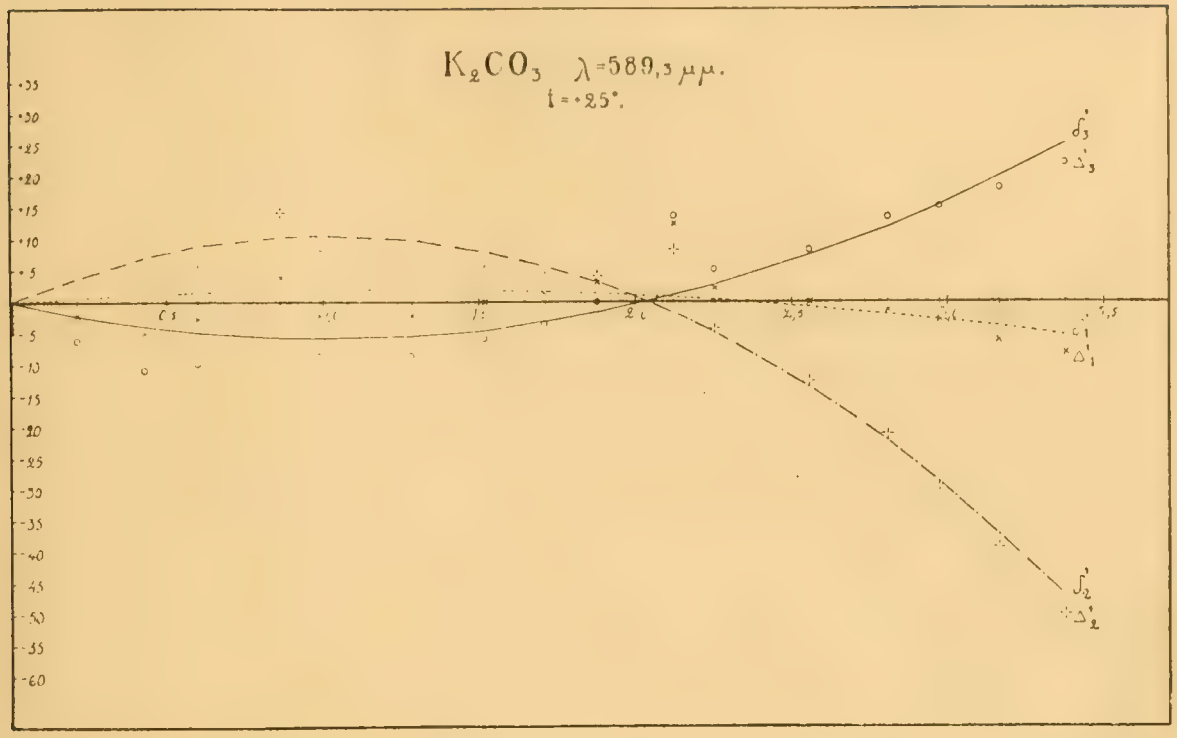
23.


K_2CO_3 λ=656,3 $\mu\mu$.
t = +25°.
δ_3
Δ_3
δ_1
Δ_1
δ_2
Δ_2

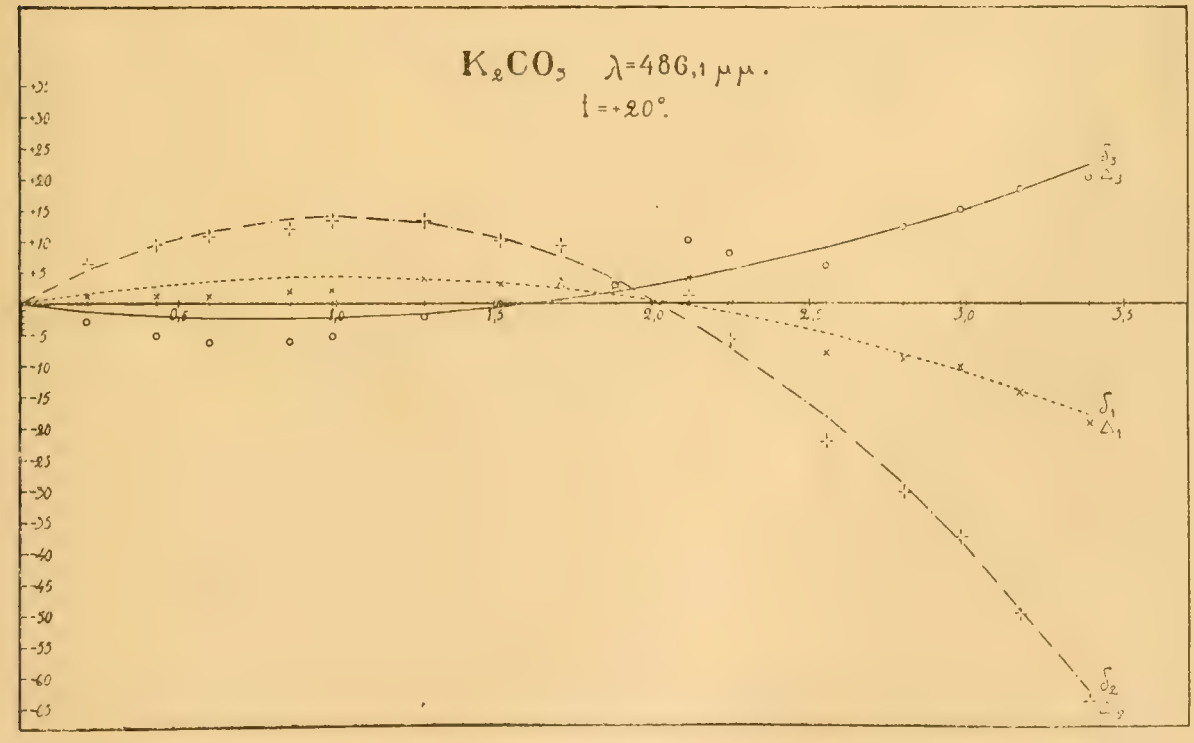
24.


K_2CO_3 λ=589,3 $\mu\mu$.
t = +20°.
Δ_3
δ_3
Δ_1
δ_1
Δ_2
δ_2

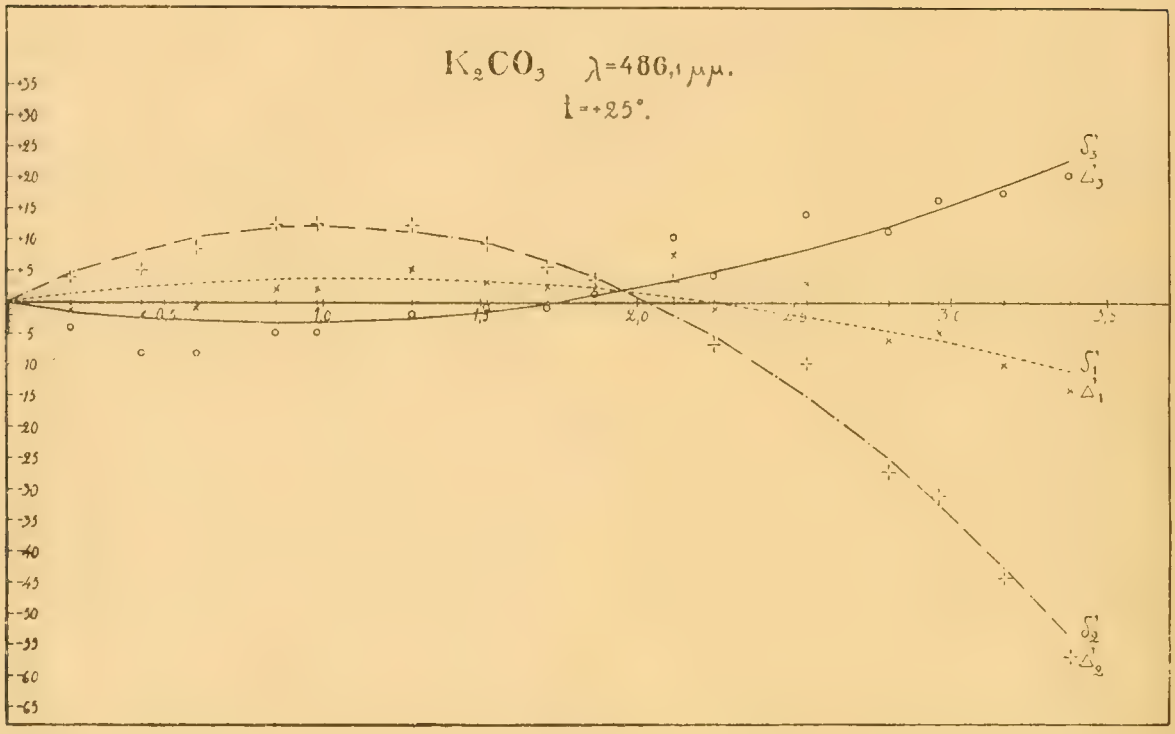
25.


K_2CO_3 λ=589,3 $\mu\mu$.
t=+25°.
δ'_3
Δ'_3
δ'_1
Δ'_1
δ'_2
Δ'_2

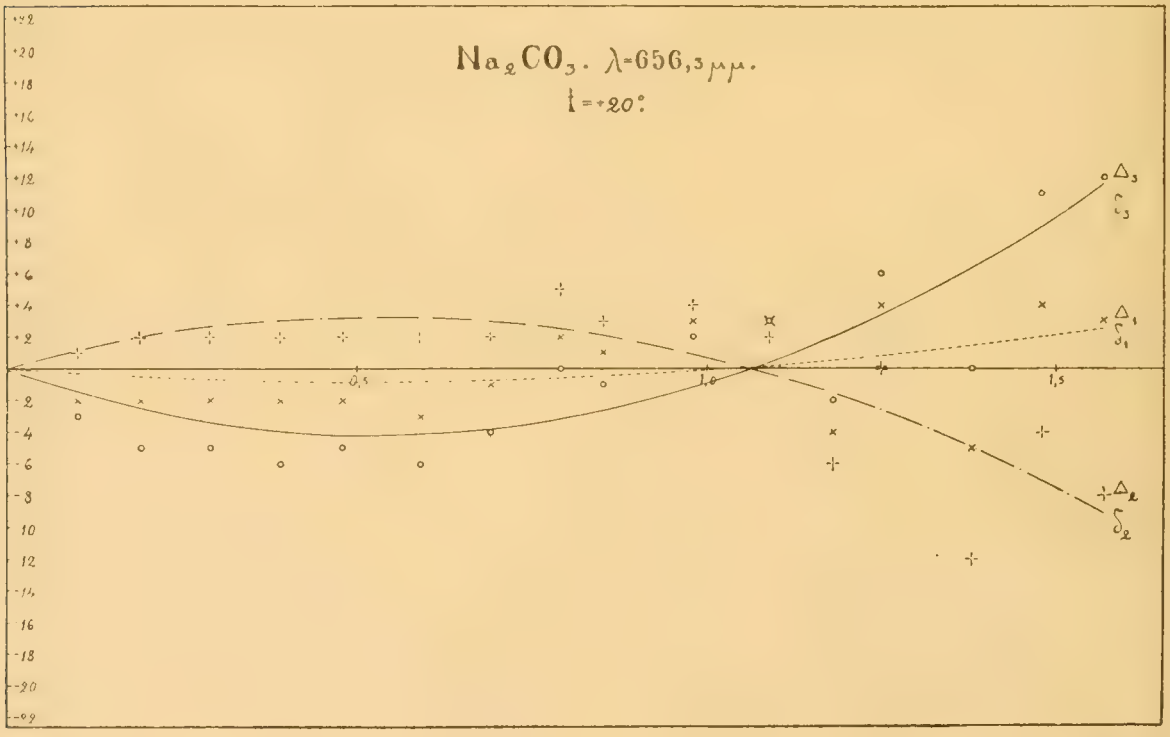
26.


K_2CO_3 λ=486,1 $\mu\mu$.
t=+20°.
δ_3
Δ_3
δ_1
Δ_1
δ_2
Δ_2

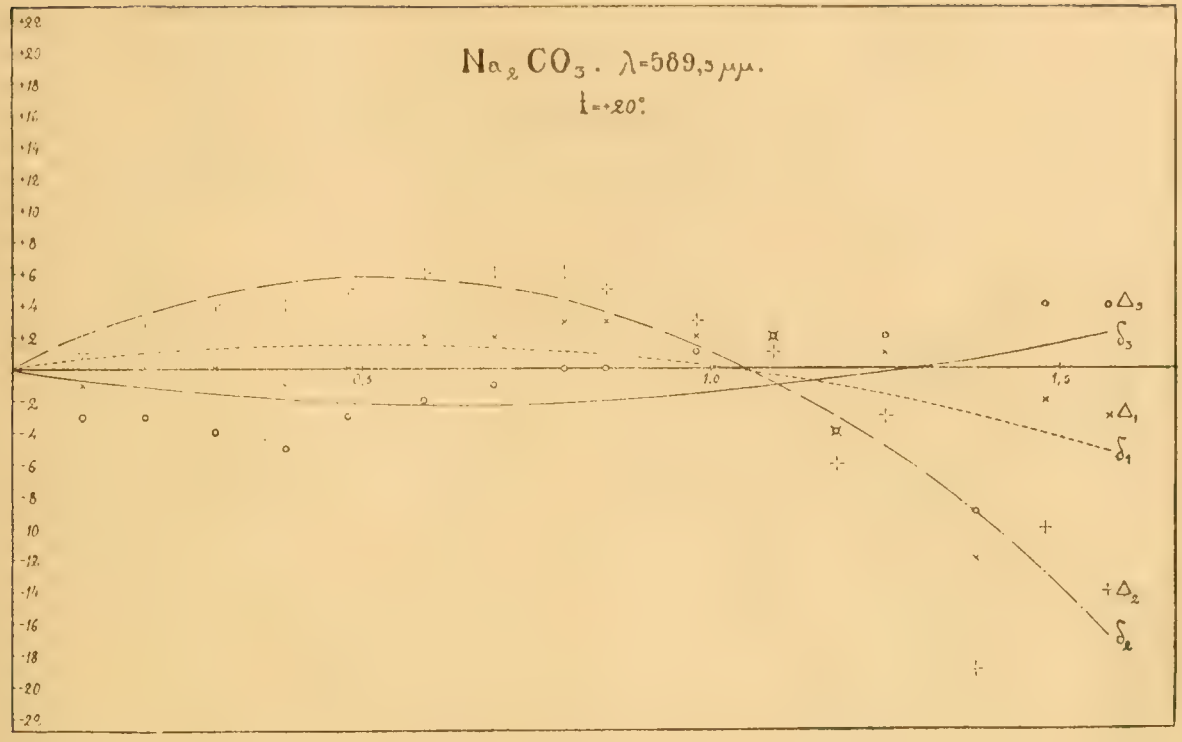
27.


K_2CO_3 λ=486,1 $\mu\mu$.
t=+25°.
δ_3
Δ_3
δ_1
Δ_1
δ_2
Δ_2

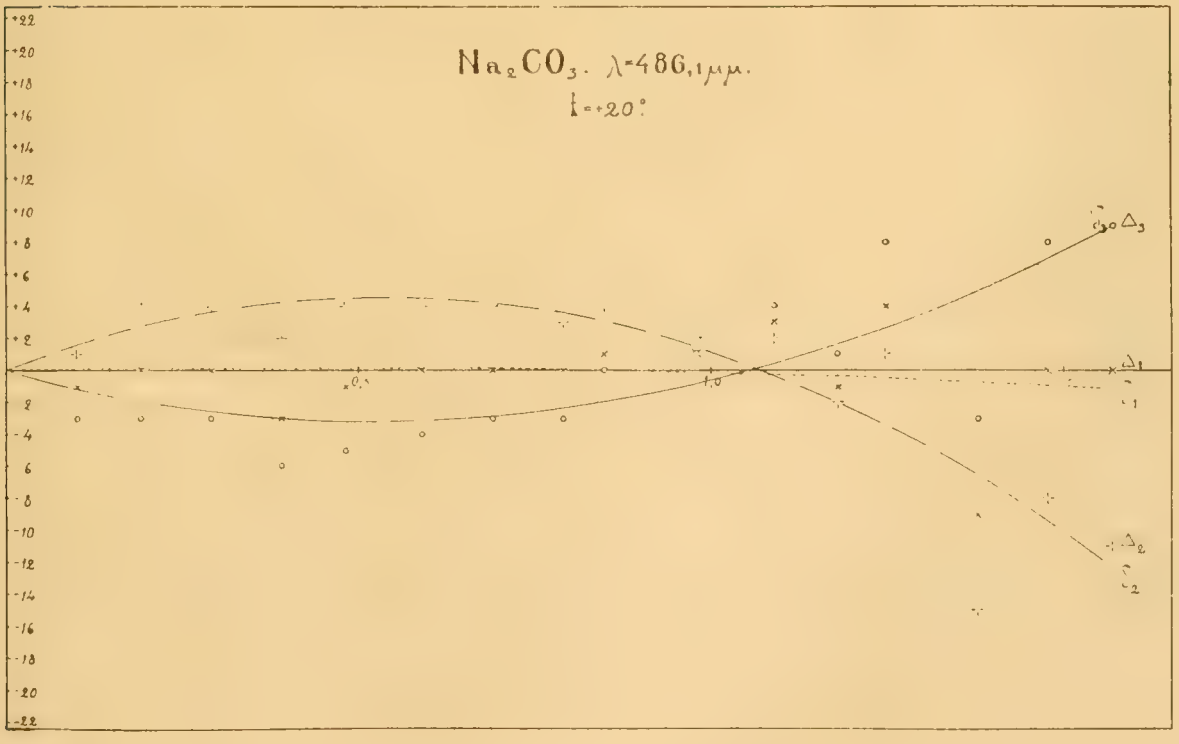
28.


Na_2CO_3. λ=656,3 $\mu\mu$.
t=+20°.
Δ_3
δ_3
Δ_1
δ_1
Δ_2
δ_2

29.

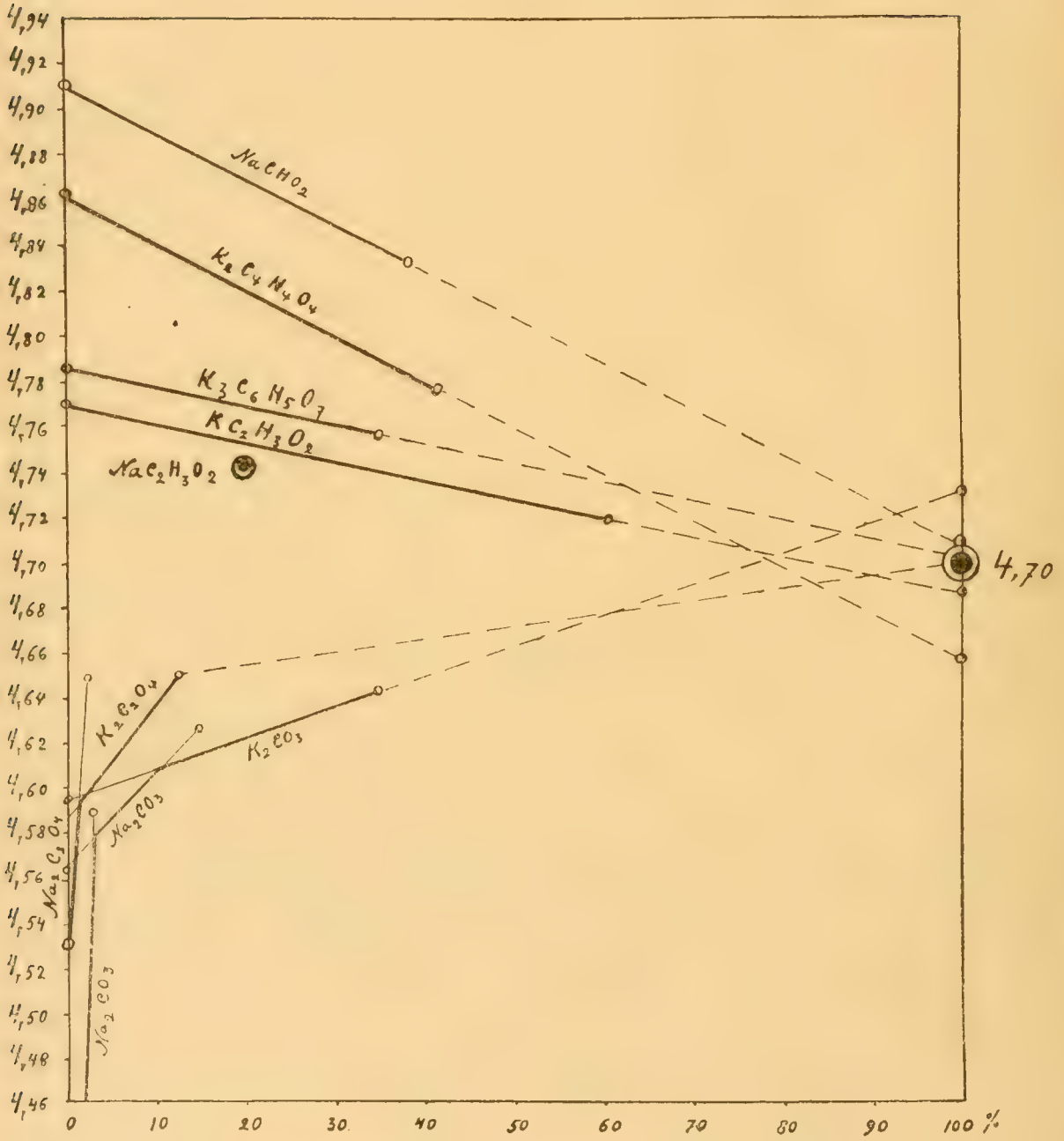

Na_2CO_3. λ=589,3 $\mu\mu$.
t=+20°
Δ_3
δ_3
Δ_1
δ_1
Δ_2
δ_2

30.


Na_2CO_3. λ=486,1 $\mu\mu$.
t=+20°
Δ_3
Δ_1
Δ_2

31.

Den skenbara atomrefraktionen för Kalium.



Litteraturförteckning.

1 Abraham, Theorie der Elektrizität, Leipzig und Berlin. 4 Aufl. 1914, B. G. Teubner.
2. van Aubel, J. de Physique (3), *4*, 478 (1895).
3. Auwers, Lieb. Ann. *415*, 98 (1918).
4. Ayres, Phys. Rev. *2*, 161 (1913).

5. Bender, Wied. Ann. *20*, 560 (1883).
6. „ „ „ *39*, 89 (1890).
7. „ „ „ *68*, 343 (1899).
8. „ „ „ *69*, 676 (1899).
9. „ Ann. d. Phys. (4). *2*, 186 (1900).
10. „ „ „ „ (4), *8*, 109 (1902).
11. Berghoff, Z. f. phys. Chemie *15*, 422 (1894).
12. Biot et Arago, Mémoires de l'Instit. de France *7*, 301 (1806).
13. Bjerrum, Z. f. Elektrochemie *17*, 732 (1911).
14. „ Nernst-Festschrift p. 90, Halle 1912, W. Knapp.
15. Bohr, Phil. Mag. *26*, 1, 476, 857 (1913).
16. „ „ „ *27*, 506 (1914).
17. „ „ „ *30*, 394 (1915).
18. Borgesius, Wied. Ann. *54*, 221 (1895).
19. Born, Dynamik der Krystallgitter, Leipzig und Berlin 1915, B. G. Teubner.
20. „ Verh. d. D. phys. Ges. *20*, 230 (1918).
21. Born und v. Kármán, Phys. Zeitschr. *13*, 297 (1912).
22. Borner, Inaug. Diss. Marburg (1869).
23. Brühl, Lieb. Ann. *200*, 139 (1880).
24. „ „ „ *203*, 1 (1880).
25. „ „ „ *235*, 1 (1886).
26. „ Ber. d. D. chem. Ges. *25*, 2638 (1892).
27. „ „ „ „ „ „ *28*, 2847 (1895).
28. „ Z. f. phys. Chemie *7*, 1, 140 (1891).
29. „ „ „ „ „ *16* 193, 226, 497, 512 (1895).

30. Brühl, Z. f. phys. Chemie *21*, 385 (1896).
31. „ „ „ „ *22*, 373 (1897).
32. „ „ „ „ *25*, 577 (1898).
33. „ „ „ „ *79*, 1, 481 (1912).
34. Brühl und Schröder, Z. f. phys. Chemie *50*, 1 (1905).
35. Buchkremer, Z. f. phys. Chemie *6*, 161 (1890).

36. Chappuis et Rivière, Ann. de Chim. et de Phys. (6), *14*, 1 (1888).
37. Chéneveau, Compt. Rend. *138*, 1483, 1578 (1904).
38. „ „ „ *139*, 361 (1904).
39. „ „ „ *142*, 1520 (1906).
40. „ „ „ *145*, 176 (1907).
41. „ Ann. de Chim. et de Phys. (8), *12*, 155, 289 (1907).
42. Cuthbertson, C, Phil. Mag. *21*, 69 (1911).
43. „ „ „ „ *25*, 592 (1913).
44. „ C and M, Proc. Roy. Soc. London A, *83* 151 (1910).
45. „ „ „ „ „ „ A, *89*, 361 (1914).

46. Damien, Thèse, Paris 1881; Ann. Ecole N. S. (2), *10*, 233 (1881).
„ J. de Physique (1), *10*, 394, 431 (1881).
47. Debye, Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. 9 Jan. 1915.
48. „ Phys. Zeitschr. *18*, 276 (1917).
49. Dijken, Z. f. phys. Chemie *24*, 81 (1897).
50. Dinkhauser, Wiener Sitzungsber. *114*, 2 A, 1001 (1905).
51. Drude, Ann. d. Phys. (4), *14*, 677 (1904).
52. „ Lehrbuch der Optik, 1 Aufl. 1900, p. 360; 2 Aufl. 1906, p. 368; 3 Aufl. 1912 p. 363. Leipzig, S. Hirzel.
53. Dutoit et Aston, Compt. Rend. *125*, 240 (1897).
54. Ebert, Wied. Ann. *48*, 1 (1893).
55. Edwards, Amer. Chem. Journ. *16*, 625 (1895).
56. Einstein, Ann. d. Phys. (4), *22*, 180 (1907).
57. Eisenlohr, Z. f. phys. Chemie *75*, 585 (1910).
58. „ „ „ „ *79*, 129 (1912).
59. Elster und Geitel, Wied. Ann. *52*, 440 (1894).
60. „ „ „ „ *55*, 684 (1895).
61. „ „ „ „ *61*, 445 (1897).
62. Eykman, Rec. Tr. Pays-Bas. *12*, 157, 278 (1893).
63. „ „ „ „ *13*, 13 (1894).
64. „ „ „ „ *14*, 185 (1895).
65. „ „ „ „ *15*, 52 (1896).
66. „ Chemisch Weekblad, *3*, 653, 685 701 (1906).

67. Eykman, Chemisch Weekblad *4*, 41 (1907).
68. .. Chem. Zentralbl. **1907**, II, 1205.

69. Falk, Journ. Amer. Chem. Soc. *31*, 86, 806 (1909).

70. Gale, Phys. Rev. *14*, 1 (1902).
71. Gifford, Proc. Roy. Soc. London, A *91*, 319 (1915).
72. Gladstone, (and Dale), Phil. Trans. *148*, 887 (1858).
73. .. .. . *153*, 317 (1863).
74. ,, ... *160*, 9 (1870).
75. .. Proc. Roy. Soc. London *2*, 448 (1862—3)
76. ,, ... *16*. 439 (1867—8).
77. .. .. .. ,, .. *60*, 140 (1896—7).
78. ,, Journ. Chem. Soc. London *18*, 108 (1865).
79. .. .. .. ,, .. *23*, 101 (1872).
80. Gladstone and Hibbert, Journ. Chem. Soc. London *67*, 831 (1895).
81. ,, ... ,, ... *71*, 822 (1897).
82. Goldhammer, Wied. Ann. *47*, 93 (1892).
83. Guye, Ann. de Chim. et de Phys. *21*, 206 (1890).

84. Haber, Verh. d. D. phys. Ges. *13*, 1117 (1911).
85. Hallwachs, Wied. Ann. *47*, 380 (1892).
86. .. .. ,, *50*, 577 (1893).
87. .. .. .. *53*, 1 (1894).
88. ,, ,, ,, *55*, 282 (1895).
89. Helmholtz, Pogg. Ann. *154*, 582 (1875).
90. .. Berl. Sitzungsber. **1892**, 1093.
91. .. Wied. Ann. *48*, 389 (1893).
92. Heydweiller, Ann. d. Phys. (4), *30*, 873 (1909).
93. .. ,, ... (4). *37*, 739 (1912).
94. ,, ... ,, (4). *41*, 499 (1913).
95. Hibbert, Phil. Mag. *40*, 321 (1895).

96. Jellinek, Physikalische Chemie der Gasreaktionen, Leipzig 1913, S. Hirzel.
97. Johst, Wied. Ann. *20*, 47 (1883).

98. Kanonnikoff, Journ. f. prakt. Chemie *31*, 321 (1885).
99. ,, ... *32*, 197 (1885).
100. Karvonen, Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. *10*, **5**, 4 (1918).
101. .. .. A. *10*, **6**, 6 (1918).
102. Ketteler, Pogg. Ann. *140*, 1 (1870).
103. .. Wied. Ann. *12*, 363, 481 (1881).
104. .. .. .. *30*, 299 (1887).

105. Ketteler. Theoret. Optik. Braunschweig 1885.
106. Koláček. Wied. Ann. *32*, 224, 429 (1887).
107. „ „ „ *34*, 673 (1888).
108. Koref. Phys. Zeitschr. *13*, 183 (1912).
109. Kossel. Ann. d. Phys. (4), *49*, 229 (1916).
110. de Kowalski et de Modzelewski. Compt. Rend. *133*, 33 (1901).

111. Landolt. Pogg. Ann. *117*, 353 (1862).
112. „ „ „ *122*, 545 (1864).
113. „ „ „ *123*, 595 (1864).
114. Laplace. Traité de Mécanique céleste t. IV, libr. X p. 232.
115. Le Blanc. Z. f. phys. Chemie *4*, 553 (1889).
116. Le Blanc und Rohland. Z. f. phys. Chemie *19*, 261 (1896).
117. Leduc. Compt. Rend. *134*, 645 (1902).
118. Lindemann. Phys. Zeitschr. *11*, 609 (1910).
119. „ Verh. d. D. phys. Ges. *13*, 482 (1911).
120. „ „ „ „ „ *13*, 1107 (1911).
121. Lorentz. Wied. Ann. *9*. 641 (1880).
122. „ La Théorie électromagnétique de Maxwell. Leiden 1892. E. J. Brill.
123. „ The Theory of Electrons. Sec. Edition 1916. Teubner. Leipzig; Stechert & C:o. New-York.
124. Lorenz. Pogg. Ann. *118*. 111 (1863).
125. „ Vidensk. Selsk. Skrifter (5). *8*. 205 (1870).
126. „ „ „ „ (5). *10*. 485 (1875).
127. „ Wied. Ann. *11*. 70 (1880).
128. Loria. Die Lichtbrechung in Gasen. Samml. Vieweg (N:o 4), Braunschweig 1904.
129. Lübben. Ann. d. Phys. (4). *44*, 977 (1914).

130. Magri. Phys. Zeitschr. *6*, 629 (1905).
131. Mascart Ann. Ecole N. S. *6*. 9 (1877).

132. Nasini et Costa. Gazz. Chim. Ital. *21*, I, 554 (1891).
133. Nathanson. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie 1907; Z. f. phys. Chemie *61*, 321 (1908).

134. Ostwald. Z. f. phys. Chemie 7, 418 (1891).

135. Planck. Berl. Sitzungsber. **1902,** 470.
136. „ „ „ **1903,** 480.
137. „ „ „ **1904,** 740.
138. „ „ „ **1905,** 382.

139. Pohl, Verh. d. D. phys. Ges. *11*, 339, 609, 715 (1909).
140. Pohl und Pringsheim, J. de Physique (5), *4*, 525 (1914).
141. Pringsheim, Verh. d. D. phys. Ges. *12*, 215, 349, 682, 697, 1039 (1910).
142. Prud'homme, Journ. de Chimie physique *11*, 589 (1913).
143. „ „ „ „ „ *12*, 282 (1914).
144. Prytz, Wied. Ann. *11*, 104 (1880).

145. Redgrove, Chem. News *102*, 3, 14 (1910).
146. Reinkober, Ann. d. Phys. (4), *34*, 343 (1911).
147. Rentschler, Astroph. Journ. *28*, 435 (1908).
148. Rubens och Hollnagel, Phil. Mag. *19*, 761 (1910).
149. „ „ „ Berl. Sitzungsber. **1910**, 26.
150. Rudolphi, Z. f. phys. Chemie *37*, 426, (1901).
151. Rühlmann, Pogg. Ann. *132*, 177 (1867).

152. Sagnac, J. de Physique (4), *6*, 273 (1907).
153. „ „ „ „ (4), *6*, 277 (1907).
154. Scheel, Verh. d. D. phys. Ges. *9*, 24 (1907).
155. Schrauf, Pogg. Ann. *116*, 193 (1862).
156. „ „ „ *118*, 359 (1863).
157. „ „ „ *119*, 461, 553 (1863).
158. „ „ „ *126*, 177 (1865).
159. „ „ „ *127*, 175, 344 (1866).
160. „ „ „ *133*, 479 (1868).
161. Sellmeier, Pogg. Ann. *143*, 272 (1871).
162. „ „ „ *145*, 399, 520 (1872).
163. „ „ „ *147*, 386, 525 (1872).
164 Smith, Proc. Roy. Soc. London A, *87*, 366 (1912).
165. Sommerfeld, Elster—Geitel—Festschrift p. 549, Braunschweig 1915, Friedr. Vieweg & Sohn.
166. „ Ann. d. Phys. (4), *53*, 497 (1917).
167. „ Atombau und Spektrallinien, Braunschweig 1919, Friedr. Vieweg & Sohn.
168. Statescu, Bull. de l'Acad. Roumaine *3*, 211 (1914).
169. „ „ „ „ „ *4*, 175 (1915).

170. Tammann, Z. f. phys. Chemie *21*, 537 (1896).
171. Traube, Ann. d. Phys. (4), *5*, 548 (1901).

172. Valson, Compt. Rend. *73*, 441 (1871).
173. „ „ „ *76*, 224 (1873).
174. Valson et Favre, Compt. Rend. *77*, 806 (1873).

175. Valson, Jahresber. f. Chemie **1871,** 58.
176. „ „ „ „ **1873,** 135.
177. Verschaffelt, Bull. Ac. Sc. Belgique *27*, 69 (1904).

178. Walden, Z. f. phys. Chemie *59*, 385 (1907).
179. Walker, Phil. Trans. *201*, 435 (1903).
180. Wasastjerna, Hyllningsskrift tillägnad Ossian Aschan p. 141 (Finska kemistsamf. medd. 1920).
181. Wiener, Ber. d. K. Sächs. Ges. Wiss. Math. fys. Kl. *62*. 256 (1910).
182. Wüllner, Pogg. Ann. *133*, 1 (1868).

183. Zecchini, Gazz. chim. Ital. *35*, II. 65 (1905).
184. Zopellari, Gazz. chim Ital. *35*, I, 355 (1905).

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 3.

ZUR THEORIE
DER
AUTOMORPHEN FUNKTIONEN
BELIEBIG VIELER VERÄNDERLICHEN

VON

P. J. MYRBERG

HELSINGFORS 1922
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Zur Theorie der automorphen Funktionen beliebig vieler Veränderlichen.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der in unserer Arbeit „*Über die automorphen Funktionen zweier Veränderlichen*“ [1]) dargestellten Untersuchungen auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen.

Die beiden ersten Kapitel enthalten Untersuchungen über die wesentlichen Singularitäten der automorphen Funktionen bei gewissen Kollineationsgruppen. Im letzten Kapitel werden neue Verallgemeinerungen der Poincaréschen Reihen gegeben.

I. Die wesentlichen Singularitäten bei automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen.

1. Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden die diskontinuierlichen Gruppen von *reellen* Kollineationen

$$X_k = \frac{\alpha_{k,1}x_1 + \alpha_{k,2}x_2 + \cdots + \alpha_{k,n}x_n + \alpha_{k,n+1}}{\alpha_{n+1,1}x_1 + \alpha_{n+1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}x_n + \alpha_{n+1,n+1}} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

deren zugeordnete homogene lineare Substitutionen

$$Y_k = \alpha_{k,1}y_1 + \alpha_{k,2}y_2 + \cdots + \alpha_{k,n}y_n + \alpha_{k,n+1}y_{n+1} \tag{2}$$

die quadratische Form

$$\varphi(y) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 \tag{3}$$

invariant lassen. Es handelt sich m. a. W. um die diskontinuierlichen Gruppen von reellen hyperbolischen Bewegungen oder Spiegelungen in dem durch die reellen und imaginären Bestandteile der n komplexen Grössen $x_1, \ldots, x_n$ definierten $2n$-dimensionalen Raum R_{2n}, wo $\varphi = 0$ die homogene Gleichung des absoluten Gebildes ist. In diesem Raum ist *der hyperbolische Raum*, d. h. die Gesamtheit derjenigen reellen Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, die der Ungleichung

---

[1]) Acta mathematica tom. 43.

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1 \tag{4}$$

genügen und somit innerhalb *des reellen absoluten Gebildes*

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1 \tag{4'}$$

liegen, als n-dimensionaler Teilraum enthalten.

Den niedersten Fall $n=2$, die Gruppen der hyperbolischen Bewegungen in der Ebene, haben wir in der oben zitierten Arbeit nach einer wesentlich verschiedenen Methode ausführlich behandelt.

Die $(n+1)^2$ Koeffizienten $\alpha_{\mu,\nu}$ sind den $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Bedingungen

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{m,p}^2-\alpha_{n+1,p}^2 &&=1, && (p=1,\ldots,n),\\
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{m,n+1}^2-\alpha_{n+1,n+1}^2 &&=-1, &&\\
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{m,p}\alpha_{m,q}-\alpha_{n+1,p}\alpha_{n+1,q} &&=0, && \begin{pmatrix}p,q=1,\ldots,n+1\\ p\neq q\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5}$$

unterworfen. Die allgemeinste Substitution (1) enthält daher $\frac{1}{2}n(n+1)$ unbestimmte Parameter.

Die Relationen (5) sind mit den Relationen

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{p,m}^2-\alpha_{p,n+1}^2 &&=1, && (p=1,\ldots,n)\\
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{n+1,m}^2-\alpha_{n+1,m+1}^2 &&=-1, &&\\
&\sum_{m=1}^{n}\alpha_{p,m}\alpha_{q,m}-\alpha_{p,n+1}\alpha_{q,n+1} &&=0, && \begin{pmatrix}p,q=1,\ldots,n+1\\ p\neq q\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5'}$$

äquivalent, zu welchen man gelangt durch Betrachtung der inversen Substitution zu (1):

$$x_k=-\frac{\alpha_{1,k}X_1+\cdots+\alpha_{n,k}X_n-\alpha_{n+1,k}}{\alpha_{1,n+1}X_1+\cdots+\alpha_{n,n+1}X_n-\alpha_{n+1,n+1}}, \qquad (k=1,\ldots,n). \tag{1'}$$

Aus den Gleichungen (5) folgt für die Determinante der $(n+1)^2$ Koeffizienten $\alpha_{\mu,\nu}$ der Wert

$$D=\pm 1.$$

Die Substitutionen positiver Determinanten stellen hyperbolische *Bewegungen*, diejenigen negativer Determinanten *Spiegelungen* dar.

2. Die hyperbolisch kongruenten Abbildungen gestatten neben der oben geschilderten kollinearen Darstellung noch eine zweite nicht minder wichtige, zu welcher man durch Ausführung der quadratischen Transformation

$$x_i=\frac{2\xi_i}{\sum_{\nu}^{n}\xi_\nu^2+1}, \quad x_n=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2-1}{\sum_{\nu-1}^{n}\xi_\nu^2+1} \qquad (i=1,\ldots,n-1) \tag{6}$$

gelangt. Geometrisch erhält man diese Transformation, indem man zuerst den hyperbolischen Raum (4) durch orthogonale Projektion auf die Hypersphäre

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1,$$

dann diese vom Punkte $x_1 = \cdots = x_{n-1} = x_{n+1} = 0, x_n = 1$ aus durch stereographische Projektion auf die Ebene $x_n = 0$ abbildet und $\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \xi_n = x_{n+1}$ setzt. Die Transformation (6) führt den hyperbolischen Raum, nach Fixierung des Zeichens von ξ_n, in einen von der Hyperebene

(6)′ $$\xi_n = 0$$

begrenzten Halbraum über, wo den reellen Hyperebenen zur Ebene (6)′ orthogonale Halbhyperkugeln entsprechen, welche vermittels quadratischer Cremonasubstitutionen, der Transformierten der Kollineationen (1), in einander übergeführt werden.

Zur Untersuchung der transformierten Gruppe ist es hinreichend, sich auf die invariante Hyperebene (6)′ zu beschränken, weil man von dieser aus ohne weiteres die Erscheinungen im ganzen Raume $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ verfolgen kann.

In den niedersten Fällen $n = 2$ und $n = 3$ gelangt man in dieser Weise zur Darstellung der hyperbolischen Bewegungen und Spiegelungen vermittels linearer Substitutionen

$$t' = \frac{a\,t + b}{c\,t + d},$$

deren Koeffizienten im Falle $n = 2$ reelle, im Falle $n = 3$ komplexe Zahlen sind.

3. Es sei jetzt Γ irgendeine Gruppe hyperbolischer Bewegungen (1) ohne infinitesimale Substitutionen. Bekanntlich[1]) ist jede derartige Gruppe im Raume R_{2n} „eigentlich diskontinuierlich", d. h. sie besitzt einen $2n$-dimensionalen Fundamentalbereich. Für diese Behauptung werden wir übrigens aus späteren Überlegungen einen einfachen Beweis erhalten. Unser nächstes Ziel ist die Lösung der folgenden, für die Untersuchung der Singularitäten automorpher Funktionen fundamentalen Aufgabe.

PROBLEM. *Die Gesamtheit der vermittels der Substitutionen einer diskontinuierlichen Gruppe Γ erhaltenen Transformierten eines beliebigen algebraischen Gebildes zu finden.*

Wir zeigen zunächst, dass die Ungleichung

(7) $$|\alpha_{n+1,n+1}| < M,$$

wo M eine endliche Grösse ist, nur für endlich viele Substitutionen der diskontinuierlichen Gruppe Γ bestehen kann.

Aus der mittleren Gleichung (5) folgen in der Tat die Ungleichungen

$$|\alpha_{m,n+1}| < \sqrt{M^2 - 1} \qquad (m = 1, \ldots, n)$$

und dann aus den Gleichungen (5)′

[1]) Vgl. A. Hurwitz: *Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabelen*, Math. Ann. (1905), und die Arbeiten von G. Fubini, die in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II$_2$ S. 468 angeführt sind.

$$|\alpha_{m,p}|<M, \quad |\alpha_{n+1,p}|<\sqrt{M^2-1} \qquad (m,p=1,\ldots,n).$$

Wäre nun, gegen unsere Behauptung, in der Gruppe Γ eine unendliche Anzahl von Substitutionen vorhanden, welche der Bedingung (7) genügten, so könnten wir unter ihnen eine unendliche Folge

$$S_1, S_2, S_3, \ldots \tag{8}$$

herausgreifen, deren Koeffizienten sämtlich bestimmte endliche Grenzwerte hätten. Die unendliche Folge von Substitutionen der Gruppe:

$$S_\nu S_{\nu+1}^{-1} \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

enthielte aber dann eine infinitesimale Substitution, was der vorausgesetzten Diskontinuität dieser Gruppe widerspricht. Es ist somit

$$\lim_{\nu=\infty} |\alpha_{n+1,n+1}| = \infty. \tag{7'}$$

4. Es sei jetzt (8) eine beliebige unendliche Folge von Substitutionen der Gruppe Γ. Aus der Identität

$$1-\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \frac{1-\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{(\alpha_{n+1,1}x_1+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n+\alpha_{n+1,n+1})^2} \tag{9}$$

erhält man für $x_1=\cdots=x_n=0$ die Gleichung

$$1-\sum_{k=1}^{n} X_k^2(0) = \frac{1}{\alpha_{n+1,n+1}^2}$$

und also, wegen (7'),

$$\lim \sum_{k=1}^{n} X_k^2(0) = 1,$$

d. h. die Transformierten des Nullpunktes mittels der Substitutionen (8) häufen sich nach dem reellen absoluten Gebilde (4)'. Die aus den betreffenden Häufungspunkten bestehende Menge werden wir mit (m) bezeichnen.

Wir wählen jetzt eine beliebige unendliche Folge (8) von Substitutionen der Gruppe Γ, für welche sowohl

$$\lim_{\nu=\infty} S_\nu(O) = O_\infty(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

als

$$\lim_{\nu=\infty} S_\nu^{-1}(O) = O_{-\infty}(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

wo O den Nullpunkt bezeichnet, existieren. Wir nehmen ferner an, dass keine der Koordinaten der Grenzpunkte O_∞, $O_{-\infty}$ gleich Null ist, was man stets vermittels einer Koordinatentransformation erreichen kann.

Nach (1) und (1)' ist

$$a_k = \lim \frac{\alpha_{k,n+1}}{\alpha_{n+1,n+1}}, \qquad -b_k = \lim \frac{\alpha_{n+1,k}}{\alpha_{n+1,n+1}}, \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{10}$$

woraus hervorgeht, dass die Koeffizienten

$$\alpha_{k,n+1}, \quad \alpha_{n+1,k} \qquad (k=1,\ldots,n+1)$$

gleichzeitig mit dem letzten unter ihnen, $\alpha_{n+1,n+1}$, bei Durchlaufung der Substitutionen (8) dem absoluten Betrage nach über alle Grenzen wachsen.

Wir setzen jetzt allgemein

$$\frac{\alpha_{m,p}}{\alpha_{n+1,p}} = \beta_{m,p} \tag{11}$$

in den Gleichungen (5). Beim Grenzübergange gehen dieselben in die Relationen

$$\lim \sum_{m=1}^{n} \beta_{m,p}^2 = 1, \quad \lim \sum_{m=1}^{n} \beta_{m,p}\beta_{m,q} = 1 \qquad (p,q=1,\ldots,n+1) \tag{12}$$

über. Aus diesen Gleichungen erhält man

$$\lim \sum_{m=1}^{n} (\beta_{m,p} - \beta_{m,q})^2 = 0$$

und also

$$\lim \beta_{m,k} = \lim \beta_{m,n+1} \qquad (m,k=1,\ldots,n)$$

oder, nach (10) und (11),

$$\lim \frac{\alpha_{m,k}}{\alpha_{n+1,k}} = \lim \frac{\alpha_{m,n+1}}{\alpha_{n+1,n+1}} = a_m, \tag{12'}$$

und hieraus, wegen der Voraussetzung $a_m \neq 0$,

$$\lim \frac{\alpha_{m,k}}{\alpha_{m,n+1}} = \lim \frac{\alpha_{n+1,k}}{\alpha_{n+1,n+1}} = -b_k \qquad (m=1,\ldots,n). \tag{12''}$$

Dieses Resultat ist gleichbedeutend damit, dass die den Substitutionen (8) zugeordneten Hyperebenen

$$L_m \equiv \alpha_{m,1}x_1 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n + \alpha_{m,n+1} = 0 \qquad (m=1,\ldots,n+1) \tag{13}$$

sämtlich die Tangentenhyperebene

$$L = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n - 1 = 0 \tag{14}$$

des absoluten Gebildes (4)′ im Punkte $(b_1,\ldots,b_n)$ zum Grenzgebilde haben.

In ähnlicher Weise haben die Hyperebenen

$$L'_m \equiv \alpha_{1,m}x_1 + \cdots + \alpha_{n,m}x_n - \alpha_{n+1,m} = 0, \qquad (m=1,\ldots,n+1), \tag{13'}$$

die den inversen Substitutionen von (8) zugeordnet sind (vgl. (1)′), zum Grenzgebilde die Tangentenhyperebene

$$L' = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - 1 = 0 \tag{14'}$$

des absoluten Gebildes im Punkte $(a_1,\ldots,a_n)$.

5. Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der vermittels der Substitutionen von Γ erhaltenen Transformierten eines beliebigen $(2n-2)$-dimensionalen algebraischen Gebildes, welches keinen Punkt der Menge (m) enthält.

Die Gleichung dieses Gebildes sei, in homogener Form geschrieben,

$$P(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}) = 0. \tag{15}$$

Bei Ausführung der Transformation (1) wird dasselbe in das Gebilde

$$P(L_1', L_2', \ldots, L_n', -L_{n+1}') = 0 \tag{15)'}$$

übergeführt, wo $L_1', \ldots, L_{n+1}'$ durch (13)' definiert sind.

Es sei ferner eine beliebige unendliche Folge (8) von Substitutionen in der in N:o 4 angegebenen Weise gewählt. Nach N:o 4 kann die Gleichung (15)' in der Form

$$P\{\alpha_{n+1,1}(L'+E_1), \ldots, \alpha_{n+1,n}(L'+E_n), -\alpha_{n+1,n+1}(L'+E_{n+1})\} = 0 \tag{16}$$

geschrieben werden, wo $E_1, \ldots, E_{n+1}$ lineare Funktionen sind, deren Koeffizienten beim Grenzübergang alle gegen Null konvergieren. Weil der Punkt $(b_1, \ldots, b_n)$ nicht dem Gebilde (15) angehört, so ist von einer gewissen Substitution der Reihe (8) an (vgl. (12)'')

$$P(\alpha_{n+1,1}, \ldots, \alpha_{n+1,n}, -\alpha_{n+1,n+1}) \neq 0.$$

Beim Grenzübergange geht somit (15)' in die (einfach oder mehrfach gezählte) Tangentenhyperebene $L' = 0$ des absoluten Gebildes im Punkte $(a_1, \ldots, a_n)$ über.

Das Obige enthält den Beweis des folgenden Satzes:

SATZ. *Die Häufungsgebilde der Transformierten jedes $(2n-2)$-dimensionalen algebraischen Gebildes, welches keinen zur Menge (m) gehörigen Punkt des reellen absoluten Gebildes (4)' enthält, bestehen aus den Tangentenhyperebenen des absoluten Gebildes in den Punkten der Menge (m).*

Diese Häufungsgebilde, die im obigen Sinne von der Wahl des Anfangsgebildes unabhängig und also von der Gruppe allein abhängig sind, haben für die Theorie der automorphen Funktionen eine fundamentale Bedeutung. Es ist daher zweckmässig, für diese Gebilde die Benennung *Hauptgrenzgebilde der Gruppe* einzuführen.

Die obigen Ergebnisse bleiben nicht mehr allgemeingültig, wenn das Anfangsgebilde Punkte der Menge (m) enthält. Neben den Hauptgrenzgebilden können nämlich dann gewisse *„spezielle Grenzgebilde"* als Häufungsgebilde von räumlich ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auftreten, wie wir im Kap. II sehen werden.

Man kann die obigen Untersuchungen in viel allgemeinerer Form ausführen, wie wir es tatsächlich in unserer S. 2 zitierten Arbeit getan haben, indem man statt der algebraischen Mannigfaltigkeiten mit allgemeinen Punktmannigfaltigkeiten operiert. Für das Folgende sind jedoch die obigen Resultate hinreichend, weshalb wir auf die genannte Verallgemeinerung hier nicht eingehen wollen.

6. Man gewinnt aus dem obigen Satze unmittelbar das folgende Resultat betreffs der Häufung der Transformierten eines einzelnen Punktes.

SATZ. *Die Häufungspunkte der vermittels der Substitutionen von Γ erhaltenen Bilder eines beliebigen Punktes, der keinem Hauptgrenzgebilde angehört, bestehen aus sämtlichen Punkten der Menge (m), oder also aus der Gesamtheit der Berührungspunkte der Hauptgrenzgebilde mit dem absoluten Gebilde (4)'.*

In der Tat folgt aus der gemachten Voraussetzung, dass die Polarenhyperebene des gegebenen Punktes inbezug auf das absolute Gebilde keinen Punkt der Menge (m) enthält. Die Transformierten dieser Ebene vermittels der Gruppe Γ haben also nach N:o 5 als Grenzgebilde

die zu den Punkten von (m) gehörenden Tangentenhyperebenen, und da die Polarbeziehung sich in der Transformation bewährt, ist unser Satz hiermit bewiesen.

Die Punkte der Menge (m) wollen wir „*Hauptgrenzpunkte*“ der Gruppe nennen, da sie gemeinsame Grenzpunkte und zwar die einzigen Grenzpunkte sämtlicher ausserhalb der Hauptgrenzgebilde gelegenen Punkte sind. Wenn der gegebene Punkt einem Hauptgrenzgebilde angehört, können dagegen neben den Hauptgrenzpunkten auch „*spezielle Grenzpunkte*“ auftreten.

7. Bevor wir zur näheren Untersuchung der Hauptgrenzgebilde übergehen, wollen wir erst ihre funktionentheoretische Bedeutung darlegen.

An den Poincaréschen Gedankengang anknüpfend sucht Picard automorphe Funktionen mehrerer Veränderlichen durch Quotienten von Reihen der Form

$$\sum H(X_1, X_2, \ldots, X_n)\left[\frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^p \tag{17}$$

darzustellen, wo H eine rationale Funktion bedeutet und die Summierung sich über die Gesamtheit der Substitutionen der gegebenen Gruppe erstreckt.

Man kann zur Bildung automorpher Funktionen auch Reihen anwenden, die durch Verallgemeinerung der in unserer S. 3 genannten Arbeit gegebenen Reihen auf beliebig viele Veränderliche erhalten werden, wie wir im dritten Teile dieser Abhandlung zeigen werden.

Alle diese Reihen definieren, wenn sie gleichmässig konvergieren, analytische Funktionen, die im allgemeinen, d. h. wenn keine zufällige Kompensation auftritt, für die Unstetigkeitsgebilde der einzelnen Glieder algebraisch unstetig werden. Die Gesamtheit der algebraischen Unstetigkeitsgebilde dieser Funktionen besteht demnach teils aus den Transformierten der Unstetigkeitsgebilde der rationalen Funktion H, teils aus den vermittels der verschiedenen Substitutionen der Gruppe erhaltenen Transformierten der unendlich fernen Hyperebene, d. h. aus den Fluchthyperebenen $L'_{n+1}=0$ oder $L_{n+1}=0$, welche Unstetigkeitsgebilde der in (17) auftretenden Funktionaldeterminanten sind.

Wenn wir besonders annehmen, dass die in den Reihen (17) auftretenden rationalen Funktionen H in den Hauptgrenzpunkten (m) endliche Werte besitzen, so haben die mittels dieser Reihen gebildeten automorphen und verwandten Transzendenten die ausgezeichnete Eigenschaft, nur solche wesentliche Singularitäten zu besitzen, deren Lage von der Gruppe allein abhängt. Für diese „eigentlichen automorphen Transzendenten“, wie wir sie nennen wollen, haben wir nach dem Vorhergehenden den

SATZ. *Die wesentlichen Singularitäten der eigentlichen automorphen Transzendenten bestehen aus der Gesamtheit der Hauptgrenzgebilde der Gruppe, deren Lage von der Gruppe allein abhängt. Für alle diesen Gebilden nicht angehörigen Stellen des Raumes R_{2n} besitzen jene Funktionen rationalen Charakter.*

8. Die obigen Ergebnisse führen mit Notwendigkeit zu einer neuen Auffassung der Gruppendiskontinuität bei den automorphen Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen.

Im Falle einer Veränderlichen spielen die Grenzpunkte der Gruppe eine wichtige Rolle als die einzigen wesentlich singulären Stellen der zur Gruppe gehörigen, mittels Reihen der Poincaréschen Typus gebildeten automorphen Funktionen.

In der Theorie der automorphen Funktionen zweier und mehrerer Veränderlichen kommt, nach den obigen Resultaten, die entsprechende Bedeutung den Punkten der Hauptgrenzgebilde zu. Die Gesamtheit dieser Punkte wird aber hier nicht durch Häufung einzelner Punkte erhalten, wie bei den Gruppen einer Veränderlichen, sondern durch Häufung räumlich ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, weshalb die Hauptgrenzgebilde als „spatiale Diskontinuitäten" der betreffenden Gruppen bezeichnet werden können. Nach unseren Resultaten besitzt die spatiale Diskontinuität im Falle zweier und mehrerer Veränderlichen dieselbe funktionentheoretische Bedeutung wie die punktuelle Diskontinuität im Falle einer Veränderlichen.

Durch die Einführung des neuen Diskontinuitätsbegriffs wird eine volle Analogie in der Theorie der wesentlichen Singularitäten der automorphen Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen erreicht.

Die obigen Resultate behalten ihre Gültigkeit für viel allgemeinere Klassen automorpher Gruppen, wie wir bei anderer Gelegenheit zeigen werden.

II. Bestimmung der wesentlichen Singularitäten bei verschiedenen Klassen diskontinuierlicher Gruppen.

9. Wir wollen mit der Untersuchung derjenigen diskontinuierlichen Gruppen beginnen, deren Hauptgrenzpunkte aus der Gesamtheit der Punkte des reellen absoluten Gebildes (4)′ bestehen.

Das einfachste Beispiel solcher Gruppen besitzt man in der Gruppe G_n aller Kollineationen (1) mit ganzzahligen reellen Koeffizienten. Dies sieht man unmittelbar in den beiden niedersten Fällen durch Betrachtung der zugeordneten Gruppen linearer Substitutionen (vgl. N:o 2). Im Falle $n = 2$ erhält man nämlich G_2 durch Transformation einer Untergruppe der Modulgruppe, welche nur ausserhalb der reellen Achse diskontinuierlich ist. In ähnlicher Weise ergibt sich im Falle $n = 3$ die Gruppe G_3 durch Transformation einer Untergruppe der Picardschen Gruppe, d. h. der Gruppe aller linearen Substitutionen mit ganzzahligen reellen oder komplexen Koeffizienten; die Picardsche Gruppe ist nämlich nicht in der komplexen Ebene, sondern erst in dem dreidimensionalen Halbraume diskontinuierlich.

Bei beliebigem Werte von n kann man das entsprechende Resultat leicht vermittels einer von PICARD angewandten Methode[1]) erzielen, wo es sich um die von HERMITE herrührende kontinuierliche Reduktion indefiniter Formen und ihre Anwendung auf die Bestimmung des Fundamentalbereichs einer Gruppe arithmetischen Ursprungs handelt. In der Tat führen die Picardschen Betrachtungen, für den vorliegenden Fall geeignet modifiziert, zu dem Resultat, dass die Gruppe G_n auf dem reellen absoluten Gebilde aufhört diskontinuierlich zu sein, was mit unserer Behauptung äquivalent ist.

[1]) E. PICARD: *Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes.* Acta mathematica, Bd. 5, 1884.

10. Nach den Ergebnissen des ersten Teiles bestehen die Hauptgrenzgebilde bei jeder Gruppe des oben betrachteten Typus aus der Gesamtheit der Tangentenhyperebenen der reellen absoluten Hypersphäre. Die Gesamtheit (M) der Punkte dieser Mannigfaltigkeiten bilden ein Kontinuum, dessen Untersuchung unser nächstes Ziel ist.

Wir gehen zu diesem Zwecke von der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n - 1 = 0 \tag{18}$$

aus, welche die Tangentenhyperebene des absoluten Gebildes (4)′ im reellen Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ darstellt. Es ist somit

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1. \tag{19}$$

Durch Zerlegung in den reellen und den imaginären Bestandteil ergibt sich hieraus, wenn wir

$$x_k = x_k' + i x_k'', \quad \bar{x}_k = x_k' - i x_k'' \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

schreiben,

$$a_1 x_1' + a_2 x_2' + \cdots + a_n x_n' = 1, \tag{21}$$

$$a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + \cdots + a_n x_n'' = 0. \tag{22}$$

Die gesuchte Menge (M) besteht aus sämtlichen Punkten des Raumes R_{2n}, deren Koordinaten $x_1', \ldots, x_n', x_1'', \ldots, x_n''$, zusammen mit reellen Werten von $a_1, a_2, \ldots, a_n$, den Bedingungen (19), (21) und (22) genügen.

Wir deuten $x_1', \ldots, x_n'$ und $x_1'', \ldots, x_n''$ als rechtwinklige Koordinaten zweier Punkte P' und P'' eines n-dimensionalen Raumes R_n und haben dann eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von R_{2n} und den Punktpaaren (P', P'') von R_n. Der Kürze halber bedienen wir uns der gewöhnlichen Terminologie des dreidimensionalen euklidischen Raumes.

Die Längen der Radiivektors OP' und OP'' bezeichnen wir bzw. mit r' und r'':

$$r'^2 = x_1'^2 + \cdots + x_n'^2, \quad r''^2 = x_1''^2 + \cdots + x_n''^2,$$

und definieren den Winkel $(r'r'')$ zwischen ihren Richtungen durch die Gleichung

$$\cos(r'r'') = \frac{x_1' x_1'' + \cdots + x_n' x_n''}{r' r''}. \tag{23}$$

Aus (19) und (21) folgt zunächst $r' \geqq 1$. Es muss somit der Punkt P' ausserhalb oder auf der Einheitskugel liegen. Wir wählen zunächst P' ausserhalb dieser Kugel und nehmen ferner an, dass $r'' > 0$ ist, d. h. dass P'' nicht mit dem Nullpunkt zusammenfällt, oder m. a. W., dass $(x_1, \ldots, x_n)$ ein komplexer Punkt ist.

Die Gleichung (21) stellt, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als Variable angesehen werden, die Polarebene des Punktes P' inbezug auf die Einheitskugel dar. Die Gleichungen (19) und (21) repräsentieren also zusammen den Schnittkreis C dieser Ebene mit der Einheitskugel. Die Tangentenebenen (21) dieser Kugel in den verschiedenen Punkten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ von C umhüllen einen Kegel K' mit der Spitze P', dessen Scheitelwinkel φ durch die Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{1}{r'} \tag{24}$$

bestimmt wird. Die Gleichung (22) stellt eine durch den Nullpunkt gehende, mit (21) parallele Ebene dar und umhüllt also, wenn der Punkt $(a_1, a_2, .., a_n)$ den Kreis C durchläuft, einen mit K' kongruenten Kegel K'', der die Origo als Spitze und OP' als Achse hat. Somit muss der Punkt P'' in einer Tangentenebene des Kegels K'' und also entweder ausserhalb dieses Doppelkegels oder in der Mantelfläche desselben liegen.

11. Nehmen wir zuerst an, dass P'' ausserhalb K'' fällt. Durch P'' können dann zwei verschiedene Tangentenebenen zu K'' gelegt werden. Die diesen parallelen Tangentenebenen des Kegels K' berühren die Einheitskugel in zwei Punkten des Kreises C, die wir mit A_1 und A_2 bezeichnen wollen. Die Koordinaten $(a_1, a_2, .., a_n)$ jedes dieser Punkte befriedigen, zusammen mit den Koordinaten der Punkte P' und P'', die Gleichungen (19), (21) und (22). Der Punkt (P', P'') des Raumes R_{2n} gehört also zu (M) und ist offenbar ein innerer Punkt dieser Menge; durch ihn gehen zwei verschiedene Hauptgrenzgebilde, nämlich die Tangentenebenen der Einheitskugel in den Punkten A_1 und A_2.

Wenn P'' auf der Mantelfläche von K'' liegt und $r'' > 0$ ist, geht durch P'' nur eine Tangentenebene dieses Kegels. Dann fallen also A_1 und A_2 in einem Punkte A des Kreises C zusammen, und die zu A gehörige Tangentenebene der Einheitskugel ist das einzige Hauptgrenzgebilde, das den Punkt (P', P'') enthält. Dieser Punkt gehört auch jetzt zu (M), ist aber ein Grenzpunkt dieser Menge, weil jede Umgebung desselben offenbar Punkte $(\bar{P}', \bar{P}'')$ enthält, für welche $\bar{P}''$ innerhalb des entsprechenden Kegels K'' fällt und die, nach dem oben Gesagten, also nicht zu (M) gehören. Diese Grenzpunkte bilden ein Kontinuum der $(2n-1)^{ten}$ Dimension.

In dem Falle, wo P'' in die Origo fällt, also $r'' = 0$ ist, reduziert sich (22) auf eine Identität, und die Gleichungen (19) und (21) werden durch die Koordinaten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jedes Punktes des Kreises C befriedigt. Sämtliche Punkte der durch die Bedingungen $r' > 1, r'' = 0$ definierten n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gehören also zu (M), und durch jeden derselben gehen unendlich viele Hauptgrenzgebilde. Alle diese Punkte liegen an der Grenze von (M).

Die zuletzt betrachtete Mannigfaltigkeit hat zu Grenzpunkten die Punkte der $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $r' = 1, r'' = 0$, d. h. des reellen absoluten Gebildes. Auch diese Punkte gehören der Menge (M) als Grenzpunkte an, und durch jeden derselben geht ein einziges Hauptgrenzgebilde.

12. Dass der Punkt P'' ausserhalb des Doppelkegels K'' fällt, wird analytisch durch die Bedingungen $\varphi < (r'\,r'') < \pi - \varphi$, oder nach (24)

$$r' \sin(r'\,r'') > 1, r'' > 0 \tag{25}$$

ausgedrückt, welche Bedingung die zuerst aufgestellte Bedingung $r' > 0$ einschliesst. Nach (23) kann (25) in der Form

$$r'^2 - 1 > r'^2 \cos^2(r'\,r'') = \frac{(x_1' x_1'' + \cdots + x_n' x_n'')^2}{r''^2}$$

oder

$$(r'^2 + r''^2 - 1)^2 > (r'^2 - r''^2 - 1)^2 + 4(x_1' x_1'' + \cdots + x_n' x_n'')^2$$

geschrieben werden, welche letztere Ungleichung vermöge (20) die elegante Form

(25)' $$|x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n-1|>|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1|$$

annimmt. Wenn P'' auf die Mantelfläche von K'' fällt, verwandelt sich in (25) und (25)' das Zeichen $>$ in $=$.

Wir haben also folgendes Resultat gewonnen:

Die Gesamtheit (M) *der zu den Hauptgrenzgebilden der oben betrachteten Gruppen gehörigen Punkte enthält*

a) *als innere Punkte sämtliche Punkte des* $2n$*-dimensionalen Kontinuums* (25) *oder* (25)';

b) *als Grenzpunkte die Punkte des* $(2n-1)$*-dimensionalen Kontinuums*

(26) $$r'\sin(r'r'')=1,\ r''>0,$$

diejenigen des n-dimensionalen Kontinuums

(27) $$r'>1,\ r''=0,$$

sowie die reellen Punkte des absoluten Gebildes, d. h. des $(n-1)$*-dimensionalen Kontinuums*

(28) $$r'=1,\ r''=0,$$

das die gemeinsame Grenze für (26) *und* (27) *ist.*

Dieses Resultat gilt aber nur für $n\geq 3$. Im Falle $n=2$ reduziert sich nämlich die oben betrachtete räumliche Konstruktion auf eine ebene Figur; statt des Kegels K' erhalten wir die vom Punkte P' gezogenen Tangenten des Einheitskreises, statt K'' die durch die Origo gehenden Parallelen derselben. Nach (22) muss P'' auf einer dieser Parallelen liegen, und es ist folglich $(r'r'')=\varphi$, sodass wir als Bedingung, damit der Punkt (P', P'') zu (M) gehört, jetzt die *Gleichung*

(29) $$r'\sin(r'r'')=1$$

oder

(29)' $$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2-1=|x_1^2+x_2^2-1|$$

bekommen. Im Falle $n=2$ ist somit (M) eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. In unserer oben zitierten Arbeit haben wir gezeigt, dass dieselbe den vierdimensionalen Raum in drei Teile zerlegt.

13. Nach dem Vorhergehenden charakterisiert die Ungleichung

(30) $$r'\sin(r'r'')<1$$

oder

(30)' $$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n-1<|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1|$$

die Gesamtheit derjenigen Punkte von R_{2n}, welche keinem Hauptgrenzgebilde angehören. Diese Punkte bilden einen einfach zusammenhängenden Bereich, wie aus (30) unmittelbar hervorgeht. Mit Rücksicht auf die in N:o 7 dargelegte funktionentheoretische Bedeutung der Hauptgrenzgebilde können wir die vorhergehenden Resultate im folgenden Satze zusammenfassen:

SATZ. *Bei denjenigen Gruppen, deren Hauptgrenzpunkte aus der Gesamtheit der reellen Punkte des absoluten Gebildes bestehen, definiert jeder vermittels der Picardschen oder analoger Reihen konstruierte Ausdruck eine einzige analytische Funktion, wenn die Anzahl der Variablen wenigstens drei ist. Der Existenzbereich aller dieser Funktionen besteht aus dem Raum*

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\cdots+x_n\bar{x}_n-1<|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1|,$$

indem der komplementäre Raum ein lakunärer Raum für die Gesamtheit der fraglichen Funktion ist.

Im Falle zweier Variablen definiert dagegen jeder Ausdruck obiger Art drei verschiedene analytische Funktionen, welche je in einem der durch die dreidimensionale Mannigfaltigkeit

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2-1=|x_1^2+x_2^2-1|$$

begrenzten Teile des vierdimensionalen Raumes R_4 existieren und diese Mannigfaltigkeit als natürliche Grenze haben, über welche hinaus sie analytisch nicht fortgesetzt werden können.

14. Wir gehen jetzt zu dem zweiten extremen Fall über, wo die Hauptgrenzpunkte auf dem reellen absoluten Gebilde diskret liegen.

Den einfachsten hierher gehörigen Fall bilden die von einer einzigen Substitution erzeugten oder zyklischen Gruppen. Zur Untersuchung derselben gehen wir von der quadratischen Form

$$\psi=z_1z_{n+1}+z_2^2+z_3^2+\cdots+z_n^2 \tag{31}$$

aus, welche aus der Form (3) durch die Transformation

$$z_1=y_1+y_{n+1},\ z_{n+1}=y_1-y_{n+1},\ z_2=y_2,\ldots,z_n=y_n \tag{32}$$

hervorgeht. Es sei

$$z_p'=\sum_{q=2}^{n}c_{pq}z_q \qquad (p=2,\ldots,n) \tag{33}$$

eine beliebige reelle orthogonale Substitution und η irgendeine von Eins verschiedene reelle Zahl. Wir haben dann in

$$z_1'=\eta z_1,\ z_{n+1}'=\frac{1}{\eta}z_{n+1},\ z_p'=\sum_{q=2}^{n}c_{pq}z_q \qquad (p=2,\ldots,n) \tag{34}$$

eine reelle lineare Substitution, welche die Form ψ invariant lässt; diese Substitution ist im allgemeinen eine loxodromische Substitution und besonders eine hyperbolische Substitution in dem Spezialfalle, wo (33) mit der identischen Substitution zusammenfällt, nach der bei den linearen Substitutionen einer Variablen angewandten Terminologie.

Es sei nun $P(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$ ein beliebiger Punkt des reellen hyperbolischen Raumes $\psi<0$ und somit $z_{n+1}\neq 0$. Wenn dann etwa $\eta<1$ ist, so wird bei unbegrenzter Wiederholung von (34) $z_1'=0$ und $z_{n+1}'=\infty$, während die Werte von $z_2',z_3',\ldots,z_n'$ wegen der Identität

$$z_2'^2+z_3'^2+\cdots+z_n'^2=z_2^2+z_3^2+\cdots+z_n^2$$

unterhalb endlicher Grenzen bleiben. Hieraus geht hervor, dass die Bildpunkte von P den Berührungspunkt Q der Tangentenhyperebene $z_1=0$ des absoluten Gebildes $\psi=0$ zum Grenzpunkt haben. In ähnlicher Weise wird bewiesen, dass bei unbegrenzter Wiederholung der inversen Substitution der Berührungspunkt Q' der Tangentenhyperebene $z_{n+1}=0$ zum Grenzpunkt erhalten wird. Die Punkte Q,Q' sind die Hauptgrenzpunkte, die zugeordneten Tangentenhyperebenen $z_1=0, z_{n+1}=0$ die Hauptgrenzgebilde unserer zyklischen Gruppe.

Durch Übergang zu den transformierten Gruppen werden *die Hauptgrenzgebilde aus zwei Tangentenhyperebenen der reellen absoluten Hypersphäre bestehen*, deren Berührungspunkte, nach Ausführung einer geeigneten Transformation, beliebig vorgeschriebene Lagen erhalten können.

15. Wir wollen hier nebenbei die speziellen Grenzgebilde der obigen Gruppen betrachten (vgl. S. 9), obwohl dieselben im Folgenden keine funktionentheoretische Anwendung finden werden. Wir beschränken uns dabei auf lineare Mannigfaltigkeiten.

Wir wählen den Punkt P irgendwo auf der invarianten Mannigfaltigkeit $z_{n+1}=0$. Die Bildpunkte von P gehören dann ebenfalls dieser Mannigfaltigkeit an und können daher bei unbegrenzter Wiederholung der Substitution (34) nicht den Punkt Q zum Grenzpunkt haben. Es liege zuerst eine hyperbolische Substitution vor:

$$z_1' = \eta z_1, \quad z_{n+1}' = \frac{1}{\eta} z_{n+1}, \quad z_p' = z_p. \qquad (p=2,\ldots,n)$$

Der betreffende Grenzpunkt ist dann ein Punkt der Mannigfaltigkeit $z_1 = z_{n+1} = 0$, nämlich $(0, z_2, z_3, \ldots, z_n, 0)$; seine Lage ist vom Anfangspunkte $P(z_1, z_2, \ldots, z_n, 0)$ abhängig und kann bei geeigneter Wahl von P mit einem beliebig gegebenen Punkt jener Mannigfaltigkeit zusammenfallen. Wegen der Polarität kann man daraus schliessen, dass die Transformierten jeder durch den Punkt Q' gehenden Hyperebene durch die Punkte Q, Q' gehende Hyperebenen als Grenzgebilde haben. Entsprechendes gilt für die Wiederholung der inversen Substitution, nur wird die Rolle der Punkte Q, Q' sowie der Hypertangentenebenen $z_1=0$ und $z_{n+1}=0$ vertauscht. Somit bestehen die speziellen linearen Grenzgebilde bei den betrachteten Gruppen aus den durch die Hauptfixpunkte Q, Q' gehenden Hyperebenen. Diese Grenzgebilde durchsetzen im Falle $n>2$ den ganzen Raum R_{2n}.

Das obige Resultat gilt auch bei den loxodromischen Substitutionen, mit dem Unterschied, dass hier jede Hyperebene mehrere Grenzgebilde hat. Wie leicht einzusehen, ist die Anzahl derselben endlich oder unendlich, jenachdem die orthogonale Substitution (33) periodisch ist oder nicht.

16. Allgemeinere Gruppen mit diskreten Hauptgrenzgebilden erhält man in folgender Weise:

Wir wählen auf der reellen absoluten Hypersphäre eine gerade Anzahl Punkte Q_i, Q_i', und bilden mit diesen Punkten als Hauptfixpunkten hyperbolische oder loxodromische Substitutionen. Wir behaupten, dass die aus diesen Substitutionen S_i erzeugte Gruppe sicher dann diskontinuierlich ist, wenn die Multiplikatoren η_i der erzeugenden Substitutionen hinreichend klein gewählt werden.

Zum Beweise wählen wir für jede Substitution S_i eine reelle Hyperebene E_i', welche aus der Hypersphäre ein kleines, den Punkt Q_i' enthaltendes Segment τ_i' schneidet. Bei hinreichend kleinen Werten von η_i wird die vermittels S_i aus E_i' erhaltene Hyperebene E_i aus der Hypersphäre ein beliebig kleines, den Punkt Q_i enthaltendes Segment τ_i schneiden. Man kann dadurch offenbar erreichen, dass die verschiedenen Hyperebenen E_i, E_i' einander nur ausserhalb der absoluten Hypersphäre treffen. Unter dieser Bedingung ist aber die von den Substitutionen S_i erzeugte Gruppe diskontinuierlich, weil offenbar der von den Hyperebenen E_i, E_i' und den zwischen-

liegenden Teilen der absoluten Hypersphäre begrenzte Bereich B keine zwei bezüglich der Gruppe äquivalenten Punkte enthält und somit ein Teil des Fundamentalbereichs ist.

Diese Gruppen gestatten eine sehr einfache Darstellung vermittels der in N:o 2 besprochenen quadratischen Substitutionen. Bei Ausführung der Transformation (6) wird nämlich der Bereich B in einen von ausserhalb einander liegenden Halbhyperkugeln und Teilen der Hyperebene $\xi_n = 0$ begrenzten Bereich übergeführt. Die transformierten erzeugenden Substitutionen ordnen dabei die Halbhyperkugeln paarweise einander in der Weise zu, dass die inneren und äusseren Teile dieser Halbkugeln einander wechselweise entsprechen. Beschränkt man sich auf die invariante Hyperebene $\xi_n = 0$, wo die Gruppe bereits diskontinuierlich ist, so gelangt man zu einer Gruppe, deren Fundamentalbereich im reellen Gebiete von einer geraden Anzahl $(n-1)$-dimensionaler Hyperkugeln, in den Fällen $n = 4$ und $n = 3$, also von gewöhnlichen Kugeln bzw. Kreisen begrenzt ist. Durch Übergang zu einer komplexen Veränderlichen gehen diese Gruppen im Falle $n = 3$ in Gruppen des Schottkyschen Typus über.

17. Zwischen den oben behandelten extremen Fällen, wo die Mannigfaltigkeit der Hauptgrenzgebilde ihre maximale bzw. minimale Mächtigkeit hatte, gliedern sich eine Anzahl intermediärer Fälle, wo die Hauptgrenzpunkte Kontinua von kleinerer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension bilden. Man findet unmittelbar, dass in diesen Fällen die Punkte der Hauptgrenzgebilde $2n$-dimensionale Kontinua bilden, ausser im niedersten Falle, wo die Hauptgrenzpunkte ein lineares Kontinuum bilden, in welchem Falle die Dimension des fraglichen Kontinuums gleich $2n-1$ ist.

Wir wollen hier nur diesen letzten Fall näher untersuchen und wählen der Einfachheit wegen den Fall $n = 3$, d. h. den gewöhnlichen hyperbolischen Raum zum Gegenstand unserer Untersuchung.

Die in dem in N:o 2 angegebenen Sinne zugeordneten Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen mit komplexen Koeffizienten haben im vorliegenden Falle entweder eine oder unendlich viele Grenzkurven, welche Kreise oder nichtanalytische Kurven sind. Wir betrachten zunächst den Fall einer Grenzkurve, deren Projektion auf der absoluten Kugel wir mit G bezeichnen. Die Punkte von G sind die Hauptgrenzpunkte, die durch diese Punkte gehenden Tangentenebenen die Hauptgrenzgebilde unserer Gruppe Γ. Wir behaupten, dass die aus den Punkten sämtlicher Hauptgrenzgebilde bestehende fünfdimensionale Mannigfaltigkeit M den ganzen sechsdimensionalen Raum R_6 in drei Teile zerlegt. Betreffs der Kurve G setzen wir nur voraus, dass sie eine einfache geschlossene Kurve ist.

Es sei P ein beliebiger Punkt von R_{2n}, der dem Bereiche (25) angehört, (P', P'') das entsprechende Punktpaar des Raumes R_n und A_1 und A_2 die zugehörigen Punkte der Einheitskugel (vgl. S. 12). Die Tangentenebenen dieser Kugel in A_1 und A_2 schneiden einander längs einer Geraden L', die durch P' geht; der Punkt P'' liegt auf der durch die Origo gehenden Parallele L'' zu L'. Wie wir oben gesehen haben, sind die zu A_1 und A_2 gehörigen Tangentenmannigfaltigkeiten (18) im Raume R_6 die einzigen, welche den komplexen Punkt P enthalten. Wenn also weder A_1 noch A_2 auf der Grenzkurve G liegt, so liegt P ausserhalb der Mannigfaltigkeit M.

Wenn der Punkt P'' auf der Mantelfläche des Kegels K'' (jedoch verschieden von der Origo) gewählt wird, so fallen A_1 und A_2 in einem Punkt A der Kugelfläche zusammen, und die zu

diesem gehörige Mannigfaltigkeit (18) ist die einzige, die durch den Punkt P geht. Ist A ausserhalb G gelegen, so gehört folglich P nicht zu M. Ein ähnliches Resultat wird erhalten, wenn P' in der Oberfläche der Einheitskugel fällt.

Lassen wir dagegen P'' mit der Origo zusammenfallen, so gehen durch den entsprechenden Punkt P unendlich viele Mannigfaltigkeiten (18), nämlich alle diejenigen, die den Punkten des zu P' gehörigen Kreises C entsprechen. Der Punkt P gehört dann zu M oder nicht, jenachdem der Kreis die Kurve G trifft oder nicht.

Die Grenzkurve G zerlegt die Oberfläche der Einheitskugel in zwei Teile α und β. Wir bezeichnen mit (P_α) bzw. (P_β) die Gesamtheit derjenigen Punkte des Bereichs (25), für welche die entsprechenden Punkte A_1 und A_2 beide innerhalb α bzw. beide innerhalb β fallen. Nach dem oben Gesagten haben die Mengen (P_α) und (P_β) keinen Punkt mit der Menge (M) gemeinsam. Wir behaupten, dass jede derselben ein einziges Kontinuum bildet.

18. Es seien $P=(P', P'')$ und $\bar{P}=(\bar{P}', \bar{P}'')$ irgend zwei Punkte z. B. der Menge (P_α), A_1, A_2 und $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ die entsprechenden Punktpaare der Einheitskugel, L', L'' und $\bar{L}'$, $\bar{L}''$ die zugehörigen Paare von Geraden. Diejenigen von der Origo ausgehenden Halbstrahlen der Geraden L'' und $\bar{L}''$, die P'' bzw. $\bar{P}''$ enthalten, bezeichnen wir mit L''_+ und $\bar{L}'_+$. Wir lassen nun die Punkte A_1 und A_2 innerhalb α kontinuierlich variieren, bis sie schliesslich mit $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ zusammenfallen, wobei die Geraden L' und L'' in $\bar{L}'$ und $\bar{L}''$ stetig übergehen. Der Halbstrahl L''_+ geht hierbei entweder in $\bar{L}''_+$ oder in den entgegengesetzten Halbstrahl L''_- über. Im letzten Falle lassen wir noch die Punkte $\bar{A}_1$ und $\bar{A}_2$ durch kontinuierliche Variation innerhalb α ihre Plätze vertauschen, wobei $\bar{L}'$ und $\bar{L}''$ in der Weise in sich übergehen, dass die Halbstrahlen L''_+ und $\bar{L}''_-$ untereinander vertauscht werden. Diese Überlegung zeigt, dass es immer möglich ist, den Punkt P innerhalb (P_α) in $\bar{P}$ stetig zu überführen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Die beiden Kontinua (P_α) und (P_β) hängen mit dem Bereiche

$$r' \sin(r'\, r'') < 1 \tag{35}$$

entlang gewisser fünfdimensionaler Teile der Mannigfaltigkeit $r' \sin(r'\, r'') = 1$ stetig zusammen. Somit bilden (P_α), (P_β) und (35) ein einziges Kontinuum, das wir mit (I) bezeichnen.

Wir betrachten hiernach die Gesamtheit $(P_{\alpha,\beta})$ derjenigen Punkte (P', P'') des Bereichs (25), von dessen entsprechenden Punkten A_1, A_2 der eine, sagen wir A_1, innerhalb α, der andere, A_2, innerhalb β liegt. Kein Punkt von $(P_{\alpha,\beta})$ gehört zur Mannigfaltigkeit M. Dagegen enthält jeder stetige Weg S, der einen Punkt P von $(P_{\alpha,\beta})$ mit einem inneren Punkte des Kontinuums (I) verbindet, wenigstens einen Punkt von M. Denn wenn P den Grenzpunkt der Menge $(P_{\alpha,\beta})$ bezeichnet, wo S aus derselben heraustritt, so muss, wenn man sich entlang S dem Punkte $\bar{P}$ nähert, entweder einer der Punkte A_1, A_2 sich einem gewissen Punkte der Kurve G nähern, und dann geht das zu diesem Punkte gehörige Hauptgrenzgebilde durch den Punkt $\bar{P}$. Oder es bleiben A_1 und A_2 bzw. innerhalb α und β, und P'' nähert sich Null, so dass folglich der durch A_1, A_2 gehende Kreis C in den zu $\bar{P}$ gehörigen Kreis $\bar{C}$ stetig übergeht. Weil nun C fortwährend die Kurve G schneidet, so hat auch der Kreis $\bar{C}$ mit G einen Punkt gemeinsam, und also gehört auch jetzt P zu der Mannigfaltigkeit M. Somit ist bewiesen, dass diese Mannigfaltigkeit jeden Punkt in $(P_{\alpha,\beta})$ von dem Kontinuum (I) trennt.

BIOLOGICAL LIBRARY

19. Wir zeigen jetzt, dass $(P_{\alpha,\beta})$ selbst aus zwei Kontinua besteht, die durch die Mannigfaltigkeit M voneinander getrennt werden.

Es seien A_1 und A_2 beliebige Punkte innerhalb α und β, L' und L'' die zugehörigen Geraden, L''_+ und L''_- die beidenvon der Origo ausgehenden Halbstrahlen der Geraden L''. Wir wählen auf L' einen beliebigen Punkt P', auf L''_+ einen Punkt P''_+ und auf L''_- einen Punkt P''_-. Die Punkte $P_+ = (P', P''_+)$ und $P_- = (P', P''_-)$ gehören beide zu $(P_{\alpha,\beta})$. Wir behaupten, dass jeder stetige Weg S, der P_+ und P_- verbindet, die Mannigfaltigkeit M durchsetzt. Nach dem oben Gesagten genügt es den Fall zu untersuchen, wo S ausserhalb des Kontinuums (I) verläuft. Trifft man auf S einen Punkt (P', P''), für welchen P'' mit der Origo zusammenfällt, so ist (P', P''), wie oben bewiesen wurde, ein Punkt von M. Im entgegengesetzten Falle zeigt eine einfache geometrische Überlegung, dass beim Durchlaufen der Kurve S von P_+ bis P_-, die Punkte A_1 und A_2 ineinander kontinuierlich übergeführt werden. In einem gewissen Augenblick muss dann einer dieser Punkte auf G fallen, und der entsprechende Punkt von S gehört dann der Mannigfaltigkeit M an.

Hieraus schliesst man, dass, wenn A_1 und A_2 innerhalb α und β irgendwelche geschlossenen Umlaufe machen, die Halbstrahlen L''_+ und L''_- immer in sich selbst übergehen. Wir können also die Punkte von $(P_{\alpha,\beta})$ in zwei Klassen, (II) und (III), zerlegen, indem wir einen Punkt (P', P'') von $(P_{\alpha,\beta})$ zu der ersten oder zweiten Klasse führen, jenachdem derjenige Halbstrahl der entsprechenden Linie L'', der P'' enthält, durch kontinuierliche Verschiebung von A_1 und A_2 innerhalb α und β in den anfangs fixierten Halbstrahl L''_+ oder in L''_- übergeführt werden kann. Die Betrachtungen S. 17 zeigen, dass jede der Punktmengen (II) und (III) für sich ein einziges Kontinuum bildet. Nach dem oben Bewiesenen werden diese Kontinua durch M voneinander getrennt.

Somit wird durch die Mannigfaltigkeit M der Raum R_6 in drei verschiedene Kontinua, (I), (II) und (III), geteilt.

Das Begrenzungsgebilde dieser Kontinua ist entweder ein algebraisches oder ein nichtanalytisches fünfdimensionales Kontinuum. Im ersten Falle ist dasselbe eine mit

$$xx + yy - 1 \quad x^2 + y^2 - 1$$

hyperbolisch kongruente algebraische Mannigfaltigkeit vierten Grades, wie man bemerkt, wenn die Ebene des Kreises vermittels einer Kollineation (1) in die xy-Ebene übergeführt wird. In diesem Falle ist das obige Resultat eine unmittelbare Folgerung des in N:o 13 aufgestellten Satzes.

20. Betreffs der automorphen Funktionen der im Vorigen betrachteten Gruppen können wir folgenden Satz aussprechen.

SATZ. *Jeder vermittels der verallgemeinerten Poincaréschen Reihen gebildete Ausdruck definiert gleichzeitig drei analytische Funktionen, welche je in einem der drei Räume I, II, III existieren und die Mannigfaltigkeit M als natürliche Grenze haben.*

Wenn die Gruppe g unendlich viele Grenzkurven besitzt, so erhält man eine Zerlegung des Raumes R_6 in unendlich viele entweder von algebraischen oder von nichtanalytischen Gebilden begrenzten Teile, deren jeder den Existenzbereich einer automorphen Funktionenklasse bildet.

21. Die obigen Resultate gelten ungeändert im Falle beliebig vieler Veränderlichen. Wir wollen dies nur für den Fall, wo G ein Kreis ist, kurz andeuten.

Vermittels einer geeigneten hyperbolischen Bewegung können wir offenbar G mit dem Kreis

$$x_1^2+x_2^2=1,\quad x_3=x_4=\cdots=x_n=0 \tag{36}$$

zusammenfallen lassen. Die Tangentenhyperebenen, welche die absolute Hypersphäre in den Punkten von (36) berühren, bilden ein $(2n-1)$-dimensionales Kontinuum, dessen Gleichung

$$x_1x_1+x_2x_2-1=|x_1^2+x_2^2-1|$$

auf Grund des Satzes in N:o 13 unmittelbar aufgestellt werden kann. Diese Mannigfaltigkeit und somit auch die mit ihr kollineare Mannigfaltigkeit M zerlegt den Raum R_{2n} in drei Teile.

22. Wir wollen zum Abschluss ein Beispiel über die anderen intermediären Fälle behandeln.

Wir betrachten zu diesem Zweck diskontinuierliche Gruppen von Kollineationen, welche nicht nur die Form (3), sondern auch eine gewisse, die absolute reelle Hypersphäre schneidende reelle lineare Mannigfaltigkeit von beliebiger Dimensionenzahl $m<n$ invariant lassen. Diese Mannigfaltigkeit können wir, durch Ausführung einer geeigneten Transformation, mit $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$ zusammenfallen lassen. Die Hauptgrenzpunkte der so erhaltenen Gruppe liegen dann offenbar auf der Hypersphäre

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=0,\ x_{m+1}^2+x_{m+2}^2+\cdots+x_n^2-1=0.$$

Wir nehmen jetzt an, dass jeder Punkt dieser Hypersphäre ein Hauptgrenzpunkt ist. Die Hauptgrenzgebilde bilden dann, für $m=1,2,\ldots,n-3$, $2n$-dimensionale Kontinua:

$$x_{m+1}\bar{x}_{m+1}+x_{m+2}\bar{x}_{m+2}+\cdots+x_n\bar{x}_n-1\geq|x_{m+1}^2+x_{m+2}^2+\cdots+x_n^2-1|,$$

deren jedes ein Teil des vorangehenden ist. Der komplementäre Raum ist zusammenhängend, und jeder vermittels der verallgemeinerten Poincaréschen Reihen gebildete Ausdruck definiert also eine einzige analytische Funktion.

III. Über verallgemeinerte Poincarésche Reihen.

A. Picardsche Reihen.

23. Wir beginnen unsere Konvergenzbetrachtungen mit der Untersuchung der durch die Spezialisierung $H\equiv 1$ aus (17) erhaltenen Picardschen Reihe

$$\sum\left[\frac{\partial(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\right]^p. \tag{37}$$

Es ist

$$\frac{\partial(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\pm\frac{1}{(\alpha_{n+1,1}x_1+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n+\alpha_{n+1,n+1})^{n+1}}, \tag{38}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem ob die Determinante der Koeffizienten von (1) gleich $+1$ oder -1 ist, und die obige Reihe kann somit, vom Zeichen abgesehen, auch in der Form

$$\sum \frac{1}{(\alpha_{n+1,1}x_1+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n+\alpha_{n+1,n+1})^{(n+1)p}} \tag{39}$$

geschrieben werden.

Die einzelnen Glieder der Reihe (39) werden algebraisch unstetig für die Punkte der Fluchthyperebenen

$$\alpha_{n+1,1}x_1+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n+\alpha_{n+1,n+1}=0, \tag{40}$$

welche als Transformierte der unendlichfernen Hyperebene sämtlich ausserhalb der reellen absoluten Hypersphäre liegen und daher die Hauptgrenzgebilde der Gruppe als einzige Häufungsgebilde besitzen.

Es sei A ein beliebiger zusammenhängender oder zerfallender Bereich des Raumes R_{2n}, welcher von den Hauptgrenzgebilden einen endlichen, von Null verschiedenen Abstand hat und daher nur von endlich vielen Fluchthyperebenen getroffen wird. Wir bezeichnen mit d_M und d_m die obere bzw. untere Grenze der kürzesten Abstände der Punkte von A von den übrigen Fluchthyperebenen (40), wobei allgemein der Ausdruck

$$\frac{|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_{n+1}|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}} \tag{41}$$

den Abstand eines beliebigen reellen oder komplexen Punktes $(x_1,\ldots,x_n)$ von der reellen Hyperebene

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+a_{n+1}=0 \tag{42}$$

angibt. Man hat dann für jedes Punktpaar $(x),(x')$ des Bereichs A und jede der genannten Fluchthyperebenen die doppelte Ungleichung

$$\frac{d_m}{d_M}<\frac{|\alpha_{n+1,1}x_1+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n+\alpha_{n+1,n+1}|}{|\alpha_{n+1,1}x_1'+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n'+\alpha_{n+1,n+1}|}<\frac{d_M}{d_m}. \tag{43}$$

Hieraus geht aber hervor, dass die Reihe (39), nach Fortlassung endlich vieler Glieder, im Bereich A absolut und gleichmässig konvergiert, sobald sie in irgendeinem Punkte dieses Bereichs absolut konvergent ist.

24. Wir wählen jetzt irgendwo im Innern des hyperbolischen Raumes (4) eine kleine n-dimensionale Hypersphäre $\varkappa$, deren Transformierte nirgends mit einander kollidieren, was wegen der Diskontinuität der Gruppe Γ im genannten Raume möglich ist. Es sei V der Inhalt von $\varkappa$ und V_s der Inhalt des vermittels der Substitution S der Gruppe Γ erhaltenen Bildes von $\varkappa$. Man hat

$$V_s=\frac{V}{(\alpha_{n+1,1}x_1^0+\cdots+\alpha_{n+1,n}x_n^0+\alpha_{n+1,n+1})^{n+1}}, \tag{44}$$

wo $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ ein gewisser Punkt von $\varkappa$ ist. Weil nun im hyperbolischen Raume keine Flucht-

gebilde vorhanden sind, so erhalten wir, wenn wir die Ungleichungen (43) auf $\varkappa$ anwenden, für jeden Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ dieses Bereichs eine Ungleichung der Form

$$\frac{1}{|\alpha_{n+1,1}x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n}x_n + \alpha_{n+1,n+1}|^{n+1}} < q V_s, \tag{45}$$

wo q eine endliche Grösse bezeichnet.

Wegen der geometrisch evidenten Endlichkeit der Summe ΣV_s folgt hieraus, dass die Reihe (39) für $p=1$ und dann *a fortiori* für $p>1$ innerhalb $\varkappa$ absolut und gleichmässig konvergiert. Durch erneute Anwendung der Ungleichungen (43) findet man, dass diese Folgerung für jeden von den Hauptgrenzgebilden in endlicher Entfernung liegenden Raum A gültig bleibt, nach Fortlassung der endlich vielen Glieder der Reihe, welche in jenem Bereich algebraisch unstetig werden.

25. Durch das Obige ist für den Konvergenzexponenten p keineswegs eine untere Grenze gefunden. Wir wollen zeigen, dass es diskontinuierliche Gruppen gibt, bei welchen der Konvergenzexponent p einen beliebig kleinen positiven Wert hat.

Wir untersuchen zu diesem Zwecke eine Gruppe des in N:o 16 besprochenen Typus. Es seien $S_1, S_2, \ldots, S_{2N}$ die paarweise einander inversen erzeugenden Substitutionen der Gruppe. Weil zwischen diesen Substitutionen offenbar keine anderen Relationen stattfinden als diejenigen, die sich auf die Identitäten $SS^{-1}=1$ zurückführen lassen, so ist jede Substitution in der Form

$$S_{i_1}^{\alpha_1} S_{i_2}^{\alpha_2} \cdots S_{i_q}^{\alpha_q} \tag{46}$$

in eindeutiger Weise darstellbar. Die Summe

$$\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu \tag{47}$$

der Exponenten in der Substitution (46) werden wir vorläufig den Index derselben nennen und dementsprechend die Substitution selbst mit $S_{(\nu)}$ bezeichnen. Man erhält hiernach die Gesamtheit der Substitutionen des Index $\nu+1$, wenn man in dem Ausdruck

$$S_{(\nu+1)} = S_{(\nu)} S_k \tag{48}$$

$S_{(\nu)}$ die Gesamtheit der Substitutionen des Index ν und S_k sämtliche erzeugende Substitutionen, von der inversen Substitution des letzten Faktors von $S_{(\nu)}$ jeweils abgesehen, durchlaufen lässt.

26. Wir betrachten jetzt die unendliche Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu, \tag{49}$$

deren allgemeines Glied σ_ν aus der Summe derjenigen Glieder der Reihe

$$\sum \left| \frac{\partial(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0) \tag{50}$$

besteht, welche sich auf Substitutionen des Index ν beziehen. Man erhält eine obere Grenze für den Quotient $\sigma_{\nu+1} : \sigma_\nu$ und alsdann ein Kriterium für die Konvergenz der Reihe (50) in folgender Weise.

Der Kürze wegen bezeichnen wir mit $\frac{\partial(S)}{\partial(x)}$ die zu irgendeiner Substitution S gehörige Funktionaldeterminante (38). Weil nach (48) $S_{(\nu+1)}=S_k(x')$, wo $x'=S_{(\nu)}(x)$, so gibt uns ein bekannter Satz hinsichtlich der Funktionaldeterminanten für den Quotienten zweier vermöge (48) einander zugeordneten Glieder von $\sigma_{\nu+1}$ und σ_ν den Ausdruck

$$\left|\frac{\partial(S_{(\nu+1)})}{\partial(x)}:\frac{\partial(S_{(\nu)})}{\partial(x)}\right|^{\varepsilon}=\left|\frac{\partial(S_k(x'))}{\partial(x')}\right|^{\varepsilon},\ x'=S_{(\nu)}(x). \tag{51}$$

Wir knüpfen jetzt an die Darstellung (34) der erzeugenden Substitution S_k, wobei $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ gewisse lineare homogene Funktionen

$$z_p=\sum_{q=1}^{n+1}\beta_{pq}y_q \qquad (p=1,2,\ldots,n+1) \tag{52}$$

der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ bezeichnen. Durch Übergang in nichthomogene Variable erhält man für S_k den Ausdruck

$$v_1'=\eta^2 v_1,\ v_p'=\eta\sum_{q=1}^{n}c_{pq}v_q \qquad (p=2,\ldots,n) \tag{53}$$

wo

$$v_p=\frac{z_p}{z_{n+1}}=\frac{\sum_{q=1}^{n}\beta_{pq}x_q+\beta_{p,n+1}}{\sum_{q=1}^{n}\beta_{n+1,q}x_q+\beta_{n+1,n+1}} \qquad (p=1,2,\ldots,n) \tag{54}$$

und

$$v_p'=\frac{z_p'}{z_{n+1}'}=\frac{\sum_{q=1}^{n}\beta_{pq}X_q+\beta_{p,n+1}}{\sum_{q=1}^{n}\beta_{n+1,q}X_q+\beta_{n+1,n+1}}$$

gesetzt ist. Es seien T und U die Symbole der Substitutionen (54) und (53). Dann ist $S_k=TUT^{-1}$ und daher

$$\frac{\partial(S_k(x))}{\partial(x)}=\frac{\partial(T(x))}{\partial(x)}\cdot\frac{\partial(U(v))}{\partial(v)}\cdot\left(\frac{\partial(T(X))}{\partial(X)}\right)^{-1}. \tag{55}$$

Aus (53) ergibt sich

$$\frac{\partial(U(v))}{\partial(v)}=\pm\eta^{n+1}$$

mit Rücksicht darauf, dass die Determinante des Koeffizienten c_{pq} der orthogonalen Substitution (33) gleich ± 1 ist. Hieraus und mit Hilfe der Formel (38) erhält man aus (51) und (55)

$$\frac{\partial(S_{(\nu+1)}(x))}{\partial(x)}:\frac{\partial(S_{(\nu)}(x))}{\partial(x)}=\pm\eta^{n+1}\left(\frac{\sum_{q=1}^{n}\beta_{n+1,q}X_q'+\beta_{n+1,n+1}}{\sum_{q=1}^{n}\beta_{n+1,q}x_q'+\beta_{n+1,n+1}}\right)^{n+1}, \tag{56}$$

wo $x'=S_{(\nu)}(x)$ und $X'=S_k(x')=S_{\nu+1}(x)$ gesetzt ist.

Es sei jetzt $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein beliebiger im Bereiche B liegender Punkt des hyperbolischen Raumes (vgl. N:o 16). Der Punkt $S_{(\nu)}(P)$ liegt dann in demjenigen Segmente τ_h, das dem letzten Primfaktor S_h von $S_{(\nu)}$ zugeordnet ist. Weil nun $S_k \neq S_h^{-1}$ ist, so liegt der Bereich τ_h in endlicher Entfernung von der Hyperebene

$$\sum_{q=1}^{n} \beta_{n+1,q} x_q + \beta_{n+1,n+1} = 0, \tag{57}$$

welche die absolute Hypersphäre in einem Punkte Q_i' des der Substitution S_k^{-1} zugeordneten Segmentes berührt. Daraus kann man aber die Existenz einer endlichen Konstante C schliessen, unterhalb welcher der Wert des letzten Faktors der rechten Seite von (56) bleibt, wenn (x) ein beliebiger Punkt von B und wenn $S_{(\nu)}$, $S_{(\nu+1)}$ beliebige Substitutionen vom Index ν bzw. $\nu+1$ bezeichnen. Wenn mit η_0 der grösste unter den Multiplikatoren der erzeugenden Substitutionen bezeichnet wird, ergibt sich aus (56) die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial (S_{(\nu+1)}(x))}{\partial (x)} : \frac{\partial (S_{(\nu)}(x))}{\partial (x)} \right|^{\varepsilon} < (C \eta_0^{n+1})^{\varepsilon} \tag{58}$$

für jede Substitution $S_{(\nu)}$ des Index ν und jede der $2N-1$ in Betracht kommenden erzeugenden Substitutionen S_k. Indem wir sämtliche Ungleichungen (58), die einem gegebenen Index entsprechen, aufstellen und addieren, gelangen wir in dieser Weise zur Ungleichung

$$\sigma_{\nu+1} : \sigma_\nu < (2N-1)(C \eta_0^{n+1})^{\varepsilon}. \tag{59}$$

Wählen wir die absoluten Werte der Multiplikatoren so klein, dass die rechte Seite von (59) kleiner als Eins wird, so haben wir also ein Beispiel einer Gruppe, für welche die Reihe (50) konvergiert.

27. Wir kehren jetzt zur allgemeinen Picardschen Reihe (17) zurück.

Wir setzen voraus, dass die rationale Funktion H für alle auf der reellen absoluten Hypersphäre liegenden Hauptgrenzpunkte der Gruppe endlich bleibt. Weil diese Punkte die Häufungsstellen der Transformierten jedes ausserhalb der Hauptgrenzgebilde liegenden sowohl einzelnen Punktes als endlichen Bereichs ausmachen, so können innerhalb jedes endlichen, von Hauptgrenzgebilden freien Bereichs des Raumes R_{2n} nur endlich viele der in (17) auftretenden Faktoren $H(S)$ Unstetigkeiten besitzen, während alle übrigen daselbst dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze liegen. Hieraus und aus dem in N:o 24 hinsichtlich der absoluten und gleichmässigen Konvergenz der speziellen Reihe (39) bewiesenen Resultate folgt aber die absolute und gleichmässige Konvergenz der allgemeinen Reihe (17) in jedem von den Hauptgrenzgebilden freien Bereich, nach Fortlassung der endlich vielen Glieder, die in jenem Bereiche unstetig werden.

Nach dem Vorhergehenden ist somit jede vermittels der Picardschen Reihen gebildete analytische Funktion innerhalb ihres ganzen Existenzbereichs von rationalem Charakter.

Wir wollen zum Schluss die Existenz von Picardschen Funktionen (17) nachweisen, die in ihrem Existenzbereiche überall regulär sind. Das einfachste Beispiel hat man in der speziellen für $H = 1$ erhaltenen Funktion (17) bei denjenigen Gruppen, deren Hauptgrenzpunkte aus sämt-

lichen reellen Punkten des absoluten Gebildes bestehen. In der Tat liegen sämtliche Fluchthyperebenen, welche hier die einzigen Unstetigkeitsgebilde sind, als Transformierte der unendlich fernen Hyperebene ausserhalb des Existenzbereichs (30) der Funktionen, welcher nur im Endlichen liegende Punkte enthält. Die betreffende Reihe verschwindet wenigstens dann nicht identisch, wenn $(n+1)p$ eine gerade Zahl ist, weil alle ihre Glieder dann für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ positiv sind.

B. Eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen.

28. In unserer S. 3 genannten Arbeit haben wir eine neue Verallgemeinerung der Poincaréschen Reihen gegeben, welche u. a. unmittelbar zur Darstellung automorpher Differentiale führt. Diese Resultate können auf Funktionen beliebig vieler Veränderlichen übergeführt und zugleich verallgemeinert werden.

Wir fangen mit der Betrachtung der speziellen Reihen

$$\sum \frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{60}$$

an. Nach (1) ist

$$\frac{\partial X_\mu}{\partial x_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{\mu,\nu} & \alpha_{\mu,\lambda} \\ \alpha_{n+1,\nu} & \alpha_{n+1,\lambda} \end{vmatrix} x_\lambda}{(\alpha_{n+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n} x_n + \alpha_{n+1,n+1})^2}. \tag{61}$$

Wir brauchen also nur die Reihen

$$\sum \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{\mu,\nu} & \alpha_{\mu,\lambda} \\ \alpha_{n+1,\nu} & \alpha_{n+1,\lambda} \end{vmatrix}}{(\alpha_{n+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n} x_n + \alpha_{n+1,n+1})^2} \tag{62}$$

zu untersuchen.

Nun ist nach den Relationen (5)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu,\lambda}^2 = 1 + \alpha_{n+1,\lambda}^2, \quad \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu,\nu}^2 = 1 + \alpha_{n+1,\nu}^2, \quad \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\mu,\lambda}\alpha_{\mu,\nu} = \alpha_{n+1,\lambda}\alpha_{n+1,\nu},$$

woraus folgt

$$\left| \frac{\alpha_{\mu,\lambda}}{\alpha_{n+1,\lambda}} - \frac{\alpha_{\mu,\nu}}{\alpha_{n+1,\nu}} \right| < \sqrt{\frac{1}{\alpha_{n+1,\lambda}^2} + \frac{1}{\alpha_{n+1,\nu}^2}}. \tag{63}$$

Das allgemeine Glied der Reihe (62) ist somit dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{\sqrt{\alpha_{n+1,\lambda}^2 + \alpha_{n+1,\nu}^2}}{(\alpha_{n+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n} x_n + \alpha_{n+1,n+1})^2}. \tag{64}$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf diejenigen Gruppen, für welche die Reihe

$$\sum \frac{1}{(\alpha_{n+1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{n+1,n} x_n + \alpha_{n+1,n+1})} \tag{65}$$

absolut konvergiert. Die Reihe

(66) $$\sum \frac{1}{\alpha_{n+1,n+1}},$$

welche sich aus (65) für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ ergibt, ist dann auch absolut konvergent. Weil nun die Quotienten $\frac{\alpha_{n+1,\lambda}}{\alpha_{n+1,n+1}}$, $\frac{\alpha_{n+1,\nu}}{\alpha_{n+1,n+1}}$, welche bis auf das Vorzeichen gleich den Koordinaten der Transformierten des Nullpunktes sind, dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins sind, so ist die Reihe mit dem allgemeinen Glied (64) und dann also auch die Reihe (62) für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ absolut konvergent. Wie in N:o 23 schliesst man hieraus, dass die Reihe (62) dann auch in jedem endlichen, von den Hauptgrenzgebilden in endlicher Entfernung gelegenen Bereich absolut und gleichmässig konvergiert.

29. Es seien jetzt

(67) $$H_1, H_2, \ldots, H_n$$

rationale Funktionen, welche in den Hauptgrenzpunkten endliche Werte besitzen. Wir bilden die n Reihen

(68) $$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_S \sum_{i=1}^{n} H_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

welche ausserhalb der Unstetigkeiten der rationalen Funktionen (67) und ihrer Transformierten gleichzeitig mit der Reihe (60) absolut konvergieren. Der Ausdruck

(69) $$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_k = \sum_S \sum_{i=1}^{n} H_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)\, dX_i$$

stellt dann ein einfaches automorphes Differential dar, wie aus seiner Form unmittelbar hervorgeht. (69) ist ein totales automorphes Differential, wenn die Bedingungen

(70) $$\frac{\partial H_p}{\partial x_q} = \frac{\partial H_q}{\partial x_p} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt sind.

Wir betrachten hiernach allgemeine Ausdrücke der Form

(71) $$\varphi_{p_1 p_2 \cdots p_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_S \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} H_{q_1 q_2 \cdots q_n}(X_1, \ldots, X_n) \frac{\partial(X_{q_1} \cdots X_{q_k})}{\partial(x_{p_1} \cdots x_{p_k})},$$

wo sich die äussere Summe auf sämtliche Substitutionen (1) der gegebenen Gruppe bezieht, die innere auf sämtliche $\binom{n}{k}$ verschiedene Kombinationen von k unter den Funktionen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, und wo die Ausdrücke H rationale Funktionen sind, welche in den Hauptgrenzpunkten endliche Werte besitzen. Aus der oben bewiesenen absoluten und gleichmässigen Konvergenz der Reihen (60) folgt offenbar, dass die Reihen (71) in jedem endlichen, ausserhalb der Hauptgrenzgebilde gelegenen Bereiche nach Fortlassung endlich vieler Glieder absolut und gleichmässig konvergent sind.

Wir bilden jetzt den Ausdruck

(72) $$\sum_{p_1 \cdots p_k} \varphi_{p_1 \cdots p_k}(x_1 \cdots x_n)\, dx_1 \cdots dx_{p_k} = \sum_S \sum_{q_1 \cdots q_k} H_{q_1 \cdots q_k}(X_1, \ldots, X_n)\, dX_{q_1} \cdots dX_{q_k},$$

die innere Summierung erstreckt über die $\binom{n}{k}$ verschiedenen Kombinationen der n Indizes. Derselbe ist ein automorphes Differential k^{ter} Ordnung und insbesondere ein totales automorphes Differential, wenn die rationalen Funktionen H einem gewissen System von partiellen Differentialgleichungen genügen, welche den Bedingungen (70) entsprechen.

Im niedersten Falle $k=1$ reduzieren sich die Reihen (71) auf die einfachen Reihen (69), im Falle $k=n$ erhält man die Reihen

$$\varphi_{1,2,\ldots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_S H(X_1,X_2,\ldots,X_n)\frac{\partial(X_1,X_2,\ldots,X_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}. \tag{73}$$

welche mit $dx_1\,dx_2\cdots dx_n$ multipliziert n-fache automorphe Differentiale darstellen und welche zugleich Picardsche Reihen sind.

30. Es ist auf eine andere wesentlich verschiedene Weise möglich, die oben eingeführten Reihen mit automorphen Funktionen in Verbindung zu setzen.

Wir betrachten der Deutlichkeit halber zuerst die Reihen (68). Wir ersetzen die Argumente x_i durch $S_i(x_1,\ldots,x_n)$, wo S_i eine beliebige Substitution der Gruppe ist. Weil die Substitution $(X)'=(SX)$, oder ausführlicher geschrieben

$$X_i'(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X_i(S_1,S_2,\ldots,S_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{74}$$

bei festgehaltenem S zugleich mit (X) die Gruppe durchläuft, so erhält man, mit Rücksicht auf die aus (74) sich ergebenden Gleichungen

$$\frac{\partial X_i(S_1,S_2,\ldots,S_n)}{\partial S_k}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial X_i'(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial S_k}, \tag{75}$$

als Resultat die Relationen

$$\varphi_k(S_1,S_2,\ldots,S_n)=\sum_{p=1}^{n}\varphi_p(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial x_p}{\partial S_k}. \tag{76}$$

Es seien jetzt

$$\varphi_1^{(\nu)},\varphi_2^{(\nu)},\ldots,\varphi_n^{(\nu)} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n) \tag{77}$$

n verschiedene Systeme von Funktionen (68). Wegen der Gleichungen (76) kann man schliessen, dass die Determinante

$$\Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}\varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \cdots & \varphi_n^{(1)}\\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_2^{(2)} & \cdots & \varphi_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)}\end{vmatrix} \tag{78}$$

eine analytische Funktion ist, deren Verhalten den Substitutionen der Gruppe gegenüber durch die Funktionalgleichung

$$\Delta_1(S_1,S_2,\ldots,S_n)=\Delta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\left(\frac{\partial(S_1,S_2,\ldots,S_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\right)^{-1} \tag{79}$$

ausgedrückt wird. Der Quotient zweier derartigen Determinanten ist daher eine automorphe Funktion der gegebenen Gruppe.

Wenn man von den allgemeineren Ausdrücken (71) ausgeht, erhält man folgende Resultate. Nach (74) und (75) bekommt man

$$(80) \qquad \frac{\partial(X_{q_1}, X_{q_2}, \ldots, X_{q_k})}{\partial(S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_k})} = \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k} \frac{\partial(X_{q_1}, X_{q_2}, \ldots, X_{q_k})}{\partial(x_{\varrho_1}, x_{\varrho_2}, \ldots, x_{\varrho_k})} \frac{\partial(x_{\varrho_1}, x_{\varrho_2}, \ldots, x_{\varrho_k})}{\partial(S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_k})}$$

und hieraus für die Ausdrücke (71) die Funktionalgleichung

$$(81) \qquad \varphi_{p_1, p_2, \ldots, p_k}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})}{\partial(S_{p_1}, S_{p_2}, \ldots, S_{p_k})}.$$

Es seien $\binom{n}{k}$ verschiedene Funktionensysteme (71) gegeben. Die Determinante $\Delta_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sämtlicher $\binom{n}{k}^2$ Funktionen φ ist eine analytische Funktion, welche bei Ausführung einer Substitution (S) der Gruppe mit der $(-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Determinante der $\binom{n}{k}^2$ Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(S_{q_1}, S_{q_2}, \ldots, S_{q_k})}{\partial(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k})}$ multipliziert wird, oder es ist, nach einem bekannten Satz der Lehre der Determinanten,

$$(82) \qquad \Delta_k(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \Delta_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \left[\frac{\partial(S_1, S_2, \ldots, S_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right]^{\binom{n-1}{k-1}}.$$

Die verschiedenen Funktionen Δ sind also den Poincaréschen Θ-Funktionen analoge Transzendenten. Man gelangt von ihnen aus in bekannter Weise durch rationale Operationen zu automorphen Funktionen.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 4

ZUR KENNTNIS
DER
BLÜTENENTWICKLUNG EINIGER JUNCACEEN

VON
WIDAR BRENNER

MIT 1 TAFEL UND 41 FIGUREN IM TEXT

(Am 25. September 1922 von V. F. Brotherus und H. Lindberg mitgeteilt)

HELSINGFORS 1922

HELSINGFORS 1922
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 5

Material und Methodik 7

Orientierung der Blüten 9

Die Staubfäden und die Pollenentwicklung 9

Das Gynäceum 14

Die Entwicklung der Samenanlagen bis zur Befruchtungsreife. 16

Die Befruchtung und damit zusammenhängende Erscheinungen 21

Das Endosperm 25

Der Embryo 30

Zusammenfassung und Schluss. 32

Zitierte Literatur 34

Einleitung.

Hauptsächlich in zwei Richtungen hat die Forschung der letzten Jahrzehnte auf dem Gebiete der pflanzlichen Ontogenie sich fruchtbar erwiesen. Erstens ist durch die vielen monographischen Studien über verschiedene Pflanzengruppen allmählich klar geworden, dass die schon als sehr einförmig angesehene angiosperme Entwicklungsgeschichte mehrere interessante Abweichungen aufzuweisen hat. Zweitens hat die Feststellung der entwicklungsgeschichtlichen Tatsachen manche gute, oft sogar entscheidende Gesichtspunkte für die phylogenetische Einreihung der Familien und Gattungen geliefert.

So lange diese Aussichten bestehen, erscheint es als ein lohnendes Bestreben, die verschiedenen Familien u. s. w. so eingehend wie möglich entwicklungsgeschichtlich kennen zu lernen. Ein solcher Gedanke hat auch der vorliegenden Untersuchung über die Entwicklungsgeschichte der Juncaceen zu Grunde gelegen.

In der früheren Literatur sind die Juncaceen nicht ganz vernachlässigt geblieben, obwohl eine zusammenfassende Darstellung ihrer Entwicklungsgeschichte noch fehlt. So hat Buchenau in einer anatomischen Abhandlung den Bau des Pistills der *Juncus*-Arten an Querschnitten studiert und Brandza teilt im Zusammenhang mit seiner Beschreibung über die Entwicklung der Integumente bei den Gräsern einige Tatsachen über dieselben Verhältnisse bei den Juncaceen mit. In seiner Abhandlung: "Zur Kenntnis der Embryosackentwicklung einiger Angiospermen" gibt A. Fischer ein in allem Wesentlichen richtiges Bild von der Embryosackentwicklung bei *Luzula pilosa*. So stellte er z. B. fest, dass diese Juncacee zu dem Typus gehört, der später von Palm als der Normaltypus bezeichnet worden ist, bei dem der Embryosack aus der basalen Tetradzelle unter Verdrängung der drei oberen entsteht. Die mit der Befruchtung zusammenhängenden Verhältnisse, sowie die spätere Entwicklung des Endosperms und des Embryos nimmt M. Laurent zum Gegenstand einiger Veröffentlichungen, die aber teils ziemlich unvollständig sind, teils offenbar fehlerhafte Deutungen der Tatsachen bringen. So behauptet der Verfasser z. B., dass der eine der drei Antipoden sich nach der Befruchtung weiter entwickle ein basales Endospermgewebe bildend. Wie wir sehen werden, nimmt das basale oder "*Helobiae*"-Endosperm im Gegenteil seinen Ursprung aus einem Kern, der durch die Teilung des Zentralkerns entsteht. Die spätere Embryoentwicklung und der Bau des reifen Samens sind schon von Fleischer geschildert worden.

Mit meinen Untersuchungen beabsichtigte ich zuerst eine Darstellung der Entwicklungsgeschichte nur des Gynäceums der Juncaceen zu geben. Der Zufall wollte jedoch, dass mehrere von meinen Schnittserien sehr gute Bilder der Pollenentwicklung enthielten, weshalb ich auch diese, wenn auch in knapper Behandlung, mit einbezogen habe.

Die Arbeit wurde schon im Jahre 1916 während meines Aufenthalts in Uppsala begonnen, ist aber dann mit mehreren Unterbrechungen in Helsingfors ausgeführt worden. Ich erlaube mir hier den Uppsalaer Embryologen meinen herzlichsten Dank auszusprechen, die mich in ihr Gebiet einführten, mich in gastfreundlichster Weise aufnahmen und mit Rat und Tat unterstützten. Vor allem gebührt meine Dankbarkeit dem Prefekten des botanischen Instituts Professor Dr. O. JUEL; dann aber auch besonders den Herren Dozenten G. SAMUELSSON und K. V. OSSIAN DAHLGREN. Herr Dozent E. ASPLUND hatte die Freundlichkeit bei seinem Aufenthalt in Bolivia die merkwürdigen alpinen Juncaceen *Distichia muscoides* und *Oxychloë andina* zu fixieren und mir das Material zu überlassen. Hierfür danke ich ihm aufs herzlichste. Herrn Bergsingenieur O. TRÜSTEDT danke ich auch bestens für seine Liebenswürdigkeit, die sprachliche Korrektur übernehmen zu wollen.

Helsingfors, Botanisches Institut der Universität
in August 1922.

Material und Methodik.

Da es im voraus unmöglich war zu wissen, welche Arten sich am besten für entwicklungsgeschichtliche Studien eignen würden, war ich von Anfang an darum bemüht, so viele Arten wie möglich heranzuziehen. *Juncus*-Arten sind also fixiert und mehr oder weniger eingehend untersucht worden. Von *J. bufonius*, *J. squarrosus*, *J. compressus*, *J. lamprocarpus* und *J. filiformis* habe ich Material in verschiedenen Stadien, so dass der Verlauf ihrer Entwicklung von der Anlage des Samens bis zur Reife wenigstens in den wichtigsten Abschnitten studiert werden konnte. Nur einzelne Fixierungen besitze ich von *J. glaucus*, ganz junge Knospen, *J. Leersii*, befruchtungsreife Fruchtknoten und *J. trifidus*, reife Samen. Von den *Luzula*-Arten habe ich 7 mitgenommen. *L. pilosa*, *campestris* und *L. multiflora* sind eingehender untersucht worden. Von *L. nemorosa*, und *nivea* besitze ich einzelne jüngere Stadien, von *L. arcuata* und *L. parviflora* reife Samen. Die von Dozent E. Asplund aus Bolivia mitgebrachten Fixierungen enthalten Fruchtknoten von *Distichia muscoïdes* Nees A. Meyen sowohl vor, als nach der Befruchtung. Von *Oxychloë andina* Phil. waren leider nur reife Staubfäden und sterile Fruchtknoten vorhanden.

Sämtliches Material, natürlich ausser den beiden letztgenannten Arten, stammt aus Schweden. *J. bufonius*, *lamprocarpus*, *filiformis* und *trifidus* sowie *L. arcuata* und ältere Stadien von *L. multiflora* wurden 1916 während meines Aufenthalts im nördlichen Schweden in den Gebirgsgegenden von Jämtland und zwar in den Monaten Juli und August fixiert. *J. squarrosus*, *compressus*, *glaucus*, sowie *L. nemorosa*, *nivea* und *parviflora* stammen aus dem botanischen Garten in Uppsala, wo sie in den Jahren 1916 und 1917 im Juni und Juli gesammelt wurden. *L. pilosa* und *L. multiflora* wurden meist in den Umgegenden von Uppsala fixiert, jene in der Zeit April —Juni, diese im Juni—Juli. Das Material von *L. campestris* und teilweise von *L. multiflora* wurde während eines Ausfluges nach Utö in den Stockholmer Schären Mitte Juni 1916 gesammelt.

Laut freundlichen Mitteilungen von Dozent E. Asplund wurde *Distichia muscoides* in Bolivia Depart. La Paz, Prov. Murillo, und zwar teils Mitte November 1920 in Lago Choquecota 4,400 m. ü. M., teils Mitte Dezember in Incacha 4,200 m. ü. M. gesammelt. Die merkwürdige vollkommen moosähnliche Pflanze kommt dort in alpinen Sümpfen vor, wo sie unseren *Sphagnum*-Arten in der Lebensweise sehr gleicht. *Oxychloë andina* stammt aus denselben Gegenden ebenso aus Sümpfen und wurde Mitte Januar 1921 fixiert.

Als Fixierungsflüssigkeiten wurden verschiedene versucht. Die besten Ergebnisse habe ich mit Juels Zinkchlorid-Alkohol-Essigsäure-Gemisch und mit Carnoys Alkohol-Eisessig erzielt.

JUELS Platin-Chromsäure und ZENKERS Flüssigkeit gaben bei weitem nicht so gute Präparate. Handelte es sich um ganz junge Stadien, so wurden die ganzen Knospen fixiert. Von befruchtungsreifen Blumen wurden die Fruchtknoten herauspräpariert. Ältere Kapseln wurden geöffnet und die Samen mit oder ohne dieselben in die Fixierflüssigkeit hineingelegt. Die reifen Samen, besonders von den *Luzula*-Arten, zeigten eine sehr grosse Resistenz gegen die Fixiermittel. Um das rasche Eindringen zu fördern, erwies es sich als notwendig, einen kleinen Streifen aus der Samenschale wegzuschneiden.

Die Objekte wurden dann in üblicher Weise in Paraffin geschnitten, (8—10 μ dicke Schnitte kamen meist zur Verwendung), die Schnitte mit HEIDENHAINS Eisen-Hämatoxylin gefärbt, unter Kontrolle differentiert, mit Lichtgrün nachgefärbt und in Canadabalsam eingebettet. Bei der Wiedergabe der Bilder habe ich viel Gewicht auf die Mikrophotographien gelegt, welche die Tafel am Schluss zusammensetzen. Was entweder wegen zu heller Färbung oder deshalb weil verschiedene Teile des Gegenstandes verschiedene Ebenen einnahmen, nicht photographiert werden konnte, habe ich mit Verwendung des Abbé'schen Zeichenapparates gezeichnet und dann als einfache Tuschfiguren im Text wiedergegeben.

Orientierung der Blüten.

In den Blüten der Juncaceen dominiert bekanntlich die Dreizahl (Fig. 1). Das unscheinbare Perianthium, aus 6 Blättern bestehend, wird von 2 dreizähligen Kreisen gebildet und die gewöhnlich 6 Staubblätter gehören zu ebenso 2 weiteren Blattkreisen. Der innerste dreizählige Blattkreis setzt den Fruchtknoten zusammen. Gewöhnlich sind die Blüten zwittrig. Eingeschlechtige Blüten sind nur bei den südamerikanischen Gattungen *Oxychloë* und *Distichia* bekannt, die ausserdem zweihäusig sind. In den weiblichen Blüten von *Distichia* dürften die Staubblätter sehr weit unterdrückt sein, wie eben auch der Fruchtknoten in den männlichen. In den männlichen Blüten von *Oxychloë* sind dagegen wenigstens in dem zu meiner Verfügung stehenden Material ziemlich gut entwickelte Fruchtknoten mit Griffeln und papillösen Narben vorhanden, nur kommen in ihren Höhlungen normal keine Samenanlagen zur Ausbildung.

Fig. 1. *J. compressus.* Querschnitt durch eine junge Knospe. Vergr. 60.

Die Staubfäden und die Pollenentwicklung.

Bei sämtlichen von mir untersuchten Juncaceen werden die Antheren schon sehr früh, und zwar etwas früher als die Samenanlagen angelegt. Während diese z. B. in Knospen von *Luzula pilosa*, die dem noch gefrorenen Boden entnommen wurden, nur als sehr unbedeutende Höcker an den Fruchtblättern angelegt sind (Vgl. auch Dahlgren 1915), sind die Staubfäden schon so weit entwickelt, dass man deutlich das ziemlich kurze Filamentum und die Anthere unterscheiden kann. In den letzteren sieht man sogar eine beginnende Differenzierung in innere plasmareiche, mit grösseren Kernen versehene Zellen, die später das Archesporium bilden sollen, und äussere kleinere, mehr langgestreckte Zellen, die zur Antherenwand werden. Etwas später ist die Sonderung voll durchgeführt und wir haben, wie die Textfigur 2 zeigt, drei deutliche, ziemlich gleich ausgebildete Zellschichten, welche die Wand um das Archesporium bilden. Das Schicksal dieser drei Wandschichten ist dann wie gewöhnlich verschieden. Die äussere hält sich als eine

dünnwandige Epidermis, die mittlere wird zum Endothesium, bekommt charakteristische Wandverdickungen und mechanische Funktionen, die innere wird dagegen früher oder später völlig resorbiert. Bei *L. pilosa* ist sie gerade noch als degenerierende, schmale und langgestreckte Zellen zu finden zu einer Zeit, wo das Tapetum eben ausgebildet ist (Fig. 3), verschwindet aber bald darauf vollständig. Bei *Juncus lamprocarpus* und anderen *Juncus*-Arten scheint sich die innere Wandschicht länger zu halten und besteht wie die Fig. 4 zeigt nur wenig verändert neben dem Tapetum. Sie kann sogar nach der Auflösung der Tapetumzellen seht deutlich sein.

Inzwischen haben die Archesporzellen sich beträchtlich vermehrt und eine Zellschicht nach aussen abgeschieden, das Tapetum. Dieses ist besonders auf etwas älteren Entwicklungsstufen von dem wahren Archesporium sehr gut zu unterscheiden. Die Zellen sind kleiner, wie auch

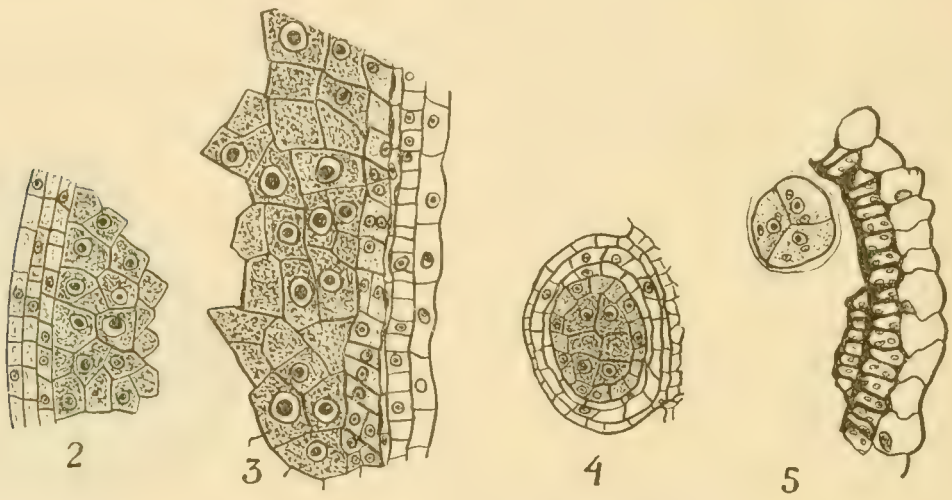


Fig. 2. *L. pilosa.* Längsschnitt durch einen Teil einer jungen Anthere. Fig. 3. Ebenso etwas älteres Stadium. Fig. 4. *J. lamprocarpus.* Querschnitt durch eine junge Anthere. Fig. 5. *Oxychloë andina.* Querschnitt durch die Antherenwand mit einer reifen Pollentetrade. Vergr. Fig. 2 — 4 400, Fig. 5 800.

ihre Kerne, aber die Färbbarkeit ist ebenso stark wie die der Pollenmutterzellen. Normal besteht das Tapetum aus einer einfachen Zellschicht (Fig. 4); oft treten aber in einzelnen Zellen ausser den durch den Zuwachs der Anthere nötigen antiklinen Wände noch hier und da perikline Wände auf (Fig. 3). Bisweilen kann auch die Wandbildung ausbleiben und die Zelle folglich als zweikernig erscheinen.

Die Auflösung der Tapetumzellen habe ich nicht an meinem Material verfolgen können. Sie scheint wenigstens bei den *Luzula*-Arten etwa mit der Tetradenteilung zeitlich zusammenzufallen. In diesem Zeitpunkt sind sie nähmlich noch als stark tingierbare, degenerierende Bildungen zu erkennen. Ein Periplasmodium wird mit Sicherheit nicht gebildet. Die reife Anthere, die von einem meist unscheinbaren Filament getragen, sehr langgestreckt (bei *Oxychloë* bis 6 mm. lang) ist, enthält die Pollenkörner fest zu Tetraden verbunden (Textfig. 5. Tafelfig. 1.) Das Endothesium ist zu einer mechanischen Schicht mit Wandverdickungen ausgebildet, von der Tapetumschicht ist natürlich keine Spur zu sehen, dagegen findet man bei *Oxychloë* oft innerhalb

des Endothesiums grössere oder kleinere Fragmente einer Zellschicht (Fig. 5) deren Wände gleichartig verdickt sind und die kaum anders wie als Reste der ursprünglichen dritten Antherenwandschicht zu deuten sind.

Wenn also die Entwicklung der Staubfäden selbst nichts Interessantes darbietet, verdient die Pollenentwicklung wegen ihres vom Normaltypus abweichenden Verlaufs eine eingehendere Aufmerksamkeit. Leider ist es mir nicht möglich, in diesem Zusammenhange ein vollständiges Bild dieser Entwicklung zu geben, da in meinem Material einige wichtige Stadien noch fehlen. In der Hoffnung bald Gelegenheit zu finden, auf diesen interessanten Gegenstand ausführlich zurückkommen zu können, teile ich hier nur einige Tatsachen vorläufig mit.

Über die Pollenentwicklung der *Juncus*-Arten geben meine Präparate sehr wenig Aufschluss. Es sei hier nur erwähnt, dass die wenigen Bilder, die ich gesehen habe, nichts Ungewöhnliches darbieten; es kommen bei der heterotypischen Teilung ganz typische, sowohl Dolichonema-, als Spirem-ähnliche Stadien, ausserdem auch Synapsisbilder vor. Etwas näher habe ich dagegen die Pollenentwicklung bei einigen *Luzula*-Arten untersuchen können, und zwar stammen die gelungenen Präparate von *L. nivea, campestris* und *multiflora*.

Die Pollenmutterzellen in Ruhe besitzen ein stark tingierbares Plasma und einen glasklaren, grossen Kern mit einem gleich bedeutenden Nukleolus. (Siehe z. B. fig. 3.). Als erstes Zeichen beginnender Teilung treten in den Kernen von *L. nivea* neben den Nukleolen Prochromosomen in einer Zahl von 18 auf. Solche Kerne sind in meinem Material sehr reichlich vertreten. Dagegen ist es mir bis jetzt nicht gelungen ein typisches Synapsisstadium zu finden.[1] In einigen Figuren hat sich die Chromatinsubstanz des Kerns zu Fäden und unregelmässigen Klumpen angehäuft, was wohl am nächsten ein Dolichonemastadium darstellt (Siehe z. B. Murbeck, Tafel I, fig. 8). Darauf sollte normalerweise die Diakinese folgen. Eine solche mit den Chromosomen zu Gemini verbunden habe ich aber vergebens gesucht. Statt dessen treten in den Kernen neben den Nukleolen 9 lange, bogenförmige Chromosomen auf (Fig 6 B), die auch bei der stärksten Vergrösserung in keiner Weise eine Doppelnatur verraten. An der Seite dieser Kerne findet man aber in grosser Anzahl auch solche, die sehr variierende Chromosomzahlen aufweisen z. B. 10, 12, 16 und deren Chromosomen oft deutlich verschieden lang sind, einige sogar etwas eingeschnürt. In meinem Material von *L. campestris* und *multiflora* dominieren solche Kerne sogar vollkommen.

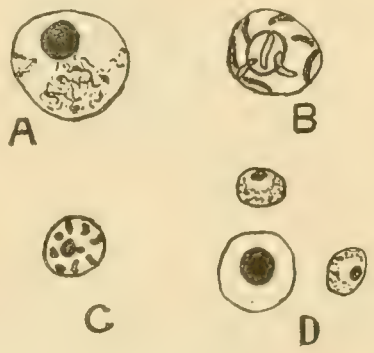


Fig. 6. A. *L. multiflora.* Pollenmutterkern, synapsisähnliches Stadium. B. *L. nivea.* Pollenmutterkern mit haploïder Chromosomenzahl. C. *L. campertis.* Ungeteilter, generativer Pollenkern in Prophase. D. *L. campestris.* Vegetativer Pollenkern und zwei Spermakerne. Vergr. 1500.

Die nächstfolgenden Stadien sind an *L. multiflora* beobachtet worden. Die Kernmembran hat sich aufgelöst und der Nukleolus ist verschwunden. Statt dessen sieht man häufig eine Menge von extranukleären Nukleolen verschiedener Grösse in der Zelle verstreut. Die Chromo-

[1] Bilder, die an die Synapsis-Stadien erinnern, habe ich in den Pollenmutterzellen von *L. multiflora* gesehen. Ein solches ist in Fig. 6 A. abgebildet.

somen findet man in der Metaphase, wie die Figur 7 und die Mikrophotographien (Tafelfig. 2 u. 3) zeigen, in einer Ebene zu einer Äquatorialplatte gesammelt, und zwar immer in der diploiden Zahl von 18 und ohne irgendwelche paarige Anordnung. Ein Hof von hellerem Plasma und darauf eine stärker tingierbare Plasmaschicht umgeben die Platte. In meinen Präparaten sind diese Stadien sehr reichlich vertreten; und die Äquatorialplatten habe ich in bester Fixierung und Färbung in allen Lagen, von der Seite, schief und von oben beobachten können. Die Anordnung und Zahl der Chromosomen war immer die gleiche.

Die Anaphase zeigt gute Spindelfiguren (Fig. 8 und Tafelfig. 4 u. 5). Die Spindelfasern laufen nicht in den Enden zusammen, sondern scheinen sich mehr oder weniger vollständig im Plasma zu verlieren. Die 18 freien Chromosomen ordnen sich in zwei Ebenen 9 und 9 und rücken allmählich auseinander. Die Reduktion der Chromosomenzahl ist vollbracht, ohne dass in der Anaphase irgend eine Spaltung stattgefunden hat. Auch diese Stadien finden sich in meinem Material sehr reichlich und lassen an Klarheit nichts zu wünschen übrig.

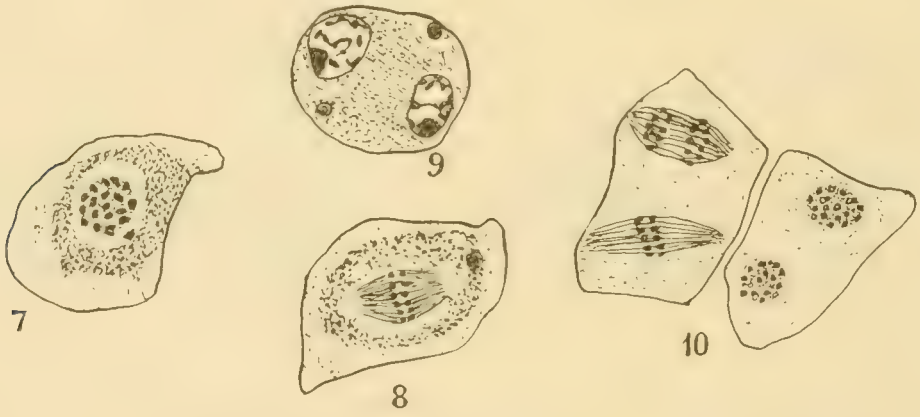


Fig. 7—10. *L. multiflora.* Reduktionsteilung bei der Spermatogenese. Fig. 7. Metaphase der heterotypischen Teilung. Fig. 8. Anaphase der heterotypischen Teilung. Fig. 9. Telophase der heterotypischen Teilung. Fig. 10. Meta- und Anaphasen der homöotypischen Teilung. Vergr. 1000.

Nach Beendigung der ersten Teilung findet man zwei Kerne (Fig. 9) mit Nukleolen und der Chromatinsubstanz in unregelmässigen Fäden und Klumpen verteilt. Zwischen den beiden Tochterkernen sind noch die Überreste der Spindelfasern zu spüren. Ebenso haben sich einige extranukleäre Nukleolen erhalten. Eine Zellwand wird nicht gebildet. Die Vorgänge, die sich in der Prophase der nächstfolgenden Teilung abspielen, habe ich bis jetzt nicht verfolgen können; das überraschende Ergebnis aber ist, dass in der Metaphase wieder die diploïde Chromosomenzahl auftritt. Die Äquatorialplatten, deren zwei in Fig. 10 abgebildet sind, zeigen nämlich ausnahmslos 18 Chromosomen in freier Gruppierung. Bei der Anaphase gehen dann wieder 9 und 9 Chromosomen auseinander (Fig. 10). Die Spindeln sind meist deutlich zugespitzt.

Auf diese Weise entstehen vier Tetradkerne mit ursprünglich je 9 Chromosomen. Es bilden sich Zellwände aus, aber die Tetraden bleiben, wie immer bei den Juncaceen, zusammenhängend.

Die Tetradkerne sind anfangs klar, mit einem grossen Nukleolus, aber bald treten fadenähnliche Bildungen auf. Diese werden dicker, ungregelmässig, stellenweise perlschnurartig und zerfallen schliesslich in ziemlich lange Chromosomen, deren man 9 zählen kann. Diese sind anfangs verhältnismässig dünn, scheinen aber allmählich an Dicke zuzunehmen ohne jedoch ihre unregelmässigen Konturen zu verlieren. In Fig. 11 A sind einige solche lange Chromosomen abgebildet. Sie zeigen häufig Einschnürungen hier und da und sind dabei nicht selten hufeisenförmig gebogen. Eigentümlich ist, dass man neben den Kernen mit 9 langen, unregelmässigen Chromosomen auch solche mit einer Chromosomenzahl höher als 9 findet. 12—14 sind gewöhnliche Zahlen und die Fig. 11 B bildet sogar einen mit 16 Chromosomen ab. Bei genauerer Betrachtung findet man bald, dass solche Kerne Chromosomen zweierlei Art enthalten: kurze, gerade oder nur wenig gebogene und lange, gewöhnlich umgebogene oder eingeschnürte. In Fig. 11 B gehören zwei (1 u. 2) zu den langen Chromosomen, wogegen die übrigen etwa halb so lang sind. Diese kurzen Chromosomen sind mit Sicherheit von einander frei, weisen aber eine mehr oder weniger deutliche paarweise Gruppierung auf. So scheinen z. B. in der Fig. 11 B, 3 u. 4, 5 u. 6, 7 u. 8 u. s. w. Paare zu bilden. Wenn man diese Tetradkerne studiert, die überaus reichlich in meinem Material vorhanden sind, kann man zu keiner anderen Auffassung gelangen, als dass hier schon in der Prophase ein Zerfall der Chromosomen stattfindet, der ihre Zahl und zwar durch Querteilung von der haploïden zur diploïden vermehrt. Die späteren Stadien, die Meta- und Anaphasen, habe ich nicht zu beobachten Gelegenheit gehabt.

Fig. 11. *L. multiflora.* A. Lange Chromosomen aus einem Pollentetradkern in Prophase. B. Ein solcher Kern in Prophase mit zwei (1 u. 2) langen und 14 kurzen Chromosomen. Die Kontur des Nukleolus nur angedeutet. Vergr. 4800.

Die weitere Entwicklung bei der Spermatogenese kenne ich noch sehr mangelhaft. Präparate von *L. campestris* stammend zeigen die Tetradzellen mit zwei Kernen, einem vegetativen mit glasklarem Inhalt und einem grossen Nukleolus und einem generativen, in dem bald wieder Chromosomen sichtbar werden. Die generativen Kerne besitzen meist 9[1] ziemlich langgestreckte oft gebogene Chromosomen, (Fig. 6 C), aber solche mit zahlreicheren (12—14) sind keineswegs selten. Der eigentümliche, frühzeitige Zerfall der Chromosomen scheint sich hier zu wiederholen.

In der weiteren Entwicklung bleibt der vegetative Kern unverändert, während der generative sich wie gewöhnlich in zwei Spermakerne teilt. (Fig. 6 D.) Diese sind klein, meist von der einen Seite linsenförmig abgeplattet und zeigen oft einen lichteren Hof um den nicht sehr hervorragenden Nukleus. In ganz reifem Pollen werden sowohl der vegetative, als auch die generativen Kerne sehr undeutlich. Diese werden stark chromatisch, verlieren aber ihre distinkten Konturen. Deutliche Chromosomen in den Spermakernen habe ich bei den *Luzula*-Arten nicht gesehen. Dagegen

[1] Also dieselbe Zahl wie bei *L. multiflora.*

kann man solche in den reifen Tetradkernen von *Oxychloë andina* beobachten. Sie sind sehr klein, aber ihre Chromatinsubstanz ist meist in deutliche Chromosomen zerfallen, deren ich wenigstens 8 habe feststellen können. Dies ist offenbar die haploïde Zahl. Die Kleinheit der Objekte macht aber eine ganz zuverlässige Zählung unmöglich.

Obwohl die obige Beschreibung manche bedeutende Lücken aufzuweisen hat, deren Ausfüllung mangelnde Zeit mir jetzt verbietet, glaube ich doch folgende Tatsachen feststellen zu können:

In der Prophase der heterotypischen Teilung treten wenigstens bei *Luzula nivea* Kerne auf, die die haploïde Anzahl (9) langer, bogenförmiger Chromosomen aufweist, die keine Ähnlichkeit mit den Gemini der gewöhnlichen Diakinese haben.

Die Metaphase der heterotypischen Teilung bei *L. multiflora* zeigt eine Äquatorialplatte mit der diploïden Zahl (18) Chromosomen ohne paarige Anordnung.

Bei der Anaphase der heterotypischen Teilung bei derselben Art geht die haploïde Zahl (9) der freien Chromosomen nach jedem Ende der Kernspindel.

In der Metaphase der homöotypischen Teilung tritt bei *L. multiflora* wieder die dipoïde Chromosomenzahl (18) auf, und bei der Anaphase gehen 9 und 9 der freien Chromosomen auseinander.

Bei den Tetradkernen von *L. multiflora* scheinen die ursprünglich 9 langen Chromosomen sich durch Querteilung zu vermehren, so dass ihre Zahl schon in der Prophase die diploïde wird.

Dasselbe scheint für den noch ungeteilten generativen Pollenkern bei *L. campestris* zu gelten.

Das Gynäceum.

Unter den Juncaceen findet man zwei verschiedene Typen. Die *Juncus*-Arten, *Oxychloë* und *Distichia* haben einen länglichen, mit zahlreichen Samenanlagen versehenen Fruchtknoten, die *Luzula*-Arten dagegen einen kurzen, nur 3-samigen Fruchtknoten.

Das Gynäceum vom *Juncus*-Typus besteht aus drei nahtlos verschmolzenen Fruchtblättern, die in der Mitte ein zartes Gefässbündel aufweisen. Bei den *Juncus*-Arten bleibt die Fruchtknotenwand immer verhältnismässig dünn, aus 4—6 Zellschichten bestehend. Bei *Distichia* scheint diese schon von Anfang an etwas dickere Wand nach der Befruchtung allmählich noch dicker zu werden, ein grosszelliges Gewebe bildend.

Der innere Bau des Pistills und die Plazentation bei den *Juncus*-Arten ist schon früher von BUCHENAU beschrieben worden. Die Ränder der Fruchtblätter sind zu gut entwickelten Plazenten verwachsen, die mehr oder weniger tief in den Fruchtknotenraum hineinragen, so dass der ganze Fruchtknoten entweder einfächerig oder durch das Zuzammenwachsen der Plazenten unter sich in der Mitte des Knotens dreifächerig wird. Von den untersuchten *Juncus*-Arten hat z. B. *J. lamprocarpus* einen einfächerigen Knoten mit schwach entwickelten Plazenten, *bufonius* und *Leersii* grosse, dicke Plazenten, die an der Basis verwachsen, oben aber frei bleiben, einen einfächerigen Knotenraum bildend. Bei *J. squarrosus* und *filiformis* sind die Plazenten etwas schwächer, teils verwachsen, teils frei und bei *J. compressus* (Fig. 1) und *glaucus* sind sie fast ganz oder vollständig in der Mitte verwachsen, so dass der Fruchtknoten typisch drei-

fächerig wird. *Distichia muscoïdes* hat einen einfächerigen Knoten, wo die Planzenten etwa bis zur Mitte hineinragen und dasselbe scheint für *Oxychloë andina* zu gelten, wenn man nach dem Bau der sterilen Pistillen, wovon Fig. 12 ein Bild gibt, urteilen darf.

Den aus den Fruchtblatträndern zusammengesetzten Plazenten entlang sitzen in grosser Anzahl die anatropen Samenanlagen (Fig. 13), und zwar bei den *Juncus*-Arten in vier Reihen, so dass bei den dreifächerigen Formen vier Reihen von Samenanlagen in jedem Fach zu liegen kommen (Fig. 1). *Distichia* hat nur zwei Reihen und die Anzahl der Samenanlagen ist folglich nur etwa die Hälfte. Die sterilen Pistille der männlichen Blüten bei *Oxychloë* besitzen meist vollkommen nackte Plazenten, wie die Figur 12 zeigt. Ausnahmsweise findet man aber auch hier einzelne Samenanlagen, die in ihrem Wachstum stehen geblieben, aber sonst nach dem gewöhnlichen, anatropen Typus gebaut sind.

Fig. 12. *Oxychloë andina.* Querschnitt durch den sterilen Fruchtknoten einer männlichen Blüte. Fig. 13. *J. squarrosus.* Längsschnitt durch einen jungen Fruchtknoten. Fig. 14. *J. compressus.* Längsschnitt durch ein "Doppelpistill". Fig. 15. *L. pilosa.* Längsschnitt durch eine junge Knospe. Vergr. Fig. 12, 13 u. 15, 60; Fig. 14, 36.

Der Griffel ist bei den *Juncus*-Arten kurz, hat kaum die halbe Länge des Knotens, besitzt einen weiten Griffelkanal (Fig. 13) und trägt drei verhältnismässig lange, mit grossen Papillen dicht besetzte Narben. Bei *Distichia* ist der Griffel von etwa derselben Länge wie der befruchtungsreife Fruchtknoten, was auch für *Oxychloë* zu gelten scheint. Eigentümlich ist dass die Pistille der männlichen Blüten, obwohl funktionsunfähig, doch alle Teile sehr vollständig entwickeln. So besteht ein weiter Griffelkanal (Tafelfig. 1) und die langen Narben sind dicht mit schönen Papillen versehen.

Eine merkwürdige Missbildung des Fruchtknotens habe ich ein paar Mal bei *J. compressus* beobachtet. In der Höhlung, die in der Mitte des Knotens zwischen den zusammengewachsenen Plazenten (Fig. 1 und 13) entsteht, findet man nämlich aus Raummangel verdrehte Blattbildungen.

die ganz junge Samenanlagen tragen und offenbar ein inneres, aus einem überzähligen Blattkreis gebildetes Pistill darstellen. Es ragt durch den ordinären, abnorm erweiterten Griffelkanal heraus und bildet hier sogar mit Papillen besetzte Narben. Fig. 14 gibt ein Bild von einem solchen Doppelpistill.

Das Pistill der *Luzula*-Arten weicht wie bekannt von dem *Juncus*-Typus ab. Es ist immer einfächerig und die grossen, ebenso anatropen Samenanlagen sitzen in einer Zahl von drei an der Basis je eines Fruchtblattes. Fig. 15 gibt ein Übersichtsbild, wo nur zwei noch ganz junge, undifferenzierte Samenanlagen zu sehen sind. Die äussere Form des Pistills zeigt einen rundlichen Fruchtknoten, der ziemlich schroff in den sehr schmalen Griffel übergeht. Dieser ist bei den verschiedenen *Luzula*-Arten von verschiedener Länge, bei *L. pilosa* kaum länger als der Knoten, bei *L. nivea* etwa 4—5 mal so lang. Die papillösen Narben sind sehr lang und zart.

Die Entwicklung der Samenanlagen bis zur Befruchtungsreife.

In gewöhnlicher Weise entstehen die Samenanlagen der *Juncus*-Arten als kleine Höcker an den Plazenten und wachsen anfänglich in der Transversalrichtung des Fruchtknotens in den Fruchtknotenraum gerade hinein (Fig. 1). Noch in einem Stadium, wo die Anlage aus relativ wenigen Zellen besteht (Fig. 16) beginnen gewöhnlich 2 subepidermale Zellen sich etwas zu vergrössern und ihre Kerne gewinnen auch an Umfang und Klarheit Dies sind die Initialzellen, von denen eine zur Archesporzelle wird. Diese überholt die Nachbarzellen mehr und mehr und tritt bald in Teilung, wobei eine der Epidermis zugewandte kleine Zelle (Schichtzelle, Tapetumzelle) abgeschieden wird (Fig. 17). In der Gattung *Juncus* kommt keine weitere Zellschicht zwischen der Epidermis und der Embryosackmutterzelle resp. dem Embryosack zustande, und dasselbe gilt auch für *Distichia*, wogegen *Luzula*, wie wir sehen werden, sich anders verhält. Sämtliche sind nach VAN TIEGHEMS durch ASPLUND modifizierter Terminologie als crassinuzellat zu bezeichnen.

Die Samenanlage wächst weiter durch Zellteilungen im basalen Teil des Nuzellus und ganz besonders im Funiculus, der sich allmählich zu biegen beginnt, so dass die anatrope Lage des Samens erreicht wird. Die Biegungen scheinen recht unregelmässig zu verlaufen; sie sind wohl, wie auch häufige Drehungen, ausschliesslich vom Bestreben diktiert, den bei den zahlreichen Samenanlagen knappen Raum im Fruchtknoten so vollständig wie möglich auszunützen. Auf einer frühen Entwicklungstufe werden auch die Integumente, erst das innere, dann das äussere, als Ausbuchtungen an der Basis des Nuzellus sichtbar. (Fig. 17 u. Tafelfig. 6).

Die Tafelfigur 6 zeigt eine Samenanlage kurz vor der ersten Teilung der Embryosackmutterzelle. Diese ist gross und oft nach dem Funiculus zu keilförmig zugespitzt und enthält bisweilen eine deutliche Vakuole. Die Teilung selbst habe ich nicht im Einzelnen verfolgen können. Gute Synapsisstadien waren in meinem Material relativ häufig. Dolichonaema und Spirem seltener. Auch typische Diakinese-Bilder waren vorhanden.

Der ganz verschiedene Bau des Fruchtknotens bei den *Luzula*-Arten bewirkt auch eine etwas abweichende Gestaltung der Samenanlagen. Diese entstehen als kleine knospenähnliche

Höcker an der Basis eines jeden Fruchtblattes und wachsen anfänglich in der Längsrichtung des Knotens fort (Fig. 15). Da ihre Zahl nur drei beträgt, gestattet der Raum ein ausgiebigeres Wachstum. Die Samenanlagen von *Luzula* unterscheiden sich auch sofort von denen der *Juncus*-Arten durch ihre Grösse, die hauptsächlich durch die Mächtigkeit der Nuzellusgewebe und der Integumente bedingt ist.

Ein frühes Stadium zeigt die Figur 18. Es treten meist einige subepidermale Initialzellen, in der Figur vier, hauptsächlich durch ihre grösseren Kerne hervor. Eine weitere Differenzierung besteht insofern, als einige zentrale, offenbar nahrungsreiche Zellen sich durch stärkere Tingierbarkeit und ausserdem dadurch von den übrigen Zellen unterscheiden, dass sie sich bei der Fixierung von einander getrennt haben. Einige Zellen beiderseits des Höckers deuten durch perikline Wände die Stellen an, wo das innere Integument herauswachsen soll. Eine der Initialzellen wird dann zum Archesporium. Sie wächst und ihr Kern wird gross und hell.

Auf einer relativ frühen Stufe wird auch eine Schichtzelle nach oben abgeschieden und diese teilt sich bald darauf durch eine perikline Wand, so dass zwei niedrige Zellen zwischen

Fig. 16 u. 17. *J. lamprocarpus.* Fig. 16. Ganz junge Samenanlage mit zwei Initialzellen. Fig. 17. Etwas älteres Stadium. Die Archesporzelle hat eine Schichtzelle abgeschieden. Fig. 18 u. 19. *L. pilosa.* Fig. 18. Ganz junge Samenanlage mit vier Initialzellen. Fig. 19. Etwas älteres Stadium, die Archesporzelle mit zwei Schichtzellen. Vergr. 400.

die Embryosackmutterzelle und die Epidermis zu liegen kommen (Fig. 19). Die Schichtzellen teilen sich später durch antikline Wände so dass wenigstens 12 Zellen in zwei Etagen zu stande kommen und strecken sich in der Längsrichtung der Samenanlage erheblich; mehr als drei Zellschichten, die Epidermis mitgezählt, über dem Embryosack kommen im Nuzellus auch später nicht zur Entwicklung. In der Figur 19 ist auch das nahrungsreiche zentrale Gewebe deutlich sichtbar, das innere Integument ist im Hervorwachsen begriffen und auch vom äusseren Integument sieht man schon eine unbedeutende Ausbuchtung. Der Funiculus hat sich beträchtlich verlängert, und die ganze Samenanlage weist schon eine beginnende Biegung nach aussen auf.

In der Tafelfigur 30, die ein Stadium kurz vor der ersten Teilung der Embryosackmutterzelle bei *L. pilosa* darstellt, ist die Biegung so weit vorgeschritten, dass die Samenanlage eine horizontale Lage im Fruchtknotenraum einnimmt. Sie setzt dann in derselben Ebene fort, bis eine vollkommen anatrope Orientierung, wie sie in der Tafelfigur 33 a sichtbar ist, erreicht wird.

Die Embryosackmutterzelle ist vor der Teilung von länglicher, nach dem chalazalen Ende oft keilförmig zugespitzter Form und besitzt meist eine deutliche Vakuole. Als erstes Zeichen der beginnenden Teilung tritt in dem zuvor wasserklaren Kern ein Gerüst von zarten Fäden auf. Fig. 20 bildet ein solches Stadium ab. Im grossen Nukleolus sieht man bisweilen einige hellere Punkte hervortreten. Dann folgt ein Synapsis vom typischen Aussehen (Fig. 21). Der Knäuel ist oft sehr dicht mit gut abgegrenzten Konturen und neben ihm kann man in beinahe sämtlichen Kernen zwei kleine dunkle Körperchen beobachten, die meist in der Nähe des Knäuels, aber doch unabhängig von ihm erscheinen. Diese Körperchen, deren Natur noch dahingestellt bleiben muss, habe ich auch in den meisten im Synapsisstadium befindlichen Kernen des Pollenarchesporiums und der Embryosackmutterzellen der *Juncus*-Arten wiedergefunden.

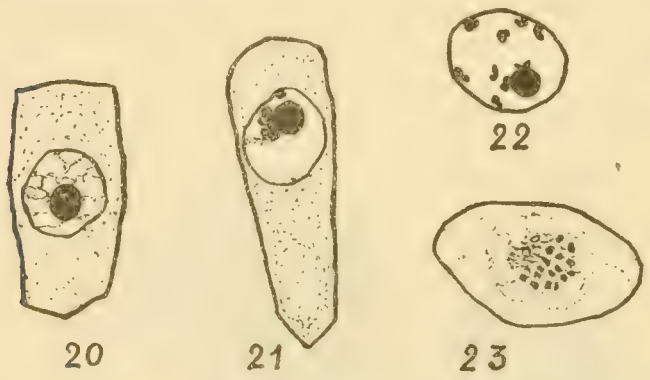


Fig. 20 u. 21. *L. pilosa*. Fig. 20. Embryosackmutterzelle mit dem Kern in einer frühen Prophase. Fig. 21. EM, der Kern in Synapsis. Fig. 22 u. 23. *L. multiflora*. Fig. 22. Embryosackmutterkern in Diakinese. Fig. 23. Embryosackmutterzelle mit Äquatorialplatte. Vergr. 1000.

Von späteren Teilungsstadien kenne ich nur einen Fall von deutlicher Diakinese (Fig. 22) bei *L. multiflora* und eine Metaphase bei derselben Art. (Fig. 23). Es ist also kein Zweifel, dass hier bei der heterotypischen Teilung des Embryosackkerns Gemini in einer Anzahl von 9 auftreten.[1] Die meisten scheinen nicht mit den Längsseiten, sondern mit den Enden zusammenzuhängen, was vielleicht schon eine Trennungserscheinung ist. Denn später in der Äquatorialplatte sind die Chromosomen, wie die Figur 23 zeigt, vollständig frei in einer diploïden Zahl von 18 vorhanden. Der Schnitt war etwas schief durch die Platte gegangen, so dass die einzelnen Chromosomen in verschiedener Tiefe lagen; zwei, die weissen, wurden sogar erst im Nachbarschnitt gefunden.

Die Reduktionsteilung bei den Embryosackmutterzellen von *Luzula* verläuft also im Gegensatz zu der bei den Pollenmutterzellen relativ normal. Mit dieser hat sie eigentlich nur die frühe, schon vor der Metaphase eintretende vollständige Trennung der Chromosomen gemeinsam.

Nach der Teilung des Kerns der Embryosackmutterzelle wird zwischen den beiden Tochterkernen eine deutliche Zellwand ausgebildet. Die beiden Zellen, von denen die obere oft etwas kleiner ist, treten bald wieder, und zwar gleichzeitig, in Teilung (Tafelfig. 8). Die Chromosomenzahl habe ich bei den *Juncus*-Arten nicht sicher feststellen können. Sie ist aber gering (8—10) und mit Sicherheit haploïd; die Tetradteilung verläuft also bei *Juncus* in allen Hinsichten normal. Zwischen den beiden oberen Tetraden, deren Kerne bald zu degenerieren beginnen,

[1] Von diesen sind natürlich nicht alle wie in der Figur auf einmal sichtbar, sondern kommen bei verschieden tiefer Einstellung des Mikroskops hervor.

entsteht bei einigen *Juncus*-Arten z. B. *J. squarrosus* keine Wand (Fig. 24, 25 u. 26) bei anderen, wie *J. compressus* und *lamprocarpus*, habe ich meist eine deutliche Wand beobachtet. Die beiden unteren Tetraden werden immer durch eine gute Wand von einander abgegrenzt.

Von Anfang an sind also die mikropylaren Tetraden zu Degeneration prädestiniert. Diese verläuft bei verschiedenen Arten verschieden schnell und in etwas variierender Ordnung. Bei *J. bufonius* geht die Degeneration sehr schnell und trifft alle drei überzähligen Tetraden gleich stark. Noch bevor die untere Tetradzelle sich weiter geteilt hat, sind sie als stark tingierte, beinahe zusammenfliessende Körper zu sehen (Tafelfig. 7) und im Zweikernstadium des Embryosackes verschwinden sie schon. Bei *J. compressus* scheinen von den Tetraden die erste und vor allem die dritte von oben etwas schneller zu degenerieren und bei *J. squarrosus* degeneriert eben dieser dritte meist entschieden später als die übrigen (Fig. 25). Bei diesen beiden Arten können Spuren der Tetraden noch im 4-Kernstadium beobachtet werden, ja bei der letzten Art besteht bisweilen die Schwesterzelle des Embryosackes als eine grosse rundliche Bildung im Mikropylarende lange Zeit. (Tafelfig. 10).

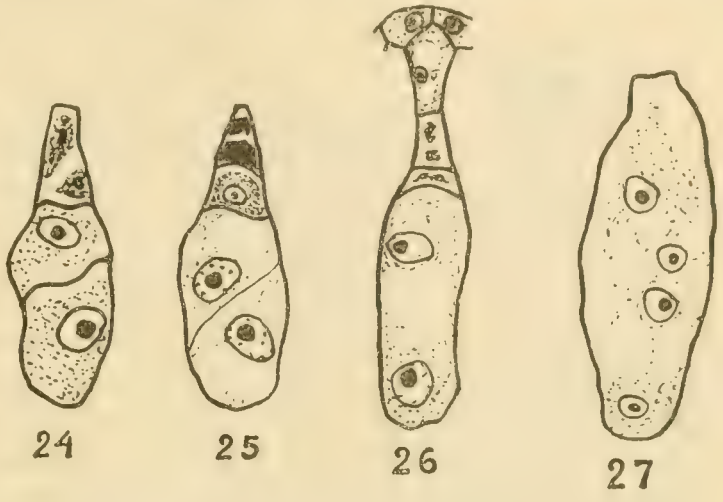


Fig. 24—27. *J. squarrosus.* Fig. 24. Einkerniger Embryosack mit grosser Schwestertetrade und degenerierenden mikropylaren Tetraden. Fig 25. Zweikerniger Embryosack mit Wandbildung zwischen den Kernen. Fig. 26. Zweikerniger Embryosack. Fig. 27. Vierkerniger Embryosack. Vergr. 800.

Die weitere Entwicklung des Embryosackes bietet nichts Bemerkenswertes. Der Kern des einkernigen Embryosackes teilt sich, wobei bisweilen, wenigstens bei *J. squarrosus* eine dünne, später werschwindende Wand zur Entwicklung kommt (Fig. 25). Fig. 26 zeigt einen 2-kernigen Embryosack von *J. squarrosus.* Zwischen den beiden Kernen liegt gewöhnlich eine grosse Vakuole. In der Figur sind weiter die degenerierenden Tetraden sowie die eine, ziemlich gut entwickelte, langgestreckte Schichtzelle zu sehen. Die Tafelfigur 9 zeigt dasselbe Stadium bei *J. lamprocarpus.* Man sieht den zweikernigen Embryosack mit einer sehr deutlichen Vakuole. Die drei Tetraden sind stark degeneriert und zwei durch eine antikline Wand getrennte Schichtzellen sind deutlich zu sehen. Die beiden Embryosackkerne treten gleichzeitig in Teilung. Es entsteht der in Fig. 27 und Tafelfigur 10 abgebildete 4-kernige Embryosack, wo die Kerne noch ziemlich regellos liegen. Die vier Kerne teilen sich dann weiter und zwar so, dass die Teilungsspindeln sich kreuzen, und das 8-Kernstadium des Embryosacks wird erreicht. Hier geschieht sehr früh eine Gruppierung der Kerne, so dass, wie die Tafelfigur 11 zeigt, drei Kerne an der Basis sich mit Wänden umgeben und die Antipoden bilden, drei weitere an dem mikropylaren Ende den Eiapparat zusammensetzen, während die zwei Polkerne, aus beiden Enden des Embryosacks stammend, sich etwa in der Mitte nähern und sich an einander legen. Laurent schreibt, er habe die Zusammenschmelzung der Polkerne nicht beobachten können.

Tatsächlich bleiben die Polkerne ziemlich lange an einander geschmiegt liegen, was man schon daraus ersieht, dass solche Stadien überaus zahlreich vor die Augen treten. Eine Verschmelzung findet jedoch in der Regel statt und verläuft wie die Figuren 28 A. B. u. C. zeigen. Das Resultat ist ein grosser Zentralkern, dessen Nukleolus oft den grössten Raum des Kernes ausfüllt.

Wir haben also einen typischen 7-kernigen Embryosack von dem Aussehen wie die Tafelphotographie 12 wiedergibt. Er ist bei sämtlichen Arten ziemlich gleich. Die beiden Synergiden sind gewöhnlich gross und von deutlichen Membranen umgeben. Bei *J. bufonius* sind sie besonders kräftig und ragen bis etwa in die Mitte des Embryosacks hinein. An die eine Wand des Embryosackes geschmiegt und etwas tiefer als die Synergiden findet man den ziemlich grossen Eikern, den ein scharf begrenztes Plasma umgibt. Bald unter dem Eikern findet man den grossen Zentralkern. Die drei Antipoden nehmen den basalen, etwas verschmälerten Teil des Embyosacks ein. Sie sind bedeutend kleiner als die Zellen des Eiapparates und gewöhnlich stärker tingierbar. Eine der Antipoden nimmt eine etwas höhere Lage als die beiden übrigen ein, und zwar an der entgegengesetzten Wand des Embrosackes, dem Eikern schräg gegenüber. (Siehe auch die Fig. 31). Sonst ist der Embryosack vom wabigen Plasma erfüllt.

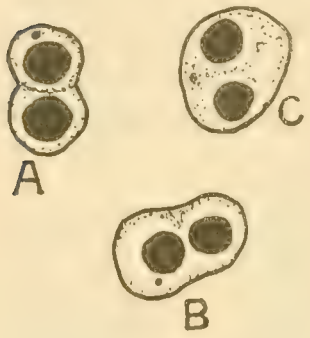


Fig. 28. *J. lamprocarpus.* Verschmelzende Polkerne. Vergr. 1500.

In derselben regelrechten Weise wie bei den *Juncus*-Arten entwickelt sich der Embryosack bei *Distichia* und *Luzula*. Auch bei diesen werden in der Regel die drei oberen Tetraden durch die unterste verdrängt.[1] Die Tafelfigur 28 zeigt eine Samenanlage von *Distichia muscoïdes*. Man sieht den 2-kernigen Embryosack und die drei nicht besonders stark gefärbten Tetraden zwischen denen gute Wände ausgebildet sind. Die Tafelfigur 31 zeigt die vier Tetraden, von *Luzula pilosa* mit guten Wänden, die oberen in Degeneration begriffen. Die drei degenerierenden Tetraden, von denen die zwei oberen ausnahmsweise seitwärts von einander liegen, sind besonders deutlich zu sehen. Die Tafelfigur 32 bildet einen 4-kernigen Embryosack von *L. pilosa* und Fig. 29 einen 7-kernigen von *L. campestris* ab.

Fig. 29. *L. campestris.* 7-kerniger Embryosack. Vergr. 500.

Es besteht auch hier kein Zweifel, dass die Polkerne sich wirklich zu einem Zentralkern vereinigt haben, obwohl dies relativ spät einzutreffen scheint. Wenigstens sind Stadien mit den zwei Polkernen dicht aneinander weit häufiger und noch in dem Moment zu finden, wo der Pollenschlauch schon die Mikropyle erreicht hat.

Hand in Hand mit dem Emryosack haben die übrigen Teile der Samenanlage sich entwickelt. Das Nuzellargewebe ist mächtiger geworden. Bei den *Juncus*-Arten und *Distichia* haben die Zellteilungen vorzugsweise an dem an den Funiculus grenzenden Ende stattgefunden. Basalwärts vom Embryosack findet man also ein aus mehreren Zellschichten bestehendes Gewebe, während seitlich nur drei Zellschichten, die Epidermis mitgezählt, zu finden sind. Bei *Luzula* wird der Embryosack auch seitlich von

[1] Bei *Luzula multiflora* habe ich einmal gesehen, dass die zweitunterste Tetradzelle zum Embryosack wurde.

mehreren, etwa 5 Zellschichten umgeben. Die Umbiegung der Samenanlage ist vollbracht, so dass die typisch anatrope Lage erreicht ist. (Siehe Tafelfig. 28 u. 33 a).

Inzwischen haben auch die Integumente sich aus unbedeutenden Anlagen an der Basis des Nuzellus entwickelt. Sämtliche untersuchte Juncaceen, *Juncus*, *Distichia* und *Luzula* haben ein inneres und äusseres Integument. Das innere besteht durchgehends aus nur zwei Zellschichten. Das äussere Integument dagegen ist bei den *Juncus*-Arten zweischichtig, besteht aber bei *Distichia* und *Luzula* aus mehreren, meist 4 Zellschichten. Charakteristisch für *Distichia* ist eine gewisse Succulenz der äusseren Teile der Samenanlage, namentlich des äusseren Integuments, dessen Zellen also gross und angeschwollen erscheinen. (Tafelfig. 28). Auf diese Weise kommen die Samenanlagen, obwohl weniger zahlreich als die der *Juncus*-Arten, sehr dicht an einander zu liegen, den Fruchtknotenraum ganz ausfüllend.

Die Befruchtung und damit zusammenhängende Erscheinungen.

Der siebenkernige Embryosack vom gewöhnlichen Typus, der im vorigen Kapitel beschrieben wurde und in der Tafelfigur 12 bei *Juncus* abgebildet ist, unterliegt noch kurz vor der Befruchtung Veränderungen, die vielleicht schon durch einen Reiz des Pollens verursacht werden. Sowohl bei *Juncus* als auch bei *Luzula* vergrössert sich der Rauminhalt des Embryosackes durch Streckung der Zellen im Nuzellus ansehnlich. Er wird zu einer Höhlung, die offenbar mit einer Flüssigkeit gefüllt ist und die das Plasma nur in zarten Strängen durchzieht oder als eine dünne Schicht bekleidet. Gleichzeitig beginnt die innere Zellschicht des inneren Integuments, das später zur eigentlichen Samenschale wird, mächtiger zu werden und seine Wände bekommen Verdickungen. Auch die Auflösung des einen Synergids scheint vor der Befruchtung wenigstens eingeleitet zu werden. Dass beide Synergiden schon vor der Befruchtung zugrunde gehen sollten, wie es Laurent behauptet, ist allerdings nicht richtig.

Bei der Ankunft des Pollenschlauches ist also der Embryosack bei den Gattungen *Juncus* und *Luzula* eine ziemlich weite Höhlung, in derem der Mykropyle zugewandtem Ende die Eizelle und die eine Synergide, vielleicht auch Spuren der zweiten zu finden sind. Die Eizelle ragt tiefer in die Höhlung hinein und besteht aus dem Eikern und gewöhnlich vakuolreichem Plasma, das nach aussen durch eine dünne, oft unscheinbare Plasmahaut abgegrenzt ist. Der Kern der Synergide ist gewöhnlich etwas kleiner als der der Eizelle und sein Plasma dichter. Am meisten fällt aber der Zentralkern in die Augen. Seine Lage ist meist nicht mehr zentral, sondern ausgesprochen basal, so dass er in das chalazale Ende des Embryosackes zu liegen kommt. Er hat bedeutende Dimensionen erreicht, etwa 3—5 mal so gross wie der Eikern. In den Präparaten macht er den Eindruck einer klaren, mit Flüssigkeit gefüllten Blase, in welcher der enorme Nukleolus schwimmt. An der Innenwand der Blase findet man spärlich Chromatinsubstanz in Körnchen oder Fäden. (Siehe Fig. 30 und Tafelfig. 33 b).

Das meiste Interesse erregen jedoch die Nukleolen der Zentralkerne wegen ihrer merkwürdigen Gestaltung. In der Fig. 30 sind einige Zentralkerne von *Luzula campestris* abgebildet. Die gewöhnlichste Form des Nukleolus ist die der Fig. A. Solche Nukleolen findet man ausserdem oft in anderen Kernen, in den Kernen des zentralen Endosperms, in den Eikernen, in den vege-

tativen Pollenkernen u. s. w. Der Nukleolus besteht aus einer dicken, dunkel gefärbten äusseren Schicht, die ein zentrales, helleres Körperchen umgibt. Einmal fand ich statt des hellen Körperchens zwei ganz dunkle (Fig. 30 B). Einen ganz sonderbaren Eindruck machen Nukleole wie die in Fig. 30 C und D abgebildeten. In C, die auch in der Tafelfigur 33 b photographiert ist, besteht die innere Kugel aus zwei scharf von einander begrenzten Hälften, einer hellen und einer dunklen. Dass sie aber zusammen eine ganze Kugel bilden, sieht man leicht aus der Weise, in der das Licht von ihrer Fläche reflektiert wird. (Der weisse Punkt in der Photographie 33 b ist ebenfalls ein Reflex.)

In Fig. 30 D ist die innere helle Kugel ungewöhnlich gross und bildet den grössten Teil des Nukleolus. In ihr findet sich aber auch ein dunkler Körper, der hier nicht die Hälfte, sondern nur ein Viertel der Kugel einnimmt. Er hat das Aussehen eines Kristalls mit scharfen Kanten und starker Lichtbrechung. In der äusseren dunklen Schicht finden sich ein paar Punkte, wahrscheinlich Öltröpfchen.

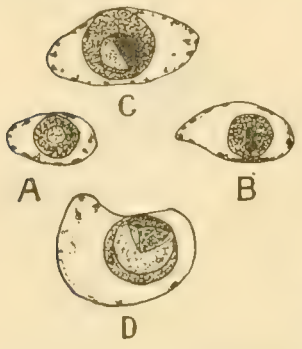


Fig. 30. *L. campestris.* Zentralkerne mit verschiedenartigen Nukleolen. Vergr. 1000.

Ob nun diese originellen Nukleolusbildungen ursprünglich in den lebenden Kernen vorhanden gewesen oder erst durch die Fixierung entstanden sind, vermag ich freilich nicht zu sagen. Aus der botanischen Literatur kenne ich ähnliche Fälle nicht. Dagegen sind wenigstens Nukleole vom Typus A in Fig. 30 bei Tieren beobachtet worden. O. HERTWIG schreibt in der letzten Auflage seiner Allgemeinen Biologie Seite 44 nach FLEMMING: "Solche Differenzierung der Hauptnukleolen in zwei Teile kommt bei Eizellen vieler Tiere vor. Bei *Dreissena polymorpha* ist der stark lichtbrechende und chromatische Teil als Hohlkappe um den blasseren herumgelagert."

Wenn also der Zentralkern in allen Hinsichten der am meisten hervortretende Teil des reifen Embryosackes ist, spielen die Antipoden, wie gewöhnlich, eine sehr bescheidene Rolle. Sie sind sehr klein, bei den *Luzula*-Arten sogar nicht immer deutlich von einander getrennt, besitzen relativ stark tingierbares Plasma und kleine dunkle Kerne. Sie stecken gewöhnlich in einer engen Vertiefung im Chalaza-Ende des Embryosackes.

Die befruchtungsreifen oder eben befruchteten Embryosäcke von *Juncus*, Tafelfig. 13 u. 14 und *Luzula* Tafelfig. 33 a sind in allem Wesentlichen einander gleich. *Distichia* unterscheidet sich nur insofern, dass der Emryosack durch die Succulenz des äusseren Integuments und des Nuzellus häufig zusammengrepresst und in seiner Ausdehnung verhindert wird. Man sieht ihn deshalb oft nur als eine Spalte im Nuzellus, in welche der Eikern, die Synergiden, der Zentralkern und die Antipoden allerdings deutlich zu erkennen sind.

Wie der an den Narben ausgekeimte Pollenschlauch durch den Fruchtknoten den Samenanlagen zuwächst habe ich nicht im Einzelnen verfolgen können. Er dringt durch das aus langen Zellen bestehende, lockere Gewebe, das den Griffelkanal innen auskleidet und wahrscheinlich ein leitendes Gewebe darstellt. Im Fruchtknotenraum angelangt, suchen die Schläuche die Plazenten auf und wachsen, einem langzelligen Gewebe folgend, durch den Funiculus. Die Pollenschläuche

sind sehr dünn und in ihrem vorderen Ende trotz kräftiger Differenzierung der Schnitte sehr stark gefärbt. Es ist mir nicht gelungen, die Spermakerne in ihnen zu entdecken. Man sieht wenigstens bei *Juncus compressus* nur eine Masse, die aus zahlreichen Chromatinkörnchen zusammengesetzt ist. Bisweilen kann man jedoch zwei Chromatinanhäufungen unterscheiden, in denen wohl die Spermakerne stecken, falls sie als solche überhaupt im Pollenschlauch vorhanden sind.

In die Samenanlagen gelangt, begegnet dem Pollenschlauch bei den *Juncus*-Arten kein Hindernis, durch die Mikropyle hineinzuwachsen. Das äussere Integument bildet, wie die Tafelfiguren 13 und 14 zeigen, eine räumliche Pollenkammer und auch das innere Integument lässt einen Kanal frei. Besondere leitende Zellen sind also nicht nötig.

Bei den *Luzula*-Arten dagegen hat sich das äussere Integument um die Mikropyle gewaltig verdickt und hier bildet sich zur Zeit der Befruchtung ein schöner Obturator aus (Fig. 33 a). Von der Basis der Samenanlage, von der Stelle, wo das Gefässbündel des mit dem äusseren Integument verwachsenen Funiculus die Fruchtblattbasis verlässt, wachsen langgestreckte, stark tingierbare Zellen hinaus, und schieben sich zwischen den Rändern des äusseren Integuments ein, den Weg nach der Mikropyle des inneren Integuments zeigend.

Wie die eigentliche Befruchtung vor sich geht, ist mir auch nicht ganz klar. In meinem Material von sowohl *Juncus* als *Luzula* finden sich mehrere Bilder, wie die Tafelfigur 14. Man unterscheidet deutlich den Eikern, dazu meist auch den Kern der überlebenden Synergide, aber sonst nur unregelmässige Chromatinanhäufungen und dunkel gefärbtes Plasma, die offenbar von dem eingedrungenen Pollenschlauch herrühren. Das ganze macht ein sehr verwirrtes Bild. Durch erneute stärkere Differenzierung klärte sich der Schnitt (Tafelfigur 14) so, dass man neben einer Menge kleiner Chromatinkörner zwei grössere halbmondförmige, stark tingierte Körper zu sehen bekam (Fig. 31). In anderen Fällen (z. B. Fig. 32) war es nicht möglich, in dem eingedrungenen Pollenschlauch mehr als einige verschieden grosse Chromatinkörnchen zu entdecken.

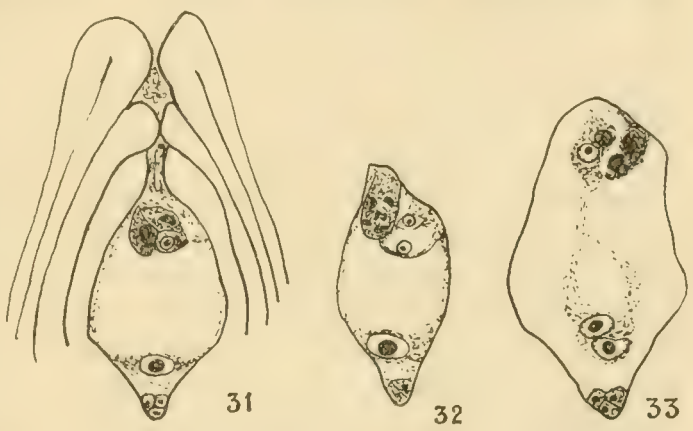


Fig. 31 u. 32. *J. compressus.* Embryosäcke mit Befruchtungsstadien. Fig. 33. *L. campestris.* Embryosack mit Befruchtungsstadium. Vergr. 500.

Bei den *Luzula*-Arten bekommt man oft ganz ähnliche Bilder. Bisweilen kann man aber, wie in Fig. 33, zwei grössere Chromatinkörner sehen. In der Fig. 33 sind ausserdem sonderbarerweise zwei Zentralkerne vorhanden. Ob sie die primären, unverschmolzen gebliebenen Polkerne oder zwei durch frühzeitige Teilung des Zentralkerns entstandene Tochterkerne sind, vermag ich nicht zu entscheiden. Die Verschmelzung der männlichen Kerne mit dem Eikern habe ich ebensowenig wie die Befruchtung des Zentralkernes gesehen.

Nachdem diese maskierte Befruchtung vorüber ist und die chromatischen Körper des Pollenschlauches wieder verschwunden sind, sieht man gewöhnlich noch die zweite Synergide, die

dann allmählich verschwindet. Die Eizelle hat sich abgerundet und ist jetzt mit einer deutlichen Membran versehen, bleibt aber noch eine Zeit lang ungeteilt. Der Zentralkern teilt sich aber sofort und aus den Tochterkernen geht dann in etwas verschiedener Weise bei *Juncus* und *Luzula* teils ein basales, teils ein zentrales Endosperm hervor. Die Antipoden bleiben lange Zeit unverändert in ihrer Tasche liegen.

Bei *Distichia* sind die Embryosäcke, wenigstens in meinem Material, sehr oft unbefruchtet geblieben, ja man kann sogar sagen, dass normal befruchtete Säcke zu den Ausnahmen gehören. Wahrscheinlich hängt dies mit der intensiven vegetativen Vermehrung zusammen, die diese moosähnliche Pflanze kennzeichnet. In den unbefruchteten Embryosäcken degeneriert der Eiapparat zuerst, während der grosse Zentralkern noch lange allein bestehen bleibt. Das Nuzellargewebe beginnt relativ schnell zu verschleimen, was übrigens auch in den befruchteten Samenanlagen eintrifft.

Die Aufklärung des Befruchtungsvorganges bei den Juncaceen hat also viel Schwierigkeiten gemacht; und die Erscheinung ist vorläufig noch trotz zahlreicher Schnitte und viel verwendeter Mühe in Dunkel eingehüllt. Mit dem Verlauf, wie er bei anderen Pflanzen z. B. von JUEL und seinen Schülern beschrieben worden ist, bestehen zweifelsohne Berührungspunkte, wenn auch Verschiedenheiten zu konstatieren sein dürften. So ist es unsicher, ob die eine Synergide irgendwelche Rolle bei der Befruchtung spielen kann. Ihre Rückbildung ist nämlich schon bei Ankunft des Pollenschlauches sehr weit vorgeschritten. Die Chromatinmasse, die ihren Platz einnimmt wollte ich also als beinahe ausschliesslich vom Pollenschlauch stammend betrachten. Die Masse hat anfangs distinkte Konturen und stellt wohl das angeschwollene Ende des unverletzten Pollenschlauchs dar. Später scheint er sich bis an die Eizelle zu verlängern, indem er einen Bogen um die zweite Synergide herum macht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch bisweilen die Chromatinsubstanz des Schlauches in zwei Portionen geteilt gesehen; und neben diesen sind kleine Chromatinkörperchen zu sehen, die sehr wohl Spermakerne sein könnten. Einmal sah ich sogar einen solchen Körper fest am Kern der Eizelle liegen. Man bekommt den Eindruck, als ob die Spermakerne oder ihre Elemente in dichtes Plasma, wohl in das Plasma der Spermazellen eingeschlossen, nach dem Embryosack gelangt wären, um hier bei Gelegenheit auszuschlüpfen und ihren Dienst zu erfüllen. Für diese Annahme spricht noch, dass selbst im reifen, noch nicht ausgekeimten Pollen nicht immer die Spermakerne deutlich zu sehen sind, sondern nur Chromatinanhäufungen. Auch die vegetativen Pollenkerne können in den älteren Tetraden sehr schwer zu entdecken sein. In den Pollenschläuchen sind sie gar nicht gefunden worden.

Nachdem die Befruchtung wahrscheinlich vorüber ist und der Pollenschlauch seine Konturen verloren hat, bleibt noch Chromatinsubstanz in der Nähe der Eizelle eine Weile liegen. Öfterst hat diese die Form von zwei mehr oder weniger gut markierten Körnern. Solche sind früher bei entsprechenden Befruchtungsstadien von mehreren Autoren bei anderen Pflanzen beobachtet worden. JUEL spricht die Vermutung aus, dass sie die Überreste des bei der Befruchtung zerstörten Synergidkerns und des vegetativen Pollenschlauchkerns darstellen.

Nach der Auffassung des Befruchtungsvorganges bei den Juncaceen, zu welcher ich durch die obige zwar sehr mangelhafte Untersuchung gekommen bin, würde man eher in diesem Falle die beiden Chromatinkörperchen als Reste der Protoplasten der beiden Spermazellen betrachten, die die Spermakerne eingehüllt haben. Eine sichere Ansicht wage ich selbstverständlich nicht zu äussern.

Das Endosperm.

Wir wollen zuerst die Endospermbildung in der Gattung *Juncus* etwas näher betrachten. Die Teilung des im basalen Ende des Embryosackes liegenden Zentralkerns erfolgt durch eine regelrechte Karyokinese. Die Chromosomen sind zahlreich und sehr klein. Eine Feststellung ihrer Zahl war in meinen Präparaten nicht möglich. Der eine der entstandenen Tochterkerne bleibt an die Antipoden gedrückt liegen, der zweite aber bewegt sich nach dem Zentrum des Embryosackes zu (Tafelfig. 15). Von diesen beiden Kernen stammen zweierlei Endospermbildungen, von dem oberen Kern das eigentliche oder zentrale Endosperm, von dem unteren das basale Endosperm.

Die Entwicklung des zentralen Endosperms bietet nichts ungewöhnliches. Die Kerne vermehren sich durch regelrechte Karyokinese schnell, und bilden mit ihrem Plasma einen Schlauch, der die Wände des Embryosacks bekleidet und die Eizelle resp. den jungen Embryo umfasst (Tafelfig. 23). Unten schliesst sich der Schlauch mit seinen Kernen dicht an das basale Endosperm. Die zentralen Endospermkerne sind im Gegensatz zu denen des basalen Endosperms deutlich und hell, mit einem oder bisweilen sogar zwei grossen, dunklen Nukleolen. Zwischen den Kernen werden dann verhältnismässig spät zarte Wände angelegt, so dass ein mehrzelliges Endosperm (Tafelfig. 26.) entsteht. Durch wiederholte Zellteilungen von aussen nach innen kommt allmählich ein gewöhnliches, den ganzen erweiterten Embryosack resp. Samen ausfüllendes Endospermgewebe zu stande, dessen Zellen an Stärke reich sind. Das dünne Nuzellargewebe degeneriert bald. (Tafelfig. 26).

Während also der zentrale Endospermkern freie Endospermkerne erzeugt, wird der basale Kern durch eine Membran von dem oberer Teil des Embryosackes abgetrennt und bildet eine scharf abgegrenzte basale Endospermzelle (siehe die Tafelfiguren 16 und 20). Es ist vollkommen ausgeschlossen, dass diese Zelle und das basale Endosperm überhaupt aus den Antipoden hätte hervorgehen können, denn diese sieht man häufig in unveränderter Gestalt und Zahl dicht unter der Endospermzelle liegen (Fig. 34 und Tafelfig. 24). Wenn die basale Endospermzelle noch jung ist, sieht sie oft der Eizelle am entgegengesetzten Ende des Embryosackes sehr ähnlich, so dass sogar Verwechslungen möglich wären, hätte man nicht die übrigen Teile der Samenanlage zur Orientierung. Allmählich wird aber ihr Plasma immer stärker tingierbar, so dass besonders kräftige Differenzierung bald nötig wird, um den Kern sichtbar zu machen. Noch während die Eizelle ungeteilt bleibt, treten Kernteilungen auf, aber diese sind mit aller Wahrscheinlichkeit amitotisch. Wenigstens ist es mir nie gelungen, trots eifrigem Suchen und zahlreichen guten Präparaten normale Kernteilungsfiguren im basalen Endosperm zu finden. Bisweilen sieht es aus, als ob der Kern sich ganz auflöse und eine eventuell vorhandene Vakuole teilt sich in zwei (Tafelfig. 19), teils treten im Kerne zwei Nukleolen auf. Das Ergebnis ist jedenfalls ein etwas vergrössertes Endosperm mit zwei deutlichen Kernen (Tafelfig. 17 und 24). Zellwände kommen nie zur Ausbildung. Die Kerne teilen sich dann in rätselhafter Weise weiter. Bisweilen sieht es aus, als ob ihre Nukleolen in mehrere, oft ungleich grosse runde Körperchen zerfielen. Fig. 35 zeigt ein Bild von *J. filiformis*, wo in jedem der zwei angeschwollenen und abnorm aussehenden Kerne fünf Nukleolen zu zählen sind. Schon ehe das basale Endosperm bei

den *Juncus*-Arten nennenswerte Dimensionen erreicht hat, nimmt die Degeneration, die sich von Anfang an in den Kernteilungen bemerkbar gemacht hat, überhand, und die ganze Bildung wird spurlos resorbiert. Die Tafelfigur 25 zeigt ein altes basales Endosperm in der maximalen Grösse. Wie viele Kerne da enthalten sind, ist schwer zu entscheiden. Noch in diesem späten Stadium sind aber die Antipoden unter dem Endosperm deutlich zu sehen.

Das basale Endosperm bleibt also in der Gattung *Juncus* immer sehr bescheiden. Etwas kräftigere Gestaltung erreicht es bei den *Luzula*-Arten. Hier scheint es auch in etwas abweichender Weise zu entstehen. Während bei den *Juncus*-Arten der eine der beiden Tochterkerne des Zentralkerns unmittelbar das basale Endosperm bildet, scheinen diese bei *Luzula* einstweilen frei zu bleiben und der basale Kern teilt sich unmittelbar weiter. Die zwei Tochterkerne legen sich ins Basalende des Embryosackes, konzentrieren um sich dichtes Plasma und bilden das basale Endosperm. Dieses ist also wenigstens bei *Luzula pilosa* von Anfang an zwei-

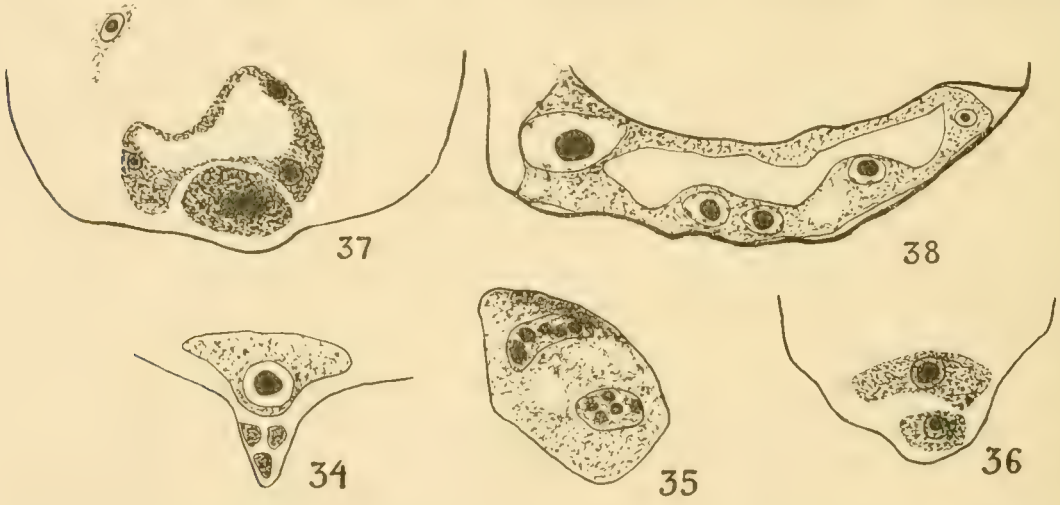


Fig. 34. *J. compressus.* Einzelliges basales Endosperm mit den Antipoden erhalten. Fig. 35. *J. filiformis.* Basales Endosperm mit 5 Nukleolen in einem jeden Kern. Fig. 36. *L. pilosa.* Junges basales Endosperm. Fig. 37. *L. pilosa.* Etwas älteres basales Endosperm und ein Kern des zentralen Endosperms. Fig. 38. *Distichia muscoïdes.* Basales Endosperm, rechts die Membran deutlich. Vergr. 800.

kernig und sein Plasma ist auch meist in zwei Teile gespalten (Fig. 36). Deutliche Membranen kommen nicht vor.

Der zweite, obere Tochterkern des primären Zentralkerns teilt sich auch bald. Diese Teilung ist typisch karyokinetisch. Wenn eine Befruchtung des Zentralkerns stattgefunden hat, sollte ja die Chromosomenzahl bei *L. campestris* in diesen Teilungen $3 \times 9 = 27$ betragen. Obwohl ich die Zahl der Chromosomen nicht sicher habe feststellen können, glaube ich doch sagen zu können, dass eine so grosse Zahl nicht vorkommt. Ich würde sie eher auf 18 schätzen. Man muss also annehmen, dass entweder keine Befruchtung des Zentralkerns vorgekommen ist, oder dass eine Reduktion der Chromosomenzahl bei der vorigen oder dieser Kernteilung eintritt. Übrigens entwickelt sich das zentrale Endosperm in gewöhnlicher Weise wie bei *Juncus*.

Von den beiden basalen Endospermkernen scheint bei *L. pilosa* der obere der entwicklungsfähige zu sein, während der untere mit seinem Plasma, wenn auch bisweilen auf einem vorge-

schrittenen Stadium gut wahrnehmbar (Fig. 37), doch relativ früh zugrunde geht oder mit dem oberen basalen Endosperm zusammenfliesst. Die Kerne dieses oberen basalen Endosperms vermehren sich intensiv. Auch hier müssen offenbar die Teilungen amitotisch verlaufen. Sehr oft sieht man etwas längliche, mit zwei Nukleolen versehene Kerne, die sich wahrscheinlich bald teilen werden. Da keine Zellwände angelegt werden, sammeln sich die oft sehr ungleich grossen, stark färbbaren Kerne um eine gemeinsame Vakuole. Diese ist anfangs klein (Tafelfig. 34), wächst aber allmählich so, dass die basalen Endospermkerne mit ihrem Plasma schliesslich einen hohlen Schlauch um die Vakuole bilden (Fig. 37 und Tafelfig. 35), eine Anordnung, die ganz ähnlich bei dem zentralen Endosperm zustande kommt. Bei der Fixierung ist der Schlauch aber meist vollständig von oben zusammengeknickt, so dass das ganze basale Endosperm eine V-förmige Figur am Boden des Embryosackes bildet. Ganz wie bei dem zentralen Endosperm findet später auch hier durch wiederholte Kernteilungen und Vermehrung des Plasmas eine Ausfüllung des Endospermschlauches statt, so dass auch das basale Endosperm schliesslich einen soliden Körper vom Aussehen wie in der Tafelfig. 36 darstellt. Die Kerne sind zahlreich, blasenähnlich mit einem oder einigen grossen Nukleolen. Zellwände kommen aber nie zur Ausbildung. Allmählich wird das basale Endosperm auch bei den *Luzula*-Arten resorbiert, und in älteren Samen ist davon nichts zu spüren.

Das Verhalten der Antipoden nach der Befruchtung ist bei *Luzula* noch etwas unklar. Schon im unbefruchteten Embryosack waren sie ja nicht immer von einander gut getrennt. Später findet man sie zwar oft in typischer Dreizahl unter dem basalen Endosperm. Nicht selten fliessen sie aber zusammen zu einer Bildung mit drei Kernen. Ausnahmsweise habe ich sogar 4 Kerne gezählt, was darauf hindeutet, dass Kernteilungen in den Antipoden vorkommen können. Andererseits begegnet man auch Fällen, wo mit bestem Willen nicht mehr als zwei Antipoden zu entdecken sind. Wenn noch dazu eine von diesen mit einem etwa doppelt so grossen Kern als die anderen auftritt, kommt man leicht dazu, an Verschmelzungen zu denken. Die Sache wird noch dadurch kompliziert, dass etwas nach der Befruchtung ein Komplex von plasmareichen Zellen unmittelbar im Zusammenhang mit den Antipoden zu entdecken ist. (Fig. 39). Meist macht derselbe den Eindruck eines wahren Antipodengewebes, da die Zellen in keiner Hinsicht von den Antipoden zu unterscheiden sind. Ich bin jedoch sicher, dass sie nicht durch Teilungen der Antipoden entstanden, sondern aus Nuzelluselementen hervorgegangen sind. In einem Falle (Fig. 39) habe ich nämlich die unveränderten Antipoden, von dem plasmareichen Zellkomplex umgeben, wiedergefunden. Dieser verschwindet dann bald wieder und gleichzeitig scheinen auch die Antipoden definitiv zu degenerieren. Das gesamte Nuzellargewebe wird plasmaarm, degeneriert oder verschleimt. Nur unmittelbar am Funiculus und offenbar in Verbindung mit dem Gefässbündel bleibt ein parenchymatisches, aus plasmareichen, relativ dickwandigen Zellen bestehendes Gewebe (Fig. 39), das in

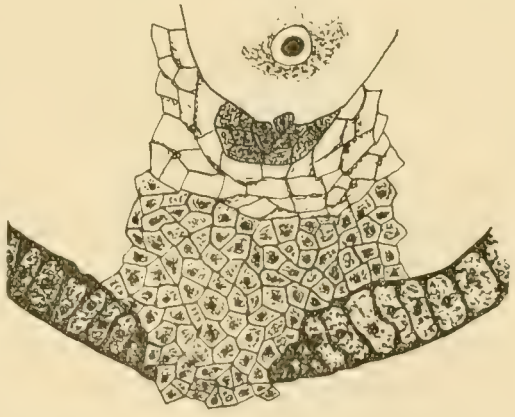


Fig. 39. *L. campestris.* Der basale Teil einer Samenanlage kurz nach der Befruchtung. Basaler Endospermkern mit Plasma; die drei Antipoden von plasmareichen Zellen umgeben; unten die Hypostase. Vergr. 800.

degenerierter Gestalt noch am Funiculus-Ende des reifen Samens zu sehen ist (Tafelfig. 37), eine schöne Hypostase bildend.

Da bei *Distichia* wie gesagt der grösste Teil der Samenanlagen unbefruchtet bleibt und der Zentralkern folglich früher oder später zugrunde geht, habe ich die Endospermbildung nur in wenigen Schnitten verfolgen können. Auch hier findet sich ganz wie bei *Juncus* und *Luzula* ein zentrales und ein basales Endosperm. Das letztere dürfte aber kaum grössere Dimensionen erreichen, kann aber trotzdem deutlich hohl sein (Fig. 38). Es wird durch eine deutliche Membran von dem oberen Teil des Embryosackes abgetrennt. Die Zahl der basalen Endospermkerne habe ich bis auf 8 verfolgen können. Für die jungen Samen von *Distichia* ist sonst charakteristisch, dass ihr relativ mächtiger Nuzellus sehr bald vollständig verschleimt, so dass man ihn als eine dicke, strukturlose Masse, gewiss eine Art von Perisperm, zwischen der Embryosackhöhle und der Samenschale wiederfindet.

Die Vorgänge, die sich nach der Befruchtung im Basalende der Samenanlage abspielen, bieten also bei den Juncaceen nicht so ganz wenig Interessantes. Es kann deshalb nützlich sein, einen kurzen Blick auf ähnliche Erscheinungen bei anderen Pflanzen zu werfen und die Verhältnisse bei den Juncaceen mit diesen zu vergleichen.

In der Literatur begegnet man nicht selten Angaben über grössere oder kleinere, mehr oder weniger dauerhafte Gebilde, die nach der Befruchtung im Basalende des Embryosacks entstehen. Ihre Natur war nicht immer ganz leicht festzustellen. Sie können dreierlei Ursprungs sein: 1) Die Antipoden entwickeln sich weiter. 2) Ein oder mehrere Tochterkerne des Zentralkerns werden von den übrigen getrennt und bilden ein basales Endosperm. 3) Eine Gruppe von Nuzelluszellen bilden ein besonderes Basalgewebe.

Was nun den ersten Fall betrifft, so gehören hierher die schon vor der Befruchtung grossen und vielkernigen Antipoden einiger Compositen, deren Kernzahl oft noch nach der Befruchtung steigt. Sie stellen Haustorien-ähnliche Gebilde dar. (Siehe hierüber z. B. PALM und TÄCKHOLM). Ihnen schliessen sich die mehrkernigen Antipoden einiger Ranunculaceen an. Ein besonderes Antipodengewebe ist weiter für die Gräser charakteristisch. CAMPBELL hat eine Vermehrung der Antipoden noch bei einigen *Pandanus*-Arten, bei einigen Araceen und bei *Sparganium* gefunden, eine Angabe die wenigstens was die beiden letztgenannten betrifft angezweifelt worden ist. (PALM, ASPLUND). In jüngster Zeit hat jedoch SCHÜRHOFF bei *Sparganium* Tatsachen zu Tage gebracht, die die Befunde CAMPBELLS zu bestätigen scheinen, und er will sogar das Antipodengewebe als ein Merkmal für die ganze Reihe *Pandanales* betrachten. Nach LAURENT sollten die Juncaceen auch zu den Pflanzen mit Antipodenvermehrung gehören, was, wie wir gesehen haben, entschieden unrichtig ist. Die Vermutung PALMS (Seite 26) hat sich also voll bestätigt.

Dass ein Basalgewebe aus einem Tochterkern des Zentralkerns hervorgeht, ist auch nicht sehr gewöhnlich. Zwar scheint eine Endospermbildung, die auf die erste Kernteilung eine Zellbildung folgen lässt und dann sukzessiv fortschreitet, mit steigender Zahl der diesbezüglichen Untersuchungen immer häufiger zu werden. (Vergl. z. B. SAMUELSSON und DAHLGREN). Das basale Endosperm ist aber insofern etwas besonderes, als die Zellbildung, wenn man von einer

solchen wirklich sprechen kann, sich auf die erste Teilung des Endospermkerns beschränkt und die weiteren Kernteilungen einstweilen oder für immer nur freie Kerne liefern. Das basale Endosperm stellt gewöhnlich einen vom übrigen Endosperm sehr gut abgegrenzten Komplex dar.

Vor allem ist das basale Endosperm der Reihe *Helobiae* eigen, und es wird deshalb auch oft *Helobiae*-Endosperm genannt. Bei *Sagittaria variabilis* (Schaffner), *Limnocharis emarginata* (Hall), *Potamogeton natans* (Holferty), *Ruppia rostellata* (Murbeck), *Ottelia lancifolia* (Palm) und anderen (siehe die ausfürlichen diesbezüglichen Darlegungen bei Samuelsson und Palm) wird bald nach der ersten Teilung des Zentralkerns um den einen Tochterkern und zwar ganz basal in unmittelbarer Nähe der Antipoden eine kleine Zelle gebildet. In einigen Fällen stellt diese Zelle endgültig das gesamte basale Endosperm dar, in anderen folgen Kernteilungen ein paar Mal. Das Gebilde bleibt aber immer einzellig und sehr bescheiden. Es geht auch gewöhnlich bald spurlos zu grunde. Basales Endosperm von demselben Typus ist weiter bei ein paar Nympheaceen nachgewiesen worden (zitiert nach Samuelsson). Einen etwas abweichenden Typus bilden weiter *Tillandsia* und einige *Burmanniaceen* (zitiert nach Samuelsson) und mehrere *Saxifraga*-Arten (Juel, Samuelsson), bei denen im basalen Endosperm, das auch hier keine grösseren Dimensionen erreicht, später Zellwände auftreten. Bei den *Saxifraga*-Arten ist die Bildung ausserdem sehr beständig, und noch im reifen Samen neben dem zentralen Endosperm, dem es sehr gleicht, sichtbar. (Siehe über basales Endosperm bei noch einigen Familien: Palm).

Es besteht kein Zweifel, dass das basale Endosperm der *Juncus*-Arten dem bei den eigentlichen Helobiaen, dem *Sagittaria*-Typus, am meisten ähnlich ist. Die Bildungsweise, die Dimensionen und die kurze Lebensdauer sind gemeinsam. Vielleicht kommen Kernteilungen bei dem *Juncus*-Endosperm etwas häufiger vor. Es ist aber nicht ganz klar, ob alle die später entstandenen, stark chromatischen, runden Körperchen wirklich als Kerne aufzufassen sind. Gute Kerne sind eigentlich nur die zwei ersten, die Tochterkerne des basalen Endospermkerns.

Das basale Endosperm der *Luzula*-Arten repräsentiert dagegen einen Typus, der nicht früher bekannt sein dürfte. Während bei den *Juncus*-Arten nach der ersten Teilung des Zentralkerns der basale Kern durch eine sehr deutliche Zellwand von dem oberen und grössten Teil des Embryosacks abgetrennt wurde (siehe z. B. Tafelfig. 19 u. 20), können bei *Luzula* irgendwelche Zellwände nicht entdeckt werden. Der basale Endospermkern scheint ebenso wie der zentrale frei zu bleiben, erweist sich aber später doch als der Mutterkern des basalen Endosperms. Seine beiden Tochterkerne sammeln um sich dichtes Plasma (bei *L. pilosa* sogar in zwei Portionen, (siehe Fig. 36 u. 37), das zwar gegen die übrigen Teilen des Embryosacks gut abgegrenzt, jedoch nicht von Zellwänden oder wahrnehmbaren Membranen umschlossen wird. Vielleicht existieren unscheinbare Plasmahäute, was die Erscheinung analogen Verhältnissen z. B. bei einigen *Potamogeton*-Arten, *Ottelia* u. s. w., wo keine Membranen, aber nur Plasmahäute die Zellbildung begleiten, nähert.

War also schon die Genesis des basalen Endosperms bei *Luzula* vom Normaltypus abweichend, so ist es die weitere Entwicklung noch mehr. Wenigstens der eine der beiden basalen Endospermkerne tritt nämlich bald in fleissige Teilung, so dass eine grosse Menge von ziemlich guten Kernen entsteht. Die Kernteilung ist aber höchst wahrscheinlich amitotisch und wird nie von einer Wandbildung begleitet. Die Kerne mit ihrem Plasma, das stets an Masse wächst, schmiegen sich an die Wand des unteren Teils des Embryosacks und bilden hier einen hohlen

Schlauch, der immer grösser wird und schliesslich auch mit Kernen und Plasma gefüllt wird. Das basale Endosperm hat somit eine bedeutende Grösse erreicht (siehe Tafelfig. 36).[1] Dann scheint es ziemlich schnell resorbiert zu werden, denn im reifen Samen sieht man davon keine Spur.

Es ist kaum zu leugnen, dass ein basales Endosperm von oben beschriebener Gestaltung weniger Berührungspunkte mit dem gewöhnlichen *Helobiae*-Endosperm aufzuweisen hat als mit dem zentralen Endosperm, so wie dies normal auch bei den Juncaceen gebildet wird. Der basale Endospermkern vermehrt sich ebenso gut wie der zentrale durch freie Kernbildung; nur kommen im basalen Endosperm auch später nicht Zellwände zustande. Das basale Endosperm formt sich ganz wie das zentrale zu einem Endospermschlauch, der dann allmählich gefüllt und solide wird. Man fragt sich unfreiwillig: was hat diese doppelte Endospermbildung nach demselben Muster zu bedeuten? Sollte das basale Endosperm doch für eine zweite Eizelle (etwa die eine Antipode nach der Hypothese von PORSCH) geplant sein?

—

Ich bin nicht in der Lage gewesen, durch eingehende Literaturstudien klarzulegen, wie häufig spezielle Basalgewebe nuzellaren Ursprungs im Pflanzenreich sind. Die Arbeiten von ASPLUND und STOLT zeigen aber schon, dass solche von sehr verschiedenem Bau und wahrscheinlich auch verschiedener Funktion vorkommen können.

Bei den *Luzula*-Arten fällt zur Zeit bald nach der Befruchtung ein dünnwandiges, nahrungsreiches Gewebe im unmittelbaren Anschluss an die Antipoden sehr in die Augen. (Siehe Fig. 39). Mit der von VAN TIEGHEM genannten Hypostase hat es offenbar nichts zu tun (eine solche wird später von tiefer liegenden Zellkomplexen gebildet) und zweifelhaft ist, ob es wenigstens seiner Funktion nach mit dem Postament der Ranunculaceen oder dem sonst gleich gelegenen Gewebe bei ASPLUNDS *Centranthus macrosiphon* (Fig. 54, Seite 55) verglichen werden kann. Am meisten scheint es mir mit der von STOLT beschriebenen Bildung bei *Halenia elliptica* übereinzustimmen. Ihm sind offenbar nahrungsphysiologische Funktionen zuzuschreiben. Wenn die Endospermbildung in Gang gekommen ist, werden die Zellen rasch entleert und schrumpfen wie schon früher die ihnen am nächsten basalwärts liegenden Nuzelluszellen zusammen.

Der Embryo.

Die befruchtete Eizelle umgibt sich wie gewöhnlich mit einer Membran und bekommt bei den *Juncus*-Arten ein Aussehen, wie die Tafelfig. 18 wiedergibt. Im Basalteil der Zelle, der übrigens etwas abgeschnürt ist, findet sich eine räumliche Vakuole. Der grosse Kern wird beinahe ganz vom Nukleolus ausgefüllt. Die Tafelfigur 29 bildet eine befruchtete Eizelle von *Distichia* ab. Das Bild könnte ebenso gut für *Luzula* gelten.

[1] Ein so mächtiges basales Endosperm ist wohl kaum früher beobachtet worden. Meines Wissens kommen unter den sicheren Fällen die grössten bei *Butomus* (PALM Seite 21) mit mehr als 10 Kernen und *Saxifraga* mit zellulärem basalem Endosperm vor. Wenn der Basalapparat der Araceen sich als Endospermgewebe erweisen sollte, wetteifert er in vielen Fällen an Grösse mit *Luzula*.

Nach der Befruchtung bleibt die Eizelle eine kürzere oder längere Zeit in Ruhe. Die Endospermbildung eilt voran, und erst wenn diese eine gewisse Stufe erreicht hat, teilt sich die Eizelle.

Bei den *Juncus*-Arten scheint dies relativ früh einzutreffen. So habe ich z. B. bei *J. bufonius* eine Samenanlage gefunden, wo das zentrale Endosperm 16 Kerne zählte und die Teilung der Eizelle sich in Telophase befand. Bei den *Luzula*-Arten ist die Entwicklung der Eizelle und des ganzen Embryos sehr verspätet. Das zentrale Endosperm kann 60 oder mehr Kerne zählen, das basale 18 und die ganze Samenanlage eine bedeutende Grösse erreicht haben, ehe die Eizelle sich zum ersten Male teilt. Auch später ist der Embryo noch in Samenanlagen von beinahe definitiver Grösse wegen seiner Kleinheit und Zurückgebliebenheit nicht immer ganz leicht zu entdecken.

Die Zellteilung erfolgt wie gewöhnlich so, dass die Kernspindel in der Längsrichtung des Embryosacks zu liegen kommt, und die neue Wand folglich transversal wird. Die Tafelfigur 21 bildet eine Telophase ab. Bei der Teilung treten häufig extranukleäre Nukleolen in variierender Zahl auf.

Die weitere Entwicklung des Embryos habe ich nicht im Einzelnen verfolgt. Es scheint, als ob die von Laurent gegebene Darstellung richtig wäre. Durch die erste Zellteilung entstehen teils eine relativ kleine Suspensorzelle, teils eine Scheitelzelle (Tafelfig. 22). Die Suspensorzelle teilt sich dann weiter und bildet bei den *Juncus*-Arten drei Zellen, bei *Luzula* nach Laurent vier, von welchen die oberste die Wurzelanlage bilden soll. Über die Embryobildung bei *Juncus* und *Luzula* sei auf die Arbeiten von Laurent und Fleischer verwiesen. Die Tafelfiguren 23, 26 und 27 bilden einige Stadien bei *Juncus* ab.

Fig. 40. *J. trifidus.* Reifer Same. Vergr. 60.
Fig. 41. *L. pilosa.* Reifer Same. Vergr. 30.

Im reifen Samen ist der Embryo relativ wenig differenziert. Er besteht aus einer Wurzelanlage und einem grossen Keimblatt. Das Gewebe ist auch weniger ausdifferenziert. Das Leitungsgewebe ist nur angedeutet. Eine Rinne an der Basis des Keimblattes ist vorhanden, aber die Plumula ist noch nicht ausgebildet. Die Figuren 40 u. 41 bilden zwei reife Samen ab: von *Juncus trifidus*, wo der Embryo relativ gross ist, und von *Luzula pilosa* mit im Verhältnis zum Samen kleinem Embryo.

Zusammenfassung und Schluss.

Die obige Untersuchung hatte zum Zweck bei den Juncaceen die Vorgänge klarzulegen, die mit der Entwicklung des Pollens und des Embryosacks zusammenhängen. Als Material dienten vor allem von *Juncus*-Arten *Juncus bufonius, squarrosus, compressus, lamprocarpus* und *filiformis*, von *Luzula*-Arten *L. pilosa, campestris* und *multiflora*. Ausserdem wurden noch einige weitere *Juncus-* und *Luzula*-Arten, sowie die alpinen, südamerikanischen Juncaceen *Distichia muscoïdes* und *Oxychloë andina* herbeigezogen. Die Untersuchungsmethodik war die gewöhnliche: Fixierung in meist Juels Zinkflüssigkeit oder Carnoys Flüssigkeit, Einbettung in Paraffin, Schneiden mit Mikrotom, Färbung mit Haidenhains Hämatoxylin und Lichtgrün, Einschliessung in Canadabalsam.

Die Entwicklung der Staubfäden bietet nichts Bemerkenswertes. Das Tapetum ist dünn und wird aufgelöst, ohne dass ein Periplasmodium zustande kommt. Die Pollenkörner bleiben dauernd zu Tetraden vereinigt.

Die Spermatogenese hat einige interessante Einzelheiten aufzuweisen. Namentlich bei einigen *Luzula*-Arten, *campestris* und *multiflora*, deren diploïde Chromosomenzahl 18, die haploïde 9 beträgt, sind die Chromosomen schon in der Äquatorialplatte der heterotypischen Teilung vollkommen frei, in diploïder Zahl vorhanden. In der Anaphase erfolgt eine Reduktion, aber in den Äquatorialplatten der homöotypischen Teilung treten wieder 18 freie Chromosomen auf. Diese Zahl wird noch einmal in der homöotypischen Anaphase reduziert. Wenn die Tetradkerne sich zur Teilung vorbereiten, sieht man wenigstens bei *L. multiflora* in der Prophase sowohl Kerne mit 9 langen, oft eingeschnürten Chromosomen als auch solche, die sowohl lange als kurze Chromosomen in variierenden Zahlen enthalten. Man hat den Eindruck, als ob die Chromosomen sich in der Prophase durch Querteilung ins Doppelte vermehrten. Dasselbe wiederholt sich später, wenn der generative Kern sich teilt. — Die Pollenkörner enthalten drei Kerne, einen grossen vegetativen und zwei kleinere Spermakerne.

Der Embryosack wird nach dem Normal-Typus (Palm) gebildet d. h. die basale Tetradzelle verdrängt die oberen und wird zum Embryosack. Bei der Tetradteilung ist wieder eine frühzeitige Verdopplung der Chromosomen beobachtet worden, so dass die heterotypische Äquatorialplatte 18 freie Chromosomen enthält. Der Embryosack entwickelt sich wie gewöhnlich zu einem 7-kernigen. Die Polkerne verschmelzen in der Regel vor der Befruchtung.

Die Befruchtung war schwer zu beobachten. Der Pollenschlauch dringt, bei *Luzula* von einem schönen Obturator geleitet, in den Embryosack. An der Stelle der einen Synergide

bildet er eine stark chromatische Masse, in der mehrere, oft zwei Chromatinkörperchen wahrgenommen werden können. Weder die Befruchtung des Eikerns, noch die des Zentralkerns ist sicher beobachtet worden.

Nach der Befruchtung verschwindet auch die zweite Synergide bald und die Eizelle bekommt eine Membran. Die kleinen Antipoden sind sehr beständig, teilen sich aber nicht. Der chalazal gelegene Zentralkern teilt sich sofort. Aus dem oberen Tochterkern wird das zentrale, aus dem unteren das basale Endosperm gebildet.

Das zentrale Endosperm entsteht durch freie Kernteilungen. Erst relativ spät kommen in ihm Zellwände zur Ausbildung.

Das basale Endosperm entsteht bei den *Juncus*-Arten so, dass der basale Endospermkern sich mit einer Membran umgibt, eine kleine Endospermzelle bildend. In ihr finden später einige freie Kernteilungen statt. Das basale Endosperm bleibt sehr bescheiden und verschwindet bald. — Bei *Luzula* wird der basale Endospermkern durch keine Membran abgetrennt; er teilt sich weiter und erzeugt durch freie Kernbildung ein basales Endosperm von beträchtlicher Grösse. Dieses ist anfangs hohl, schlauchförmig wie das zentrale Endosperm, wird dann gefüllt und solide, um später gänzlich resorbiert zu werden.

Der Embryo wird wenigstens bei *Luzula* sehr spät ausgebildet. Er wird von einer unbedeutenden Suspensorzelle getragen. Noch im reifen Samen bleibt der Embryo relativ schwach differenziert.

Wollte man nun die in der obigen Arbeit dargelegten Tatsachen zu verwandtschaftlichen Spekulationen verwerten, so muss zuerst festgestellt werden, dass die Familie *Juncaceae* ziemlich einheitlich und von offenbar nahe verwandten Gliedern gebildet ist. Zwar sind zwischen den Gattungen *Juncus* und *Luzula* einige nicht unbedeutende Verschiedenheiten vorhanden, die mit dem Bau des Fruchtknotens anfangen und mit der Ausbildung des basalen Endosperms abschliessen. Die habituell vom Juncacee-Typus so abweichende südamerikanische Gattung *Distichia* hat sich als eine gute Juncacee erwiesen, die den *Juncus*-Arten sehr nahe steht, und dasselbe ist wohl, soweit die Untersuchungen ausreichen, auch von *Oxychloë andina* zu behaupten.

Was die Beziehungen der ganzen Familie zu den übrigen Familien und Pflanzenordnungen betrifft, so scheint besonders die Entdeckung eines basalen Endosperms von wenigstens bei den *Juncus*-Arten treuem *Helobiae*-Typus die Juncaceen dieser Reihe zu nähern. Bedeutende Verschiedenheiten bestehen jedoch. Die *Helobiales* haben ein Periplasmodium, die Juncaceen nicht, jene besitzen eine riesenhafte Suspensorzelle, diese eine sehr bescheidene u. s. w. Mit den typischen Liliaceen bestehen aber, soweit ich sehen kann, entwicklungsgeschichtlich noch weniger Berührungspunkte. Wie es um die von Wettstein und Palm vermutete Verwandtschaft mit der Reihe *Enantioblastae* steht, ist einstweilen noch schwer zu entscheiden, da künftige sehr erwünschte Untersuchungen erst ein klareres Licht auf die Entwicklungsgeschichte dieser sehr mangelhaft bekannten Reihe werfen müssen.

Zitierte Literatur.

Asplund, E. (1920) Studien über die Entwicklungsgeschichte der Blüten einiger Valerianaceen. K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 61 N:o 3.

Brandza, M. (1891) Développement des téguments de la graine. Rev. gen. bot. tome 3.

Buchenau, F. (1877) Ueber den Querschnitt der Kapsel der deutschen *Juncus*-Arten. Flora Bd. 60.

Campbell, D. H. (1899) Notes on the structure of the embryo-sac in *Sparganium* and *Lysichiton*. Bot. Gaz. vol. 27.

„ (1911) The Embryo sac of *Pandanus*. Ann. Bot. vol. 25.

Dahlgren, K. V. O. (1915) Über die Überwinterung der Pollensäcke und der Samenanlagen bei einigen Angiospermen. Svensk bot. tidskr. Band 9.

„ (1916) Zytologische und embryologische Studien über die Reihen *Primulales* und *Plumbaginales*. K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd 56 N:o 4.

Fischer, A. (1880) Zur Kenntnis der Embryosackentwicklung einiger Angiospermen. Zeitschr. f. Naturwissenschaft herausgegeb. v. d. Med-Naturwiss. Ges. Jena. Bd. 7 (14).

Fleischer, H. E. (1874) Beiträge zur Embryologie der Monokotylen und Dikotylen. Diss. Leipzig.

Hall, J. G. (1902) An embryological Study of *Limnocharis emarginata*. Bot. Gaz. vol. 33.

Hertwig, O. (1902) Allgemeine Biologie, Aufl. V. Jena.

Holferty, G. M. (1901) Ovule and Embryo of *Potamogeton natans*. Bot. Gaz. vol. 31.

Juel, H. O. (1907) Studien über die Entwicklungsgeschichte von *Saxifraga granulata*. Nov. Acta Soc. Sci. Upsaliensis (4), 1.

Laurent, M. (1903) Sur la formation de l'oeuf et la multiplication d'une antipode dans les Joncées. C. R. tome 137, 1.

„ (1903) Sur le développement de l'embryon des Joncées. Daselbst.

„ (1904) Recherches sur le dèveloppement des Joncées. Ann. sci. nat. bot. sèr. VIII, tome 19.

Murbeck, S. (1902) Ueber die Embryologie von *Ruppia rostellata* Koch. K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 36.

Palm, B. (1915) Studien über Konstruktionstypen und Entwicklungswege des Embryosackes der Angiospermen. Diss. Stockholm.

Porsch, O. (1907) Versuch einer phylogenetischen Erklärung des Embryosackes und der doppelten Befruchtung der Angiospermen. Jena.

Samuelsson, G. (1913) Studien über die Entwicklungsgeschichte der Blüten einiger *Bicornes*-Typen. Sv. bot. tidskr. Bd 7.

Schaffner, J. H. (1897) Contribution to the life history of *Sagittaria variabilis*. Bot. Gaz. vol. 23.

Schürhoff, P. N. (1920) Die Antipodenvermehrung der Sparganiaceae. Ber. bot. Ges. Bd 38.

Stolt, K. A. H. (1921) Zur Embryologie der Gentianaceen und Menyanthaceen. K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 61. N:o 14.

Täckholm, G. (1916) Zur Antipodenentwicklung der Compositengattungen *Cosmidium* und *Cosmos*. Sv. bot. tidskr. Bd. 10.

v. Wettstein, R. R. (1911) Handbuch der Systematischen Botanik. Aufl. II, Leipzig u. Wien.

Erklärung der Tafelfiguren.

Fig. 1. *Oxychloë andina*. Querschnitt durch drei Antheren und den Griffel eines sterilen Pistills. Vergr. 60.

„ 2 u. 3. *Luzula multiflora*. Äquatorialplatten der heterotypischen Teilung bei der Spermatogenese. Die diploïde Zahl (18) freier Chromosomen ist vorhanden. Vergr. 1000.

„ 4 u 5. *L. multiflora*. Anaphasen der heterotypischen Teilung bei der Spermatogenese. Vergr. 1000.

„ 6. *Juncus lamprocarpus*. Junge Samenanlage mit ungeteilter Embryosackmutterzelle. Vergr. 300.

„ 7. *J. bufonius*. Junge Samenanlage mit 1-kernigem Embryosack und 3 zusammenfliessenden Megasporen. Vergr. 350.

„ 8. *J. squarrosus*. Junge Samenanlage. Kernspindel der homöotypischen Teilung. Vergr. 350.

„ 9. *J. lamprocarpus*. Junge Samenanlage mit 2-kernigem Embryosack. Die verdrängten Megasporen noch sichtbar. Vergr. 350.

„ 10. *J. squarrosus*. Samenanlage mit 4-kernigem Embryosack. Eine Megaspore ist als eine grosse, unten abgerundete Bildung im Mikropylarende erhalten. Vergr. 350.

„ 11. *J lamprocarpus*. Samenanlage mit 8-kernigem Embryosack und zusammenschmelzenden Polkernen. Vergr. 300.

„ 12. *J. bufonius*. Samenanlage mit 7-kernigem Embryosack: 2 Synergiden, Eizelle, Zentralkern und 3 Antipoden. Vergr. 300.

„ 13. *J. compressus*. Samenanlage mit befruchtungsreifem oder eben befruchtetem Embryosack. Man sieht 1 Synergide, die Eizelle und den grossen basal gelegenen Zentralkern. Vergr. 250.

„ 14. *J. compressus*. Samenanlage mit Befruchtungsstadium. Die Eizelle und die übergebliebene Synergide von aus dem Pollenschlauch stammenden Chromatinanhäufungen umgeben. Vergr. 400.

„ 15. *J. compressus*. Samenanlage kurz nach der Befruchtung. Die Eizelle ungeteilt, der Zentralkern hat sich in einem unteren, basalen und einem oberen zentralen Endospermkern geteilt, die Antipoden sind erhalten, Vergr. 250

„ 16. *J. compressus*. Samenanlage mit Eizelle und basaler Endospermzelle, beide von deutlichen Membranen umgeben. Ausserdem ein paar Kerne des zentralen Endosperms. Die Antipoden erhalten. Vergr. 250.

„ 17. *J. filiformis*. Junger Samen. Die Samenschale in Bildung, die Eizelle ungeteilt, 2-kerniges basales Endosperm. Vergr. 150.

„ 18. *J. bufonius*. Befruchtete Eizelle in Ruhe. Vergr. 700.

„ 19. *J. bufonius*. Basale Endospermzelle mit verschwindendem Kern. Deutliche Membrane. Zwei Antipoden sichtbar. Vergr. 700.

„ 20. *J. bufonius*. Basale Endospermzelle. Vergr. 700.

„ 21. *J. bufonius*. Die erste Teilung der Eizelle; Telophase. Vergr. 700.

„ 22. *J. bufonius*. 2-zelliger Proembryo. Vergr. 700.

Fig. 23. *J. lamprocarpus.* Junger Embryo mit zentralem Endosperm. Vergr. 700.
„ 24. *J. compressus.* 2-kerniges basales Endosperm; die 3 Antipoden erhalten. Vergr 700.
„ 25. *J. filiformis.* Älteres basales Endosperm mit degenerierenden Antipoden. Vergr. 300.
„ 26. *J. bufonius.* Querschnitt durch einen jungen Samen. Embryo mit zentralem Endosperm, in welchem Zellwände angelegt werden. Vergr. 300.
„ 27. *J. bufonius.* Querschnitt durch den im Fruchtkapsel liegenden, beinahe reifen Samen. Vergr. 150.
„ 28. *Distichia muscoïdes.* Succulente Samenanlage mit 2-kernigem Embryosack und 3 verdrängten Megasporen. Vergr. 350.
„ 29. *Distichia muscoïdes.* Befruchtete Eizelle. Vergr. 700.
„ 30. *L. pilosa.* Junge Samenanlage mit ungeteilter Embryosackmutterzelle. Vergr. 300.
„ 31. *L. pilosa.* Junge Samenanlage mit 1-kernigem Embryosack und 3 verdrängten Megasporen. Vergr. 300.
„ 32. *L. pilosa.* 4-kerniger Embryosack. Vergr. 300.
„ 33. *L. campestris.* a. Befruchtungsreife oder eben befruchtete Samenanlage mit Obturator, Eizelle und ungeteiltem Zentralkern. Vergr. 120. b. Derselbe Zentralkern mit eigentümlichem Nukleolus. Vergr. 1000.
„ 34. *L. pilosa.* Relativ junges basales Endosperm. Vergr. 250.
„ 35 *L. campestris.* Schlauchförmiges basales Endosperm. Vergr. 250.
„ 36. *L. campestris.* Altes, basales Endosperm mit zahlreichen, blasenähnlichen Kernen und grossen Nukleolen. Vergr. 250.
„ 37. *L. multiflora.* Der untere Teil eines reifen Samens, die unter dem zentralen Endosperm liegende Hypostase zeigend. Vergr. 60.

Werner u. Winter, G. m. b. H., Frankfurt a. M.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 5.

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN IN DER UMGEBUNG EINER SINGULÄREN STELLE ODER LINIE

VON
F. UND R. NEVANLINNA

(Am 22. November 1922 von E. Lindelöf und J. W. Lindeberg mitgeteilt)

HELSINGFORS 1922

HELSINGFORS 1922
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist der Darstellung und den wichtigsten Anwendungen einer allgemeinen funktionentheoretischen Methode gewidmet. Diese Methode besteht im Wesentlichen in einer möglichst vollständigen Verwertung der einfachen Tatsache, dass der Logarithmus des absoluten Betrages einer innerhalb eines gewissen Gebietes meromorphen Funktion $f(x)$ eine eindeutige harmonische Funktion ist, die in den Nullstellen und Polen der Funktion $f(x)$ negativ bzw. positiv logarithmisch unendlich wird[1]). Behandelt man diese harmonische Funktion, $\log |f(x)|$, nach bekannten, in geeigneter Weise verallgemeinerten potentialtheoretischen Methoden, so ergeben sich einige fundamentale Gleichungen und Ungleichungen allgemeiner Art, aus denen sich eine Reihe funktionentheoretischer Prinzipien und Sätze fast unmittelbar herleiten lassen.

Schon aus der Natur der angewandten Methode geht hervor, dass die Resultate dieser Arbeit etwas über die allgemeinen Beziehungen aussagen, welche zwischen dem Verhalten des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf dem Rande eines Gebietes einerseits, und der Grösse desselben innerhalb des Gebietes anderseits bestehen, wobei in einigen Sätzen auch die Verteilung der Nullstellen und Pole der Funktion Beachtung findet. Teils sind unsere Ergebnisse schon früher bekannt, jedoch meistens in einer unvollständigen und mit unnötigen Einschränkungen behafteten Form, was seinen Grund darin hat, dass sie bisher mittels spezieller und manchmal künstlicher Methoden hergeleitet wurden, die oft dem Wesen der Sache fremde Einschränkungen nach sich zogen. Dagegen erscheinen diese Resultate in der in dieser Arbeit gegebenen Behandlung — als natürliche, sich selber darbietende Ergebnisse einer einzigen und allgemeinen Methode — in einer dem Wesen der Sache entsprechenden Allgemeinheit und Präzision, die meistens endgültig sein dürfte.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit haben wir in zwei Vorträgen auf dem 5. skandinavischen Mathematikerkongress in Helsingfors 1922 kurz dargestellt (vgl. die Verhandlungen des Kongresses). Während der Redaktion unserer Arbeit wurden wir darauf aufmerksam gemacht, dass Herr CARLEMAN schon früher die von uns entwickelte Methode zum Beweis einiger funktionentheoretischen Sätze benutzt hat (vgl. *Sur les fonctions inverses des fonctions entières d'ordre fini*, Arkiv för mat., astr. o. fys. Bd. 15. N:o 10, 1920, und *Sur un théorème de M. Denjoy*, Comptes rendus, t. 174, 1922, p. 373). Es scheint uns jedoch, dass die von Herrn CARLEMAN behandelten Probleme von so spezieller Art sind, dass die grosse Tragweite der angewandten Methode nicht genügend hervorgeht.

Im ersten Abschnitt wird mit Hilfe der Greenschen Integraltransformationsformel eine allgemeine Beziehung hergeleitet, die das Fundament der ganzen Abhandlung bildet. Als wichtigsten Spezialfall ergibt diese Beziehung eine Formel, die als natürlichste und allgemeinste Form des bekannten Jensenschen Satzes aufzufassen ist. Aus diesem verallgemeinerten Jensenschen Satz wird alsdann eine allgemeine funktionentheoretische Ungleichung hergeleitet, die den natürlichen Ausgangspunkt für sämtliche Untersuchungen des zweiten Abschnittes bildet.

Im zweiten Abschnitt wird mit Hilfe der obenerwähnten allgemeinen Ungleichung zuerst ein funktionentheoretisches Prinzip bewiesen, das in möglichst allgemeiner und präziser Weise eine früher von mehreren Autoren behandelte Fragestellung beantwortet; dieses Prinzip, welches als speziellen Fall auch eine Verallgemeinerung des bekannten Hadamardschen Dreikreissatzes enthält, dürfte von Bedeutung sein bei Behandlung von Fragen, wo es sich um das Verhalten einer analytischen Funktion in der Nähe einer singulären Stelle oder Linie handelt. Zur Erläuterung des Prinzips wird ein neuer einfacher Beweis eines wichtigen Satzes von Montel und Lindelöf über die Konvergenzwerte beschränkter Funktionen gegeben. Als zweite Anwendung der erwähnten allgemeinen funktionentheoretischen Ungleichung wird ein allgemeines Kriterium für die Beschränktheit einer innerhalb eines beliebigen Gebietes regulären Funktion gegeben. Dieses Kriterium ergibt als spezielle Fälle und in verallgemeinerter und verschärfter Form diejenigen Erweiterungen des Prinzips des Maximalmoduls einer analytischen Funktion, welche von Phragmén und Lindelöf in einer bekannten Arbeit gegeben wurden. Schliesslich werden in diesem Abschnitt einige Untersuchungen allgemeiner Art angestellt, welche u. A. eine Erweiterung des bekannten Fatouschen Satzes über die Existenz von Randwerten einer innerhalb eines Kreises beschränkten Funktion liefern.

Im dritten und letzten Abschnitt wird die im ersten Abschnitt hergeleitete Grundformel zum Beweis einer Reihe von allgemeinen Sätzen angewendet, welche die Beziehungen zwischen dem Verhalten des absoluten Betrages einer analytischen Funktion im Innern und auf dem Rande eines Gebietes und der Verteilung der Nullstellen und Pole der Funktion behandeln. Insbesondere heben wir die Sätze hervor, welche hinreichende Bedingungen für das identische Verschwinden einer analytischen Funktion geben; durch diese Sätze haben, unseren Erachtens, einige früher nur unvollständig erkannte Sachbestände ihre endgültige und sachgemässe Formulierung und natürlichste Begründung gefunden.

I. Die grundlegenden Formeln und Ungleichungen.

1. Im Folgenden bezeichnet G ein ein- oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand Γ aus einer endlichen Anzahl regulärer analytischer Kurvenstücke zusammengesetzt ist. Sei $f(x)$ eine innerhalb und auf dem Rande Γ des Gebietes G eindeutige[1]) meromorphe Funktion der komplexen Variable $x = \sigma + it = re^{i\varphi}$. Die Nullstellen und Pole der Funktion innerhalb des Gebietes seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$; der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass die Funktion auf dem Rande Γ regulär und von Null verschieden ist. Wir umgeben die Nullpunkte a_μ und die Pole b_ν mit kleinen Kreisen $\gamma(a_\mu)$ bzw. $\gamma(b_\nu)$ vom Radius ϱ und denken uns diese Kreisscheiben aus dem Gebiet G entfernt; innerhalb und auf dem Rande des so entstandenen Bereiches G_ϱ ist dann $\log |f(x)|$ eine eindeutige reguläre harmonische Funktion und somit $\Delta \log |f(x)| = 0$, wo Δ den Laplaceschen Ausdruck

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

bezeichnet.

Sei ferner $\lambda(x)$ eine beliebige reelle Funktion, bezüglich deren vorläufig nur angenommen werden soll, dass sie nebst ihren partiellen Ableitungen der zwei ersten Ordnungen innerhalb und auf der Berandung des Gebietes G stetig ist.

Nach diesen Festsetzungen werden wir von der Greenschen Integraltransformationsformel

$$\int (u\Delta v - v\Delta u)\, d\sigma = -\int \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

Gebrauch machen, welche das Flächenintegral links in das dem Rande entlang genommene Linienintegral rechts überführt. Hierbei bezeichnet $d\sigma$ das Flächenelement, ds das Bogenelement des Randes und $\frac{\partial}{\partial n}$ die nach der *inneren* Randnormale genommene Ableitung. Bringt man diese Transformationsformel im oben definierten Gebiet G_ϱ zur Anwendung indem man $u = \log f$ und $v = \lambda$ setzt, so ergibt sich zunächst, da $\Delta \log |f| = 0$ innerhalb G_ϱ,

$$\int_{G_\varrho} \log|f|\, \Delta\lambda\, d\sigma = -\int_{\Gamma} (\log|f|\frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda\frac{\partial}{\partial n}\log|f|)\, ds$$

(1)
$$-\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\int_{\gamma(a_\mu)} (\log|f|\frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda\frac{\partial}{\partial n}\log|f|)\, ds - \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\int_{\gamma(b_\nu)} (\log|f|\frac{\partial\lambda}{\partial n} - \lambda\frac{\partial}{\partial n}\log|f|)\, ds.$$

Schreibt man $x = a_\mu + \varrho e^{i\vartheta}$, so ist, wenn die Ordnung der Nullstelle a_μ mit h_μ bezeichnet wird,

$$\log|f(x)| = h_\mu \log\varrho + \omega_\mu(x),$$

wo $\omega_\mu(x)$ eine in der Umgebung des Punktes a_μ reguläre harmonische Funktion bezeichnet. Auf dem Kreis $\gamma(a_\mu)$ ist demnach

[1]) In der Tat genügt für das Folgende, dass der absolute Betrag der Funktion eindeutig ist.

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|f| = \frac{\partial}{\partial \varrho}\log|f| = \frac{h_\mu}{\varrho} + \frac{\partial \omega_\mu}{\partial \varrho}; \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho}$$

und somit

$$\int_{\gamma(a_\mu)} (\log|f|\frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial}{\partial n}\log|f|)\,ds =$$

$$h_\mu \varrho \log \varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho}\,d\vartheta - h_\mu \int_0^{2\pi} \lambda(a_\mu + \varrho e^{i\vartheta})\,d\vartheta + \varrho \int_0^{2\pi} \left(\omega_\mu \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho} - \lambda \frac{\partial \omega_\mu}{\partial \varrho}\right) d\vartheta.$$

Hieraus ist zu ersehen, dass das Integral links für $\varrho \to 0$ sich dem Grenzwert $-2\pi h_\mu \lambda(a_\mu)$ nähert, denn das erste und dritte Glied rechts verschwinden hierbei, während das mittlere Glied den obengenannten Grenzwert liefert.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass für $\varrho \to 0$

$$\int_{\gamma(b_\nu)} (\log|f|\frac{\partial \lambda}{\partial n} - \lambda \frac{\partial}{\partial n}\log|f|)\,ds \to 2\pi k_\nu \lambda(b_\nu),$$

falls k_ν die Multiplizität des Poles b_ν bedeutet. Folglich erhalten wir aus (1) für $\varrho \to 0$

$$\sum \lambda(a_\mu) - \sum \lambda(b_\nu) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_G \log|f(x)|\,\Delta\lambda(x)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma (\log|f(\xi)|\frac{\partial \lambda(\xi)}{\partial n} - \lambda(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\log|f(\xi)|)\,ds, \tag{2}$$

wo ξ den Rand Γ durchläuft und die Summen links über sämtliche Nullstellen und Pole der Funktion $f(x)$ innerhalb G, *mit Beachtung der respektiven Multiplizitäten*, zu erstrecken sind.

Diese Formel wird der Ausgangspunkt sämtlicher Untersuchungen dieser Arbeit sein.

2. Bei den Anwendungen der oben hergeleiteten fundamentalen Formel kommt es vor allem darauf an die, bis auf gewisse allgemeine Stetigkeitseigenschaften, willkürliche Hilfsfunktion $\lambda(x)$ in zweckmässiger Weise festzulegen. Diese Wahl wird je nach den Umständen und verfolgten Zwecken verschieden ausfallen; indessen wollen wir in diesem Artikel, vorläufig ohne Rücksicht auf bestimmte Anwendungen, zwei Spezialfälle der Formel (2) behandeln, welche an sich von grossem Intresse sind.

Nimmt man $\lambda(x) \equiv 1$, so geht die Formel (2) über in

$$h - k = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\log|f(\xi)|\,ds,$$

wo h und k die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole der Funktion $f(x)$ bezeichnen. Nun ist gemäss der Cauchy-Riemannschen Gleichungen $\frac{\partial}{\partial n}\log|f| = -\frac{\partial}{\partial s}(\arg f)$ und wir erhalten somit

$$h - k = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d(\arg f),$$

eine Relation, welche das *Argumentprinzip* der Funktionentheorie zum Ausdruck bringt.

Von grösserem Intresse ist diejenige allgemeine Formel, zu der man gelangt, wenn in (2)

für $\lambda(x)$ die Greensche Funktion $g(x,x_0)$ des Gebietes G, mit dem Pol in einem beliebigen inneren Punkt x_0, eingesetzt wird. Diese Funktion ist bekanntlich durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt: wird $x = x_0 + \varrho e^{i\vartheta}$ gesetzt, so ist im Inneren des Gebietes G

$$g(x,x_0) = \log\frac{1}{\varrho} + \omega,$$

wo ω eine in dem ganzen Gebiet eindeutige und reguläre harmonische Funktion ist; auf dem Rande Γ ist $g(\xi,x_0) = 0$. Falls man also eine kleine Kreisumgebung vom Radius ϱ des Punktes x_0 aus dem Gebiet G entfernt, so kann die Formel (2) in dem so entstandenen Bereich für $\lambda(x) = g(x,x_0)$ angewendet werden; lässt man hierauf ϱ unbeschränkt gegen Null abnehmen, so ergibt sich hieraus nach einer der oben S. 6 durchgeführten ähnlichen Überlegung

$$\log|f(x_0)| = -\sum g(a_\mu,x_0) + \sum g(b_\nu,x_0) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)|\frac{\partial}{\partial n} g(\xi,x_0)\,ds.$$

Wird die zur $g(\xi,x_0)$ konjugierte Funktion mit $-h(\xi,x_0)$ bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial s}.$$

Ferner ist nach der bekannten Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion $g(p,q) = g(q,p)$. Wenn man schliesslich statt x_0 einfach x schreibt, so erhält man in dieser Weise die folgende Gleichung:

$$\log|f(x)| = -\sum g(x,a_\mu) + \sum g(x,b_\nu) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)|\,dh(\xi,x), \tag{3}$$

wobei in dem Integral der Rand Γ in positiver Richtung zu durchlaufen ist.

Im Obigen wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass der Punkt x für die Funktion f weder ein Pol noch eine Nullstelle ist. Anderenfalls muss die Formel abgeändert werden. Sei $z = x$ z. B. eine r-fache Nullstelle der Funktion $f(z)$; man bilde dann die analytische Funktion

$$\varphi(z,x) = e^{-g(z,x) + ih(z,x)}$$

für welche $z = x$ eine einfache und innerhalb des Gebietes G die einzige Nullstelle ist, und deren absoluter Betrag auf dem Rande Γ gleich Eins ist. Der Quotient

$$\Phi(z) = \frac{f(z)}{[\varphi(z,x)]^r}$$

ist eine im Gebiet G reguläre Funktion deren absoluter Betrag eindeutig ist und welche dieselben Nullstellen und Pole wie $f(z)$ hat, der Punkt $z = x$ ausgenommen, wo sie den endlichen von Null verschiedenen Wert

$$\Phi(x) = \frac{1}{r!}\frac{f^{(r)}(x)}{[\varphi'(x,x)]^r}$$

annimmt; ferner ist auf der Berandung Γ $|\Phi(\xi)| = |f(\xi)|$. Wir können demnach die Formel (3) auf die Funktion Φ im Punkte x anwenden und erhalten so

$$\log\frac{1}{r!}\frac{|f^{(r)}(x)|}{|\varphi'(x,x)|^r} = -\sum{}' g(x,a_\mu) + \sum g(x,b_\nu) + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)|\,dh(\xi,x), \tag{3}'$$

wobei der Strich in der ersten Summe rechts andeuten soll, dass die r von dem Nullpunkt x herrührenden Glieder fehlen.

Falls wiederum x ein Pol r^{ter} Ordnung für die Funktion f ist, so kann man die Formel 3)' auf die Funktion $\frac{1}{f}$ anwenden.

Die Formeln (3) und (3)' sind als eine direkte Verallgemeinerung des bekannten JENSEN'schen Satzes anzusehen, welcher aus den obigen Formeln hervorgeht, wenn das Gebiet G ein Kreis ist und x in dessen Mittelpunkt verlegt wird. Diese Verallgemeinerung des Jensenschen Satzes lässt eine grosse Menge von Anwendungen zu, die mit Hilfe des speziellen Satzes nur schwer zu behandeln sind.

3. Wir wollen schliesslich eine allgemeine Ungleichung hervorheben, die in der Folge von Wichtigkeit ist und die sich aus der Gleichung (3) unmittelbar ergibt.

Es sei auf dem Rande Γ des Gebietes G

$$|f(\xi)| < C(\xi),$$

wo $C(\xi)$ eine positive Funktion des Randpunktes ξ ist; bei den Untersuchungen dieser Arbeit wird $C(\xi)$ im allgemeinen eine, von einer endlichen Anzahl Sprungstellen abgesehen, stetige Funktion sein. Führen wir dann die innerhalb des Gebietes G reguläre harmonische Funktion

$$U(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log C(\xi)\, dh(\xi, x) \tag{4}$$

ein, welche in jedem Stetigkeitspunkt der Funktion $C(\xi)$ sich dem Randwert $\log C(\xi)$ anschliesst, so ergibt die Formel (3) für jeden inneren Punkt x

$$\log|f(x)| \leq -\sum g(x, a_\mu) + \sum g(x, b_\nu) + U(x). \tag{5}$$

Falls nun $f(x)$ in dem Gebiet G *regulär* d. h. polfrei ist, so fehlt die zweite von den Polen herrührende Summe; da ferner die Greensche Funktion innerhalb G *positive* Werte annimmt, so wird die rechte Seite der obigen Ungleichung jedenfalls nicht kleiner, wenn wir auch die erste, von den eventuellen Nullstellen herrührende Summe weglassen. Es gilt somit, sobald $f(x)$ innerhalb G regulär ist, die Ungleichung

$$\log|f(x)| \leq U(x). \tag{6}$$

Betreffs des Gleichheitszeichens ist hierbei zu bemerken, *dass es überall gilt sobald es nur in einem einzigen inneren Punkt besteht.* In der Tat: besteht das Gleichheitszeichen in einem inneren Punkt, so folgt aus (5) erstens, dass keine Nullstellen vorhanden sein können, und hieraus ferner, wegen der Voraussetzung $|f(\xi)| \leq C(\xi)$, dass $C(\xi)$ in jedem Stetigkeitspunkte des Randes Γ *gleich* $|f(\xi)|$ sein muss. Folglich wird $\log|f(x)|$ innerhalb G eine reguläre harmonische Funktion sein, welche dieselben Randwerte wie die harmonische Funktion $U(x)$ annimmt; diese zwei Funktionen sind somit identisch.

Die gewonnene Ungleichung (6) ist für das Folgende von fundamentaler Bedeutung indem alle Resultate des zweiten nachfolgenden Abschnittes mehr oder weniger unmittelbar aus dieser Beziehung herfliessen.

II. Über die Beziehungen zwischen dem Verhalten des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf dem Rande eines Gebietes und der Grösse desselben innerhalb des Gebietes.

4. Der vorliegende Abschnitt ist einigen funktionentheoretischen Anwendungen der allgemeinen Ungleichung (6) gewidmet. Hierbei wollen wir in diesem Artikel zunächst einige Bemerkungen allgemeiner Art über das Verfahren vorausschicken, das diesen Anwendungen zu Grunde liegt und über den Charakter der Sätze, die mittels dieser Methode überhaupt gewonnen werden können.

Sei G ein Gebiet obengenannter Art in der Ebene der komplexen Variable $x = re^{i\varphi}$, und $f(x)$ eine analytische Funktion, bezüglich deren wir voraussetzen, dass sie in G eindeutig und in jedem *inneren* Punkt des Gebietes regulär ist; betreffs des Verhaltens der Funktion auf dem Rande Γ setzen wir also bis auf weiteres nichts voraus. Indem wir mit $C(x)$ eine im Inneren des Gebietes G definierte reelle, positive Funktion bezeichnen, nehmen wir noch an, dass in jedem inneren Punkt des Gebietes die Ungleichung

$$|f(x)| \leq C(x) \tag{7}$$

besteht, und wollen dann untersuchen, wie diese Voraussetzung auf das Verhalten der Funktion $f(x)$ einwirkt.

Zu diesem Zweck nehmen wir innerhalb G ein beliebiges Teilgebiet G', dessen Rand Γ' gänzlich im Inneren von G verläuft; die Greensche Funktion des Gebietes G', mit dem Pol in dem Punkt x, sei $g'(\xi, x)$, ihre konjugierte Funktion $-h'(\xi, x)$. Gemäss der allgemeinen Ungleichung (6) ist dann bei Beachtung der Voraussetzung (7)

$$\log|f(x)| < \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'} \log C(\xi)\, dh'(\xi, x), \tag{7'}$$

eine Ungleichung, die in jedem inneren Punkt des Gebietes G' besteht; die durch das rechts stehende Integral definierte harmonische Funktion bezeichnen wir im Folgenden kurz mit $U'(x)$.

Man lasse jetzt die Kurve Γ' sich dem Rande Γ des Gebietes G in der Weise nähern, dass sie schliesslich jedes innere Gebiet von G umfasst. Wir betrachten insbesondere die zwei folgenden Fälle, die dann bei geeigneter Definition der Funktion $C(x)$ eintreten können:

1°. *Es ist in jedem inneren Punkt x des Gebietes G*

$$\text{lim. inf. } U'(x) = -\infty.$$

Aus der Ungleichung (7)' ist unmittelbar zu ersehen, dass unsere Funktion $f(x)$ in diesem Fall *identisch verschwinden muss.*

2°. *Es ist*

$$\text{lim. inf. } U'(x) = U(x)$$

endlich in jedem inneren Punkt des Gebietes G.

Nach (7)′ ist dann innerhalb G

$$\log|f(x)| \leq U(x),$$

eine Ungleichung, die häufig *schärfer ist und über das Verhalten der Funktion $f(x)$ mehr aussagt als die Voraussetzung* (7).

In diesem Abschnitt werden wir uns nur mit diesem letztgenannten Fall beschäftigen; die Sätze über das identische Verschwinden einer analytischen Funktion, zu denen die nähere Erörterung des erstgenannten Falles führt, lassen sich nämlich mittels der Grundbeziehung (2) einfacher beweisen und sollen nebst anderen Sätzen, welche gänzlich ausserhalb der Möglichkeiten der oben skizzierten Methode fallen, im letzten Abschnitt dieser Arbeit behandelt werden.

5. Wir gehen jetzt zu den Anwendungen der obenbesprochenen allgemeinen Methode über. Um hierbei mit einem in gewissen Hinsichten möglichst einfachen Fall zu beginnen, setzen wir in diesem Artikel voraus, dass der Rand Γ des Gebietes G aus n analytischen Kurvenstücken oder geschlossenen analytischen Kurven $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(n)}$ zusammengesetzt ist, und dass die innerhalb G eindeutige und reguläre Funktion $f(x)$ für jedes positive ε *in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes inneren Punktes der Kurve $\Gamma^{(k)}$ einer Ungleichung*

$$|f(x)| < C_k + \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

genügt, wo C_k eine positive Konstante bezeichnet. Wir fügen noch die Bedingung hinzu, dass $f(x)$ *in der Umgebung jedes Punktes, wo zwei Kurvenstücke Γ zusammenstossen, beschränkt bleiben soll:*

$$|f(x)| < M. \tag{9}$$

Dies vorausgesetzt, sei x ein beliebiger Punkt innerhalb G. Man kann dann zuerst um jeden Endpunkt der obengenannten Kurven $\Gamma^{(k)}$ eine kleine Umgebung γ derart abgrenzen, dass in den Gebieten γ die Ungleichung (9) besteht und die Summe der Schwankungen der Funktion $h(\xi, x)$ innerhalb dieser Umgebungen kleiner als eine vorgegebene beliebig kleine positive Zahl η ausfällt. Wir betrachten jetzt die Greensche Niveaulinie Γ_δ, deren Gleichung $g(\xi, x) = \delta > 0$ ist; diese setzt sich für hinreichend kleine Werte δ, ausser von einer Anzahl den Gebieten γ angehöriger kleiner Kurvenstücke, aus n Kurvenbogen oder geschlossenen Kurven $\Gamma_\delta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ zusammen, die sich für $\delta \to 0$ den bezüglichen Randkurven $\Gamma^{(k)}$ unbeschränkt nähern. Auf den erstgenannten kleinen Kurvenstücken besteht die Ungleichung (9), während in jedem Punkt der Kurve $\Gamma_\delta^{(k)}$ die Beziehung (8) gilt, sobald δ kleiner als eine hinreichend kleine positive Zahl $\delta(\varepsilon)$ ist. Wenn wir also $C(x)$ innerhalb der Gebiete γ gleich M und auf den Kurven $\Gamma_\delta^{(k)}$ gleich $C_k + \varepsilon$ setzen, so besteht gemäss (6) für $\delta \leq \delta(\varepsilon)$ die Ungleichung

$$\log|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\delta} \log C(\xi)\, dh(\xi, x).$$

Diese Beziehung behält auch für $\delta \to 0$ ihre Gültigkeit, woraus, da der von den Gebieten γ herrührende Teil des Integrals gemäss den obigen Festsetzungen kleiner als $M\eta$ ist, für $\eta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ sich schliesslich

$$\log|f(x)| \leqq \sum_1^n \log C_k \cdot \Delta_k(x) \tag{10}$$

ergibt. Hierbei ist

$$\Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^{(k)}} dh(\xi, x), \tag{10'}$$

und somit

$$\sum_1^n \Delta_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} dh(\xi, x) = 1. \tag{11}$$

Das Gleichheitszeichen in (10) tritt für einen inneren Punkt x nur bei der Funktion

$$f(x) = e^{i\alpha} \prod_1^n C_k^{d_k(x)}$$

ein, wo α eine beliebige reelle Konstante ist und $d_k(x)$ diejenige (bis auf eine rein imaginäre Konstante eindeutig bestimmte) analytische Funktion bezeichnet, deren reeller Teil mit $\Delta_k(x)$ übereinstimmt.

Dem durch die Ungleichung (10) ausgedrückten Satz kann man im Falle $n = 2$ eine besonders anschauliche Fassung geben. Falls dann z. B. $C_1 < C_2$ ist, so eliminieren wir mit Hilfe der Relation (11) die Grösse $\Delta_2(x)$ und erhalten zunächst

$$\log|f(x)| \leqq \Delta_1(x) \log \frac{C_1}{C_2} + \log C_2. \tag{12}$$

Wie aus (10)' zu ersehen ist, ist $\Delta_1(x)$ eine innerhalb G reguläre harmonische Funktion, welche auf dem Bogen $\Gamma^{(1)}$ den Wert Eins annimmt, während sie in jedem Punkt des Bogens $\Gamma^{(2)}$ verschwindet. Sei nun λ eine positive Zahl < 1; die durch

$$\Delta_1(x) = \lambda$$

definierte Niveaulinie zerlegt dann das Gebiet G in zwei an $\Gamma^{(1)}$ bzw. $\Gamma^{(2)}$ grenzende Teilgebiete $G_\lambda^{(1)}$ und $G_\lambda^{(2)}$ und es ist innerhalb $G_\lambda^{(1)}$ $1 > \Delta_1(x) > \lambda$, während innerhalb $G_\lambda^{(2)}$ $\lambda > \Delta_1(x) > 0$ ist. Da nun der Koeffizient von $\Delta_1(x)$ rechts in (12) negativ ist $(C_1 < C_2)$, so folgt aus Obigem, dass diese Ungleichung innerhalb des Gebietes $G_\lambda^{(1)}$ a fortiori gelten wird, wenn wir $\Delta_1(x)$ durch λ ersetzen; es ist somit innerhalb $G_\lambda^{(1)}$

$$\log|f(x)| \leqq \lambda \log C_1 + (1-\lambda) \log C_2. \tag{13}$$

Das Obige fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Sei $f(x)$ eine innerhalb eines von zwei analytischen Kurven oder Kurvenstücken $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ begrenzten Gebietes G eindeutige reguläre Funktion, die für jedes positive ε in einer hinreichend kleinen Umgebung der Punkte des Bogens $\Gamma^{(1)}$ der Ungleichung

$$f(x)| < C_1 + \varepsilon,$$

in der Nähe der $\Gamma^{(2)}$ zugehörigen Randpunkte wiederum der Ungleichung

$$|f(x)| < C_2 + \varepsilon$$

genügt, während sie in den Umgebungen der eventuellen Endpunkte dieser Kurven beschränkt ist.

Sei ferner λ eine beliebige Zahl des Intervalls $0<\lambda<1$ und $G_\lambda^{(1)}$ bzw. $G_\lambda^{(2)}$ die von den Kurven $\Gamma^{(1)}$ bzw. $\Gamma^{(2)}$ und der Niveaulinie Γ_λ:

$$\Delta_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{(1)}} dh(\xi,x)=\lambda$$

begrenzten Teilgebiete von G.

Falls dann z. B. $C_1<C_2$, so besteht in jedem inneren Punkt des Gebietes $G_\lambda^{(1)}$ die Ungleichung

$$|f(x)|<C_1^{\lambda}C_2^{1-\lambda} \tag{14}$$

Auf der Niveaulinie Γ_λ kann die durch diese Ungleichung angegebene obere Grenze möglicherweise erreicht werden; trifft dies aber nur in einem einzigen Punkt ein, so gilt das Gleichheitszeichen in jedem Punkt der Kurve Γ_λ und für jedes $0<\lambda<1$. Die Funktion $f(x)$ ist dann bis auf einen Faktor $e^{i\alpha}$ eindeutig bestimmt und gleich

$$C_1^{d_1(x)}C_2^{1-d_1(x)},$$

wo $d_1(x)$ diejenige analytische Funktion bezeichnet, deren reeller Teil gleich $\Delta_1(x)$ ist.

Dieser Satz, welcher unseres Wissens in der obigen allgemeinen und genauen Fassung nicht früher bekannt ist,[1]) ist von grosser Anwendbarkeit bei verschiedenen Fragen betreffs des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Nähe einer singulären Stelle oder Linie. Wir wollen in dem folgenden Artikel den Inhalt des Satzes etwas eingehender analysieren und einige einfache Anwendungen desselben besprechen.

6. Vorerst nehmen wir an, dass das oben mit G bezeichnete Gebiet *einfach* zusammenhängend ist. Die Begrenzungskurven $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ haben dann zwei gemeinschaftliche Endpunkte ξ_1, ξ_2, in denen sie nach Voraussetzung mit einander bestimmte Winkel Θ_1 bzw. Θ_2 bilden. Die oben mit Γ_λ bezeichnete Niveaulinie verbindet die Punkte ξ_1, ξ_2, und aus bekannten Eigenschaften harmonischer Funktionen folgt, dass sie im Punkt ξ_1 mit den Kurven $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ bzw. die Winkel $(1-\lambda)\Theta_1$, $\lambda\Theta_1$, im Punkt ξ_2 die Winkel $(1-\lambda)\Theta_2$, $\lambda\Theta_2$ bildet.

Um dies durch ein möglichst einfaches Beispiel zu erläutern, betrachten wir den Fall, wo das Gebiet G die oberhalb der reellen Achse liegende Halbebene ist. Sei ξ_1 ein Punkt der reellen Achse und $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ die bzw. links und rechts von ξ_1 liegenden Teile dieser Achse; der Punkt ξ_2 ist somit unendlich fern. Dann ist, wie man unmittelbar findet, die Niveaulinie Γ_λ ein von ξ_1 ausgehender Halbstrahl, der mit den Halbstrahlen $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ Winkel der Grösse $(1-\lambda)\pi$ und $\lambda\pi$ bildet und das oben mit $G_\lambda^{(1)}$ bezeichnete Teilgebiet ist somit in diesem Fall das von $\Gamma^{(1)}$ und Γ_λ eingeschlossene Winkelgebiet der Grösse $(1-\lambda)\pi$. Falls nun $f(x)$ eine in der oberen Halbebene $\Im(x)>0$ reguläre Funktion ist, welche für jedes $\varepsilon>0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes der Halbgeraden $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ kleiner als

[1]) Die Frage, wie die in unserem obigen Satze vorausgesetzten Randbedingungen das Verhalten des absoluten Betrages der Funktion im Innern des Bereiches beeinflussen, ist von mehreren Autoren behandelt worden. Vgl. z. B. LINDELÖF *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (Acta soc. scient. Fennicae, XLVI, N:o 5, 1915).

$C_1+\varepsilon$ bzw. $C_2+\varepsilon$ ist, während sie in der Umgebung des Punktes ξ_1 und des unendlich fernen Punktes beschränkt ist, so besagt unser obiger allgemeiner Satz, dass die Funktion in dem genannten Winkelgebiet der Ungleichung (14) genügt, falls $C_1 < C_2$.

Dieser sehr spezielle Fall unseres Satzes liefert fast unmittelbar einen bekannten von MONTEL[1]) bewiesenen und später von LINDELÖF[2]) erweiterten Satz, wonach eine innerhalb eines Winkels eindeutige und beschränkte Funktion $f(x)$ in jedem inneren Winkelgebiet für $|x|\to\infty$ gleichmässig einem endlichen Grenzwert zustrebt, falls sie längs einem einzigen Halbstrahl sich diesem Grenzwert nähert. Der Beweis dieses Satzes lässt sich mittels einer elementaren Variabeltransformation unmittelbar auf den Nachweis folgender Behauptung zurückführen: Sei $f(x)$ eine in der Halbebene $\Im(x)>0$ reguläre Funktion, deren absoluter Betrag daselbst kleiner als Eins ist; falls dann die Funktion auf der negativen reellen Achse stetig ist und längs dieser Achse für $|x|\to\infty$ dem Grenzwert Null zustrebt, so nähert sich die Funktion innerhalb jedes Winkels

$$0<\delta<\varphi<\pi$$

für $|x|\to\infty$ gleichmässig dem Grenzwert Null.

Sei λ eine positive Zahl $<\frac{\delta}{\pi}$ und ε eine positive Zahl <1; nach Voraussetzung können wir eine negative Zahl ξ_1 so annehmen, dass auf dem links von ξ_1 liegenden Teil $\Gamma^{(1)}$ der reellen Achse $|f(x)|<\varepsilon$ ist. In den Umgebungen der Punkte des rechts von ξ_1 liegenden Teils $\Gamma^{(2)}$, ebenso in der Umgebung des Punktes ξ_1 und des unendlich fernen Punktes ist wiederum $f(x)<1$. Nach dem obenbehandelten Spezialfall des allgemeinen S. 12 formulierten Satzes ist dann innerhalb des Winkelgebietes $\lambda\pi\leq\arg(x-\xi_1)\leq\pi$

$$|f(x)|<\varepsilon^{\lambda},$$

woraus, da $\delta>\lambda\pi$ und ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, die Behauptung folgt.

Indem wir zu unserem allgemeinen Satz zurückgehen, wollen wir jetzt annehmen, dass das Gebiet G *zweifach* zusammenhängend ist. $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ sind dann die geschlossenen Randkurven dieses Gebietes und die mit Γ_λ bezeichnete Niveaukurve wird eine zwischen diesen Kurven verlaufende geschlossene Linie sein, welche das Gebiet G in zwei ebenfalls zweifach zusammenhängende, ringförmige Teilgebiete $G_\lambda^{(1)}$ und $G_\lambda^{(2)}$ zerlegt.

Um auch diesen Fall durch ein Beispiel zu beleuchten, wollen wir annehmen, dass $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ zwei durch die Gleichungen

$$\gamma(\xi)=h_1 \quad \text{bzw.} \quad \gamma(\xi)=h_2$$

definierte Niveaukurven einer harmonischen Funktion $\gamma(x)$ sind. Sei $g(\xi,x)$ die Greensche Funktion dieses Gebietes, $-h(\xi,x)$ die konjugierte Funktion; wir wollen die harmonischen Funktionen

[1]) P. MONTEL: *Sur les familles des fonctions analytiques, qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domain* (Ann. Ec. Norm. T. 29, 1912, S. 487—535).

[2]) Vgl. die in der Fussnote S. 12 angegebene Arbeit, insb. S. 7.

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{(1)}} dh(\xi, x) \quad \text{und} \quad \Delta_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{(2)}} dh(\xi, x)$$

berechnen. Zunächst ist nach (11) $\Delta_1 + \Delta_2 = 1$; ferner ergibt die Greensche Formel, falls man sie in G auf die Funktion $\gamma(x)$ anwendet,

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{(1)}} \gamma(\xi)\, dh(\xi, x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma^{(2)}} \gamma(\xi)\, dh(\xi, x) = h_1\Delta_1(x) + h_2\Delta_2(x),$$

und man erhält somit

$$\Delta_1(x) = \frac{\gamma(x) - h_2}{h_1 - h_2}, \quad \Delta_2(x) = \frac{\gamma(x) - h_1}{h_2 - h_1}. \tag{15}$$

Sei nun $f(x)$ eine innerhalb des hier betrachteten Gebietes G eindeutige und reguläre Funktion, welche für jedes $\varepsilon > 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes der Randkurven $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ absolut genommen kleiner ist als $C_1 + \varepsilon$ bzw. $C_2 + \varepsilon$. Aus unserem Satz, oder noch direkter aus der fundamentalen Ungleichung (10), folgt dann bei Beachtung von (15), dass die Funktion $f(x)$ innerhalb des Gebietes G der Ungleichung

$$|f(x)| < C_1^{\frac{\gamma - h_2}{h_1 - h_2}}\, C_2^{\frac{\gamma - h_1}{h_2 - h_1}}$$

genügt.

Falls insbesondere die Niveaukurven $\Gamma^{(1)}$ und $\Gamma^{(2)}$ die zwei konzentrischen Kreise $|x| = r_1$ und $|x| = r_2$ sind, so hat man $\gamma(x) = \log r$, $h_1 = \log r_1$, $h_2 = \log r_2$, und die obige Ungleichung geht über in

$$|f(x)| < C_1^{\frac{\log r : \log r_1}{r_2}}\, C_2^{\frac{\log r : \log r_2}{r_1}};$$

wir erhalten somit den HADAMARDschen Dreikreissatz.

7. Setzt man in dem in Artikel 5 bewiesenen Satz $C_1 = C_2$, so spricht er dass *Prinzip über den Maximalmodul* aus:

Sei $f(x)$ eine innerhalb eines ein- oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes eindeutige reguläre Funktion, welche für jedes positive ε in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Randpunktes der Ungleichung

$$|f(x)| < C + \varepsilon$$

genügt. Dann ist in jedem inneren Punkt des Gebietes

$$|f(x)| < C,$$

wobei das Gleichheitszeichen in einem inneren Punkte nur dann eintrifft, wenn $f(x)$ eine Konstante vom absoluten Betrag C ist.

Das Modulprinzip, dem gewöhnlich die obige Fassung gegeben wird, lässt sich bekanntlich in verschiedenen Richtungen erweitern: man kann nämlich schon unter weniger einschränkenden Randbedingungen, als die oben gemachten, auf die Beschränktheit der Funktion

schliessen. Erweiterungen dieser Art sind insbesondere von PHRAGMÉN und LINDELÖF[1]) gegeben: einige von ihnen bewiesene diesbezügliche Sätze sind bekanntlich von grösster Bedeutung bei verschiedenen Untersuchungen betreffs des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle gewesen. Unsere Methode erlaubt uns nun ein allgemeines Kriterium für die Beschränktheit einer analytischen Funktion anzugeben, welches die PHRAGMÉN-LINDELÖFsche Sätze enthält und wesentlich verschärft.

Es wird im Nachstehenden nützlich sein folgende Bezeichnung einzuführen: Sei $A(t)$ eine reelle Fuuktion der reellen Variable t; wir bezeichnen dann mit $\overset{+}{A}(t)$ diejenige Funktion, welche gleich $A(t)$ oder Null ist, je nachdem $A(t)$ positiv oder nicht positiv ist. Die nicht positive Differenz $A(t)-\overset{+}{A}(t)$ bezeichnen wir mit $\overset{-}{A}(t)$, so dass folglich $A(t)=\overset{+}{A}(t)+\overset{-}{A}(t)$. Das oben in Aussicht gestellte allgemeine Kriterium lässt sich dann folgendermassen aussprechen:

Sei $f(x)$ eine innerhalb des ein- oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes G eindeutige und reguläre Funktion. Ferner existiere für jedes vorgegebene positive ε eine positive Funktion $C_\varepsilon(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

1°. *Innerhalb des Gebietes G ist*

$$|f(x)| \leq C_\varepsilon(x).$$

2°. *Es existiert innerhalb G wenigstens ein Punkt x_0 derart, dass*

$$\lim.\inf._{\Gamma' \to \Gamma} \int_{\Gamma'} \overset{+}{\log} C_\varepsilon(\xi)\, dh'(\xi, x_0) < \varepsilon,$$

wo Γ' ein variabler innerhalb G verlaufender Integrationsweg ist, welcher schliesslich jedes innere Gebiet in G umfasst.

Unter diesen Bedingungen ist für jedes x innerhalb G

$$|f(x)| < 1.$$

Wir fixieren innerhalb G einen beliebigen Punkt x und eine Kurve Γ_0, welche die Punkte x und x_0 umfasst. Ferner sei ε eine beliebige positive Zahl und $C_\varepsilon(x)$ eine Funktion, welche den Bedingungen des Satzes genügt. Schliesslich nehmen wir innerhalb G die Kurve Γ' derart an, dass sie die Kurve Γ_0 gänzlich im Inneren enthält und dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} \overset{+}{\log} C_\varepsilon(\xi)\, dh'(\xi, x_0) < \varepsilon, \tag{16}$$

was voraussetzungsgemäss möglich ist.

Nach diesen Festsetzungen ergibt die Grundungleichung (6) S. 8, bei Beachtung der ersten Voraussetzung,

$$\log|f(x)| < \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma'} \log C_\varepsilon(\xi)\, dh'(\xi, x)$$

[1]) E. PHRAGMÉN und E. LINDELÖF: *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (Acta math. Bd. 31, 1908, S. 381—406).

und somit a fortiori

(17) $$\log|f(x)| < U_\varepsilon(x),$$

wenn

(18) $$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'}^{+} \log C_\varepsilon(\xi)\, dh'(\xi, x)$$

gesetzt wird. $U_\varepsilon(x)$ ist gemäss dieser Definition innerhalb Γ' und somit innerhalb und auf dem Rande des von Γ_0 umgrenzten Gebietes G_0 harmonisch und *nicht negativ*. Wenn wir mit g_0 die Greensche Funktion des Gebietes G_0 bezeichnen, so können wir also die Greensche Formel anwenden, wonach

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0} U_\varepsilon(\xi)\frac{\partial g_0(\xi, x)}{\partial n}\, ds.$$

Sei nun $M(x)$ das Maximum des Verhältnisses

$$\frac{\partial g_0(\xi, x)}{\partial n} : \frac{\partial g_0(\xi, x_0)}{\partial n}$$

für alle ξ auf Γ_0. Da $U_\varepsilon(\xi)$ nicht negativ ist, so folgt aus der obigen Darstellung

$$U_\varepsilon(x) < \frac{M(x)}{2\pi}\int_{\Gamma_0} U_\varepsilon(\xi)\frac{\partial g_0(\xi, x_0)}{\partial n} = M(x)\, U_\varepsilon(x_0),$$

und somit infolge (18) und (16) $U_\varepsilon(x) < M(x)\,\varepsilon$. Demnach ist gemäss (17) $\log|f(x)| < M(x)\,\varepsilon$, und somit, da ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, während $M(x)$ gemäss seiner Definition von ε unabhängig ist, $\log|f(x)| \leq 0$, oder $|f(x)| < 1$. Da x ein ganz beliebiger Punkt innerhalb G war, ist unser Kriterium hiermit bewiesen[1]).

8. Sei $f(x)$ eine Funktion, die in den Umgebungen der Randpunkte beschränkt ist, eine endliche oder unendliche Punktmenge möglicherweise ausgenommen. Falls man ausserdem weiss, dass die Funktion in der Nähe der Ausnahmepunkte nicht allzu stark ins Unendliche wächst, so lässt sich in vielen Fällen mit Hilfe des oben bewiesenen allgemeinen Prinzips zeigen, dass die Funktion $f(x)$ in der Tat überall beschränkt ist. Im Folgenden wollen wir den

[1]) In ihrer obenzitierten Arbeit leiten PHRAGMÉN und LINDELÖF die von ihnen gegebenen speziellen Sätze aus folgendem allgemeinen Prinzip ab:

Die Funktion $f(x)$ genüge der Ungleichung $|f(x)| < 1 + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Randpunktes, mit Ausnahme einer Punktmenge E. In der Nähe der Ausnahmepunkte sei für jedes $\sigma > 0$

$$\omega^\sigma(x) f(x)| < 1 + \varepsilon,$$

wo $\omega(x)$ eine innerhalb G reguläre und von Null verschiedene analytische Funktion ist, deren absoluter Betrag nicht grösser als Eins ist. Unter diesen Bedingungen ist in jedem Punkt von G

$$|f(x)| \leq 1.$$

Wie leicht gezeigt werden kann, ist dieses Kriterium in unserem obigen allgemeinen Prinzip enthalten.

einfachsten hierher gehörigen Fall behandeln, wo die erwähnte Ausnahmemenge einen einzigen Randpunkt enthält. Wir werden folgenden Satz beweisen:

Sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt der Halbebene $\Re(x)>0$ reguläre Funktion, welche für jedes positive ε in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes endlichen Randpunktes der Ungleichung $|f(x)|<1+\varepsilon$ genügt.

Dann trifft einer der folgenden Fälle ein:

1°. *Entweder ist in jedem inneren Punkt der Halbebene*

$$|f(x)|<1;$$

2°. *Oder es wächst die Funktion in der Umgebung des unendlich fernen Randpunktes ins Unendliche und zwar so, dass eine positive Konstante η vorhanden ist derart, dass die Ungleichung*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi > \eta r$$

von einem gewissen Wert r ab besteht.

Man könnte diesen Satz in formellem Anschluss an das obenerwähnte allgemeine Prinzip beweisen. Indessen gestaltet sich die Herleitung dieses Prinzips unter den vorliegenden Umständen so einfach, dass wir es vorziehen den Beweis des obigen Satzes direkt zu führen, und zwar um so lieber als wir einige im Laufe des Beweises auftretende Ungleichungen später noch benutzen werden.

Sei ϱ eine positive Zahl und $\delta>0$ so klein, dass in einer Umgebung vom Radius δ eines jeden Punktes auf dem Segment $|x|\leq\varrho$ der imaginären Achse die Ungleichung $|f(x)|<1+\varepsilon$ besteht, wo ε eine vorgegebene beliebig kleine Zahl bezeichnet. Wendet man dann die Grundungleichung (6) S. 8 in dem Kreissegment $|x|\leq\varrho$, $\Re(x)\geq\delta$ an, wobei auf dem geradlinigen Teil der Begrenzung $\log|f(\xi)|$ durch $\log(1+\varepsilon)$ majoriert werden kann, und lässt man hierauf zuerst δ, dann ε gegen Null streben, so erhält man für jedes x innerhalb des Halbkreises $|x|<\varrho$, $\Re(x)>0$ die Ungleichung

$$\log|f(x)|\leq U_\varrho(x)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}}\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,dh_\varrho(\varrho e^{i\vartheta},x). \tag{19}$$

Hierbei bezeichnet $-h_\varrho(\xi,x)$ die zu der Greenschen Funktion des obigen Halbkreises konjugierte Funktion. Zur Berechnung der harmonischen Funktion U_ϱ bemerke man, dass sie in den Punkten des Halbkreises $x=\varrho e^{i\vartheta}, |\vartheta|<\frac{\pi}{2}$ die Werte $\log|f(\varrho e^{i\vartheta})|$ annimmt, während sie auf der imaginären Achse verschwindet. Gemäss dem Spiegelungsprinzip existiert sie hiernach in dem ganzen Kreis $|x|\leq\varrho$ und nimmt in den Punkten des komplementären Halbkreises $x=\varrho e^{i\vartheta}, \frac{\pi}{2}<\vartheta<\frac{3\pi}{2}$ die Werte $-\log|f(\varrho e^{i(\pi-\vartheta)})|$ an. Demnach sind die Werte der Funktion $U_\varrho(x)$ auf der ganzen Kreisperipherie $|x|=\varrho$ bekannt und wir können sie innerhalb dieses Kreises mittels ihrer Randwerte durch das Poissonsche Integral darstellen. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$(20) \qquad U_\varrho(re^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{2\varrho r(\varrho^2 - r^2)\cos\varphi\cos\vartheta}{[\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)][\varrho^2 + r^2 + 2\varrho r\cos(\vartheta+\varphi)]}\, d\vartheta.$$

Hieraus folgt ferner

$$U_\varrho(re^{i\varphi}) = \frac{2r\cos\varphi}{\pi}(1+\varepsilon(\varrho))\frac{1}{\varrho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\cos\vartheta\, d\vartheta +$$

$$(20)' \qquad \frac{2r\cos\varphi}{\pi}(1+\varepsilon(\varrho))\frac{1}{\varrho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \overline{\log}|f(\varrho e^{i\vartheta})|\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

wo wir mit $\varepsilon(\varrho)$ allgemein jede, nicht immer dieselbe Grösse bezeichnen, die für $\varrho \to \infty$ verschwindet.

Falls nun

$$\liminf_{\varrho\to\infty} \frac{1}{\varrho}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\cos\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

so folgt aus Obigem dass a fortiori $\liminf_{\varrho\to\infty} U_\varrho(x) < 0$ ist, und es muss somit gemäss der Ungleichung (19) $\log|f(x)| \leq 0$, d. h.

$$|f(x)| < 1$$

sein. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Das obenbewiesene Resultat enthält eine Verschärfung des bekannten Satzes von PHRAGMÉN und LINDELÖF, nach welchem eine innerhalb der Halbebene $\Re(x) > 0$ nicht beschränkte Funktion von den im obigen Satze vorausgesetzten Eigenschaften für eine ins Unendliche wachsende Wertfolge $r = r_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ einer Ungleichung

$$\max_{|x|=r} \log|f(x)| > \eta r$$

genügen muss.[1]) Ersetzen wir in unserer Bedingung 2° $\cos\varphi$ mit Eins und $\log|f(re^{i\varphi})|$ mit seinem Maximum auf dem Halbkreis $|x| = r, \Re(x) > 0$, so folgt aus unserem Satze, dass die obige Ungleichung nicht nur für eine unendliche Wertfolge, sondern sogar für jedes hinreichend grosse r bestehen muss: ein Ergebnis, das von PHRAGMÉN und LINDELÖF vermutet wurde.[2])

Dass die in unserem Satze gefundene untere Grenze nicht erhöht werden kann, zeigt die Exponentialfunktion e^x, wo diese Grenze (const. r) erreicht wird.

9. Aus den Überlegungen des vorigen Artikels kann man einige weitergehende Schlüsse über das Verhalten einer analytischen Funktion in der Umgebung eines singulären Punktes ziehen.

Sei $f(x)$, wie oben, eine in jedem endlichen Punkt der Halbebene $\Re(x) > 0$ reguläre

[1]) loc. cit. p. 389.

[2]) loc. cit. p. 390.

analytische Funktion, die für jedes $\varepsilon > 0$ in der Umgebung jedes endlichen Punktes der imaginären Achse der Ungleichung $|f(x)| < 1 + \varepsilon$ genügt. Nimmt man nun an, dass

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi < \varkappa, \tag{21}$$

wo $\varkappa$ eine nichtnegative Konstante ist, so folgt aus der Ungleichung (19) bei Beachtung von (20)′ unmittelbar, dass $f(x)$ in jedem inneren Punkt der Halbebene der Ungleichung

$$|f(x)| < e^{2\varkappa \frac{r \cos \varphi}{\pi}}$$

genügt. Also:

Falls $f(x)$ für $\Re(x) > 0$ regulär ist und für jedes positive ε in den Umgebungen der Punkte der imaginären Achse

$$|f(x)| < 1 + \varepsilon;$$

wenn ferner

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi < \varkappa,$$

so genügt $f(x)$ für jedes $x = re^{i\varphi}$ der Halbebene $\Re(x) > 0$ der Ungleichung

$$|f(x)| < e^{\frac{2\varkappa r \cos \varphi}{\pi}}. \tag{22}$$

Für $\varkappa = 0$ geht dieser Satz in den Satz der vorigen Nummer über. Die Ungleichung (22) ist genau, denn die angegebene obere Grenze wird bei der Funktion $e^{\frac{2\varkappa x}{\pi}}$ erreicht.

Nimmt man statt (21) an, dass die Funktion $f(x)$ in der ganzen Halbebene $\Re(x) > 0$ beschränkt ist: $|f(x)| < 1$, so fehlt das erste Glied in dem Ausdruck (20)′ der Funktion U_ϱ und wir gelangen auf Grund der Ungleichung (19) zu folgendem Resultat:

Wenn $f(x)$ innerhalb der Halbebene $\Re(x) > 0$ regulär und beschränkt ist:

$$|f(x)| < 1,$$

und ferner

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \log |f(re^{i\varphi})| \cos \varphi \, d\varphi \leq -\varkappa < 0.$$

so ist für jedes $x = re^{i\varphi}$ innerhalb der Halbebene

$$|f(x)| \leq e^{-\frac{2\varkappa r \cos \varphi}{\pi}}.$$

Die obere Grenze wird hier wieder von der Exponentialfunktion $e^{-\frac{2\varkappa x}{\pi}}$ erreicht. Für $\varkappa = +\infty$ lehrt der Satz, dass die Funktion $f(x)$ unter den obigen Bedingungen identisch verschwinden muss, ein Ergebnis, dem wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit in verallgemeinerter Form begegnen werden.

N:o 5.

Als Korollar des letztbewiesenen Satzes ergibt sich eine von Julia [1]) gegebene Erweiterung des Schwarzschen Lemmas. Der Juliasche Satz kann in folgender Weise ausgesprochen werden: [2])

Sei $\varphi(x)$ eine Funktion, die für $\Re(x)>0$ regulär ist und der Bedingung

$$\Re(\varphi(x))\geq 0 \tag{23}$$

genügt. Ferner sei in der Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$\varphi(x)=cx(1+\varepsilon(x)) \tag{24}$$

derart, dass $\varepsilon(x)$ in jedem inneren Winkelgebiet für $|x|\to\infty$ gleichmässig gegen Null strebt.

Unter diesen Bedingungen besteht für jedes positive λ die Ungleichung

$$\Re(\varphi(x))>c\lambda$$

in jedem Punkt der Halbebene $\Re(x)>\lambda$.

Setzt man $e^{-\varphi(x)}=f(x)$, so ist nach (23)

$$|f(x)|\leq 1 \tag{25}$$

in der Halbebene $\Re(x)>0$. Ferner ist, da also $\log|f|\leq 0$, für jedes $\delta>0$ auf Grund der asymptotischen Gleichung (24)

$$\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi\leq\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi\leq -c(1-\eta(r))\int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta}\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

wo $\eta(r)=\max|\varepsilon(re^{i\varphi})|$ für $|\varphi|<\frac{\pi}{2}-\delta$. Voraussetzungsgemäss ist $\eta(r)\to 0$ für $r\to\infty$ und demnach

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi\leq -c\int_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta}\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

oder, da δ von vornherein beliebig klein angenommen werden kann,

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi\leq -c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=-\frac{\pi c}{2}. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt nun auf Grund des letztbewiesenen Satzes, dass für jedes $x=re^{i\varphi}$ der Halbebene $\Re(x)>0$ die Ungleichung

[1]) G. Julia: *Extension nouvelle d'un lemme de Schwarz* (Acta math. Bd. 42, 1920, S. 349—355).

[2]) Der Satz wurde von Julia unter unnötig einschränkenden Voraussetzungen bewiesen; in der hier angegebenen erweiterten Form hat ihn später der eine von uns mit Hilfe des Phragmén-Lindelöfschen Satzes nachgewiesen: Vgl. R. Nevanlinna: *Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltessche Momentenproblem* (Annales Acad. Scient. Fennicae, Serie A. T. XVIII, N:o 5, 1922, insb. S. 14).

$$\log|f(x)| = \Re(\varphi(x)) > cr\cos\varphi$$

besteht, woraus die Behauptung des JULIAschen Satzes sich unmittelbar ergibt.

10. Wir knüpfen an den in Artikel 8 bewiesenen Satz an, und werden im Folgenden eine wichtige Verallgemeinerung desselben geben.

Nehmen wir an, dass die in der Halbebene $\Re(x) > 0$ reguläre Funktion $f(x)$, statt in der Nähe der imaginären Achse beschränkt zu sein, in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes endlichen Punktes $x = it$ dieser Achse für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ der Ungleichung

$$\log|f(x)| < A(t) + \varepsilon$$

genügt, wo $A(t)$ eine für alle reelle Werte t definierte stetige Funktion ist. Die Grundungleichung (6) liefert dann, nach einem dem auf S. 17 durchgeführten ähnlichen Grenzübergang, die für $|x| < \varrho$, $\Re(x) > 0$ gültige Beziehung

$$\log|f(x)| < W_\varrho(x) \equiv U_\varrho(x) + V_\varrho(x), \tag{27}$$

wo jetzt

$$U_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=+\frac{\pi}{2}} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, dh_\varrho(\varrho e^{i\vartheta}, x), \qquad V_\varrho(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=+\varrho}^{t=-\varrho} A(t)\, dh_\varrho(it, x). \tag{28}$$

Für die Funktion $U_\varrho(x)$ haben wir schon den Ausdruck (20). Um $V_\varrho(x)$ zu berechnen, bemerke man, dass sie auf dem Segment $|x| = |it| < \varrho$ die Werte $A(t)$ annimmt, während sie auf dem Halbkreis $|x| = \varrho$, $\Re(x) > 0$ verschwindet. Folglich existiert sie in der ganzen Halbebene $\Re(x) > 0$ und nimmt in den Randpunkten $x = it$, $|t| > \varrho$ die Werte $-A\left(\frac{\varrho^2}{t}\right)$ an. Mittels der Greenschen Formel für die Halbebene $\Re(x) > 0$

$$V_\varrho(re^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} V_\varrho(it)\,\frac{r\cos\varphi}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\varphi}\,dt$$

erhält man demnach, wenn man die oben ermittelten Randwerte $V_\varrho(it)$ einführt, für V_ϱ den Ausdruck

$$V_\varrho(re^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\varrho}^{+\varrho} A(t)\frac{r\cos\varphi}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\varphi}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\varrho}^{+\varrho} A(t)\,\frac{r\cos\varphi}{\left(\frac{tr}{\varrho}\right)^2 + \varrho^2 - 2tr\sin\varphi}\,dt. \tag{29}$$

Man lasse jetzt in (27) ϱ über alle Grenzen wachsen. Falls das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A(t)| + |A(-t)|}{t^2}\,dt \tag{30}$$

konvergiert, so strebt hierbei das erste Glied in (29) gegen das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)\,\frac{r\cos\varphi}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\varphi}\,d\varphi,$$

während das zweite Glied verschwindet. Um letzteres einzusehen, bemerke man, dass für $|t| < \varrho$

$$\left(\frac{tr}{\varrho}\right)^2 + \varrho^2 - 2tr\sin\varphi > \left(\varrho - r\frac{|t|}{\varrho}\right)^2 > (\varrho - r)^2;$$

der absolute Betrag des letzten Integrals in (29) ist demnach kleiner als

$$\frac{1}{\pi}\frac{r\cos\varphi}{\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)^2}\int_{-\varrho}^{+\varrho}\frac{|A(t)|}{\varrho^2}\,dt.$$

Zerlegt man hier das Integrationsintervall in drei Segmente: $(-\varrho, -\varrho_0)$, $(-\varrho_0, +\varrho_0)$ und (ϱ_0, ϱ), so kann man, wegen der vorausgesetzten Konvergenz des Integrals (30), ϱ_0 so gross annehmen, dass die den beiden äusseren Segmenten entsprechenden Teile des obigen Integrals für sämtliche $\varrho > \varrho_0$ beliebig klein ausfallen, woraus, da der mittlere Teil des Integrals für $\varrho \to \infty$ verschwindet, die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

Nehmen wir nun noch hinsichtlich des Verhaltens der Funktion $f(x)$ im Inneren der Halbebene $\Re(x) > 0$ an, dass die Bedingung

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\log^+|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi = 0$$

erfüllt ist, so ist, wie S. 18 gezeigt wurde, auch

$$\liminf_{\varrho\to\infty} U_\varrho < 0$$

und somit schliesslich, gemäss (27) und (28),

$$\liminf_{\varrho\to r} W(re^{i\varphi}) < \frac{1}{\pi}\int_{r}^{r} A(t)\frac{r\cos\varphi}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\varphi}\,dt.$$

In Verbindung mit der Beziehung (27) ergibt diese Ungleichung folgendes Resultat:

Sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt der Halbebene $\Re(x) > 0$ reguläre Funktion und $A(t)$ eine für alle reelle Werte t definierte stetige Funktion von der Art, dass das Integral

$$\int^{r}\frac{|A(t)| + |A(-t)|}{t^2}\,dt$$

konvergent ist.

Falls dann $f(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung jedes Punktes $x = it$ der imaginären Achse der Bedingung

$$\log|f(x)| < A(t) + \varepsilon$$

genügt, so ist entweder für jedes $x = re^{i\varphi}$ innerhalb der Halbebene

$$\log|f(x)| < \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{r} A(t)\frac{r\cos\varphi}{t^2 + r^2 - 2tr\sin\varphi}\,dt,$$

oder aber es existiert eine positive Zahl η derart, dass von einem gewissen Wert r an die Ungleichung

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \cos\varphi \, d\varphi > \eta r$$

besteht.

Der S. 17 formulierte PHRAGMÉN-LINDELÖFsche Satz ist im Obigen als spezieller Fall ($A(t) \equiv 0$) enthalten. Der obenbewiesene allgemeinere Satz eignet sich insbesondere zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens einer analytischen Funktion von endlicher Wachstumsordnung; wie der eine von uns an anderer Stelle[1]) gezeigt hat, folgen aus ihm u. A. einige diesbezügliche Ergebnisse von PHRAGMÉN und LINDELÖF.

11. Wir kehren wieder zu den allgemeinen Voraussetzungen von Artikel 7 zurück: $f(x)$ sei also eine innerhalb eines ein- oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes G eindeutige reguläre Funktion. Nimmt man $C(x) = |f(x)|$, so schliessen wir aus dem allgemeinen S. 15 formulierten Kriterium, dass, falls nicht $|f(x)| < 1$ innerhalb G, der Ausdruck

$$\liminf_{\Gamma' \to \Gamma} \int_{\Gamma''} \overset{+}{\log} |f| \, dh' \tag{31}$$

in jedem inneren Punkt x des Gebietes G *positiv* (endlich oder unendlich) sein muss. Im Folgenden werden wir das Integral in (31) einer näheren Untersuchung unterwerfen und einige genauere Ergebnisse betreffs seines Verhaltens für $\Gamma' \to \Gamma$ ableiten.

Wir betrachten eine Folge ganz innerhalb G gelegener Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ von der Art, dass G_n für jedes n ein Teilgebiet von G_{n+1} ist und für $n \to \infty$ schliesslich jedes innere Gebiet G' von G enthält. Sei Γ_n der Rand von G_n und $-h_n(\xi, x)$ die zu seiner Greenschen Funktion konjugierte harmonische Funktion. Dies vorausgesetzt behaupten wir, dass

$$U_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \overset{+}{\log} |f(\xi)| \, dh_n(\xi, x) \tag{32}$$

in jedem inneren Punkt x des Gebietes G mit wachsendem n monoton wächst.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass $U_n(x)$ eine innerhalb G_n harmonische, nicht negative Funktion ist, die in jedem Punkt ξ der Berandung Γ_n den Wert $\overset{+}{\log} |f(\xi)|$ annimmt. Nach der Grundungleichung (6) ist in jedem Punkte des Gebietes G_p

$$\log |f(x)| < U_p(x), \tag{33}$$

und also, da $U_p(x)$ nichtnegativ ist, auch $\overset{+}{\log} |f(x)| \leqq U_p(x)$. Ist nun $n < p$, so besteht diese letzte Ungleichung insbesondere auf dem Rande Γ_n des Gebietes G_n, während in jedem Punkt dieser Kurve $\overset{+}{\log} |f(x)| = U_n(x)$ ist. Es ist somit für $p > n$

$$U_p(x) - U_n(x) > 0 \tag{34}$$

[1]) Vgl. R. NEVANLINNA: *Über die Anwendung des Poissonschen Integrals zur Untersuchung der Singularitäten analytischer Funktionen.* (Verhandlungen des 5. Skandinavischen Mathematikerkongresses in Helsingfors 1922).

in jedem Punkt von Γ_n. Weil nun der Ausdruck links innerhalb G_n harmonisch ist, so folgt, dass die Beziehung (34) auch im Innern von G_n bestehen muss, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Wir nehmen jetzt an, dass die Werte $U_n(x)$ in einem gewissen Punkt $x = x_0$ des Gebietes G für sämtliche n unter einer festen endlichen Schranke liegen; die Werte $U_n(x_0)$ konvergieren dann für $n \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert. Hieraus schliesst man auf Grund des HARNACKschen Prinzips weiter, dass

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x) \equiv U(x)$$

in jedem inneren Punkt von G existiert, und zwar gleichmässig in jedem inneren Gebiete von G. $U(x)$ ist also eine innerhalb G harmonische und nichtnegative Funktion, die nach (33) in jedem inneren Punkt der Ungleichung

$$\log |f(x)| < U(x) \tag{35}$$

genügt.

Sei nun $V(x)$ die konjugierte Funktion von $U(x)$. Dann ist

$$\psi(x) = e^{-U - iV} \tag{36}$$

eine innerhalb G reguläre analytische Funktion, die daselbst von Null verschieden ist und, da U nichtnegativ ist, der Bedingung $|\psi(x)| < 1$ genügt. Setzt man weiter

$$\varphi(x) = f(x)\,\psi(x), \tag{37}$$

so ist gemäss (35) $\log|\varphi| = \log|f| - U \leqq 0$ und also auch $|\varphi(x)| < 1$. Unsere Funktion $f(x)$ kann also als Quotient von zwei innerhalb G regulären und beschränkten Funktionen φ und ψ dargestellt werden.

Die oben erhaltenen Ergebnisse fassen wir in folgendem Satze zusammen:

Sei $f(x)$ eine analytische Funktion, die innerhalb eines einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebietes G eindeutig und regulär ist. Sei ferner $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ eine Folge von Gebieten, die sämtlich ganz innerhalb G liegen und von denen G_n, für jedes n, als Teilgebiet in G_{n+1} enthalten ist. Die Randkurve Γ_n von G_n nähere sich für $n \to \infty$ unbeschränkt der Berandung Γ von G in der Weise, dass sie schliesslich jedes innere Gebiet von G umfasst. Sei noch $-h_n(\xi, x)$ die zu der Greenschen Funktion des Gebietes G_n konjugierte harmonische Funktion.

Unter diesen Bedingungen ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n}^{+} \log |f(\xi)|\, dh_n(\xi, x) \tag{38}$$

für jeden festen inneren Punkt x eine niemals abnehmende Funktion von n. Bleibt es in einem einzigen inneren Punkt für $n \to \infty$ beschränkt, so konvergiert es in jedem inneren Punkt gegen einen endlichen Grenzwert $U(x)$, und zwar gleichmässig in jedem inneren Gebiet von G. Die Funktion $f(x)$ lässt sich dann als Quotient von zwei, durch die Formeln (36) und (37) bestimmten, beschränkten Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ darstellen.

Sind umgekehrt $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei beliebige, innerhalb G eindeutige und reguläre ana-

lytische Funktionen, deren absolute Beträge daselbst nicht grösser als Eins sind, so ist die in dem obigen Satze angegebene Bedingung (Beschränktheit des Integrals (38)) für die Funktion

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

in jedem inneren Punkt von G erfüllt. In der Tat ist, da $|\varphi(x)| < 1$,

$$\log|f(x)| < \log\frac{1}{|\psi(x)|},$$

und, da der Ausdruck rechts nichtnegativ ist, auch

$$\overset{+}{\log}|f(x)| < \log\frac{1}{|\psi(x)|}. \tag{39}$$

Anderseits ist nach der Grundungleichung (6), sobald die Kurve Γ_n den Punkt x umfasst,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} \log|\psi(\xi)|\, dh_n(\xi, x) \geq \log|\psi(x)|,$$

woraus in Verbindung mit (39) folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} \overset{+}{\log}|f(\xi)|\, dh_n(\xi, x) \leq \log\frac{1}{|\psi(x)|}.$$

Der Ausdruck (38) liegt hiernach unter einer von n unabhängigen Schranke, w. z. b. w. Wir sehen also:

Notwendig und hinreichend, damit eine innerhalb G reguläre Funktion als Quotient von zwei beschränkten Funktionen dargestellt werden kann, ist, dass der Ausdruck (38) *in einem inneren Punkt x für jedes n unter einer von n unabhängigen Schranke liegt.*

Ist die oben ausgesprochene Bedingung erfüllt, so existieren offenbar unendlich viele Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, die innerhalb G regulär und den absoluten Beträgen nach nicht grösser als Eins sind, und deren Quotient gleich $f(x)$ ist. Unter diesen unendlich vielen Darstellungen der letztgenannten Funktion nimmt die Darstellung (37), wo $\psi(x)$ durch die Formel (36) definiert ist, eine Sonderstellung ein: *unter allen möglichen Funktionen φ und ψ sind diese diejenigen, deren absolute Beträge möglichst gross sind.* Seien in der Tat $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ zwei beliebige beschränkte Funktionen von der betrachteten Art. Dann ist nach (39) zunächst in jedem inneren Punkt von G

$$\overset{+}{\log}|f(x)| \leq \log\frac{1}{|\psi_1(x)|}.$$

Auf der Kurve Γ_n, wo $\overset{+}{\log}|f| = U_n$, ist hiernach

$$U_n(x) + \log|\psi_1(x)| < 0. \tag{40}$$

Hier ist der Ausdruck links eine innerhalb G_n, mit Ausnahme einer Anzahl *negativer* logarithmischer Pole (in den eventuellen Nullstellen von $\psi_1(x)$), reguläre harmonische Funktion, und wir schliessen demnach, dass die Beziehung (40) auch *innerhalb* G_n bestehen muss. Nun ist $U_n(x) \to U(x)$ für $n \to \infty$, und nach (40) also auch

$$U(x)+\log|\psi_1(x)|<0 \tag{41}$$

innerhalb des ganzen Gebietes G. Gemäss (36) ist aber $U=-\log|\psi|$, und es folgt also aus (41), dass $|\psi(x)|>|\psi_1(x)|$ in jedem Punkt von G sein muss. Aus der Identität

$$\frac{\varphi}{\psi}=\frac{\varphi_1}{\psi_1}$$

ergibt sich hieraus weiter dass auch $|\varphi(x)|>|\varphi_1(x)|$ ist, w. z. b. w.

12. In dem besonderen Fall, wo G ein Kreis ist, führt der allgemeine Satz auf S. 25 zu folgendem Kriterium:

Notwendig und hinreichend, damit eine innerhalb des Einheitskreises $|x|<1$ eindeutige und reguläre analytische Funktion $f(x)$ sich als Quotient von zwei beschränkten Funktionen darstellen lässt, ist, dass das Integral

$$U_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \tag{42}$$

für $r<1$ beschränkt ist.

Mittels dieses Satzes können einige bekannte Sätze über beschränkte Funktionen zu der allgemeineren Funktionenklasse erweitert werden, für welche das Integral (42) beschränkt ist. Wir wollen dies an einigen Beispielen erläutern.

FATOU[1]) hat bekanntlich gezeigt, dass eine innerhalb des Einheitskreises beschränkte Funktion bei radialer Annäherung an den Rand fast überall, d. h. in jedem Randpunkt mit Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null, gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert. Dieser Satz wurde von F. und M. RIESZ[2]) dahin verallgemeinert, dass die Randwerte fast überall existieren, wenn das Integral

$$\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi \tag{43}$$

für $r<1$ beschränkt bleibt. Sie beweisen ferner die von FATOU ausgesprochene Vermutung, dass die Menge derjenigen Randpunkte, in denen die Randwerte gleich einer gegebenen Zahl a sind, eine Nullmenge ist.

Unser obiger Satz führt nun zu einer nochmaligen Erweiterung des FATOUschen Satzes. Ist nämlich die Funktion U_r für $r<1$ beschränkt, so kann die betrachtete Funktion $f(x)$ als Quotient von zwei beschränkten Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden. Die Funktion $f(x)$ hat also sicher wohlbestimmte Randwerte in jedem Randpunkt, wo beide Funktionen φ und ψ bestimmte Grenzwerte besitzen, die nicht beide gleich Null sind. Das Mass der Komplementärmenge der letztgenannten Randpunkte ist aber gemäss der eben genannten Sätze von FATOU und F. u. M. RIESZ gleich Null, und wir sehen also, dass *jede Funktion, für welche*

[1]) P. FATOU: *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (Acta mathematica, T. 30, 1906, S. 335—400).

[2]) F. und M. RIESZ: *Über die Randwerte einer analytischen Funktion* (Quatrième congrès des Math. Scandinaves à Stockholm 1916, S. 27—44).

das Integral U_r für $r<1$ beschränkt ist, bei radialer Annäherung an den Rand fast überall bestimmte Randwerte besitzt.

Das so erhaltene Kriterium enthält das von RIESZ gegebene als speziellen Fall. In der Tat ist U_r offenbar beschränkt, sobald das Integral (43) oder allgemeiner sogar

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^{\delta} d\varphi ,$$

wo δ eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, für $r\to 1$ beschränkt bleibt.

Der RIESZsche Satz behält auch für die von uns betrachtete Funktionenklasse seine Gültigkeit: in der Tat kann $f(x)$ nur dann in einem Randpunkte den Grenzwert a haben, wenn die Funktion $\varphi(x)-a\,\psi(x)$ in diesem Punkte verschwindet; die Menge dieser Punkte ist aber eine Nullmenge, weil die letztgenannte Funktion beschränkt ist.

Wir gehen zu einer weiteren Anwendung unseres Satzes (S. 26) über. Sei $f(x)$ eine innerhalb des Einheitskreises reguläre analytische Funktion, für welche das Integral U_r beschränkt ist und die in den Punkten

$$x_n = r_n e^{i\varphi_n} \quad (n=1,2,\ldots) \tag{44}$$

verschwindet. Nach unserem Satze ist $f(x)$ gleich dem Quotient von zwei beschränkten Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, von denen die letztgenannte von Null verschieden ist. Der Zähler $\varphi(x)$ verschwindet also in den Punkten (44). Nun hat BLASCHKE[1]) gezeigt, dass eine beschränkte Funktion, die in den Punkten (44) verschwindet, identisch gleich Null ist, wenn die Reihe

$$\sum_1^{\infty}(1-r_n) \tag{45}$$

divergent ist, und wir schliessen also, dass dieser BLASCHKEsche Satz auch für die von uns betrachtete Funktionenklasse gültig bleibt, ein Resultat, für welches im letzten Abschnitte dieser Arbeit ein direkter Beweis gegeben wird. Stimmen also zwei Funktionen der von uns betrachteten Klasse in einer Punktmenge (44) überein, für welche die Reihe (45) divergent ist, so folgt hieraus, da ihre Differenz ebenfalls derselben Klasse angehört, dass die Funktionen identisch sind; von dieser Bemerkung werden wir gleich Gebrauch machen.

Sei $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen, die sämtlich innerhalb des Einheitskreises eindeutig und regulär sind und für $r<1$ und für jedes n der Ungleichung

$$U_r^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^{+}\log|f_n(re^{i\varphi})|\,d\varphi < M \tag{46}$$

genügen, wo M eine Konstante bezeichnet. Mittels des S. 23—24 angegebenen Verfahrens kann man dann für jedes n zwei beschränkte Funktionen $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ bestimmen, so dass

---

[1]) W. BLASCHKE: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen* (Leipz. Ber. Bd. 67, 1915, S. 194—200).

$$f_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\psi_n(x)} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo gemäss (36) $|\psi_n(o)| = e^{-U_r^{(n)}}$ und also nach (46)

$$|\psi_n(o)| > e^{-M} \tag{47}$$

für jedes n ist.

Aus der Folge der beschränkten Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ können wir nach dem VITALIschen Satze eine Teilfolge $\varphi_{n_\nu}(\nu = 1, 2, \ldots)$ auswählen, die in jedem inneren Bereiche des Einheitskreises gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $\varphi(x)$ ist also für $|x| < 1$ regulär und beschränkt. Ebenso lässt sich aus der Folge $\psi_{n_\nu}(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine Teilfolge $\psi_{n_{\nu_k}}(k = 1, 2, \ldots)$ herausnehmen, die gegen eine beschränkte Funktion $\psi(x)$ konvergiert; diese Grenzfunktion ist wegen (47) nicht identisch gleich Null. Die Folge $f_{n_{\nu_k}}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ konvergiert also für $k \to \infty$ gegen die endliche Funktion

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

und wir erhalten demnach folgendes Resultat:

Wenn $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von analytischen Funktionen ist, die innerhalb des Einheitskreises regulär und von der Art sind, dass die zugehörigen Integrale $U_r^{(n)}$ für $r < 1$ unter einer von n unabhängigen Schranke liegen, so kann man aus ihr eine Teilfolge auswählen, die in jedem inneren Gebiet gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $f(x)$ gehört wieder der betrachteten Klasse an.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die oben betrachtete Folge $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ in einer Punktmenge (44), für welche die Reihe (45) divergent ist, konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_\nu) = z_\nu. \tag{48}$$

Unter dieser Bedingung muss die Folge in jedem inneren Gebiet des Einheitskreises gleichmässig konvergieren. In der Tat könnte man im entgegengesetzten Fall aus der betrachteten Folge zwei Teilfolgen $f_{\mu_n}(x)$ und f_{ν_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ herausgreifen, die gegen zwei *verschiedene* Grenzfunktionen $f^{(1)}(x)$ bzw. $f^{(2)}(x)$ konvergieren. Dies würde aber im Widerspruch mit der Bemerkung S. 27 stehen, nach welcher diese Funktionen, die ja nach (48) in den Punkten (44) gemeinsame Werte haben, identisch sein müssen. Wir sehen also:

Sei $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Funktionen, die innerhalb des Einheitskreises regulär sind und die für jedes n und $r < 1$ der Bedingung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f_n(re^{i\varphi})| \, d\varphi < M$$

genügen. Konvergiert diese Folge dann in einer Punktfolge (44) *für welche die Reihe* (45) *divergent ist, so konvergiert sie gleichmässig in jedem inneren Bereich des Einheitskreises.*

III. Über die Beziehungen zwischen der Verteilung der Nullstellen und Pole einer analytischen Funktion und dem Verhalten des absoluten Betrages derselben.

13. In diesem Abschnitt werden wir uns hauptsächlich mit der Untersuchung der Beziehungen beschäftigen, welche zwischen der Verteilung der Nullstellen und Pole und dem Anwachsen des absoluten Betrages einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie bestehen. Hierbei könnte man sich in einigen Fällen des verallgemeinerten JENSENschen Satzes (3) bedienen; indessen wird es vorteilhafter sein zu der allgemeineren Grundformel (2) zurückzugehen und hier die willkürliche Funktion λ in jedem besonderen Falle den gegebenen Umständen gemäss zu wählen. Wie man die Wahl der Funktion λ zu treffen hat, wird aus den in der Folge behandelten Problemen hervorgehen; allgemein gesagt soll diese Funktion so angenommen werden, dass die Werte der Summen links in (2) in möglichst durchsichtiger und prägnanter Weise die Verteilung der Nullstellen und Pole charakterisieren. Ferner wird es immer vorteilhaft sein, dass die Funktion λ auf dem Rande oder wenigstens auf grossen Teilen desselben verschwindet.

14. Wir machen den Anfang mit einer in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, z. B. ausserhalb und auf dem Rande des Kreises $|x| = \varrho_0$, eindeutigen und meromorphen Funktion $f(x)$. Die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen und Pole der Funktion seien

$$a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots \text{ bzw. } b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots,$$

wo eine Stelle n^{ter} Ordnung n mal vorkommt. Diese Punktfolgen häufen sich gegen den unendlich fernen Punkt der Ebene, welcher im allgemeinen eine wesentlich singuläre Stelle unserer Funktion ist. Nun wird offenbar, falls $f(x)$ eine nicht identisch unendliche oder verschwindende Funktion ist, zwischen der Dichte der Nullstellen bzw. dem Nullwerden der Funktion für $x \to \infty$ einerseits und der Polendichte bzw. dem Unendlichwerden der Funktion für $x \to \infty$ anderseits eine Beziehung bestehen müssen derart, dass jene, in entgegengesetzten Richtungen wirkend, einander kompensieren.

Um diesen Zusammenhang zu untersuchen, gehen wir von der Grundformel (2) aus, die wir in einem Kreisring $\varrho_0 \leq |x| < \varrho$ anwenden. Unter k eine beliebige positive Konstante verstanden, benutzen wir hierbei als Hilfsfunktion $\lambda(x)$ die Funktion

$$\lambda(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{\varrho^k}\right) = \int_r^\varrho \frac{dt}{t^{k+1}} \qquad (x = re^{i\varphi}),$$

welche auf dem äusseren Randkreis $r = \varrho$ des Ringes verschwindet. Führt man die Sprungfunktionen $h(r, \varrho_0)$, $k(r, \varrho_0)$ ein, welche die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole innerhalb des Kreisringes $\varrho_0 < |x| < r$ bezeichnen, so wird

$$\sum \lambda(a_\mu) = \frac{1}{k}\left\{\sum \frac{1}{|a_\mu|^k} - \frac{h(\varrho,\varrho_0)}{\varrho^k}\right\} = \frac{1}{k}\left\{\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{dh(r,\varrho_0)}{r^k} - \frac{h(\varrho,\varrho_0)}{\varrho^k}\right\},$$

woraus mittels partieller Integration folgt

$$\sum \lambda(a_\mu) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\, dr.$$

In derselben Weise ergibt sich

$$\sum \lambda(b_\nu) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{k(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\, dr,$$

und die linke Seite der Formel (2) erhält somit die Form

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0) - k(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\, dr.$$

Zur Berechnung der rechten Seite hat man

$$\Delta\lambda \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{k}{r^{k+2}},$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = -\frac{d\lambda}{dr} = +\frac{1}{r^{k+1}},$$

wo das obere Vorzeichen auf dem äusseren, das untere auf dem inneren Randkreis gilt. Führt man noch die Grössen

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$$\Delta(r) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\arg f(re^{i\varphi})\, d\varphi$$

ein, wo $\Delta(r)$ also gleich dem durch 2π dividierten Zuwachs des Argumentes von $f(x)$ längs dem Kreis $|x| = r$ ist, so ergibt sich auf der rechten Seite der Formel (2) der Ausdruck

$$\frac{\mu(\varrho)}{\varrho^k} - \frac{\mu(\varrho_0)}{\varrho_0^k} + k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\, dr + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\varrho^k} - \frac{1}{\varrho_0^k}\right)\Delta(\varrho_0).$$

Alles in allem erhalten wir schliesslich

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0) - k(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\, dr = \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^k} - \frac{\mu(\varrho_0)}{\varrho_0^k} + k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\, dr + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\varrho^k} - \frac{1}{\varrho_0^k}\right)\Delta(\varrho_0), \tag{49}$$

eine Formel, welche also für jedes $k > 0$ und $\varrho \geq \varrho_0$ gilt. Durch den Grenzübergang $k \to 0$ folgt aus dieser Beziehung die speziellere Formel

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0) - k(r,\varrho_0)}{r}\, dr = \mu(\varrho) - \mu(\varrho_0) - \Delta(\varrho_0)\log\frac{\varrho}{\varrho_0}, \tag{50}$$

eine Gleichung, welche, wie man sofort erkennt, den JENSENschen Satz in leichter Verallgemeinerung wiedergibt.

Lässt man in der obengewonnenen Formel (49) ϱ ins Unendliche wachsen, so nähert sich das letzte Glied rechts einem endlichen Grenzwert und die Gleichung gibt uns somit den exakten Ausdruck für die Art, in welcher die Dichte der Nullstellen und Pole und das Anwachsen der Funktion $f(x)$ sich gegenseitig kompensieren.

Als Anwendung der Formel (49) wollen wir folgenden Satz beweisen:

Sei $f(x)$ eine in der Umgebung $|x|>\varrho_0$ des unendlich fernen Punktes eindeutige, im Endlichen reguläre Funktion mit den Nullstellen

$$a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots .$$

Dann konvergieren bzw. divergieren die Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|^k} \tag{51}$$

und das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr \tag{52}$$

für jedes positive k gleichzeitig.

Da keine Pole vorhanden sind, so ist jetzt $k(r,\varrho_0)\equiv 0$, und aus (49) wird

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^k} - \frac{\mu(\varrho_0)}{\varrho_0^k} + k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\varrho^k} - \frac{1}{\varrho_0^k}\right)\Delta(\varrho_0), \tag{49'}$$

während die speziellere Formel (50)

$$\mu(\varrho) - \mu(\varrho_0) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0)}{r}\,dr + \Delta(\varrho_0)\log\frac{\varrho}{\varrho_0} \tag{50'}$$

ergibt.

Die letzte Formel zeigt uns, dass $\mu(\varrho)$ unter den vorliegenden Voraussetzungen von einem gewissen Wert ϱ an *positiv* und mit ϱ *wachsend* ist; in der Tat ist ja gemäss dem Argumentprinzip $\Delta(\varrho_0)$ für ein genügend grosses ϱ_0 nichtnegativ während $h(r,\varrho_0)$ nach seiner Definition nichtnegativ ist. Wir denken uns ϱ so gross angenommen, dass $\mu(r)$ für $r>\varrho$ die beiden obigen Eigenschaften besitzt. Dann ist es offenbar möglich eine Zahl $\varrho'>\varrho$ so zu wählen, dass

$$k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr < \frac{\mu(\varrho)}{\varrho^k} + k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr < k\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr . \tag{53}$$

Dies ist klar, falls das Integral $\int_{\varrho_0}^{\infty} \mu(r)\,r^{-k-1}\,dr$ divergent ist, und falls es wiederum konvergiert, so folgt die spätere Ungleichung aus

$$\frac{\mu(\varrho)}{\varrho^k} = k\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\mu(\varrho)}{r^{k+1}}\,dr < k\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^{k+1}}\,dr .$$

Auf Grund der Ungleichung (53) ergibt sich aus (49)' zunächst unmittelbar, dass die Integrale (52) und

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\,dr \tag{54}$$

gleichzeitig entweder konvergieren oder divergieren. Da nun ferner

$$k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\,dr = k\sum \lambda(a_\mu) = \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \frac{1}{|a_\mu|^k} - \frac{h(\varrho,\varrho_0)}{\varrho^k},$$

und es somit, da $h(r,\varrho_0)$ nichtnegativ und mit r wachsend ist, für jedes ϱ möglich ist $\varrho''>\varrho$ so zu wählen, dass

$$k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\,dr < \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \frac{1}{|a_\mu|^k} < k\int_{\varrho_0}^{\varrho''} \frac{h(r,\varrho_0)}{r^{k+1}}\,dr,$$

so konvergiert bzw. divergiert die Reihe (51) gleichzeitig mit dem Integral (54) und somit nach Obigem auch mit dem Integral (52), womit der Satz bewiesen ist.

Falls wir mit $M(r)$ den Maximalbetrag von $|f(x)|$ auf dem Kreis $|x|=r$ bezeichnen, so ergibt sich aus der Definition der Grösse $\mu(r)$ (S. 30) unmittelbar $\mu(r)\leq \log M(r)$, und wir schliessen folglich, dass für die Konvergenz des Integrals (52) jedenfalls hinreichend ist, dass das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

konvergiert. Wir erhalten somit aus dem obenbewiesenen Satz folgendes Korollar:

Falls das Integral $\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\,dr$ *für ein positives* k *konvergent ist, so konvergiert auch die Reihe* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{|a_\mu|^k}$.

Dieses Resultat ist früher von VALIRON[1]) für ganze Funktionen endlicher Ordnung bewiesen worden. Zugleich hat er gezeigt, dass der Satz in diesem speziellen Fall umgekehrt werden kann, was unter den obigen allgemeineren Voraussetzungen offenbar nicht möglich ist.

15. In dem vorgehenden Artikel wurde eine analytische Funktion in der Umgebung eines isolierten wesentlich singulären Punktes untersucht. Wir wollen jetzt analoge Fragestellungen betreffs des Verhaltens einer Funktion in der Nähe einer singulären Linie behandeln. Hierbei werden wir, da die folgenden Betrachtungen den oben durchgeführten ganz analog sind, uns etwas kürzer fassen können.

Sei also $f(x)$ eine z. B. in der inneren Umgebung $\varrho_0<|x|<1$ des Einheitskreises eindeutige meromorphe Funktion mit den nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Null-

[1]) G. VALIRON: *Sur les fonctions d'ordre fini* (Bulletin des sciences math., 2e serie, t. XLV, septembre 1921).

stellen $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$ und Polen $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$. Diese Punktfolgen häufen sich gegen die Peripherie des Einheitskreises, welche ganz oder teilweise eine singuläre Linie der Funktion $f(x)$ sein kann. Wir wollen eine der Formel (49) analoge Gleichung herleiten, welche uns zeigen wird, wie die Dichte der Nullstellen und Pole und das Anwachsen der Funktion einander beeinflussen.

Sei $\varrho_0 < \varrho < 1$ und $k > 0$; wir wenden die Grundformel (2) in dem Kreisring $\varrho_0 \leq r \leq \varrho$ an mit

$$\int_r^\varrho (1 - t)^k \frac{dt}{t} \qquad (x = re^{i\varphi}).$$

Werden die Grössen $h(r, \varrho_0)$, $k(r, \varrho_0)$, $\mu(r)$ und $\Delta(r)$ wie oben definiert, so ergibt sich analog mit der Formel (49):

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} (h(r, \varrho_0) - k(r, \varrho_0))(1 - r)^k \frac{dr}{r} =$$

(55)

$$(1 - \varrho)^k \mu(\varrho) - (1 - \varrho_0)^k \mu(\varrho_0) + k \int_{\varrho_0}^{\varrho} \mu(r)(1 - r)^{k-1} dr - \Delta(\varrho_0) \int_{\varrho_0}^{\varrho} (1 - r)^k \frac{dr}{r}.$$

Diese Formel gilt für alle $\varrho_0 < \varrho < 1$ zunächst für jedes positive k; man kann jedoch auch hier k gegen Null abnehmen lassen und erhält so an der Grenze wieder die erweiterte JENSENsche Formel (50). Für $\varrho \to 1$ nähert sich das letzte Glied der obigen Gleichung einem bestimmten Grenzwert, und die Formel (55) liefert uns somit ein Gesetz, nach welchem die Dichte der Nullstellen und Pole und das Wachstum der Funktion in der Umgebung des Einheitskreises sich gegenseitig im Gleichgewicht halten.

Falls insbesondere die Funktion $f(x)$ in dem Gebiet $\varrho_0 < r < 1$ regulär d. h. polfrei ist und somit $k(r, \varrho_0) \equiv 0$, so folgt mittels einer der auf S. 31—32 durchgeführten analogen Überlegung, dass die Integrale

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} h(r, \varrho_0)(1 - r)^k \frac{dr}{r} \quad \text{und} \quad \int_{\varrho_0}^{\varrho} \mu(r)(1 - r)^{k-1} dr$$

für jedes positive k mit $\varrho \to 1$ zugleich entweder konvergieren oder divergieren; dies gilt auch noch für $k = 0$, wenn das zweite Integral mit $\mu(\varrho)$ ersetzt wird. Nun ist offenbar das erste Integral in Bezug auf Konvergenz und Divergenz für $\varrho \to 1$ mit dem Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} h(r, \varrho_0)(1 - r)^k dr$$

gleichwertig, und dieses Integral wiederum konvergiert oder divergiert zugleich mit der Reihe

(56)

$$\sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < \varrho} (1 - |a_\mu|)^{1+k}.$$

In der Tat ist ja

$$(k+1)\int_{\varrho_0}^{\varrho} h(r,\varrho_0)(1-r)^k dr = \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} (1-|a_\mu|)^{1+k} - h(\varrho,\varrho_0)(1-\varrho)^{1+k},$$

und es existiert demnach für jedes $\varrho_0 < \varrho < 1$ eine Zahl ϱ' zwischen ϱ und 1 von der Art, dass

$$(k+1)\int_{\varrho_0}^{\varrho} h(r,\varrho_0)(1-r)^k dr < \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} (1-|a_\mu|)^{1+k} < (k+1)\int_{\varrho_0}^{\varrho'} h(r,\varrho_0)(1-r)^k dr.$$

Hiermit haben wir folgendes Ergebnis:

Sei $f(x)$ eine in dem Gebiet $\varrho_0 \leq r < 1$ eindeutige reguläre Funktion mit den nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$. Dann sind für jedes $k > 0$ die Grenzwerte der Summe (56) *und des Integrals*

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \mu(r)(1-r)^{k-1} dr$$

für $\varrho \to 1$ gleichzeitig endlich oder unendlich; dies gilt auch noch für $k = 0$, falls das Integral mit $\mu(\varrho)$ ersetzt wird.

Bezeichnet $M(r)$, wie oben, den Maximalmodul der Funktion auf dem Kreis $|x| = r$, so folgt hieraus, da $\mu(r) \leq \log M(r)$, der speziellere Satz:

Falls für ein positives k das Integral $\int_{\varrho_0}^{1} \log M(r)(1-r)^{k-1} dr$ endlich ist, so konvergiert die Reihe $\sum_1^\infty (1-|a_\mu|)^{k+1}$. Wenn $k = 0$, so ist für die Konvergenz dieser Reihe hinreichend, dass $\log M(r)$ und somit die Funktion $f(x)$ selbst in der Umgebung des Einheitskreises beschränkt ist.

Der den Fall $k = 0$ betreffende Teil dieses Satzes ist für den Fall einer in dem ganzen Einheitskreise regulären Funktion von BLASCHKE[1]) bewiesen worden.

16. Wir werden jetzt zur Betrachtung einer innerhalb und auf dem Rande eines sich ins Unendliche streckenden Sektors

$$r \geq \varrho_0, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2k} \qquad (x = re^{i\varphi}) \tag{57}$$

meromorphen Funktion $f(x)$ übergehen. Die Nullstellen bzw. Pole der Funktion bezeichnen wir, wie oben, mit $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ und schreiben

$$a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}, \quad b_\nu = |b_\nu| e^{i\beta_\nu}.$$

Unter diesen Voraussetzungen bringen wir die Grundformel (2) S. 6 zur Anwendung in dem Gebiet

$$\varrho_0 \leq r \leq \varrho, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2k}$$

mit

[1]) loc. cit.

$$\lambda(x) = \frac{\cos k\varphi}{k}\left(\frac{1}{r^k} - \frac{1}{\varrho^k}\right) = \cos k\varphi \int_r^\varrho \frac{dt}{t^{k+1}}. \tag{58}$$

Um der hierbei sich ergebenden Gleichung eine übersichtliche Form zu geben, führen wir folgende Hilfsgrössen ein:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(r) = \dfrac{k}{2}\displaystyle\int_{\varrho_0}^{r} \log\left\{|f(te^{i\frac{\pi}{2k}})|\,|f(te^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\frac{dt}{t}, \\[2ex] m(r) = \dfrac{k}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\, d\varphi, \\[2ex] a(r) = \displaystyle\sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < r} \cos k\alpha_\mu, \quad b(r) = \sum_{\varrho_0 < |b_\nu| < r} \cos k\beta_\nu. \end{array}\right. \tag{59}$$

Dann wird (vgl. S. 30)

$$\sum \lambda(a_\mu) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r)}{r^{k+1}}\, dr, \qquad \sum \lambda(b_\nu) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{b(r)}{r^{k+1}}\, dr.$$

Auf der linken Seite der Formel (2) erhalten wir demnach den Ausdruck

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r) - b(r)}{r^{k+1}}\, dr.$$

Zur Berechnung der rechten Seite der Formel hat man zunächst

$$\Delta\lambda = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial\varphi^2} = \frac{k}{\varrho^k}\,\frac{\cos k\varphi}{r^2},$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi}\int_G \log|f|\,\Delta\lambda\, d\sigma = \frac{1}{\pi\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r)}{r}\, dr.$$

Ferner wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f|\frac{\partial\lambda}{\partial n}\, ds = \frac{1}{k\pi}\left\{\frac{m(\varrho)}{\varrho^k} - \frac{m(\varrho_0)}{\varrho_0^k}\right\} + \frac{1}{\pi}\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\, dr$$

und

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \lambda\frac{\partial}{\partial n}\log|f|\, ds = \frac{\varrho_0}{2k\pi}\left(\frac{1}{\varrho^k} - \frac{1}{\varrho_0^k}\right)\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \frac{\partial}{\partial r}\log|f(\varrho_0 e^{i\varphi})|\cos k\varphi\, d\varphi.$$

Auf der rechten Seite der Formel (2) ergibt sich somit

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\, dr + \frac{1}{\varrho^k}\left(\frac{m(\varrho)}{k} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r)}{r}\, dr\right) - P\right\},$$

wo P ein Ausdruck ist, welcher sich für $\varrho \to \infty$ *einem bestimmten endlichen Grenzwert* P_0 *nähert.* Fasst man das Obige zusammen, so gelangt man zu der folgenden allgemeinen Formel:

$$(60) \qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr + \frac{1}{\varrho^k}\left\{\frac{m(\varrho)}{k} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r)}{r}\,dr\right\} - \pi \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r)-b(r)}{r^{k+1}}\,dr = P.$$

Bevor wir in den nachfolgenden Artikeln zu spezielleren Anwendungen dieser Formel übergehen, sei nachstehende allgemeine Bemerkung zu ihrer Erläuterung vorausgeschickt. Die linke Seite der Formel enthält drei wesentlich verschiedenartige Glieder. In der Tat: das erste Glied ist durch die Werte bestimmt, welche der Modul $|f(x)|$ auf den *Berandungsstrahlen* des Sektors (57) annimmt, das zweite Glied hängt allein von den Werten des Moduls $|f(x)|$ *innerhalb* dieses Sektors ab, das dritte Glied ist durch die *Verteilung der Nullstellen und Pole* der Funktion vollständig bestimmt. Die Formel lehrt uns, dass diese drei Glieder für $\varrho \to \infty$ einander im Gleichgewicht halten derart, dass *die Summe sich hierbei einem bestimmten endlichen Grenzwert* P_0 *nähert.* Diese Tatsache erhält vielleicht ihren prägnantesten Ausdruck, wenn wir sie in der Form des folgenden allgemeinen Prinzips betreffs des identischen Verschwindens einer in dem Gebiet (57) meromorphen Funktion aussprechen:

Sei $f(x)$ *eine innerhalb und auf dem Rande des Gebietes* (57) *meromorphe Funktion mit den nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen* $a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}$ *und Polen* $b_\nu = |b_\nu| e^{i\beta_\nu}$. *Falls dann die untere Grenze des Ausdruckes* (60) *für* $\varrho \to \infty$ *negativ unendlich ist, d. h. falls eine Folge ins Unendliche wachsender Zahlen* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ *existiert derart, dass der besagte Ausdruck gegen* $-\infty$ *konvergiert, wenn* ϱ *diese Zahlenfolge durchläuft, so muss die Funktion* $f(x)$ *identisch verschwinden.*

Auf Grund dieses Prinzips werden wir in der Folge eine Reihe von Sätzen betreffs des identischen Verschwindens einer analytischen Funktion beweisen.

17. Nehmen wir vorerst an, es sei die obenbehandelte Funktion $f(x)$ im Gebiet (57) regulär, so ist $b(r) \equiv 0$. Da ferner $a(r)$ seiner Definition nach eine nichtnegative Grösse ist, so wird im vorliegenden Fall der Ausdruck (60) jedenfalls nicht kleiner, wenn man das letzte Glied weglässt. Hieraus folgt aber auf Grund des am Ende des vorhergehenden Artikels formulierten Prinzips folgender allgemeine Satz:

Sei $f(x)$ *eine innerhalb und auf dem Rande des Gebietes* (57) *reguläre Funktion. Falls dann*

$$(A) \qquad \liminf_{\varrho \to \infty} \left\{\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr + \frac{1}{\varrho^k}\left(\frac{m(\varrho)}{k} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r)}{r}\,dr\right)\right\} = -\infty,$$

wo $\alpha(r)$ *und* $m(r)$ *durch* (59) *definiert sind, so muss die Funktion* $f(x)$ *identisch verschwinden.*

Da dieser Satz noch sehr allgemein ist, wird es angemessen sein, einige der wichtigsten Fälle zu erwähnen, wo die Bedingungen desselben realisiert sind; die so erhaltenen Resultate werden wir als besondere Sätze formulieren. Wir machen den Anfang mit folgendem Satz:

Sei $f(x)$ *eine innerhalb und auf dem Rande des Gebietes* (57) *reguläre Funktion der Variable* $x = re^{i\varphi}$, *welche folgenden Bedingungen genügt:*

1°. *Auf den Berandungsstrahlen besteht die Ungleichung:*

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\leq -A(r),$$

wo $A(r)$ eine reelle Funktion bezeichnet derart, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{A(r)}{r^{k+1}}dr\to+\infty \text{ für } \varrho\to\infty.$$

2°. *Es existiert eine Konstante M derart, dass für alle $r\geq\varrho_0$*

$$m(r)\equiv\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\,d\varphi<Mr^k,$$

wozu z. B. hinreichend ist, dass für jedes $x=re^{i\varphi}$ innerhalb des Gebietes (57) $\log|f(re^{i\varphi})|<Mr^k$.

Unter diesen Bedingungen muss die Funktion $f(x)$ identisch verschwinden.

Aus der Voraussetzung 2° folgt zunächst

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{m(r)}{r}dr\leq M\int_{\varrho_0}^{\varrho}r^{k-1}dr\leq\frac{M}{k}\varrho^k,$$

und somit

(*a*) $$\frac{1}{\varrho^k}\left(\frac{m(\varrho)}{k}+\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{m(r)}{r}dr\right)\leq\frac{2M}{k}$$

für alle $\varrho>\varrho_0$. Ferner ist nach (59) bei Beachtung der Voraussetzung 1°

$$\alpha(r)\leq -k\int_{\varrho_0}^{r}\frac{A(t)}{t}dt,$$

und demnach

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}dr<\int_{\varrho_0}^{\varrho}d\left(\frac{1}{r^k}\right)\int_{\varrho_0}^{r}\frac{A(t)}{t}dt=\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{A(t)}{t}dt-\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{A(t)}{t^{k+1}}dt.$$

Wir setzen

$$\int_{\varrho_0}^{r}\frac{A(t)}{t^{k+1}}dt=T(r)$$

und erhalten

$$\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{A(t)}{t}dt=\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}t^k\,dT(t)=T(\varrho)-\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}T(t)\,d(t^k).$$

Es wird also

(*b*) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}dr\leq -\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}T(t)\,d(t^k),$$

woraus, da voraussetzungsgemäss $T(t)\to\infty$ für $t\to\infty$, unmittelbar folgt, dass der Ausdruck

rechts und somit a fortiori das Integral links für $\varrho \to \infty$ negativ unendlich wird. Dies zeigt aber in Verbindung mit der Ungleichung (a), dass die Bedingung (A) S. 36 erfüllt ist.

Aus dem obenbewiesenen Satz folgt z. B., dass eine im Gebiet (57) reguläre Funktion, welche auf den Berandungsgeraden einer Ungleichung

$$\log|f(re^{\pm i\frac{\pi}{2k}})| < -\varkappa r^{\alpha}$$

mit $\varkappa > 0$, $\alpha \geq k$ genügt, während in den inneren Punkten

$$\log|f(re^{i\varphi})| \leq Mr^{k},$$

identisch verschwindet. Dieser spezielle Satz wurde zuerst von WATSON[1]) für den Fall $\alpha > k$ bewiesen, später hat der eine von uns[2]) die Gültigkeit des Satzes auf den Fall $\alpha = k$ erweitert. Wie unser allgemeinere Satz zeigt, kann man noch weiter gehen und auf dem Rande z. B. nur noch

$$\log|f(re^{\pm i\frac{\pi}{2k}})| < -\frac{\varkappa r^{k}}{\log r \log_2 r \cdots \log_n r}$$

voraussetzen, wo $\log_n$ den n-mal iterierten Logarithmus bezeichnet.

Neuerdings hat CARLEMAN[3]) einen Satz angegeben, welcher in Bezug auf Allgemeinheit und Präzision dem oben formulierten sehr nahe kommt. Indessen ist bei ihm die der Bedingung 1° entsprechende Voraussetzung etwas restriktiver, indem angenommen wird, dass für $\varrho \to \infty$

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} (\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})| + \log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|)\frac{dr}{r^{k+1}} \to -\infty$$

in der besonderen Weise, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} (\overset{+}{\log}|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})| + \overset{+}{\log}|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|)\frac{dr}{r^{k+1}}$$

für $\varrho > \varrho_0$ nach oben beschränkt bleibt. Diese Voraussetzung hat offenbar das Bestehen unserer Bedingung 1° zur Folge, während das Umgekehrte nicht gilt.

In dem obigen Satze wurde vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ im Inneren des Sektors (57) nicht zu schnell wächst, so dass das rapide Abnehmen der Funktion längs dem Rande das identische Verschwinden bewirken konnte. Wir werden jetzt einen Satz von entgegengesetzter Natur beweisen, wo das identische Verschwinden der Funktion durch eine rasche Abnahme im Inneren, kombiniert mit einem in geeigneter Weise eingeschränkten Zuwachs längs dem Rande zu Stande kommt.

---

[1]) *A theory of asymptotic series* (Trans. of the Royal Society of London, Series A, Vol. 211, pp. 279—313). Vgl. auch eine kürzlich erschienene Arbeit von MELLIN: *Die Theorie der asymtotischen Reihen vom Standpunkte der Theorie der reziproken Funktionen und Integrale* (Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A, Tom. XVIII, N:o 4, 1922, S. 27).

[2]) F. NEVANLINNA: *Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen* (Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A, T. XII, 1918, S. 11—12).

[3]) *Sur un théorème de M. Denjoy* (loc. cit.).

Sei $f(x)$ eine innerhalb und auf dem Rande des Sektors (57) *reguläre Funktion, welche folgenden Bedingungen genügt:*

1°. *Auf den Berandungsgeraden ist*

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\leq A(r),$$

wo $A(r)$ eine reelle Funktion bezeichnet derart, dass für alle $\varrho>\varrho_0$ das Integral

$$T(\varrho)\quad\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{A(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

unter einer endlichen Zahl T liegt.

2°. *Im Inneren des Sektors ist die Funktion so beschaffen, dass der Ausdruck*

$$\frac{m(r)}{r^k}=\frac{1}{r^k}\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\,d\varphi$$

für alle $r>\varrho_0$ unter einer endlichen Zahl M liegt, während

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{m(r)}{r^k}=-\infty.$$

Unter diesen Voraussetzungen verschwindet die Funktion $f(x)$ identisch.

Zunächst ergibt sich analog wie beim Beweis des vorhergehenden Satzes

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr<\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}T(r)\,d(r^k),$$

woraus, da gemäss der ersten Voraussetzung $T(r)\leq T$, folgt, dass

(*a*)
$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr<\frac{T}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}d(r^k)\leq T$$

für jedes $\varrho>\varrho_0$.

Ferner wird auf Grund des ersten Teils der zweiten Bedingung für $\varrho>\varrho_0$

(*b*)
$$\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{m(r)}{r}\,dr<\frac{M}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}r^{k-1}\,dr\leq\frac{M}{k},$$

während auf Grund des zweiten Teils dieser Voraussetzung

(*c*)
$$\liminf_{\varrho\to\infty}\frac{1}{\varrho^k}\frac{m(\varrho)}{k}=-\infty.$$

Die Bedingung (A) S. 36 ist also in Folge der Beziehungen (*a*), (*b*) und (*c*) wiederum erfüllt.

Dieser Satz ist als eine Verallgemeinerung folgenden Satzes von PERSSON[1]) aufzufassen, dem schon im zweiten Abschnitt eine erste Erweiterung gegeben wurde.

[1]) *Recherches sur une classe de fonctions entières* (Thèse, Upsala 1908, p. 8).

Sei $f(x)$ eine innerhalb und auf dem Rande des Winkelgebietes $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2k}$ reguläre Funktion, welche auf der Berandung beschränkt ist, während im Inneren

$$|f(x)| < e^{-r^k v(r)}.$$

wo $v(r) \to \infty$ für $r \to \infty$. Dann ist $f(x) \equiv 0$.

Man sieht sofort, dass dieser Satz eine spezielle Konsequenz des obigen Satzes ist. Insbesondere bemerke man, dass es nach unserem Satze keineswegs wesentlich ist, dass die Funktion auf dem Rande beschränkt ist; $\log |f(x)|$ kann hier ins Unendliche wachsen beispielsweise wie $\varkappa r^\alpha (\varkappa > 0, \alpha < k)$ oder auch noch wie

$$\frac{\varkappa r^k}{\log r \log_2 r \cdots (\log_n r)^{1+\varepsilon}},$$

falls $\varepsilon > 0$. Auch betreffs des Verhaltens der Funktion im Inneren fordert unsere Bedingung 2° offenbar viel weniger als die entsprechende Bedingung des PERSSONschen Satzes.

18. Bei den im vorhergehenden Artikel bewiesenen Sätzen betreffs des identischen Verschwindens einer analytischen Funktion wurden die eventuellen Nullstellen garnicht berücksichtigt. Wir wollen jetzt, immer auf Grund des am Ende des Artikels 16 formulierten allgemeinen Prinzips, einige Sätze über das identische Verschwinden einer analytischen Funktion beweisen, wo diese Erscheinung wesentlich von dem Vorhandensein von Nullstellen bedingt wird.

Sei $f(x)$ eine innerhalb und auf dem Rande des Sektors

$$r > \varrho_0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2k} \tag{57}$$

meromorphe Funktion der Variable $x = re^{i\varphi}$ mit den nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}, \ldots$$

und Polen

$$b_1, b_2, \ldots, b_\nu = |b_\nu| e^{i\beta_\nu}, \ldots.$$

Sei ferner $A(r)$ eine nichtnegative Funktion derart, dass für $\varrho \to \infty$

$$T(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{A(r)}{r^{k+1}} dr \to \infty,$$

und es genüge $f(x)$ folgenden Bedingungen, wobei p, q und n Konstanten sind, während $\varepsilon(r)$ allgemein jede Grösse bezeichnen kann, die für $r \to \infty$ verschwindet:

1°. *Auf den Berandungsgeraden des Sektors (57) ist*

$$\tfrac{1}{2}\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})| + \log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\} < [p + \varepsilon(r)] A(r).$$

2°. *Im Inneren des Sektors ist die Funktion so beschaffen, dass*

$$m(r)=\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\log\ f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\, d\varphi<[q+\varepsilon(r)]\, r^k\, T(r).$$

3°. *Die Verteilung der Nullstellen und Pole genügt der Bedingung*

$$a(r)-b(r)>[n+\varepsilon(r)]\, A(r),$$

wo

$$a(r)=\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<r}\cos k\alpha_\mu,\quad b(r)=\sum_{\varrho_0<|b_\nu|<r}\cos k\beta_\nu.$$

Unter diesen Voraussetzungen müssen die Konstanten p, q und n der Bedingung

(61) $$\pi n\leq p+\frac{2q}{k}$$

genügen, falls nicht die Funktion $f(x)$ identisch verschwindet.

Setzt man

$$[p+\varepsilon(t)]\, A(t)=\bar{A}(t)\ \text{und}\ \int_{\varrho_0}^{r}\frac{\bar{A}(t)}{t^{k+1}}\,dt=\bar{T}(r),$$

so wird, da $A(t)$ nichtnegativ ist und $T(r)\to+\infty$,

(*a*) $$\bar{T}(r)=[p+\varepsilon(r)]\, T(r).$$

Gemäss der ersten Bedingung erhalten wir

$$\alpha(r)=\frac{k}{2}\int_{\varrho_0}^{r}\{\log|f(te^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(te^{-i\frac{\pi}{2k}})|\}\frac{dt}{t}\leq k\int_{\varrho_0}^{r}\frac{\bar{A}(t)}{t}\,dt,$$

woraus nach einer schon S. 37 einmal ausgeführten Rechnung

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr<-\int_{\varrho_0}^{\varrho}d\left(\frac{1}{r^k}\right)\int_{\varrho_0}^{r}\frac{\bar{A}(t)}{t}\,dt=\frac{1}{\varrho^k}\int_{\varrho_0}^{\varrho}\bar{T}(r)\,d(r^k)$$

folgt, und sich gemäss (*a*), da $T(r)$ nirgends abnehmend ist,

(*b*) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{\alpha(r)}{r^{k+1}}\,dr\leq[p+\varepsilon(\varrho)]\, T(\varrho)$$

ergibt.

Ferner ist gemäss der zweiten Bedingung des Satzes

$$\frac{m(\varrho)}{k}\leq\left[\frac{q}{k}+\varepsilon(\varrho)\right]\varrho^k\, T(\varrho)$$

und

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{m(r)}{r}\,dr<\int_{\varrho_0}^{\varrho}\left[\frac{q}{k}+\varepsilon(r)\right]T(r)\,d(r^k)<\left[\frac{q}{k}+\varepsilon(\varrho)\right]\varrho^k\, T(\varrho),$$

folglich

$$(c) \qquad \frac{1}{\varrho^k}\left\{\frac{m(\varrho)}{k}+\int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{m(r)}{r}\,dr\right\}<\left[\frac{2q}{k}+\varepsilon(\varrho)\right]T(\varrho).$$

Schliesslich folgt aus der dritten Bedingung des Satzes

$$(d) \qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho}\frac{a(r)-b(r)}{r^{k+1}}\,dr\geq\int_{\varrho_0}^{\varrho}[n+\varepsilon(r)]\,\frac{A(r)}{r^{k+1}}\,dr>[n+\varepsilon(\varrho)]\,T(\varrho).$$

Fasst man jetzt die erhaltenen Ungleichungen (b), (c) und (d) zusammen, so findet man, dass der Ausdruck (60) S. 36 kleiner als

$$[p+\frac{2q}{k}-n\pi+\varepsilon(\varrho)]\,T(\varrho)$$

ist und also, da $T(\varrho)\to+\infty$ und $\varepsilon(\varrho)\to 0$ für $\varrho\to\infty$, bei unbegrenzt wachsendem ϱ negativ unendlich wird, falls $n\pi>p+\frac{2q}{k}$ ist; hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir wollen einige einfache Spezialfälle dieses allgemeinen Satzes hervorheben und durch Beispiele beleuchten.

Nimmt man $A(r)=r^k$, was zulässig ist, da

$$T(r)\int_{\varrho_0}^{r}\frac{A(t)}{t^{k+1}}\,dt=\log\frac{r}{\varrho_0}$$

für $r\to\infty$ positiv unendlich wird, so erhalten die Bedingungen des obigen Satzes folgende spezielle Form:

1°. *Auf den Berandungsgeraden des Sektors* (57) *ist*

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}<[p+\varepsilon(r)]\,r^k.$$

2°. *Im Inneren genügt die Funktion der Bedingung*

$$m(r)=\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\,d\varphi<[q+\varepsilon(r)]\,r^k\log r.$$

3°. *Die Verteilung der Nullstellen und Pole genügt der Bedingung*

$$a(r)-b(r)=\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<r}\cos k\alpha_\mu-\sum_{\varrho_0<|b_\nu|<r}\cos k\beta_\nu>[n+\varepsilon(r)]\,r^k.$$

Unter diesen Bedingungen müssen also gemäss des allgemeinen Satzes die Konstanten p, q und n der Ungleichung (61) genügen. Dieses speziellere Resultat enthält als Teilergebnis für $q=0$ einen bekannten Satz von CARLSON[1]), jedoch in wesentlich schärferer Fassung.

[1]) *Sur une classe de séries de Taylor* (Thèse, Upsala 1914, p. 58). In seiner obenzitierten Arbeit (p. 27) hat auch MELLIN ein mit dem Carlsonschen Satz verwandtes Resultat angegeben.

Zur Erläuterung des oben behandelten Spezialfalles mögen folgende Beispiele dienen:
Für $f(x)=\sin \pi x^k$ wird

$$\tfrac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|(fre^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\sim \pi r^k,$$

ferner

$$m(r)\sim \frac{k\pi r^k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{+\frac{\pi}{2k}}|\sin k\varphi\,|\cos k\varphi\, d\varphi=\frac{\pi r^k}{4},$$

während, da unsere Funktion in dem Gebiet die einfachen reellen Nullstellen $a_\mu=\mu^k$ hat und polfrei ist, $a(r)\sim r^k$ und $b(r)=0$ ist.

Die Funktion $\sin \pi x^k$ genügt somit den obigen spezielleren Bedingungen mit den Konstantenwerten $p=\pi$, $q=0$, $n=1$ und diese Werte genügen in der Tat der Bedingung (61), indem $p+\frac{2q}{k}=\pi$ ist.

Ein interessanteres Beispiel bietet uns die Funktion

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(1-x^k)}.$$

Auf Grund der Stirlingschen Formel wird hier

$$\log f(x)\sim x^k[\log x^k\pm\pi i]+x^k,$$

wo das obere Zeichen für jedes $-\frac{2\pi}{k}<\varphi<0$, das untere für $0<\varphi<\frac{2\pi}{k}$ gilt. Mit Hilfe dieser asymptotischen Formel findet man unmittelbar

$$\tfrac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\sim\frac{\pi}{2}r^k$$

und

$$m(r)\sim r^k\log r\,\frac{k^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\cos^2 k\varphi\, d\varphi=\frac{k\pi}{4}r^k\log r.$$

Schliesslich ist, wie im vorhergehenden Beispiel $a(r)\sim r^k$, $b(r)=0$. Die betrachtete Funktion genügt somit den oben aufgezählten Bedingungen mit $p=\frac{\pi}{2}$, $q=\frac{k\pi}{4}$, $n=1$; in der Tat ist $n\pi\,(=\pi)$ gleich $p+\frac{2q}{k}\,(=\pi)$.

Nimmt man in unserem Satz S. 40—41 statt $A(r)=r^k$ allgemeiner

$$A(r)=r^k(\log r)^{-\alpha},$$

wo $\alpha<1$, so wird

$$T(r)=\int_{\varrho_0}^{r}\frac{(\log t)^{-\alpha}}{t}\,dt=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}[(\log r)^{1-\alpha}-(\log\varrho_0)^{1-\alpha}], & \text{wenn } \alpha<1,\\ \log\log r-\log\log\varrho_0\quad, & \text{wenn } \alpha=1.\end{cases}$$

Die Bedingungen des Satzes erhalten somit die Form:

1°. *Auf den Berandungsgeraden des Sektors* (57) *ist*

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}<[p+\varepsilon(r)]\,r^k(\log r)^{-\alpha}.$$

2°. *Im Inneren des Sektors genügt die Funktion der Bedingung*

$$m(r)=\frac{k}{2}\int_{\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos k\varphi\,d\varphi<\begin{cases}[q+\varepsilon(r)]\,r^k\dfrac{(\log r)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{wenn } \alpha<1,\\ [q+\varepsilon(r)]\,r^k\log\log r, & \text{wenn } \alpha=1.\end{cases}$$

3°. *Die Verteilung der Nullstellen und Pole genügt der Bedingung*

$$a(r)-b(r)=\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<r}\cos k\alpha_\mu-\sum_{\varrho_0<|b_\nu|<r}\cos k\beta_\nu>[n+\varepsilon(r)]\,r^k(\log r)^{\alpha}.$$

Zur Illustration dieses Spezialfalles betrachten wir die ganze Funktion vom Geschlecht k (es ist also jetzt k eine ganze positive Zahl)

$$f(x)=\prod_{\mu_0}^{\infty}\left(1-\frac{x}{a_\mu}\right)e^{\frac{x}{a_\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{x}{a_\mu}\right)^k}$$

mit den Nullstellen

$$a_\mu=[\varkappa\mu(\log\mu)^\alpha]^{\frac{1}{k}},\qquad(\varkappa>0,\ \alpha\leq 1).$$

Betreffs dieser Funktion gilt, wie Lindelöf gezeigt hat, folgende asymptotische Formel

$$\log f(x)\sim\frac{1}{\varkappa k^\alpha(1-\alpha)}x^k(\log x\pm\pi i)^{1-\alpha}\quad\text{bzw.}\quad\frac{1}{\varkappa k}x^k\log(\log x\pm\pi i)$$

je nachdem $\alpha<1$ oder $\alpha=1$; hierbei besteht das obere Zeichen für $-2\pi<\varphi<0$, das untere für $0<\varphi<2\pi$. Auf Grund dieser asymptotischen Eigenschaft erhält man unschwer im Falle $\alpha<1$

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})|+\log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\}\sim\frac{\pi-\frac{\pi}{2k}}{\varkappa k^\alpha}r^k(\log r)^{-\alpha}$$

und

$$m(r)\sim\frac{r^k}{\varkappa k^\alpha}\frac{(\log r)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\cos^2 k\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{4\varkappa k^\alpha}r^k\frac{(\log r)^{1-\alpha}}{1-\alpha};$$

für $\alpha=1$ sind die Ausdrücke rechts mit

$$\frac{\pi-\frac{\pi}{2k}}{\varkappa k}\frac{r^k}{\log r}\quad\text{und}\quad\frac{\pi}{4\varkappa k}r^k\log\log r$$

zu ersetzen. Ferner findet man

$$a(r)\sim\frac{1}{\varkappa k^\alpha}r^k(\log r)^{-\alpha},$$

während $b(r)=0$. Alles zusammengenommen sehen wir, dass die betrachtete Funktion den S. 43—44 formulierten Bedingungen genügt mit

$$p = \frac{\pi - \frac{\pi}{2k}}{\varkappa k^{\alpha}}, \quad q = \frac{\pi}{4\varkappa k^{\alpha}}, \quad n = \frac{1}{\varkappa k^{\alpha}};$$

und in der Tat, diese Konstantenwerte genügen der Beziehung (61) indem die Gleichheit $n\pi = p + \frac{2q}{k}$ besteht.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass, da bei allen oben behandelten Funktionen in der Relation (61) das Gleichheitszeichen besteht, hierdurch dargelegt ist, dass diese Beziehung unter den Voraussetzungen unseres Satzes möglichst genau ist.

19. Als letzte Anwendung des allgemeinen in Artikel 16 hergeleiteten Prinzips beweisen wir folgenden Satz:

Sei $f(x)$ eine innerhalb und auf dem Rande des Sektors (57) *reguläre Funktion mit den Nullstellen $a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}$, welche folgenden Bedingungen genügt:*

1°. *Auf der geradlinigen Berandung des Sektors* (57) *ist*

$$\frac{1}{2}\left\{\log|f(re^{i\frac{\pi}{2k}})| + \log|f(re^{-i\frac{\pi}{2k}})|\right\} < A(r),$$

wo $A(r)$ eine Funktion bezeichnet derart, dass das Integral

$$T(\varrho) = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{A(r)}{r^{k+1}} dr$$

für alle $\varrho > \varrho_0$ unter einer endlichen Schranke T liegt.

2°. *Es existiert eine Konstante M derart, dass für $r > \varrho_0$*

$$m(r) \quad \frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log f(re^{i\varphi}) \cos k\varphi \, d\varphi < Mr^k.$$

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos k\alpha_\mu}{|a_\mu|^k}.$$

Zunächst wird nach einer schon öfters durchgeführten Abschätzung

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\alpha(r)}{r^{k+1}} dr \leqq T.$$

Ferner erhält man auf Grund der zweiter Bedingung

$$\frac{1}{\varrho^k}\left\{\frac{m(r)}{k} + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r)}{r} dr\right\} \leqq \frac{2M}{k}.$$

Da $b(r) = 0$, so folgt aus diesen Ungleichungen gemäss des erwähnten allgemeinen Prinzips, dass zunächst das Integral

(62) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

nach oben beschränkt und demnach für $\varrho \to \infty$ konvergent ist.

Nun ist

$$k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r)}{r^{k+1}}\,dr - \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \frac{\cos k\alpha_\mu}{|a_\mu|^k} \frac{a(\varrho)}{\varrho^k},$$

woraus, da $a(r)$ eine positive nirgends abnehmende Funktion ist, folgt, dass $\varrho' > \varrho$ so bestimmt werden kann, dass

$$k\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{a(r)}{r^{k+1}}\,dr < \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \frac{\cos k\alpha_\mu}{|a_\mu|^k} < k\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{a(r)}{r^{k+1}}\,dr.$$

Hieraus folgt weiter unmittelbar, dass das Integral (62) und die Reihe

$$\sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \frac{\cos k\alpha_\mu}{|a_\mu|^k}$$

für $\varrho \to \infty$ zugleich entweder konvergieren oder divergieren; da nun das Integral unter den Voraussetzungen des obigen Satzes sich als konvergent erwies, so konvergiert auch die Reihe und der Satz ist bewiesen.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 6

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN PICARD'SCHEN SATZ

VON

ROLF NEVANLINNA

[illegible]

(Am 19. November 1923 von E. Lindelöf und J. Lindeberg mitgeteilt)

HELSINGFORS 1924

HELSINGFORS 1924
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit werden diejenigen Beziehungen untersucht, welche zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion $f(x)$ und der Verteilung der Wurzeln der Gleichung

(A) $$f(x) = z$$

für verschiedene Werte z in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie bestehen.

Nachdem PICARD seinen berühmten Satz entdeckt hatte, nach welchem die obige Gleichung in der Umgebung eines isolierten, wesentlich singulären Punktes höchstens für *zwei* Werte z wurzelfrei ist, entstand in natürlicher Weise die Frage, mit welcher Dichte die Wurzeln für verschiedene Werte z auftreten. In der Theorie der ganzen Funktionen wurde diese Frage von BOREL in einer bekannten Abhandlung (Acta Mathematica, T. 20, 1897) aufgeworfen und untersucht. Seinen bahnbrechenden Untersuchungen folgte eine ganze Reihe von Arbeiten verschiedener Autoren, welche dieselbe und verwandte Probleme behandeln. In der letzten Zeit hat VALIRON [1]) die dem PICARDschen Ideenkreis zugehörigen Fragen in mehreren Untersuchungen aufgenommen und die früheren Ergebnisse wesentlich verschärft und erweitert; er hat u. a. bei gewissen Klassen analytischer Funktionen, die nur innerhalb eines endlichen Kreises regulär sind und deren Anwachsen bei Annäherung an die Randpunkte hinreichend stark ist, Sätze gefunden, welche den BORELschen Ergebnissen in der Theorie der ganzen Funktionen analog sind.

Im Folgenden wird eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Verteilung der Wurzeln der Gleichung (A) entwickelt. Als funktionentheoretische Grundlage dient uns hierbei eine allgemeine Formel, in welcher eine innerhalb eines gegebenen Gebietes meromorphe Funktion durch die Randwerte ihres absoluten Betrages und durch ihre Nullstellen und Pole dargestellt wird [2]); als speziellen Fall enthält sie den JENSENschen Satz. Wegen der Form

[1]) G. VALIRON: a) *Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières* (Ann. Éc. Normale, 3e série, t. XXXVII, 1920, p. 219—253), b) *Le théorème de M. Picard et les généralisations de M. Borel* (C. R., t. 170, 1920, p. 167—169), c) *Remarques sur le théorème de M. Picard* (Bull. sc. math., 2e série, t. XLIV, 1920, p. 91—104), d) *Recherches sur le théorème de M. Picard* (Ann. Éc. Normale, 3e série, t. XXXVIII, 1921, p. 389—429), e) *Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini* (C. R., 1921, p. 741—744), f) *Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières* (Ann. Éc. Normale, 3e série, t. XXXIX, 1922, p. 317—341).

[2]) Vgl. F. und R. NEVANLINNA: *Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (Acta Soc. Sc. Fennicae, t. L, N:o 5, 1922). In dieser Arbeit wird die genannte Formel zur Untersuchung verschiedener funktionentheoretischer Fragen benutzt.

des letztgenannten Satzes, dessen grundlegende Bedeutung bei Fragen der hier betrachteten Art wohlbekannt ist, liegt es nahe die Nullstellendichte einer Funktion $f(x)$ innerhalb eines Kreises durch das Anwachsen des Integrals

$$N(r,f)=\int_0^r \frac{n(t,f)}{t}\,dt,$$

zu charakterisieren, wobei $n(r,f)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ innerhalb des Kreises $x<r$ bezeichnet. Aus demselben Grunde ist es zweckmässig als zweite, das Anwachsen der Funktion $f(x)$ charakterisierende Fundamentalgrösse den Mittelwert

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\,|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

zu wählen, wo $\overset{+}{\log}\,|f|$ die Zahl $\log|f|$ oder Null bezeichnet, je nachdem $|f|>1$ oder $|f|<1$ ist[1]). Aus dem Folgenden dürfte hervorgehen, dass die Einführung dieses Mittelwertes, womit wir also die gewöhnlich angewandte Fundamentalgrösse $M(r)=\max_{|x|=r}|f(x)|$ ersetzen, in mehreren Hinsichten vorteilhaft ist: nicht nur die Beweise gewinnen so an Kürze und Übersichtlichkeit, sondern auch die Ergebnisse an Genauigkeit.

Unsere Arbeit ist in vier Abschnitte eingeteilt. In dem ersten Abschnitt werden die in der folgenden Untersuchung gebrauchten Hilfsformeln zusammengestellt. Um das Wesentliche unserer Methode an einem einfachen Fall deutlich hervortreten zu lassen, geben wir im zweiten Abschnitt einen Beweis des speziellen PICARDschen Satzes. In dem folgenden Abschnitt wird das anfangs gestellte Problem ganz allgemein behandelt. Unter der Voraussetzung, dass die betrachtete analytische Funktion innerhalb eines Kreises regulär ist, wird zunächst eine Ungleichung zwischen den Grössen $m(r,f)$, $N(r,f-a)$ und $N(r,f-b)$ $(a\neq b)$ hergeleitet. Aus dieser Hauptungleichung folgt dann eine Reihe von Sätzen über die Verteilung der Nullstellen der Funktion $f(x)-z$, wobei wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $f(x)$ eine ganze Funktion, oder nur innerhalb eines endlichen Kreises regulär ist. Weiter werden einige Betrachtungen über die Genauigkeit der erzielten Resultate angestellt[2]). In dem letzten Abschnitt zeigen wir schliesslich, dass die Hauptungleichung fast unverändert ihre Gültigkeit beibehält, falls die betrachtete analytische Funktion nur innerhalb eines Kreisringes regulär angenommen wird. Es geht hieraus insbesondere hervor, dass die vorher bewiesenen Sätze über den Wertvorrat einer ganzen Funktion allgemeiner für jede in der Umgebung eines wesentlich singulären Punktes eindeutige und reguläre Funktion bestehen.

[1]) Der Mittelwert $m(r,f)$ ist, wie in der oben zitierten Arbeit gezeigt ist, eine wachsende Funktion von r, und genügt in einem Kreisringe dem Dreikreissatz: Vgl. die Fussnote S. 10 in der vorliegenden Arbeit; siehe auch: F. RIESZ: *Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques* (Acta litt. ac. scient. regiae univ. Hung. Fransisco-Josephinae, sectio scient. math., t. 1, f. 1, 1922).

[2]) Einen Teil dieser Ergebnisse haben wir in einer Note: *Sur le théorème de M. Picard* (C. R., 6 août 1923) mitgeteilt.

I. Einige funktionentheoretische Formeln.

1. In diesem Abschnitt wollen wir einige für das Folgende notwendige funktionentheoretische Hilfsformeln zusammenstellen. Es sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variable $x = re^{i\varphi}$, welche innerhalb und auf dem Rande Γ eines von einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenstücke begrenzten, zusammenhängenden Gebietes G eindeutig und meromorph ist. Die innerhalb G gelegenen Nullstellen und Pole der Funktion seien a_μ ($\mu = 1, 2, \cdots, m$) bzw. b_ν ($\nu = 1, 2, \cdots, n$). Es bezeichne ferner $g(x, x_0)$ die Green'sche Funktion des Gebietes G mit ihrem Pol im Punkte $x = x_0$, und $-h(x, x_0)$ die zu $g(x, x_0)$ konjugierte harmonische Funktion. Dann gilt die Darstellung

$$\log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \log|f(\xi)|\, dh(\xi, x) - \sum_{\mu=1}^{m} g(x, a_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n} g(x, b_\nu)$$

in jedem inneren Punkt von G[1]); bei der Integration soll hier der Randpunkt ξ den Rand Γ in positiver Richtung durchlaufen.

Im Folgenden brauchen wir diese Formel in dem besonderen Fall, wo G ein Kreis $|x| \leq \varrho$ ist. Dann wird

$$\begin{cases} g(x, \xi) = \log\left|\dfrac{\varrho^2 - \xi x}{\varrho\,(x - \xi)}\right| = \Re\left(\log\dfrac{\varrho^2 - \xi\bar{x}}{\varrho\,(x - \xi)}\right), \\ h(\xi, x) = -\arg\dfrac{\varrho^2 - x\xi}{\varrho\,(x - \xi)} = \Re\left(\dfrac{1}{i}\log[(x - \xi)(\varrho^2 - \bar{\xi}x)]\right), \end{cases}$$

wo x und ξ die zu x bzw. ξ konjugierten Zahlen bezeichnen, und also für $r \leq \varrho$

$$(1)\quad \log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, \frac{\varrho^2 - r^2}{2\varrho r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\, d\vartheta - \sum\log\left|\frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho\,(x - a_\mu)}\right| + \sum\log\left|\frac{\varrho^2 - b_\nu x}{\varrho\,(x - b_\nu)}\right|.$$

Fügt man in (1) auf beiden Seiten die konjugierten harmonischen Funktionen mit i multipliziert hinzu, so ergibt sich für $\log f(x)$ die Darstellung

$$(2)\qquad \log f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(f(\varrho e^{i\vartheta})\,\frac{\varrho e^{i\vartheta} + x}{\varrho e^{i\vartheta} - x}\right) d\vartheta - \sum\log\frac{\varrho^2 - a_\mu x}{\varrho\,(x - a_\mu)} + \sum\log\frac{\varrho^2 - b_\nu x}{\varrho\,(x - b_\nu)} + iC,$$

wo C eine geeignet gewählte reelle Konstante ist. Ausser von dieser Darstellung, die von fundamentaler Bedeutung für die folgende Untersuchung sein wird, werden wir von der Jensenschen Formel

$$(3)\qquad \log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta - \sum\log\frac{\varrho}{|a_\mu|} + \sum\log\frac{\varrho}{|b_\nu|}$$

Gebrauch machen; sie ist in der »Poisson-Jensenschen» Formel (1) als spezieller Fall ($x = 0$) enthalten. Um die Beziehung (3) auf eine für die Anwendungen zweckmässige Form zu

[1]) Vgl. die S. 3 zitierte Arbeit von F. und R. Nevanlinna, insb. S. 7.

bringen, führen wir folgende Bezeichnungen ein: Es sei $n(r,f)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ innerhalb des Kreises $|x|<r$, und

$$\begin{cases} N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f)}{t}\,dt, \\ m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \end{cases}$$

wo $\overset{+}{\log}|f|$ gleich $\log|f|$ oder Null ist, je nachdem $|f|>1$ oder $|f|<1$ ist. Beachtet man dass demnach $\log|f| = \overset{+}{\log}|f| - \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f}\right|$ ist, so kann man die JENSENsche Formel durch eine leichte Umformung der rechtsstehenden Summen in folgender Form schreiben:

$$m(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) + C_0, \tag{4}$$

wo $C_0 = \log|f(0)|$ von r unabhängig ist. Diese Formel setzt voraus, dass $f(0)$ endlich und von Null verschieden ist. Ist dies nicht der Fall, sondern ist der Punkt $x=0$ z. B. eine $n_0(f)$-fache Nullstelle von $f(x)$, so kann die Formel (4) auf die Funktion $f(x) = \frac{f(x)}{x^{n_0(f)}}$ angewandt werden. Man findet so ohne Mühe

$$m(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) + C_0 + n_0(f)\log r, \tag{4}'$$

wobei $C_0 = \log|f(0)|$, und $N(r,f)$ jetzt das Integral

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n_0(f)}{t}\,dt$$

bezeichnet. In analoger Weise wird die JENSENsche Formel modifiziert falls der Nullpunkt ein Pol ist.

Wir heben ausdrücklich hervor, dass sämtliche von r abhängigen Glieder der JENSENschen Formel (4)', ausser möglicherweise dem letzten, *nicht negativ* sind. Lässt man also einzelne dieser vier Glieder weg, so geht die Gleichheit (4)' in eine Ungleichung über, deren Richtung auf Grund des eben erwähnten Umstandes unmittelbar zu ersehen ist. In dieser Weise werden wir die Formel (4)' mehrmals anwenden.

Zuletzt wollen wir auf zwei einfache Ungleichungen hinweisen, von denen im Folgenden wiederholt Gebrauch gemacht wird, und die unmittelbare Folgerungen der Definition der Zahl $\overset{+}{\log} t$ sind: Wenn $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ reelle, nichtnegative Zahlen bezeichnen, so gilt

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_p) \leqq \overset{+}{\log}\alpha_1 + \overset{+}{\log}\alpha_2 + \cdots + \overset{+}{\log}\alpha_p, \tag{5}$$

und

$$\overset{+}{\log}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p) < \overset{+}{\log}\alpha_1 + \overset{+}{\log}\alpha_2 + \cdots + \overset{+}{\log}\alpha_p + \log p. \tag{6}$$

II. Beweis des speziellen Picard'schen Satzes.

2. Der spezielle PICARDsche Satz besagt, dass eine ganze Funktion jeden endlichen Wert, ausser möglicherweise einem einzigen, annehmen muss, es sie denn dass sie sich auf eine Konstante reduziert. Der Gang des von BOREL gegebenen »elementären» Beweises dieses Satzes ist in aller Kürze folgender: Unter der Annahme, dass die ganze Funktion $f(x)$ von *zwei* endlichen Werten verschieden ist, wird eine Ungleichung zwischen zwei verschiedenen Werten $M(r_1)$ und $M(r_2)$ des Maximalmoduls $M(r) = \max|f(x)|$ aufgestellt; dann wird gezeigt, dass diese Ungleichung zu einem Widerspruch führt, wenn $f(x)$ nicht in der ganzen Ebene konstant ist. Ein ähnlicher Gedanke liegt auch dem nachstehenden Beweise zu Grunde, mit dem Unterschied, dass wir die Grösse $\log M(r)$ durch den Mittelwert $m(r,f)$ ersetzen.

Sei also $f(x)$ eine ganze Funktion, die in jedem endlichen Punkt der Ebene von zwei endlichen Werten a und b $(a \neq b)$ verschieden ist; es soll gezeigt werden, dass $f(x)$ sich auf eine Konstante reduzieren muss. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, dass $f(x)$ nicht in der ganzen Ebene einen konstanten Wert beibehält; es existiert dann mindestens ein endlicher Punkt $x = x_0$, wo die Ableitung $f'(x)$ von Null verschieden ist. Einen solchen Punkt x_0 wählen wir im Folgenden als Nullpunkt der Zahlenebene.

3. Nach diesen Festsetzungen zeigen wir zunächst, dass eine Konstante C von der Art existiert, dass die Ungleichung

$$m(r,f) < C + m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) \tag{7}$$

für jedes $r > 0$ besteht[1]). In der Tat ist $|f| = |(f-a)+a| \leq |f-a| + |a|$ und also nach der Ungleichung (6): $\overset{+}{\log}|f| \leq \overset{+}{\log}|f-a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$; es ist somit zunächst

$$m(r,f) < C + m(r, f-a). \tag{7'}$$

Wendet man nun die JENSENsche Formel (4) auf die Funktion $f-a$ an, so ergibt sich ferner, da $f(x)$ regulär und $\neq a$, und demnach $N(r, f-a) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \equiv 0$ ist,

$$m(r, f-a) = C + m\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \tag{7''}$$

wo C die endliche Konstante $\log|f(0)-a|$ bezeichnet. Schliesslich folgt aus der Identität $\frac{a-b}{f-a} = \frac{f-b}{f-a} - 1$, dass

$$\frac{1}{|f-a|} \leq \frac{1}{|a-b|}\left(\left|\frac{f-b}{f-a}\right| + 1\right),$$

oder unter Benutzung der Ungleichungen (5) und (6)

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{|f-a|} \leq \overset{+}{\log}\frac{1}{|a-b|} + \log\left|\frac{f-b}{f-a}\right| + \log 2,$$

wonach

[1]) Im Folgenden wird jede von r unabhängige Grösse kurz mit C bezeichnet.

(7)‴ $$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) < C + m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right)$$

ist. Durch Verbindung der Beziehungen (7)′, (7)″ und (7)‴ ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (7).

Wir schreiben jetzt

$$\left|\frac{f(x)-b}{f(x)-a}\right| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)-a}\right| \left|\frac{f(x)-b}{f'(x)}\right|$$

und erhalten mittels der Ungleichung (5)

(8) $$m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) < m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right).$$

Das letzte Glied wird hier wieder mittels der JENSENschen Formel (4) abgeschätzt. Bemerkt man, dass $f(x) \neq b$, und dass der Ausdruck $N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right)$ demnach identisch verschwindet, so ergibt diese Formel, wenn sie auf die Funktion $\frac{f-b}{f'}$ angewandt wird,

(9) $$m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) = C + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) \leq C + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right),$$

wo $C = \log \frac{f(0)-b}{f'(0)}$ endlich ist. Nach (7) findet man also mit Berücksichtigung von (8) und (9), dass

(10) $$m(r,f) < C + m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right)$$

für jedes $r > 0$ ist.

4. Von den funktionentheoretischen Formeln des ersten Abschnittes haben wir bis jetzt nur den JENSENschen Satz benutzt. Zur weiteren Abschätzung der zwei letzten Glieder in (10) brauchen wir jetzt die Darstellung (2). Wird diese Beziehung auf die Funktion $f(x) - a$ in einem Kreis $|x| \leq \varrho$ angewandt, so ergibt sich durch Differentiation, da die von den Nullstellen und Polen herrührenden Glieder im vorliegenden Falle fehlen,

$$\frac{f'(x)}{f(x)-a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\, f(\varrho e^{i\vartheta}) - a \,| \, \frac{2\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta} - x)^2}\, d\vartheta,$$

und also für $|x| = r\,(< \varrho)$:

(11) $$\left|\frac{f'(x)}{f(x)-a}\right| \leq \frac{2\varrho}{(\varrho - r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(\varrho e^{i\vartheta}) - a|\, d\vartheta.$$

Nun ist, da $\log t = \overset{+}{\log} t + \overset{+}{\log} \frac{1}{t}$ für $t \geq 0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(\varrho e^{i\vartheta}) - a|\, d\vartheta = m(\varrho, f-a) + m\left(\varrho, \frac{1}{f-a}\right).$$

Eliminiert man hier das letzte Glied durch die Gleichung (7)″ (wo ϱ statt r zu schreiben ist), und bemerkt man, dass $\overset{+}{\log} |f-a| \leq \overset{+}{\log} (|f| + |a|) \leq \overset{+}{\log} |f| + \overset{+}{\log} |a| + \log 2$, und also $m(\varrho, f-a) < C + m(\varrho, f)$, so findet man, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta})-a||\,d\vartheta < C + 2m(\varrho,f),$$

und also nach (11), dass

(11)′ $$\left|\frac{f'(x)}{f(x)-a}\right| < \frac{2\varrho}{(\varrho-r)^2}(C+2m(\varrho,f))$$

ist. Unter Anwendung der Ungleichungen (5) und (6) folgt hieraus schliesslich die für $0<r<\varrho$ gültige Ungleichung

(12) $$m\left(r,\frac{f'}{f-a}\right) < C + \overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho-r} + \overset{+}{\log}m(\varrho,f).$$

Dieselbe Beziehung besteht offenbar auch, wenn a mit b ersetzt wird.

5. Ersetzt man nun die zwei letzten Glieder der Formel (10) mit den soeben gefundenen Schranken, so ergibt sich die am Anfang dieses Abschnitts in Aussicht gestellte fundamentale Ungleichung

(13) $$m(r,f) < C + 2\overset{+}{\log}\varrho + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho-r} + 2\overset{+}{\log}m(\varrho,f),$$

die für $0<r<\varrho$ besteht, und wo C eine von r und ϱ unabhängige Grösse ist.

Um die Einwirkung der Bedingung (13) auf das Anwachsen des Mittelwertes $m(r,f)$ näher zu untersuchen, wählen wir eine beliebige Zahl $\varrho'>0$ und setzen

(14) $$\varrho = r + \frac{\varrho'-r}{\varrho'}$$

Dann multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung (13) mit $\frac{dr}{r^{k+1}}$, wo $k>0$, und integrieren von $r=\varrho_0 (<\varrho')$ bis $r=\varrho'$. Man sieht unmittelbar ein dass die Integrale, welche von den drei ersten Gliedern der rechten Seite herrühren, für jedes $\varrho'>\varrho_0$ unter endlichen, von ϱ' unabhängigen Schranken liegen[1]). Zur Abschätzung des vierten Integrals

[1]) Es ist, da ϱ nach (14) nicht grösser als $r+1$ ist,

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{C\,dr}{r^{k+1}} \leq C\int_{\varrho_0}^{\infty}\frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{C}{k\varrho_0^k}, \qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho'}\frac{\overset{+}{\log}\varrho}{r^{k+1}}dr < \int_{\varrho_0}^{\infty}\frac{\log(1+r)}{r^{k+1}}dr.$$

Ferner ist

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho-r}\cdot\frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{1}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\log\frac{\varrho'}{\varrho'-r}\,d\left(\frac{1}{\varrho'^k}-\frac{1}{r^k}\right) = \frac{\varrho'^k-\varrho_0^k}{k\varrho_0^k\varrho'^k}\log\frac{\varrho'}{\varrho'-\varrho_0} + \frac{1}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\frac{\varrho'^k-r^k}{\varrho'-r}\cdot\frac{dr}{\varrho'^k r^k}.$$

Hier hat das erste Glied rechts für $\varrho_0\leq\varrho'\leq\infty$ ein endliches Maximum; ferner ist

$$\frac{\varrho'^k-r^k}{\varrho'-r} = \varrho'^{k-1}\frac{1-\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^k}{1-\frac{r}{\varrho'}} \leq h\,\varrho'^{k-1},$$

wo h die grössere der Zahlen 1 und k bezeichnet, und das zweite Glied rechts also kleiner als

$$\frac{h}{k\varrho'}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\frac{dr}{r^k} < \frac{h}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\frac{dr}{r^{k+1}} < \frac{h}{k}\int_{\varrho_0}^{\infty}\frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{h}{k^2\varrho_0^k},$$

womit die Behauptung nachgewiesen ist.

$$I = \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho, f)}{r^{k+1}} dr$$

bemerke man, dass $\frac{\varrho}{r} < 1 + \frac{1}{r}$ und $d\varrho = \left(1 - \frac{1}{\varrho'}\right) dr$, wonach

$$I = \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho, f)}{\varrho^{k+1}} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k+1} \frac{d\varrho}{1 - \frac{1}{\varrho'}} < \frac{\left(1 + \frac{1}{\varrho_0}\right)^{1+k}}{1 - \frac{1}{\varrho_0}} \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho, f)}{\varrho^{k+1}} d\varrho .$$

Als Resultat der Integration ergibt sich also im Ganzen die Ungleichung

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr < C_1 + C_2 \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(r, f)}{r^{k+1}} dr , \tag{15}$$

die für $\varrho' > \varrho_0$ gültig ist, und wo C_1 und C_2 von ϱ' unabhängig sind.

Aus der letzten Ungleichung folgt unmittelbar, dass das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}} dr \tag{16}$$

für $k > 0$ konvergent ist. Wäre es nämlich für ein gewisses $k > 0$ divergent, so müsste $m(r, f)$, die eine wachsende Funktion von r ist[1]), für $r \to \infty$ unbeschränkt wachsen; demnach wäre $\overset{+}{\log} m(r, f) = \varepsilon(r)\, m(r, f)$, wo $\varepsilon(r)$ eine für $r \to \infty$ verschwindende Grösse bezeichnet[2]). Es wäre aber dann auch

[1]) Dass $m(r, f)$ eine wachsende Funktion von r ist, ergibt sich leicht mittels der Formel (1) (S. 5), nach welcher die Ungleichung

$$\log |f(re^{i\varphi})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta = U_\varrho(r, \varphi)$$

für $r < \varrho$ besteht. Die harmonische Funktion $U_\varrho(r, \varphi)$ ist *nichtnegativ*, und es ist somit auch $\overset{+}{\log} |f(re^{i\vartheta})| \leq U_\varrho(r, \varphi)$, oder

$$m(r, f) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_\varrho(r, \varphi)\, d\varphi = U_\varrho(o) = m(\varrho, f), \quad \text{w. z. b. w.}$$

In einem Kreisring $r_1 \leq r < r_2$ genügt $m(r, f)$ dem Dreikreissatz. Bezeichnet $U(x)$ diejenige in diesem Kreisringe K harmonische Funktion, welche auf den Randkreisen $|x| = r_1$ und $|x| = r_2$ die Randwerte $\overset{+}{\log} |f(x)|$ annimmt, so ist auf dem Rande von K: $\log |f| \leq U$, und daher im ganzen Gebiete K: $\overset{+}{\log} |f| \leq U$. Folglich ist auch $m(r, f) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\vartheta})\, d\varphi$. Der letzte Ausdruck ist aber, wie man z. B. mittels der in dem letzten Abschnitt dieser Arbeit angegebenen verallgemeinerten JENSENschen Formel (77) unmittelbar einsieht, in dem Intervalle $r_1 \leq r \leq r_2$ eine *lineäre* Funktion von $\log r$, die in den Endpunkten $r = r_1$ und $r = r_2$ die Werte $m(r_1, f)$ bzw. $m(r_2, f)$ annimmt. Hieraus folgt die Behauptung unmittelbar.

[2]) Diese Bezeichnung wird im Folgenden für jede mit $\frac{1}{r}$ verschwindende Zahl beibehalten.

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\log^+ m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr = \varepsilon(\varrho') \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr,$$

was wegen (15) unmöglich ist.

Das Integral (16) ist also für jedes $k>0$ konvergent. Bezeichnet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so existiert daher eine Zahl r_ε von der Art, dass

$$\varepsilon > \int_{r}^{\infty} \frac{m(t,f)}{t^{k+1}}\,dt \geq m(r,f) \int_{r}^{\infty} \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{m(r,f)}{kr^k}$$

für $r>r_\varepsilon$ ist; es ist folglich für jedes $k>0$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(r,f)}{r^k} = 0. \tag{17}$$

Diese Beziehung führt nun unmittelbar zu einem Widerspruch. In der Tat ist nach (11)'

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)-a}\right| \leq \frac{2}{\left(1-\frac{|x|}{\varrho}\right)^2}\left(\frac{C}{\varrho}+\frac{2\,m(\varrho,f)}{\varrho}\right)$$

für jedes $\varrho>|x|$; lässt man ϱ hier ins Unendliche wachsen, so strebt der Ausdruck rechts wegen (17) für jedes endliche x gegen Null. Man schliesst also dass $f'(x)$ identisch verschwinden muss, und dass folglich $f(x)$, im Widerspruch mit der anfangs gemachten Voraussetzung, sich auf eine Konstante reduziert. Der Beweis des speziellen Picardschen Satzes ist hiermit erbracht.

III. Über die Verteilung der Nullstellen der Funktion $f(x)=z$ für verschiedene Werte z.

6. In diesem Abschnitt lassen wir die oben gemachte Voraussetzung fallen, dass die betrachtete analytische Funktion von zwei endlichen Werten a und b verschieden ist. Die in dem ersten Abschnitt angegebenen Formeln führen dann durch die oben entwickelte Methode zu einer wichtigen Ungleichung zwischen dem Mittelwert $m(r,f)$ und den Anzahlen $n(r,f-a)$ und $n(r,f-b)$ der a- bzw. b-Stellen der Funktion; diese grundlegende Ungleichung, welche die im vorhergehenden Abschnitt hergeleitete Formel (13) als speziellen Fall enthält, führt zu einer Reihe von Sätzen über den Wertvorrat einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie.

Um die erwähnte Grundbeziehung sogleich unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen herzuleiten, nehmen wir im Folgenden an, $f(x)$ sei eine analytische Funktion, die innerhalb *eines Kreises* $|x|<R$ eindeutig, regulär und nicht konstant ist. Die Taylorsche Entwicklung von $f(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes sei

$$f(x) = c_0 + c_p x^p + c_{p+1} x^{p+1} + \cdots,$$

wo der Koeffizient c_p $(p\geq 1)$ von Null verschieden angenommen wird.

7. Es seien a und b zwei beliebig gegebene, von einander verschiedene, endliche Zahlen. Dem im vorigen Abschnitt eingeschlagenen Weg folgend zeigen wir zunächst, dass eine positive Konstante C von der Art existiert, dass die Ungleichung

$$m(r,f) < C + p \overset{+}{\log} r + N(r,f-a) + m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right) \tag{18}$$

für jedes $r < R$ besteht. Die Richtigkeit dieser Beziehung ergibt sich unmittelbar durch Verbindung der einfachen Ungleichungen (7)′ und (7)‴ (vgl. S. 7, 8) und der Ungleichung

$$m(r,f-a) < C + p \overset{+}{\log} r + N(r,f-a) + m\left(r, \frac{1}{f-a}\right),$$

die aus der JENSENschen Formel (4)′ folgt, und wo $C = \overset{+}{\log} |c_0 - a|$ oder $\overset{+}{\log} |c_p|$ ist, je nachdem $c_0 \neq a$ oder $c_0 = a$ ist.

Zur Abschätzung des Ausdrucks $m\left(r, \frac{f-b}{f-a}\right)$ machen wir wieder von der Ungleichung (8) (S. 8) Gebrauch. Für das letzte Glied dieser Ungleichung findet man mittels der JENSENschen Formel jetzt den Wert

$$m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) = \alpha_0 + \beta_0 \log r - N\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) + N\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right),$$

wo $\alpha_0 = \log \left| \frac{c_0 - b}{p\, c_p} \right|$, $\beta_0 = 1 - p$, falls $c_0 \neq b$, und $\alpha_0 = \log \frac{1}{p}$, $\beta_0 = 1$, falls $c_0 = b$. Es ist also jedenfalls

$$m\left(r, \frac{f-b}{f'}\right) \leqq \overset{+}{\log} \left| \frac{c_0 - b}{c_p} \right| + p \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \overset{+}{\log} r + N(r,f-b) - N(r,f') + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right). \tag{19}$$

Nach (18), (8) und (19) schliesst man, dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} m(r,f) < C + p \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + (p+1) \overset{+}{\log} r + N(r,f-a) + N(r,f-b) - N(r,f') \\ + m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-b}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

für jedes $r < R$ besteht; C bezeichnet hierbei eine nur von a, b, c_0 und c_p abhängige Grösse.

8. Die zwei letzten Glieder der Beziehung (20) werden, wie vorher, mittels der Formel (2) (S. 5) abgeschätzt. Durch Differentiation findet man für die logarithmische Ableitung der Funktion $f(x) - a$ die für $|x| < \varrho$ gültige Darstellung

$$\frac{f'(x)}{f(x)-a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta}) - a| \frac{2\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta} - x)^2} d\vartheta + \sum_{|a_\mu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{(x - a_\mu)(\varrho^2 - \bar{a}_\mu x)},$$

wobei a_μ $(\mu = 1, 2, \cdots)$ die Nullstellen von $f(x) - a$ bezeichnen. Es ist demnach für $|x| = r < \varrho < R$

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)-a} \right| \leqq \frac{2\varrho}{(\varrho - r)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(\varrho e^{i\vartheta}) - a|| d\vartheta + \sum_{|a_\mu| < \varrho} \frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{|x - a_\mu||\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|}. \tag{21}$$

Hier schreiben wir wie vorher

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log f(\varrho e^{i\vartheta}) - a|\, d\vartheta = m(\varrho, f-a) + m\left(\varrho, \frac{1}{f-a}\right)$$

und eliminieren das letzte Glied mittels der JENSENschen Formel (4)′:

$$m\left(\varrho, \frac{1}{f-a}\right) = C - n_0(f-a)\log r - N(\varrho, f-a) + m(\varrho, f-a)$$
$$\leqq C + p\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + m(\varrho, f-a),$$

wo $C = \log\frac{1}{|c_0 - a|}$ oder $\log\frac{1}{|c_p|}$ ist, jenachdem $c_0 \neq a$ oder $c_0 = a$. Beachtet man noch dass $m(\varrho, f-a) \leqq m(\varrho, f) + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$ ist, so folgt dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(\varrho e^{i\vartheta}) - a||\, d\vartheta < C + p\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 2m(\varrho, f), \tag{22}$$

wo C nur von a, c_0 und c_p abhängt.

Zur Abschätzung der rechtsstehenden Summe in (21) bemerke man dass $|\varrho^2 - \bar{a}_\mu x| > \varrho^2 - |a_\mu| r > \varrho(\varrho - r)$, und also

$$\frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{|x - a_\mu|\,|\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|} = \frac{\varrho(\varrho^2 - |a_\mu|^2)}{|\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|^2}\left|\frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho(x - a_\mu)}\right| < \frac{\varrho}{(\varrho - r)^2}|\varphi_\mu(x)|, \tag{23}$$

wo wir

$$\varphi_\mu(x) = \frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho(x - a_\mu)}$$

gesetzt haben. Durch (22) und (23) folgt nun aus (21), dass

$$\frac{f'(x)}{f(x) - a}\Big| < \frac{\varrho}{(\varrho - r)^2}\left[C + 2p\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 4m(\varrho, f) + \sum_{|a_\mu| < \varrho}|\varphi_\mu(x)|\right]$$

für jedes $|x| = r < \varrho < R$ ist. Bemerkt man dass die Anzahl der Glieder der rechtsstehenden Summe $n(\varrho, f-a)$ beträgt, so schliesst man weiter unter Anwendung der Ungleichungen (5) und (6), dass

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(x)}{f(x) - a}\right| < C + \overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}\left(p\overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right) + \overset{+}{\log}m(\varrho, f)$$
$$+ \overset{+}{\log}n(\varrho, f-a) + \sum_{|a_\mu| < \varrho}\overset{+}{\log}|\varphi_\mu(x)|,$$

und demnach, da $\overset{+}{\log}\left(p\overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right) \leqq p\overset{+}{\log}\frac{1}{r}$,

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C + p\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}m(\varrho, f)$$
$$+ \overset{+}{\log}n(\varrho, f-a) + \sum_{|a_\mu| < \varrho} m(r, \varphi_\mu). \tag{24}$$

Die Grösse C hängt hierbei wieder nur von c_0, c_p und a ab.

Die Mittelwerte $m(r, \varphi_\mu)$ lassen sich einfach mittels der JENSENschen Formel berechnen. Beachtet man dass $|\varphi_\mu(x)| > 1$ für $|x| < \varrho$ und dass folglich $m\left(r, \frac{1}{\varphi_\mu}\right) \equiv 0$ ist, so findet man dass

$$\begin{cases} m(r, \varphi_\mu) = \log|\varphi_\mu(0)| = \log\frac{\varrho}{|a_\mu|}, & \text{falls } r < |a_\mu| < \varrho, \\ m(r, \varphi_\mu) = \log|\varphi_\mu(0)| - \log\frac{r}{|a_\mu|} = \log\frac{\varrho}{r}, & \text{falls } |a_\mu| < r. \end{cases}$$

Es ist somit

$$\sum_{|a_\mu|<\varrho} m(r, \varphi_\mu) = n(r, f-a)\log\frac{\varrho}{r} + \sum_{r<|a_\mu|<\varrho} \log\frac{\varrho}{|a_\mu|} = \int_r^\varrho \frac{n(t, f-a)}{t}\,dt$$
$$= N(\varrho, f-a) - N(r, f-a) + n_0(f-a)\log\frac{\varrho}{r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Beziehung (24) ein und beachtet man, dass $n_0(f-a)\log\frac{\varrho}{r} \leqq p\left(\overset{+}{\log}\varrho + \overset{+}{\log}\frac{1}{r}\right)$, so wird also schliesslich

$$m\left(r, \frac{f'}{f-a}\right) < C + 2p\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + (p+1)\overset{+}{\log}\varrho + 2\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + \overset{+}{\log}m(\varrho, f)$$
$$+ \overset{+}{\log}n(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-a) - N(r, f-a),$$

wo C nur von a, c_0 und c_p abhängt. Es ist klar, dass dasselbe Resultat gültig ist, wenn a mit b vertauscht wird.

9. Führt man die eben gefundenen oberen Schranken der Mittelwerte $m\left(r, \frac{f'}{f-z}\right)(z = a, b)$ in die Ungleichung (20) ein, so ergibt sich die in Aussicht gestellte fundamentale Beziehung

$$m(r, f) < C + 6p\left(\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \overset{+}{\log}\varrho\right) + 4\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b) - N(r, f')$$
$$+ 2\overset{+}{\log}m(\varrho, f) + \overset{+}{\log}n(\varrho, f-a) + \overset{+}{\log}n(\varrho, f-b), \tag{25}$$

die also für $0 < r < \varrho < R$ besteht, und wo die Grösse C nur von a, b, c_0 und c_p abhängt.

Um diese Formel auf eine einfachere Form zu bringen, eliminieren wir noch die zwei letzten Glieder. Nach der JENSENschen Formel ist einerseits für $\varrho' < R$

$$N(\varrho', f-a) = C - n_0(f-a)\log\varrho' + m(\varrho', f-a) - m\left(\varrho', \frac{1}{f-a}\right)$$
$$< C - n_0(f-a)\log\varrho' + m(\varrho', f-a),$$

während andererseits für $\varrho < \varrho'$

$$N(\varrho', f-a) \geqq \int_\varrho^{\varrho'} \frac{n(r, f-a) - n_0(f-a)}{r}\,dr \geqq [n(\varrho, f-a) - n_0(f-a)]\log\frac{\varrho'}{\varrho}.$$

Es ist also

$$n(\varrho, f-a)\log\frac{\varrho'}{\varrho} \leqq C - n_0(f-a)\log\varrho + m(\varrho', f-a).$$

Hier ist $-n_0(f-a)\log\varrho \leqq p\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho}$; wählt man ferner insbesondere

(26) $$\varrho = \frac{r+\varrho'}{2},$$

so wird $\frac{\varrho'}{\varrho} = 1 + \frac{\varrho'-r}{\varrho'+r} > 1 + \frac{\varrho'-r}{2\varrho'}$, und wegen der für $0 < t < 1$ gültigen Ungleichung $\log(1+t) > t\log 2$, $\log\frac{\varrho'}{\varrho} > \frac{\varrho'-r}{2\varrho'}\log 2$. Man findet also

$$n(\varrho, f-a) < \frac{2\varrho'}{(\varrho'-r)\log 2}\left(C + p\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho} + m(\varrho', f-a)\right),$$

oder unter Anwendung der Ungleichungen (5) und (6)

$$\overset{+}{\log} n(\varrho, f-a) < C + p\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho} + \overset{+}{\log}\varrho' + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho'-r} + \overset{+}{\log} m(\varrho', f);$$

hierbei hängt C wieder nur von a, c_0 und c_p ab. Die b-Stellenanzahl $n(\varrho, f-b)$ genügt einer analogen Ungleichung.

Wir eliminieren nun die zwei letzten Glieder der Beziehung (25) durch die zuletzt gefundenen Ungleichungen. Führt man noch den Wert (26) für ϱ ein und bemerkt man, dass $m(\varrho, f) \leqq m(\varrho', f)$ und $N(\varrho, f-z) \leqq N(\varrho', f-z)$, so gelangt man schliesslich zu folgendem Endergebnis (indem wir wieder ϱ statt ϱ' schreiben):

Es sei

$$f(x) = c_0 + c_p x^p + c_{p+1} x^{p+1} + \cdots \qquad (c_p \neq 0)$$

eine für $|x| < R$ eindeutige und reguläre analytische Funktion. Dann existiert für jedes a und b $(a \neq b)$ eine nur von c_0, c_p, a und b abhängige, endliche Konstante C derart, dass die Ungleichung

(27) $$m(r,f) < C + 8p\left(\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \overset{+}{\log}\varrho\right) + 6\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r}$$
$$+ N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b) - N(r, f') + 4\overset{+}{\log} m(\varrho, f)$$

für $0 < r < \varrho < R$ gilt.

Die Ungleichung (27) gilt a fortiori, wenn das Glied $-N(r, f')$ auf der rechten Seite weggelassen wird.

10. Wir gehen im Folgenden zu den Anwendungen der Grundbeziehung (27) über und unterscheiden hierbei zwei Hauptfälle, je nachdem R unendlich oder endlich ist. Es sei zunächst $f(x)$ *eine ganze Funktion*: die Ungleichung (27) besteht dann für beliebig grosse Werte r und $\varrho\,(>r)$. Wir behandeln sie dann weiter genau so wie die speziellere Ungleichung (13) im vorigen Abschnitt. Es sei also ϱ' eine beliebige positive Zahl; man setze dann

$$\varrho = r + \frac{\varrho' - r}{\varrho'},$$

multipliziere beide Seiten von (27) mit $\frac{dr}{r^{k+1}}\,(k>0)$ und integriere von $r = \varrho_0 > 0$ bis $r = \varrho'$ $(\varrho_0 < \varrho')$. Die Summe der aus den drei ersten Gliedern der rechten Seite stammenden Integrale liegt für $\varrho_0 \leqq \varrho' \leqq \infty$ unter einer festen, endlichen Schranke C (vgl. die Fussnote S. 9), und es wird also

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr < C + \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho,f-a)+N(\varrho,f-b)}{r^{k+1}}\,dr + 4\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho,f)}{r^{k+1}}\,dr. \tag{28}$$

Bemerkt man, dass $\frac{\varrho}{r} < 1 + \frac{1}{r}$ und $d\varrho = dr\left(1 - \frac{1}{\varrho'}\right)$, so folgt ferner

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho,f-z)}{r^{k+1}}\,dr = \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho,f-z)}{r^{k+1}}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{k+1}\frac{d\varrho}{1-\frac{1}{\varrho'}} < C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho,f-z)}{\varrho^{k+1}}\,d\varrho \qquad (z=a,b), \tag{29}$$

wo $C' = \dfrac{\left(1+\frac{1}{\varrho_0}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{\varrho_0}}$, und in derselben Weise

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho,f)}{r^{k+1}}\,dr < C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho,f)}{\varrho^{k+1}}\,d\varrho. \tag{29'}$$

Es bezeichne $t_0 > 1$ eine Zahl von der Art, dass $\log t < \frac{t}{8C'}$ für $t \geq t_0$ ist; für $0 \leq t < t_0$ ist wieder $\overset{+}{\log} t < \log t_0$, und es ist also jedenfalls $\overset{+}{\log} t < \log t_0 + \frac{t}{8C'}$. Demnach wird

$$4\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\overset{+}{\log} m(\varrho,f)}{r^{k+1}}\,dr < 4C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\log t_0}{r^{k+1}}\,dr + \frac{1}{2}\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr, \tag{30}$$

wo das erste Integral rechts für jedes $\varrho' > \varrho_0$ kleiner als $\frac{\log t_0}{k\varrho_0^k}$ ist. Führt man nun die Schranken (29) und (30) in die Ungleichung (28) ein, so folgt unmittelbar, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr < C_1 + C_2\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(r,f-a)+N(r,f-b)}{r^{k+1}}\,dr \tag{31}$$

für jedes $\varrho' > \varrho_0$ und $k > 0$ ist. Die Grössen C_1 und C_2 sind hierbei von ϱ' unabhängig: $C_2 = 2C'$ hängt nur von ϱ_0 und k, C_1 nur von a, b, c_0, c_p, p, ϱ_0 und k ab.

Wenn das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\,dr \tag{32}$$

divergent ist, so kann die Ungleichung (31) durch

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}} < (1+\varepsilon(\varrho'))\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(r,f-a)+N(r,f-b)}{r^{k+1}}\,dr \tag{33}$$

ersetzt werden. Aus der Voraussetzung folgt nämlich mittels der Ungleichung (31) zunächst, dass auch das rechtsstehende Integral für $\varrho' \to \infty$ divergent ist. Unter Beachtung der Beziehung (29) schliesst man hieraus, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho, f-a)+N(\varrho, f-b)}{r^{k+1}}\,dr = \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(\varrho, f-a)+N(\varrho, f-b)}{\varrho^{k+1}}(1+\varepsilon(\varrho))\,d\varrho =$$

$$(1+\varepsilon(\varrho'))\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(r, f-a)+N(r, f-b)}{r^{k+1}}\,dr.$$

Ferner ist nach (29)'

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\log^+ m(\varrho, f)}{r^{k+1}}\,dr < C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{\log^+ m(r, f)}{r^{k+1}}\,dr - C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}}\varepsilon(r)\,dr = \varepsilon(\varrho')\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}}\,dr.$$

Die behauptete Ungleichung (33) folgt nun aus den zwei letztgeschriebenen Beziehungen in Verbindung mit (28).

Zusammenfassend haben wir also folgendes Ergebnis:

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion ist, und a und b zwei endliche, von einander verschiedene Zahlen bezeichnen, so besteht für $\varrho' > \varrho_0 > 0$ und $k > 0$ die Ungleichung

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}}\,dr < C_1 + C_2\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(r, f-a)+N(r, f-b)}{r^{k+1}}\,dr,$$

wobei C_2 nur von ϱ_0 und k, C_1 nur von a, b, c_0, c_p, p, ϱ_0 und k abhängt.

Diese Ungleichung kann, falls das Integral (32) *divergent ist, durch die Beziehung* (33) *ersetzt werden.*

11. Als erste Anwendung des eben ausgesprochenen Satzes wollen wir folgendes Korollar[1]) beweisen.

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion, und $r_\mu(z)\,(\mu = 1, 2, \cdots)$ die absoluten Beträge der Nullstellen von $f(x) - z$. Wenn dann, für ein gewisses $k > 0$, die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_\mu(z)}\right)^k \tag{34}$$

für zwei verschiedene Werte z konvergent ist, so konvergiert auch das Integral

$$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}}\,dr, \tag{35}$$

wo $M(r) = \max_{|x|=r} |f(x)|$, und es ist

$$M(r) = e^{\varepsilon(r)\,r^k}. \tag{35'}$$

Aus der Ungleichung (31) folgt zunächst, dass das Integral (32) sicher konvergent ist, sobald das Integral

[1]) Valiron hat den nachstehenden Satz unter der Annahme bewiesen, dass $f(x)$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung ist (C. R., 18 avril 1922).

(36) $$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\, dr$$

für zwei verschiedene Werte z konvergent ist. Zum Beweise genügt es also, wenn wir zeigen, dass einerseits das Integral (36) und die Reihe (34), andererseits die Integrale (32) und (35) gleichzeitig konvergent oder divergent sind. In der Tat findet man durch partielle Integration

(37) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\, dr = \frac{N(\varrho_0, f-z)}{k\,\varrho_0^k} - \frac{N(\varrho, f-z)}{k\,\varrho^k} + \frac{1}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{n(r, f-z) - n_0(f-z)}{r^{k+1}}\, dr,$$

wonach das Integral (36) konvergent ist, falls das Integral

(38) $$\int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{n(r, f-z)}{r^{k+1}}\, dr$$

konvergiert. Wird jenes Integral umgekehrt konvergent angenommen, so ist

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\, dr \geqq N(\varrho, f-z)\int_{\varrho}^{\infty} \frac{dr}{r^{k+1}} = \frac{N(\varrho, f-z)}{k\,\varrho^k}.$$

Dieser letzte Ausdruck verschwindet also für $\varrho \to \infty$, und man schliesst somit, dass das letzte Glied der Ungleichung (37) für $\varrho \to \infty$ endlich bleibt, woraus die Konvergenz von (38) folgt. Die Integrale (36) und (38) sind also gleichzeitig konvergent oder divergent. Mittels der Formel

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{n(r, f-z)}{r^{k+1}}\, dr = \frac{n(\varrho_0, f-z)}{k\,\varrho_0^k} - \frac{n(\varrho, f-z)}{k\,\varrho^k} + \frac{1}{k}\sum_{\varrho_0 < r_\mu(z) < \varrho} \left(\frac{1}{r_\mu(z)}\right)^k$$

beweist man ferner in genau derselben Weise, dass auch das Integral (38) und die Reihe (34) in Bezug auf Konvergenz und Divergenz gleichwertig sind, womit der erste Teil der Behauptung nachgewiesen ist.

Um zu zeigen, dass auch die Integrale (32) und (35) gleichzeitig konvergent oder divergent sind, bemerken wir zunächst dass

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq \overset{+}{\log} M(r).$$

Eine Ungleichung von umgekehrter Richtung ergibt sich mittels der Formel (1) (S. 5). Bezeichnen $a_\mu (\mu = 1, 2, \cdots)$ die Nullstellen von $f(x)$, so ist für $r < \varrho$

$$\log |f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta})|\, \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta - \sum_{|a_\mu| < \varrho} \log \left|\frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho\,(x - a_\mu)}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(\varrho e^{i\vartheta})|\, \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta,$$

und also

$$\log M(r) \leqq \frac{\varrho + r}{\varrho - r} m(\varrho, f). \tag{39}$$

Für $\varrho = qr$ $(q > 1)$ ist folglich

$$m(r, f) \leqq \overset{+}{\log} M(r) \leqq \frac{q+1}{q-1} m(qr, f), \tag{39'}$$

oder

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\, dr < \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\overset{+}{\log} M(r)}{r^{k+1}}\, dr < \frac{q+1}{q-1} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(qr,f)}{r^{k+1}}\, dr < \frac{q+1}{q-1} q^k \int_{\varrho_0}^{q\varrho} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}}\, dr,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Die Beziehung (35)' ergibt sich schliesslich als Folge der Konvergenz des Integrals (35).

12. Als zweite Anwendung des Satzes auf S. 17 werden wir durch Kombination der Ungleichung (31) mit der Grundungleichung (27) eine Abschätzung des Mittelwertes $m(r, f)$ selbst, sowie des Maximalmoduls $M(r)$ geben. Setzen wir z. B. $k = 1$, so folgt aus (31) zunächst, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^2}\, dr < C_1 + C_2 \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^2}\, dr \leqq C_1 + \frac{C_2}{\varrho_0}\big(N(\varrho', f-a) + N(\varrho', f-b)\big),$$

während andererseits für $\varrho_0 < \varrho < \varrho'$

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^2}\, dr \geqq \int_{\varrho}^{\varrho'} \frac{m(r,f)}{r^2}\, dr \geqq m(\varrho, f) \int_{\varrho}^{\varrho'} \frac{dr}{r^2} = \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho\varrho'} m(\varrho, f) \geqq \frac{\varrho' - \varrho}{\varrho'^2} m(\varrho, f).$$

Es wird also

$$m(\varrho, f) < \frac{\varrho'^2}{\varrho' - \varrho}\Big[C_1 + \frac{C_2}{\varrho_0}\big(N(\varrho', f-a) + N(\varrho', f-b)\big)\Big],$$

oder durch Anwendung der Ungleichungen (5) und (6):

$$\overset{+}{\log} m(\varrho, f) < C + 2\overset{+}{\log}\varrho' + \overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho' - \varrho} + \overset{+}{\log}\big(N(\varrho', f-a) + N(\varrho', f-b)\big).$$

Hier hängt C nur von C_1, C_2 und ϱ_0, d. h. (vgl. den Satz S. 17) nur von a, b, c_0, c_p, p, ϱ_0 und $k\,(=1)$ ab. Eliminiert man nun das letzte Glied der Beziehung (27) durch die obige Ungleichung, so findet man, wenn man $\varrho = \frac{\varrho' + r}{2}$ setzt und wieder einfach ϱ statt ϱ' schreibt, folgendes Ergebnis:

Es sei $f(x) = c_0 + c_p x^p + \cdots$ $(c_p \neq 0)$ *eine für* $|x| < R$ *reguläre analytische Funktion. Bezeichnen* a *und* b *zwei endliche, von einander verschiedene Zahlen, und* ϱ_0 *eine beliebige positive Zahl* $< R$, *so existieren zwei nur von* a, b, c_0, c_p, p *und* ϱ_0 *abhängige Grössen* C_1 *und* C_2 *derart, dass die Ungleichung*

$$\begin{aligned} m(r, f) < C_1 + C_2 \overset{+}{\log}\varrho + 10 \overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b) - N(r, f') \\ + 4\overset{+}{\log}\big(N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)\big) \end{aligned} \tag{40}$$

für $\varrho_0 < r < \varrho < R$ *besteht.*

Aus (40) ergibt sich insbesondere der Folgesatz:

Wenn $f(x)$ eine ganze transzendente Funktion ist, so gilt für jedes endliche a, b $(a \neq b)$ und $\varrho > r$:

$$m(r,f) + N(r,f') < 10 \log^{+} \frac{1}{\varrho - r} + (1 + \varepsilon(\varrho))\,(N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)). \tag{41}$$

Da der Unendlichkeitspunkt nach Voraussetzung eine wesentlich singuläre Stelle ist, so ist nämlich $[n(r,f-a) + n(r,f-b)] \to \infty$ für $r \to \infty$, und demnach $\log \varrho = \varepsilon(\varrho)\,[N(\varrho,f-a) + N(\varrho,f-b)]$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Wir machen noch auf folgendes Korollar der Ungleichung (41) aufmerksam:

Es sei $f(x)$ eine ganze transzendente Funktion. Bezeichnet q eine Zahl > 1, und ε eine beliebig kleine positive Zahl, so besteht die Ungleichung

$$\log M\left(\frac{\varrho}{q}\right) < \left(\frac{q+1}{q-1} + \varepsilon\right)[N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)] \tag{42}$$

von einem gewissen Wert ϱ ab.

Aus (41) folgt nämlich zunächst, wenn $r = \varrho - 1$ gesetzt wird,

$$m(\varrho - 1, f) < (1 + \varepsilon(\varrho))\,[N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)],$$

und aus (39) für $r < \varrho - 1$

$$\log M(r) \leqq \frac{\varrho - 1 + r}{\varrho - 1 - r}\, m(\varrho - 1, f).$$

Setzt man $\varrho = qr$ so ergibt sich die behauptete Beziehung (42) unmittelbar durch Verbindung der zwei letzten Ungleichungen.

VALIRON hat früher die Ungleichung

$$\log M\left(\frac{\varrho}{q}\right) < C\,[N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)] \tag{42'}$$

mit einem weniger scharfen Wert der Konstante C als der obige $\left(\frac{q+1}{q-1} + \varepsilon\right)$ für eine ganze Funktion *endlicher* Ordnung bewiesen. Für ganze Funktionen unendlicher Ordnung hat er eine weniger genaue Ungleichung gegeben, die aus (42)' hervorgeht, wenn die linke Seite durch $\left[\log M\left(\frac{\varrho}{q}\right)\right]^{1-\varepsilon}$ ersetzt wird, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet.[1])

13. Aus der obigen Untersuchung ist hervorgegangen, dass eine ganze Funktion $f(x)$, bei gegebener Verteilung der Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ für zwei verschiedene Werte z, nicht beliebig stark für $|x| \to \infty$ ins Unendliche wachsen kann. Nun kennt man aber auch Ungleichungen, die etwas in umgekehrter Richtung aussagen, indem sie zeigen, dass das Anwachsen von $f(x)$, bei gegebener Dichte der Nullstellen von $f(x) - z$ für irgendeinen Wert z, in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes auch nicht beliebig schwach sein kann, es sei denn dass $f(x)$ konstant gleich z ist. Von derartigen Sätzen sind vor allem diejenigen zu

[1]) Vgl. die in der Fussnote 1) S. 3 unter f) zitierte Arbeit.

nennen, welche Folgerungen der JENSENschen Formel sind.[1]) Wendet man diese Formel auf die Funktion $f(x)-z$ an, so ergibt sich

$$m(r, f-z) = C + m\left(r, \frac{1}{f-z}\right) + N(r, f-z) + n_0(f-z)\log r,$$

oder, da $m(r, f-z) \leq m(r, f) + \overset{+}{\log}|z| + \log 2$ und $n_0(f-z) \leq p$ ist,

$$m(r, f) > C + N(r, f-z) - p\overset{+}{\log}\frac{1}{r}, \tag{43}$$

wo C höchstens von z, c_0 und c_p abhängt. Durch Integration folgt hieraus, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{m(r, f)}{r^{k+1}}\,dr > C + \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\,dr \quad (k>0); \tag{44}$$

diese Ungleichung, wo C von ϱ unabhängig ist, besteht für jedes $\varrho > \varrho_0$.

Durch Verbindung der letzten Ungleichung mit den oben abgeleiteten (31) und (33) gelangt man zu folgendem Satz:

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion ist, und a, b und z $(a \neq b)$ beliebige, gegebene Zahlen bezeichnen, so gibt es für jedes $k>0$, $\varrho_0 > 0$ zwei Konstanten C_1 und C_2 von der Art, dass die Ungleichung

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\,dr < C_1 + C_2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^{k+1}}\,dr \tag{45}$$

für jedes $\varrho > \varrho_0$ besteht. C_2 hängt nur von ϱ_0 und k ab.

Wenn das linksstehende Integral für $\varrho \to \infty$ divergent ist, so gilt

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\,dr < (1+\varepsilon(\varrho)) \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{N(r, f-a) + N(r, f-b)}{r^{k+1}}\,dr. \tag{46}$$

Aus (45) folgt insbesondere, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{N(r, f-z)}{r^{k+1}}\,dr$$

für jeden endlichen Wert z konvergent sein muss, sobald dies für *zwei* Werte zutrifft. Beachtet man, was oben über den Zusammenhang dieses Integrals und der Reihe (34) bewiesen wurde, so ergibt sich nachstehender Folgesatz:[2])

Wenn, für ein gegebenes $k>0$, die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_\mu(z)}\right)^k$$

für einen gewissen Wert z divergent ist, so divergiert sie für alle Werte z, ausser möglicherweise einem einzigen.

[1]) In der S. 3 zitierten Arbeit von F. und R. NEVANLINNA wird eine Reihe von derartigen Sätzen bewiesen.

[2]) Für eine ganze Funktion endlicher Ordnung wurde dieser Satz früher von VALIRON bewiesen. Vgl. die in der Fussnote S. 17 zitierte Note.

14. Wir geben im Folgenden noch einige Sätze über das asymptotische Verhalten der Quotienten $\frac{N(r,f-z)}{m(r,f)}$ und

$$h(r,z)=\int_{\varrho_0}^{r}\frac{N(t,f-z)}{t^{k+1}}dt:\int_{\varrho_0}^{r}\frac{m(t,f)}{t^{k+1}}dt,$$

welche ebenfalls unmittelbare Konsequenzen der oben hergeleiteten Ungleichungen sind:

Es sei k eine positive Zahl, und $f(x)$ eine ganze Funktion derart, dass das Integral

$$\int^{r}\frac{m(r,f)}{r^{k+1}}dr$$

divergent ist. Dann ist

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f-z)}{m(r,f)}\leqq 1,\quad \limsup_{r\to\infty}h(r,z)\leqq 1 \tag{47}$$

für jedes endliche z, und

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f-z)}{m(r,f)}\geqq\frac{1}{2},\quad \limsup_{r\to\infty}h(r,z)\geqq\frac{1}{2} \tag{48}$$

für jedes z, ausser möglicherweise einem einzigen Wert.

Der erste Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung der Ungleichung (43) bzw. (44). Wäre wieder, für *zwei* verschiedene Werte $z=a$ und $z=b$, der eine der obigen Quotienten von einem gewissen Wert r ab kleiner als $\frac{1}{2}-\varepsilon\,(\varepsilon>0)$, so würde ein Widerspruch mit der Ungleichung (33) entstehen.

Ebenso leicht beweist man:

Wenn, unter den Bedingungen des vorhergehenden Satzes,

$$\limsup_{r\to\infty}h(r,z)\leqq\Theta<1$$

für einen gewissen Wert $z=a$ ist, so ist

$$\liminf_{r\to\infty}h(r,z)\geqq 1-\Theta \tag{49}$$

für jedes $z\neq a$.

Wenn also insbesondere für einen gewissen Wert a

$$\lim_{r\to\infty}h(r,a)=0,$$

so ist für jedes $z\neq a$

$$\lim_{r\to\infty}h(r,z)=1.$$

Aus diesem Satz folgt insbesondere:

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion von positiver Wachstumsordnung, die für einen gewissen Wert $z=a$ der Bedingung

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f-z)}{m(r,f)}\leqq\Theta<1 \tag{50}$$

genügt. Dann ist für jedes $z\neq a$

$$1\geqq\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,f-z)}{m(r,f)}\geqq 1-\Theta. \tag{51}$$

Aus der Voraussetzung folgt zunächst, dass ein $k > 0$ existiert, wofür das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr, \quad \text{und also auch} \quad \int^{\infty} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}} dr$$

divergent ist. Wegen (50) ist dann auch $\limsup_{r \to \infty} h(r,a) \leqq \Theta$. Die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes sind also erfüllt, und die Behauptung folgt nunmehr aus (49) und (47).[1])

Ferner gilt der Satz:

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion positiver Wachstumsordnung ist, die der Bedingung

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, f-a)}{N(r, f-b)} \leqq \Theta < 1$$

genügt, so ist

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{N(r, f-z)}{N(r, f-b)} \geqq 1 - \Theta$$

für jedes $z \neq a$.

Dieser Satz kann unmittelbar auf den vorhergehenden zurückgeführt werden; am Einfachsten folgt er aus der Ungleichung (46).

Ein jeder der obigen Sätze gibt auch Aufschluss über das Verhalten der Quotienten $\frac{n(r, f-z_1)}{n(r, f-z_2)}$ für verschiedene Werte z_1 und z_2. So folgt z. B. aus dem letzten Satz, dass wenn bei einer ganzen Funktion positiver Wachstumsordnung

$$\frac{n(r, f-a)}{n(r, f-b)} \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty,$$

so existiert für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ und jedes z eine Zahlenfolge r_ν ($\nu = 1, 2, \cdots$; $r_\nu \to \infty$ für $\nu \to \infty$) derart, dass die Ungleichung

$$n(r_\nu, f-z) > (1-\varepsilon)\, n(r_\nu, f-b)$$

für sämtliche $\nu = 1, 2, \cdots$ besteht. Ergebnisse von solcher Schärfe sind unseres Wissens auch innerhalb der Theorie der ganzen Funktionen *endlicher* Ordnung nicht früher bekannt.

Wir wollen noch die Genauigkeit der obigen Resultate an einem einfachen Beispiele prüfen. Für die Funktion e^{x^k}, wo k eine positive ganze Zahl ist, ist wie man leicht findet

---

[1]) Man bemerke, dass jeder Satz über das asymptotische Verhalten des Quotienten $\frac{N(r, f-z)}{m(r,f)}$ wegen der JENSENschen Formel

$$m(r, f-z) = C + m\left(r, \frac{1}{f-z}\right) + N(r, f-z) + n_0(f-z) \log r$$

Aufschluss über das Verhalten des Quotienten $\frac{m\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{m(r,f)}$ für $r \to \infty$ gibt. Es ist nämlich $\lim_{r \to \infty} \frac{m(r, f-z)}{m(r,f)} = 1$ und also, wenn $\frac{\log r}{m(r,f)} \to 0$ für $r \to \infty$, d. h. wenn $f(x)$ nicht ein Polynom ist,

$$\lim_{r \to \infty} \left\{ \frac{m\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{m(r,f)} + \frac{N(r, f-z)}{m(r,f)} \right\} = 1.$$

$$m(r, e^{x^k}) = \frac{r^k}{\pi}.$$

Ferner ist $e^{x^k} \neq 0$ und also $N(r, e^{x^k}) = 0$. Nach der Ungleichung (51) muss daher

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\pi N(r, e^{x^k} - z)}{r^k} = 1$$

für jedes endliche $z \neq 0$ sein. Aus dieser Bedingung schliesst man weiter, dass die Ungleichung

(a) $$n(r, e^{x^k} - z) > (1 - \varepsilon)\frac{k}{\pi} r^k,$$

wo $\varepsilon > 0$, für eine unendliche Folge von unbeschränkt wachsenden Werten r bestehen muss.

Nun ist tatsächlich, wie man unmittelbar einsieht,

$$n(r, e^{x^k} - z) \sim \frac{k}{\pi} r^k$$

für jedes $z \neq 0$; der Faktor $\frac{k}{\pi}$ auf der rechten Seite der Ungleichung (a) kann also nicht vergrössert werden. Mittels früher bekannter Sätze über ganze Funktionen ganzzahliger Ordnung hätte man im vorliegenden Falle nur schliessen können, dass $n(r, e^{x^k} - z)$ für jedes $z \neq 0$ dem Normaltypus der Ordnung r^k angehören muss.[1])

Für die Funktion $\frac{1}{\Gamma(x)}$ findet man:

$$m\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right) \sim \frac{r \log r}{\pi}, \quad N\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right) \sim r,$$

und also $\lim_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right)}{m\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right)} = 0$. Nach unserem Satze ist also

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{N\left(r, \frac{1}{\Gamma} - z\right)}{m\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right)} = 1$$

für jedes $z \neq 0$. Man schliesst also dass die Ungleichung

$$n\left(r, \frac{1}{\Gamma} - z\right) > (1 - \varepsilon)\frac{r \log r}{\pi}$$

für $z \neq 0$ auf unendlich vielen, beliebig grossen Kreisen $|x| = r$ bestehen muss; der Faktor $\frac{1}{\pi}$ kann auch hier nicht vergrössert werden.

15. Die Grundungleichung (27) führt, auch wenn $f(x)$ nicht eine ganze Funktion, sondern nur innerhalb eines endlichen Kreises regulär ist, zu einigen Sätzen über den Wertvorrat dieser Funktion in der Nähe der Kreisperipherie, welche den oben bewiesenen analog sind. Das Verfahren, dessen wir uns hierbei bedienen werden, ist ebenfalls dem oben benutzten ähnlich, weshalb wir uns im Folgenden kürzer fassen können.

Wir nehmen an, $f(x)$ sei z. B. innerhalb des Einheitskreises eindeutig und regulär; die Hauptungleichung (27) ist also jetzt für $0 < r < \varrho < 1$ gültig. Wir multiplizieren beide Seiten mit $(1 - r)^{k-1} dr$, wo $k > 0$, und integrieren von $r = \varrho_0 > \frac{1}{2}$ bis $r = \varrho'$ $(\varrho_0 \leqq \varrho' \leqq 1)$ indem wir

[1]) Vgl. E. LINDELÖF: *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Ann. Éc. Norm. (3), XXII, 1905, insb. S. 386).

(52) $$\varrho = r + (1-r)(\varrho' - r)$$

wählen. Man sieht wiederum leicht ein, dass die Summe der von den drei ersten Gliedern rechts in (27) herrührenden Integrale für jedes $\varrho_0 < \varrho' < 1$ unter einer von ϱ' unabhängigen, endlichen Schranke C liegt.[1]) Es wird also

(53) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr < C + \int_{\varrho_0}^{\varrho'} \big(N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b)\big)(1-r)^{k-1}\,dr + 4\int_{\varrho_0}^{\varrho'} {}^{+}\log m(\varrho,f)(1-r)^{k-1}\,dr.$$

Nun ist nach (52) $d\varrho = (2r-\varrho')\,dr > (2r-1)\,dr$, $1-\varrho = (1-r)(1+r-\varrho')$ und also $1-r > 1-\varrho > (1-r)r$, wonach $(z = a, b)$

(54) $$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} N(\varrho, f-z)(1-r)^{k-1}\,dr = \int_{r=\varrho_0}^{\varrho'} N(\varrho, f-z)(1-\varrho)^{k-1}\left(\frac{1-r}{1-\varrho}\right)^{k-1}\frac{d\varrho}{2r-\varrho'}$$
$$< \int_{r=\varrho}^{\varrho'} N(\varrho, f-z)(1-\varrho)^{k-1}\frac{d\varrho}{r^{k-1}(2r-1)} < \frac{1}{\varrho_0^{k-1}(2\varrho_0-1)}\int_{\varrho_0}^{\varrho'} N(\varrho, f-z)(1-\varrho)^{k-1}\,d\varrho,$$

und in derselben Weise

(54)′ $$\int_{\varrho_0}^{\varrho'} {}^{+}\log m(\varrho,f)(1-r)^{k-1}\,dr < \frac{1}{\varrho_0^{k-1}(2\varrho_0-1)}\int_{\varrho_0}^{\varrho'} {}^{+}\log m(\varrho,f)(1-\varrho)^{k-1}\,d\varrho.$$

Mittels der Ungleichungen (53), (54) und (54)′ gelangt man, genau wie auf S. 16, 17, zu folgendem Ergebnis:

[1]) Die Summe der zwei ersten Glieder rechts in (27) ist für $\varrho_0 < r < \varrho' < 1$ kleiner als eine endliche Konstante C', und die Summe der entsprechenden Integrale also kleiner als

$$C'\int_{\varrho_0}^{\varrho'}(1-r)^{k-1}\,dr < C'\int_{\varrho_0}^{1}(1-r)^{k-1}\,dr = \frac{C'(1-\varrho_0)^k}{k}.$$

Ferner ist, da $\varrho - r = (1-r)(\varrho'-r) > (\varrho'-r)^2$,

$$I = \int_{\varrho_0}^{\varrho'} {}^{+}\log\frac{1}{\varrho'-r}\cdot(1-r)^{k-1}\,dr < 2\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\log\frac{1}{\varrho'-r}\,d\left(\frac{(1-\varrho')^k - (1-r)^k}{k}\right) = \frac{2}{k}\big((1-\varrho_0)^k - (1-\varrho')^k\big)\log\frac{1}{\varrho'-\varrho_0}$$
$$+\frac{2}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}\frac{(1-r)^k - (1-\varrho')^k}{\varrho'-r}\,dr.$$

Hier hat das erste Glied rechts ein endliches Maximum M im Intervalle $\varrho_0 < \varrho' \leq 1$. Der Integrand des letzten Integrals ist wiederum für jedes $0 < r < \varrho'$ kleiner als $h(1-r)^{k-1}$, wo h die grössere der Zahlen 1 und k bezeichnet (vgl. die Fussnote S. 10). Es ist also

$$I < M + \frac{2h}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho'}(1-r)^{k-1}dr < M + \frac{2h}{k^2}(1-\varrho_0)^k.$$

Wenn $f(x)$ eine im Einheitskreise reguläre analytische Funktion ist, und a und b $(a \neq b)$ zwei gegebene endliche Zahlen bezeichnen, so gibt es für $\varrho_0 < 1$ und $k > 0$ zwei Konstanten C_1 und C_2 derart, dass

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr < C_1 + C_2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} [N(r,f-a) + N(r,f-b)]\,dr \tag{55}$$

für jedes $\varrho_0 \leq \varrho < 1$ ist.

Wenn das linksstehende Integral für $\varrho = 1$ divergent ist, so gilt

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr < \left(1 + \varepsilon\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \int_{\varrho_0}^{\varrho} [N(r,f-a) + N(r,f-b)]\,dr. \tag{56}$$

16. Als Korollar können wir folgenden Satz aussprechen:

Wenn, für ein gewisses $k > 0$, die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} (1 - r_\nu(z))^{1+\varepsilon} \tag{57}$$

für zwei verschiedene Werte z konvergiert, so sind auch die Integrale

$$\int_{\varrho_0}^{1} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr \quad \text{und} \quad \int_{\varrho_0}^{1} \log M(r)(1-r)^{k}\,dr \tag{58}$$

konvergent, und es ist

$$\lim_{r=1} (1-r)^k m(r,f) = 0, \quad \lim_{r=1} (1-r)^{k+1} \log M(r) = 0. \tag{59}$$

Durch partielle Integration ergibt sich nämlich

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} N(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr = \frac{(1-\varrho_0)^k N(\varrho_0, f-z)}{k} - \frac{(1-\varrho)^k N(\varrho, f-z)}{k} + \frac{1}{k}\int_{\varrho_0}^{\varrho} \big(n(r,f-z) - n_0(f-z)\big)(1-r)^k \frac{dr}{r},$$

und weiter

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} n(r,f-z)(1-r)^k\,dr = \frac{(1-\varrho_0)^{k+1} n(\varrho_0, f-z)}{k+1} - \frac{(1-\varrho)^{k+1} n(\varrho, f-z)}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sum_{\varrho_0 < r_\nu < \varrho} (1 - r_\nu(z))^{k+1},$$

woraus man, wie auf S. 18, schliesst, dass die Integrale

$$\int_{\varrho_0}^{1} N(r,f-z)(1-r)^{k-1}\,dr, \quad \int_{\varrho_0}^{1} n(r,f-z)(1-r)^k\,dr \tag{60}$$

und die Reihe (57) gleichzeitig konvergent oder divergent sind. Aus der Voraussetzung folgt also, dass das erste der Integrale (60) für zwei verschiedene Werte z konvergent ist. Wegen der Ungleichung (55) muss dann aber auch das erste der Integrale (58) konvergieren. Bezeichnet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so ist folglich

$$\varepsilon > \int_r^1 m(t,f)(1-t)^{k-1}\,dt > m(r,f)\int_r^1 (1-t)^{k-1}\,dt = \frac{(1-r)^k\, m(r,f)}{k},$$

woraus die erste der Beziehungen (59) folgt. Der den Maximalmodul $M(r)$ betreffende Teil der Behauptung ergibt sich dann unmittelbar durch Anwendung der Ungleichung (39) (S. 19), wenn man dort $\varrho = \frac{1+r}{2}$ setzt.

17. Wir bringen wieder die oben hergeleiteten Ungleichungen in Verbindung mit der JENSENschen Ungleichung (vgl. S. 21):

$$m(r,f) > C + N(r,f-z) - p\log^+ \frac{1}{r}$$

und

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr > C' + \int_{\varrho_0}^{\varrho} N(r,f-z)(1-r)^{k-1}\,dr;$$

die letzte Beziehung ergibt sich aus der JENSENschen durch Multiplikation mit $(1-r)^{k-1}\,dr$ $(k>0)$ und Integration. Man gelangt so zu folgendem Satz:

Wenn $f(x)$ eine innerhalb des Einheitskreises eindeutige, reguläre analytische Funktion ist, und a, b $(a \neq b)$ und z beliebige komplexe Zahlen bezeichnen, so existieren für jedes $k>0$ und $\varrho_0 < 1$ zwei Konstanten C_1 und C_2 von der Art, dass die Ungleichung

$$(61)\qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho} N(r,f-z)(1-r)^{k-1}\,dr < C_1 + C_2\int_{\varrho_0}^{\varrho} [N(r,f-a)+N(r,f-b)](1-r)^{k-1}\,dr$$

für $\varrho_0 < \varrho < 1$ besteht.

Wenn das linksstehende Integral für $\varrho \to 1$ unbeschränkt wächst, so gilt insbesondere

$$(61)'\qquad \int_{\varrho_0}^{\varrho} N(r,f-z)(1-r)^{k-1}\,dr < \left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)\int_{\varrho_0}^{\varrho} [N(r,f-a)+N(r,f-b)](1-r)^{k-1}\,dr.$$

Aus der Beziehung (61) schliessen wir, dass die Integrale (60) für jedes endliche z konvergieren müssen, sobald dies für *zwei* Werte z gilt. Bemerkt man dass die besagten Integrale und die Reihe (57) gleichzeitig konvergent oder divergent sind, so kann man dieses Ergebnis in folgender Weise aussprechen:

Wenn, für ein gewisses $k>0$, die Reihe

$$(62)\qquad \sum_1^{\infty} (1-r_\nu(z))^{1+k}$$

für einen Wert z divergent ist, so ist sie für alle Werte z, ausser möglicherweise einem einzigen, divergent.

Mittels der Beziehungen (61) und (61)' beweist man auch die folgenden Sätze über das Verhalten des Quotienten

$$\bar{h}(r,z) = \int_{r_0}^{r} N(t,f-z)(1-t)^{k-1}\,dt : \int_{r_0}^{r} m(t,f)(1-t)^{k-1}\,dt.$$

Wenn das Integral

$$\int_{r_1}^{1} m(r,f)(1-r)^{k-1}\,dr$$

divergent ist, so gelten die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \leq \limsup_{r=1} \bar{h}(r,z) \leq 1$$

für jedes endliche z, ausser möglicherweise einem einzigen Wert, für welchen $\limsup h(r,z) < \frac{1}{2}$ *sein kann.*

Ferner gilt:

Unter der Bedingung des vorigen Satzes sei für einen gewissen Wert $z=a$

$$\limsup_{r=1} h(r,z) \leq \Theta < 1.$$

Dann gilt die Bedingung

$$\liminf_{r=1} h(r,z) \geq 1-\Theta$$

für jedes $z \neq a$.

Wenn insbesondere $\lim_{r=1} h(r,a) = 0$ *ist, so besteht die Beziehung*

$$\lim_{r=1} h(r,z) = 1$$

für jedes $z \neq a$.

Man sieht ebenfalls unmittelbar ein dass *sämtliche durch die Sätze auf* S. 22-23 *ausgedrückten asymptotischen Eigenschaften der Funktionen $N(r,f-z)$ und $n(r,f-z)$ auch im vorliegenden Falle bestehen, unter der Annahme, dass die Beziehung*

$$\lim_{r=1} m(r,f)(1-r)^k = 0$$

nicht für alle $k>0$ besteht, oder, was damit gleichbedeutend ist, dass ein $k>0$ existiert, wofür die Integrale (58) *divergent sind.*

18. Durch konforme Abbildung kann man die zuletzt bewiesenen Sätze auf den allgemeinen Fall übertragen, wo $f(x)$ innerhalb eines beliebigen, einfach zusammenhängenden Gebietes G regulär ist. Wir wollen dies nur in dem besonderen Fall durchführen, wo G ein Winkelgebiet ist. Man gelangt so zu folgender Verallgemeinerung des Satzes der Nummer 11:

Sei $f(x)$ eine innerhalb des durch die Ungleichung $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ definierten Winkelgebietes G eindeutige und reguläre analytische Funktion der komplexen Variable $x = re^{i\varphi}$. Seien ferner $r_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ die absoluten Beträge der Nullstellen von $f(x)-z$ innerhalb G und $M(r,\vartheta)$ gleich dem Maximum von $|fx|$ auf dem Kreisbogen $|x|=r, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2\vartheta}$.

Wenn dann, für ein gewisses $k>\alpha$, die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^k$$

für zwei verschiedene Werte $z=a$ und $z=b$ konvergent ist, so konvergiert das Integral

(63) $$\int^{\infty} \frac{\log M(r, \vartheta)}{r^{k+1}} dr$$

für jedes $\vartheta > \alpha$.

Durch die Variabelsubstitution $x' = x^{\alpha}$ lässt sich dieser Satz sogleich auf den Fall $\alpha = 1$ zurückführen, wo also G die Halbebene der positiven reellen Teile ist. Zum Beweise bilden wir diese Halbebene durch die Transformation

$$\xi = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = \frac{1+\xi}{1-\xi} = x(\xi),$$

auf den Einheitskreis $|\xi| \leq 1$ konform ab. Wegen der Ungleichung

$$1 - |\xi| = 1 - \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq \frac{2}{|x+1|}$$

schliessen wir dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1 \quad \xi_\nu(z))^k,$$

wo $\xi_\nu(z)$ die Bildpunkte der Nullstellen von $f(x) - z$, d. h. die Nullstellen der Funktion $f(x(\xi)) - z$ bezeichnen, für $z = a$ und $z = b$ konvergent ist. Wir können also den Satz der Nummer 16 auf die Funktion $f(x(\xi)) = f(\xi)$ anwenden und schliessen, dass das Integral

(64) $$\int_{\varrho_0}^{1} \log M(r) (1-\varrho)^{k-1} d\varrho,$$

wo $M(\varrho) = \max_{|\xi| = \varrho} |f(\xi)|$, konvergent ist.

Die Bildkurve des Kreises $|\xi| = \varrho$ in der x-Ebene ist ein Kreis C_r, dessen Gleichung $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \varrho$ ist. Es sei r die grössere der Abszissen der Schnittpunkte dieses Kreises und der reellen Achse; dann ist $\varrho = \frac{r-1}{r+1}$ und also $1 - \varrho = \frac{2}{r+1} > \frac{1}{r}$, $d\varrho = \frac{2\,dr}{(r+1)^2} > \frac{1}{2}\frac{dr}{r^2}$. Aus der Konvergenz des Integrals (64) folgt somit dass auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr,$$

wo $M(r)$ gleich dem Maximum von $|f(x)|$ auf dem oben betrachteten Kreis C_r ist, konvergieren muss.

Nunmehr ergibt sich leicht, dass auch das Integral (63) für jedes $\vartheta > 1$ konvergent ist. Sei in der Tat ϑ eine beliebige Zahl > 1, und $0 < \Theta < 1$ eine Zahl, wofür $\arccos \Theta > \frac{\pi}{2\vartheta}$. Wir bestimmen dann die Schnittpunkte zwischen den Kreisen C_r und $|x| = \Theta r$; den Arcus des von diesen Punkten begrenzten Bogens des letztgenannten Kreises bezeichnen wir mit $\omega(r)$. Eine leichte Rechnung zeigt, dass $\lim_{r=\infty} \omega(r) = 2 \arccos \Theta$. Hieraus folgt dass der Bogen $|x| = \Theta r$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2\vartheta}$ von einem gewissen r ab *innerhalb* des Kreises C_r liegt, und dass folglich die Ungleichung $M(\Theta r, \vartheta) \leq M(r)$ von demselben Wert r ab besteht. Es ist also auch

$$\int_{r_0}^{R} \frac{\overset{+}{\log} M(r,\vartheta)}{r^{k+1}}\,dr \leq \int_{r_0}^{R} \frac{\overset{+}{\log} M\left(\frac{r}{\Theta}\right)}{r^{k+1}}\,dr = \frac{1}{\Theta^k}\int_{r_0}^{\Theta R} \frac{\overset{+}{\log} M(r)}{r^{k+1}}\,dr,$$

woraus die behauptete Konvergenz des Integrals (63) folgt.[1])

19. Die oben erzielten Resultate können kurz dahin zusammengefasst werden, dass, bei ausgedehnten Funktionenklassen, die Kenntnis der Verteilung der Wurzeln der Gleichung $f(x) = z$ für *zwei* verschiedene Werte z sowohl die Dichte der Wurzeln für ein *beliebiges* z wie das Anwachsen der Funktion mit erheblicher Genauigkeit bestimmt; ist die Wurzeldichte insbesondere für einen Wert $z = a$ exzeptionell klein, so treten die z-Stellen für sämtliche $z \neq a$ mit einer dem Anwachsen der Funktion entsprechenden Dichte auf. Im Falle einer *ganzen Funktion* wurden derartige Erscheinungen zuerst von BOREL entdeckt, der folgenden Satz bewiesen hat: *Bei einer ganzen Funktion sind die Ordnungen der Funktionen* $\log M(r)$ *und* $n(r, f-z)$ *einander gleich für jedes endliche* z, *ausser möglicherweise für einen einzigen Wert.* Der spezielle PICARDsche Satz, nach welchem *eine ganze Funktion höchstens einen Ausnahmewert besitzt*, gilt also unverändert, wenn unter einem Ausnahmewert ein Wert z verstanden wird, wofür $n(r, f-z)$ von niedrigerer Ordnung als $\log M(r)$ ist.

Ist die ganze Funktion von *endlicher* Ordnung, so kann noch hinzugefügt werden, dass der PICARD-BORELsche Ausnahmefall nur für *ganzzahlige* Ordnungen eintreffen kann: die Funktionen von endlicher, nicht ganzzahliger Ordnung haben überhaupt keine Ausnahmewerte im Sinne BORELS. Ein entsprechendes Ergebnis gilt, wenn der verallgemeinerte Ordnungsbegriff von LINDELÖF eingeführt wird. Durch Heranziehung der PRINGSHEIMschen Begriffe der Minimal-, Normal-, und Maximaltypen einer gegebenen endlichen Ordnung hat LINDELÖF[2]) auch eine Verschärfung des BORELschen Satzes über Funktionen ganzzahliger Ordnung gegeben: er hat gezeigt, dass der PICARDsche Satz in der oben gegebenen Fassung auch dann besteht, wenn folgende Erklärung gegeben wird: z heisst ein Ausnahmewert, falls $n(r, f-z)$ von niedrigerem *Typus* als $\log M(r)$ ist. Neuerdings hat VALIRON folgendes bemerkenswerte Ergebnis gefunden: Wenn, für ein gewisses $k > 0$, das Integral

[1]) Aus dem obigen Beweise geht hervor, dass die Beziehung

(a) $$\lim_{r=\infty} r^{-k} \log |f(re^{i\varphi})| = 0$$

für jedes $k > \alpha$, und $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ gilt. Früher hat VALIRON die Relation (a) für $k \geq 3\alpha$ bewiesen (vgl. die S. 3 unter 1) a) zitierte Arbeit, p. 252), und zwar unter der spezielleren Annahme, dass $f(x)$ in dem Winkel $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$ zwei Werte z nur in einer endlichen Anzahl von Punkten annimmt. Die von uns gefundene Schranke ($k > \alpha$) ist genau; die Beziehung a) besteht nicht mehr für $k = \alpha$. Die Exponentialfunktion e^x genügt nämlich in der Halbebene $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ der Voraussetzung unseres Satzes (sie ist ja nach unten beschränkt); die Formel (a) besteht aber für diese Funktion nicht mehr für $k = \alpha = 1$.

[2]) E. LINDELÖF: *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (Ann. Éc. Norm. (3), XXII, 1905, p. 369—395). Vgl. auch A. WIMAN: *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (Arkiv f. mat., astr. och fysik, I. 1903, p. 327—345).

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{k+1}} dr$$

divergent ist, so divergiert auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{n(r, f-z)}{r^{k+1}} dr$$

für jedes z ausser möglicherweise für einen einzigen Wert.[1]) Hier gilt wieder der Zusatz, dass der Ausnahmefall (Konvergenz des letzten Integrals) nur bei ganzzahligen Ordnungen vorkommen kann.[2])

In der Theorie der ganzen Funktionen *unendlicher* Ordnung sind die Borelschen Ideen insbesondere von Blumenthal[3]) und Valiron weiter entwickelt worden. Es ist ein Verdienst Valirons sich von dem Begriff der Ordnungstypen befreit und *direkte* Beziehungen zwischen den zu untersuchenden Grössen $\log M(r)$ und $N(r, f-z)$ bzw. $n(r, f-z)$ aufgestellt zu haben. So hat er neuerdings einige Sätze über das asymptotische Verhalten der Quotienten

$$\frac{\log N(r, f-z)}{\log_2 M(r)} \text{ bzw. } \frac{\log n(r, f-z)}{\log_2 M(r)}$$

gefunden, die wesentlich schärfer sind als die früheren Ergebnisse.[4])

In der vorstehenden Untersuchung haben wir die Fundamentalgrösse $\log M(r)$ durch den Mittelwert $m(r, f)$ ersetzt und sind so zu einigen Sätzen gelangt, die schon ziemlich feine Verschiedenheiten in den Dichten der z-Stellen einer ganzen Funktion hervortreten lassen. U. a. ist hervorgegangen, dass die Ungleichung

$$\limsup_{r=\infty} \frac{N(r, f-z)}{m(r, f)} < \frac{1}{2} \tag{65}$$

höchstens für *einen* endlichen Wert z bestehen kann, ein Ergebnis, das für *beliebige* ganze Funktionen gilt. Diesen Satz haben wir oben zwar nur für Funktionen von positiver Wachstumsordnung bewiesen; für Funktionen nullter Ordnung gilt er aber sogar in verschärfter Form. Aus einem Satze von Littlewood[5]) folgt nämlich, dass die Beziehung

$$\limsup_{r=\infty} \frac{N(r, f-z)}{m(r, f)} = 1 \tag{65}'$$

bei den Funktionen nullter Ordnung für *jedes* endliche z besteht; bei den Polynomen ist ja sogar

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r, f-z)}{m(r, f)} = 1$$

Mittels eines bekannten Satzes[6]) von Wiman lässt sich schliessen, dass die Gleichung (65)'

[1]) C. R., 18 avril 1922. Dieses Ergebnis ist in dem in der Nummer 11 bewiesenen Satze enthalten.

[2]) G. Valiron: *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (Bull. des sc. math., 2e série, t. XLV, 1921, p. 1-13).

[3]) O. Blumenthal: *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Paris, Gauthier Villars, 1910).

[4]) Vgl. die in der Fussnote 1, f) (S. 3) zitierte Arbeit.

[5]) J. E. Littlewood: *On the asymptotic approximation of integral functions of zero order* (Proc. London Math. Soc., 2e serie, t. V, 1907, p. 361-410).

[6]) A. Wiman: *Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard* (Arkiv f. mat., astr. och fys., II, 1905, p. 14) N:o 6.

allgemeiner bei allen Funktionen einer Ordnung $0 < k < \frac{1}{2}$ für *jedes* endliche z richtig ist. Für eine solche Funktion besteht nämlich nach WIMAN die Ungleichung

$$|f(x)| > e^{r^{k-\varepsilon}}$$

auf unendlich vielen, beliebig grossen Kreisen $|x| = r$. Demnach ist für jedes z $\liminf_{r=\infty} m\left(r, \frac{1}{f-z}\right) = 0$, woraus die Behauptung durch Anwendung des JENSENschen Satzes unmittelbar folgt (vgl. die Fussnote S. 23). Für *beliebige* ganze Funktionen gilt die Gleichung (65)′ nicht mehr allgemein; oben (S. 23) wurde aber gezeigt, dass falls ein Ausnahmewert z existiert, wofür

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r, f-z)}{m(r, f)} = 0,$$

die genannte Gleichung für alle übrigen Werte z bestehen muss.

Bei welchen ganzen Funktionen kann nun der durch die Ungleichung (65) charakterisierte Ausnahmefall tatsächlich vorkommen? Dass solche Ausnahmewerte bei unendlichen und endlichen, ganzzahligen Ordnungen existieren können, ist klar; bei Ordnungen $< \frac{1}{2}$ sind sie dagegen, wie wir soeben gesehen haben, nicht möglich. Es ist aber eine bemerkenswerte Tatsache, dass *der Picard'sche Ausnahmefall auch bei Funktionen von endlicher nicht ganzzahliger Ordnung eintreffen kann*, wenn nur hinreichend feine Verschiedenheiten in den Dichten der z-Stellen berücksichtigt werden, und der Begriff des Ausnahmewertes hinreichend scharf definiert wird. Ein Beispiel von dieser Art hat WIMAN angegeben (vgl. die in der Fussnote S. 30 zitierte Arbeit, S. 341). Die ganze Funktion

$$f(x) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{a_\nu}\right) e^{-\frac{x}{a_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^2 - \cdots + \frac{(-1)^p}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p},$$

wo $a_\nu = \nu^k$ und $p < k < p+1$, genügt nach WIMAN für jedes $z \neq 0$ der Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r, f)}{n(r, f-z)} = \frac{\sin \pi(k-p)}{p + \sin \pi(k-p)} \quad \text{für } p < k \leq p + \frac{1}{2},$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r, f)}{n(r, f-z)} = \frac{\sin \pi(k-p)}{p+1} \quad \text{für } p + \frac{1}{2} \leq k < p+1,$$

wonach die Wurzeln der Gleichung $f - z = 0$ für $z = 0$ mit exzeptionell kleiner Dichte auftreten.

Wir werden zeigen, dass, bei derselben Funktion, *der Wert $z = 0$ auch im Sinne unserer allgemeinen Definition* (65) *für hinreichend grosse Werte k ein Ausnahmewert ist.* Nach LINDELÖF[1]) gilt die asymptotische Darstellung

$$\log f(x) = (-1)^p \frac{\pi x^k}{\sin \pi(k-p)} (1 + \varepsilon(x))$$

für $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$ $(\delta > 0)$; es ist demnach

[1]) E. LINDELÖF: *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (Acta Soc. sc. Fenn., T. 31, 1902, vgl. p. 53).

$$\log|f(re^{i\varphi})| \sim (-1)^p \frac{\pi r^k \cos k\varphi}{\sin \pi (k-p)},$$

und also

$$m(r,f) \sim \frac{r^k}{2\sin \pi (k-p)} \int_{-\pi}^{+\pi} \pm \cos k\varphi \, d\varphi,$$

wobei das Integral über diejenigen Intervalle zu erstrecken ist, wo $\cos k\varphi > 0$ oder < 0, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Man findet so:

$$m(r,f) \sim \begin{cases} \dfrac{p+\sin \pi (k-p)}{k \sin \pi (k-p)} r^k & \text{für } p < k \leq p+\frac{1}{2}, \\ \dfrac{p+1}{k \sin \pi (k-p)} r^k & \text{für } p+\frac{1}{2} < k < p+1. \end{cases}$$

Ferner ist $n(r,f) \sim r^k$, und also $N(r,f) \sim \frac{r^k}{k}$. Demnach wird

$$(66) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} \dfrac{N(r,f)}{m(r,f)} = \dfrac{\sin \pi (k-p)}{p+\sin \pi (k-p)} & \text{für } p < k \leq p+\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{r=\infty} \dfrac{N(r,f)}{m(r,f)} = \dfrac{\sin \pi (k-p)}{p+1} & \text{für } p+\frac{1}{2} \leq k < p+1. \end{cases}$$

Aus dem asymptotischen Ausdruck der betrachteten Funktion folgt ferner unmittelbar, dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{m(r,f)} = 0$$

für jedes $z \neq 0$ ist, und also nach der Jensenschen Formel (vgl. die Fussnote S. 23)

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r,f-z)}{m(r,f)} = 1,$$

in Übereinstimmung mit den von Wiman angegebenen Beziehungen.

Man sieht, dass der Grenzwert (66), dem oben gefundenen Ergebnis entsprechend, konstant gleich Eins ist, wenn die Ordnung $k \leq \frac{1}{2}$ ist; für $k > \frac{1}{2}$ wird er < 1 und sinkt für $k > \frac{5}{6}$ unter die Grenze $\frac{1}{2}$ (für $k = \frac{3}{2}$ wird der Wert $\frac{1}{2}$ noch einmal erreicht). Für ganzzahlige k nimmt er den Wert Null an und erreicht zwischen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen p und $p+1$ für $k = p+\frac{1}{2}$ ein Maximum $\frac{1}{p+1}$, das also für $k \to \infty$ gegen Null strebt. *Der Wert $z=0$ ist demnach für jedes $k > \frac{5}{6}$ (ausser $k = \frac{3}{2}$) ein Ausnahmewert im Sinne der Definition* (65).

Nachdem hierdurch gezeigt worden ist, dass der Ausnahmefall (65) auch bei nicht ganzzahligen Ordnungen eintreffen kann, scheint eine wichtige Frage zu sein, wie »starke» Ausnahmewerte hier vorkommen können. Ist es z. B. möglich, dass bei einer nicht ganzzahligen Ordnung die Beziehung

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r,f-z)}{m(r,f)} = 0$$

für irgendeinen Wert z besteht. Die bisher bekannten Abschätzungen der kanonischen Produkte scheinen zur Entscheidung dieser Frage nicht hinreichend genau zu sein. Einiges spricht für die Annahme, dass die genaue Grenze in den Gleichungen (66) enthalten sei, d. h. dass

(66)′ $$\limsup_{r=\infty} \frac{N(r, f-z)}{m(r, f)}$$

bei einer gegebenen Ordnung k überhaupt nicht kleiner als der dort angegebene Wert sein könnte.

Wir möchten noch auf ein anderes interessantes Problem aufmerksam machen. Es ist uns nicht gelungen, einen einzigen Fall anzugeben, wo die obere Grenze (66)′ für *zwei* verschiedene Werte z kleiner als Eins wäre. So gilt die Beziehung (65)′ z. B. bei der soeben untersuchten ganzen Funktion für *jedes* $z \neq 0$. Sollte sich hierin eine allgemeingültige Eigenschaft der ganzen Funktionen zeigen? Wenn dem so wäre, würde der PICARDsche Satz eine besonders elegante Fassung erhalten.

Die Hauptungleichung (27) kann zur Lösung dieses Problems vielleicht einige Beiträge liefern. Man bemerke dass wir bei Herleitung unserer Sätze auf S. 22-24, von denen soeben die Rede gewesen ist, die eventuelle Bedeutung dos von den Nullstellen der Ableitung $f'(x)$ herrührenden Gliedes $N(r, f')$ nicht berüksichtigt haben; unter Umständen ist dieses Glied aber von derselben Grössenordnung wie die Hauptglieder $m(r, f)$, $N(r, f-a)$ und $N(r, f-b)$ (dies ist z. B. bei der oben betrachteten ganzen Funktion der Fall) und darf also nicht vernachlässigt werden, wenn man die schärfsten Konsequenzen aus der Hauptungleichung ziehen will.

20. Wie verhält sich nun eine Funktion, die nur innerhalb *eines endlichen Kreises* regulär ist, in den oben betrachteten Hinsichten? Dass eine im Einheitskreise reguläre analytische Funktion sämtliche endliche Werte, ausser möglicherweise einem einzigen, annehmen muss, wenn ihr Anwachsen bei Annäherung an den Rand hinreichend stark ist, ergab sich schon im Zusammenhang mit den Beweisen des speziellen PICARDschen Satzes. So hat SCHOTTKY[1]) mittels »elementärer» Methoden bewiesen, dass eine von zwei Werten a und b $(a \neq b)$ verschiedene Funktion der Ungleichung $\log|f(x)| < C(1-r)^{-3}$ für $|x| \leq r < 1$ genügt; LANDAU[2]) hat mit Hilfe der Modulfunktion die genaue Schranke

$$\log|f(x)| < \frac{C}{1-r}$$

gegeben, wo C von r unabhängig ist. Definiert man *die Ordnung* einer im Einheitskreise regulären Funktion, in Analogie mit der Definition des entsprechenden Begriffes bei ganzen Funktionen, als die untere Grenze derjenigen Zahlen k, für welche das Integral

$$\int^{1} \log M(r)(1-r)^{k-1}\, dr$$

konvergent ist, so folgt aus dem LANDAUschen Ergebnis, dass jede Funktion, deren Ordnung im Einheitskreise >1 ist, jeden Wert, ausser höchstens einem einzigen, annehmen muss. Durch unsere Resultate ist nun hervorgegangen, dass die Ordnungen der Funktionen $m(r, f)$

[1]) F. SCHOTTKY: *Über den Picard'schen Satz und die Borel'schen Ungleichungen* (Sitz. ber. der Akad. d. Wiss. Berlin, 1904, S. 1244-63).

[2]) H. BOHR und E. LANDAU: *Über das Verhalten von* $\zeta(s)$ *in der Nähe der Geraden* $\sigma = 1$ (Gött. Nachr., 1910, p. 303-330).

und $N(r, f-z)$, bei derselben Funktionenklasse, einander gleich sind für alle endliche z, ausser möglicherweise einem einzigen Wert, und dass auch die oben besprochenen genaueren Beziehungen zwischen den Grössen $N(r, f-z)$ und $m(r, f)$ innerhalb dieser Funktionenklasse ihre Gültigkeit beibehalten. Derartige Eigenschaften waren bisher nur für Funktionen *unendlicher Ordnung* durch die Untersuchungen VALIRONS[1]) bekannt.

Charakterisiert man das Anwachsen einer Funktion in ihrem Konvergenzkreise nicht genauer als durch den oben eingeführten Ordnungsbegriff, so kann man sagen, dass wir auch die wahre Gültigkeitsgrenze unserer Sätze gefunden haben: diese bestehen nicht mehr ausnahmslos für die Funktionen der Ordnung Eins. So hat man in der Modulfunktion ein Beispiel einer Funktion erster Ordnung, die *zwei* Werte (0 und 1) überhaupt nicht annimmt. Es gibt sogar Funktionen erster Ordnung, welche *nach unten beschränkt* sind, wie z. B. $e^{\frac{1+x}{1-x}}$, die für $|x|<1$ keinen Wert des Kreises $|z|<1$ annimmt. Andererseits schliesst man aus der obigen LANDAUschen Ungleichung, dass diejenigen Funktionen erster Ordnung, für welche

$$\limsup_{r=1}(1-r)\log M(r)=\infty \tag{67}$$

ist, jeden Wert, ausser höchstens einem einzigen, annehmen müssen. Es wäre nun interessant zu wissen, ob dieselben Funktionen auch die oben besprochenen spezielleren Eigenschaften aufweisen, ob also, kurz gesagt, die Dichte ihrer z-Stellen für jedes z, ausser möglicherweise einem einzigen Wert, eine dem Anwachsen der Funktion entsprechende ist. Die Genauigkeit unserer obengegebenen Ungleichungen scheint nicht zur vollständigen Entscheidung dieser Frage auszureichen. Einiges lässt sich indessen mittels unserer Ergebnisse auch über die Funktionen *erster* Ordnung sagen. Aus der Ungleichung (40) (S. 19) folgt, dass jede Funktion, für welche

$$\limsup_{r=1}\frac{m(r,f)}{-\log(1-r)}=\infty \tag{68}$$

ist, der Bedingung

$$\limsup_{r=1}\frac{N(r,f-z)}{-\log(1-r)}=\infty$$

für jedes z, ausser höchstens einem Wert, genügen muss. Nimmt man nämlich an, es existieren *zwei* Werte a, b $(a\neq b)$ und eine endliche Konstante C derart, dass

$$N(\varrho,f-a)+N(\varrho,f-b)<C\log\frac{1}{1-\varrho}$$

für $\varrho<1$ ist, so schliesst man mittels der Beziehung (40), wenn man $\varrho=\frac{1+r}{2}$ setzt, dass auch

$$m(r,f)<C\log\frac{1}{1-r}, \tag{69}$$

wo C von r unabhängig ist; hiermit ist die Behauptung bewiesen. Nun kann man mittels der zwischen den Grössen $M(r)$ und $m(r, f)$ bestehenden Beziehung (39) schliessen, dass die Bedingung (68) sicher erfüllt ist, falls

[1]) Vgl. die S. 3 unter 1) e) zitierte Note.

$$\limsup_{r=1} \frac{(1-r)\log M(r)}{-\log(1-r)} = \infty \tag{70}$$

ist; diese letzte Bedingung kommt schon der LANDAUschen Grenze (67) nahe.

Die Vergleichung der Bedingungen (67) und (70) könnte die Vermutung nahelegen, dass die rechte Seite von (69) mit einer *Konstante* ersetzt werden könnte, d. h. dass $m(r,f)$ für $r<1$ *beschränkt* wäre, falls $f(x)$ zwei Ausnahmewerte (im PICARDschen Sinne) besässe. Dies ist aber nicht der Fall, denn $m(r,f)$ wächst z. B. bei der Modulfunktion für $r \to 1$ unbeschränkt. Zum Beweise dieser Behauptung genügt es wegen der JENSENschen Ungleichung $N(r,f-z) < C + m(r,f) + p\overset{+}{\log}\frac{1}{r}$ (vgl. S. 27) zu zeigen, dass es Werte z gibt, für welche $N(r,f-z)$ nicht beschränkt oder, was auf dasselbe herauskommt, für welche das Integral

$$\int^{1} n(r,f \quad z)\,dr$$

divergent ist. Nun sind aber dieses Integral und die Reihe

$$\sum^{\infty}(1-r_\nu(z))$$

gleichzeitig konvergent oder divergent, und es ist also hinreichend, wenn man beweist, dass diese letzte Reihe für mindestens einen Wert z divergent ist. In der Tat ist dies für jedes endliche, von Null und Eins verschiedene z der Fall. Sei nämlich z eine beliebige Zahl dieser Art und x_0 ein Punkt des Einheitskreises, wo die Modulfunktion diesen Wert z annimmt; denselben Wert nimmt sie dann in allen denjenigen Punkten an, in welche der Punkt $x=x_0$ durch die Substitutionen $S(x)$ der Modulgruppe übergeführt wird. Es soll demnach die Divergenz der Reihe

$$\sum(1-|S(x_0)|) \tag{71}$$

nachgewiesen werden. Nun sieht man leicht ein, dass diese Reihe mit der POINCARÉschen Reihe

$$\sum \left|\frac{dS}{dx}\right|_{x=x_0} \tag{72}$$

gleichzeitig divergent oder konvergent ist. In der Tat ist der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{S(x)-S(x_0)}{1-\overline{S(x_0)}\,S(x)} : \frac{x-x_0}{1-\overline{x_0}\,x},$$

da $|S(x)|=1$ für $|x|=1$ ist, auf der Peripherie des Einheitskreises konstant gleich Eins, Weil dieser Quotient für $|x|<1$ regulär und von Null verschieden ist, so folgt aus dem Prinzip des Maximalmoduls, dass sein absoluter Betrag auch im Innern des Einheitskreises konstant gleich 1 ist. Für $x=x_0$ ergibt sich insbesondere

$$\frac{|S'(x_0)|(1-|x_0|^2)}{1-|S(x_0)|^2}=1,$$

woraus, da $|S(x_0)|<1$, folgt:

$$\frac{1-|S(x_0)|}{1-|x_0|^2} \leq \left|\frac{dS}{dx}\right|_{x=x_0} < \frac{2}{1-|x_0|^2}(1-|S(x_0)|).$$

Die Reihen (71) und (72) sind demnach in bezug auf Divergenz und Konvergenz gleichwertig. Nun weiss man aber nach dem RITTERschen Satze[1]), dass die letztgenannte Reihe *divergent* ist, womit unsere Behauptung nachgewiesen ist.

Genauere Kenntnis der Art der Divergenz der POINCARÉschen Reihe (72) würde uns auch genauere Auskunft über die Genauigkeit der durch die Bedingung (69) ausgedrückten Gültigkeitsgrenze unserer Sätze geben.

Aus der obigen Betrachtung geht auch hervor, dass der auf S. 27 gegebene Satz über die Reihe (62) scharf ist: er gilt nicht mehr für $k = 0$. In diesem Falle gibt es nämlich, wie wir soeben gesehen haben, Funktionen, für welche die Reihe (62) für *zwei* Werte z konvergent ist, während sie für alle übrigen Werte divergiert. Hat wiederum k einen *negativen* Wert (> -1) so existieren sogar *beschränkte* Funktionen, für welche die Reihe (62) mindestens für einen Wert z *divergent* ist. Um dies einzusehen wähle man eine Punktfolge $x_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) von der Art, dass die Reihe $\Sigma(1 - r_\nu)^{1+k}$ divergent, die Reihe $\Sigma(1 - r_\nu)$ dagegen konvergent ist (man kann z. B. $r_\nu = 1 - \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{1+k}}$ wählen). Das unendliche Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} e^{-i\varphi_\nu \frac{x_\nu - x}{1 - x_\nu x}}$$

ist dann für jedes $|x| \leq r < 1$ gleichmässig konvergent und stellt eine im Einheitskreise beschränkte Funktion der erwünschten Art dar.

Die oben betrachteten Beispiele weisen auch darauf hin, dass die Dichte der z-Stellen einer analytischen Funktion sich genauer in dem Verhalten des Mittelwertes $m(r, f)$ als des Maximalmoduls $\log M(r)$ wiederspiegelt, was ja auch wegen der JENSENschen Identität zu erwarten ist. Durch blossen Vergleich der Maximalmoduln der Funktion $e^{\frac{1+x}{1-x}}$ und der Modulfunktion, die beide dem »Normaltypus» der Ordnung Eins angehören, könnte man bezüglich der z-Stellendichten dieser Funktionen keine grosse Verschiedenheiten erwarten. Tatsächlich treten aber ihre z-Stellen mit wesentlich verschiedenen Dichten auf: bei der Modulfunktion ist die Reihe (62), wo $k = 0$, für alle endliche Werte z, ausser $z = 0$ und $z = 1$, *divergent*, während sie bei der Funktion $e^{\frac{1+x}{1-x}}$, wie man leicht einsieht, für alle Werte z *konvergent* ist. Dementsprechend weisen nun die betreffenden Mittelwerte $m(r, f)$ ein verschiedenes Verhalten auf: bei jener Funktion wächst er für $r \to 1$ unbeschränkt, während er bei dieser für $r < 1$ beschränkt ist. Diese letzte Funktion genügt nämlich in dem Einheitskreise der Ungleichung $|f(x)| > 1$, wonach $\overset{+}{\log}|f| = \log|f|$, und also

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Nach dem GAUSSSschen Mittelwertsatze ist aber das letzte Integral konstant gleich $\log|f(0)| = 1$.

[1]) RITTER: *Die eindeutigen automorphen Funktionen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaréschen Sätze* (Math. Ann., B. 41, 1892). Ein allgemeingültiger Beweis des Ritterschen Satzes wurde von P. J. MYRBERG gegeben, vgl.: *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaréschen Reihen* (zweite Abhandlung) (Ann. Acad. Scient. Fennicae, Serie A, T. XI, N:o 4, 1917).

IV. Erweiterung der Hauptungleichung (27).

21. Unter der Annahme, $f(x)$ sei eine innerhalb eines Kreises $|x|<R\leq\infty$ eindeutige, reguläre analytische Funktion, haben wir in dem vorhergehenden Abschnitt die grundlegende Beziehung (27) hergeleitet und von hier aus eine Reihe von Sätzen über den Wertvorrat von $f(x)$ in der Umgebung der Punkte $|x|=R$ bewiesen. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die genannte Beziehung fast unverändert gilt, falls $f(x)$ die angegebenen Eigenschaften nur innerhalb eines *Kreisringes* $R_0\leq|x|<R\leq\infty$ besitzt. Aus dieser erweiterten Ungleichung folgt u. a. die wichtige Tatsache, dass sämtliche Sätze, die oben für ganze Funktion nachgewiesen wurden, allgemeiner für analytische Funktionen gelten, welche in der Umgebung eines isolierten wesentlich singulären Punktes eindeutig und regulär sind. Insbesondere ergibt sich in dieser Weise ein Beweis des s. g. *allgemeinen* PICARD*schen Satzes.*

Die in Aussicht gestellte erweiterte Ungleichung wird durch dieselbe Methode hergeleitet, wie die speziellere (27); hierzu müssen nur die zwei funktionentheoretischen Hilfsformeln (2) und (4)′ so modifiziert werden, dass sie in dem vorliegenden Kreisringfall anwendbar sind. Dies gelingt am Einfachsten unter Anwendung einer allgemeiner Formel, die von F. NEVANLINNA[1]) aufgestellt und von ihm und dem Verfasser[2]) zur Untersuchung verschiedener funktionentheoretischer Fragen angewandt wurde.

22. Sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variable $x=re^{i\varphi}$, welche innerhalb und auf dem Rande eines von gewissen analytischen Kurven Γ begrenzten zusammenhängenden Gebietes G eindeutig und meromorph ist. Die innerhalb G gelegenen Nullstellen und Pole von $f(x)$ seien a_μ $(\mu=1,2,\cdots,m)$ und b_ν $(\nu=1,2,\cdots,n)$. Sei ferner $\lambda(x)$ eine reelle Funktion von x, die nebst ihren partiellen Ableitungen der zwei ersten Ordnungen innerhalb und auf dem Rande von G stetig ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$(73)\qquad \sum_1^m \lambda(a_\mu)-\sum_1^n \lambda(b_\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left(\log|f|\frac{\partial\lambda}{\partial n}-\lambda\frac{\partial}{\partial n}\log|f|\right)ds+\frac{1}{2\pi}\int_G\log|f|\,\Delta\lambda\,d\sigma,$$

wo $\frac{\partial}{\partial n}$ die in der Richtung der inneren Randnormale genommene Ableitung, Δ den Laplace'schen Operator, ds das Linienelement des Randes Γ, und $d\sigma$ das Flächenelement des Gebietes G bezeichnet.

Sei nun G insbesondere der Kreisring $\varrho_0\leq|x|\leq\varrho$. Man setze in (73) $\lambda(x)$ gleich der Green'schen Funktion $g(x,x_0)$ des äusseren Kreises $|x|<\varrho$ mit ihrem Pol in einem Punkt x_0, der *innerhalb* des Kreisrings G liegt. Wir schliessen den Pol x_0 durch einen kleinen Kreis

[1]) F. NEVANLINNA: *Über die Beziehungen zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole* (Verhandlungen des 5. skandinavischen Mathematikerkongresses in Helsingfors 1922).

[2]) Vgl. die auf S. 3 zitierte Arbeit.

vom Radius ε aus, und wenden die Formel (73) in dem so entstandenen Gebiete G_ε an. Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt sich so leicht, wenn man x statt x_0 schreibt,

$$\log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=\varrho} \log|f(\xi)|\, dh(\xi, x) - \sum g(x, a_\mu) + \sum g(x, b_\nu) + R(x),$$

wo

$$R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=\varrho_0} \left(\log|f|\frac{\partial g(\xi, x)}{\partial n} - g(\xi, x)\frac{\partial}{\partial n}\log|f(\xi)|\right) ds.$$

Setzt man hier die auf S. 5 angegebenen Werte der Funktionen g und h ein und fügt man noch auf beiden Seiten die in bezug auf x konjugierten harmonischen Funktionen hinzu, so ergibt sich durch eine einfache Rechnung:

$$(74)\quad \log f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,\frac{\varrho e^{i\vartheta}+x}{\varrho e^{i\vartheta}-x}\, d\vartheta - \sum_{\varrho_0<|a_\mu|<\varrho} \log\frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho(x-a_\mu)} + \sum_{\varrho_0<|b_\nu|<\varrho} \log\frac{\varrho^2 - b_\nu x}{\varrho(x-b_\nu)} + R(x),$$

mit

$$(74)'\qquad R(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f\varrho_0 e^{i\vartheta})|\left(\frac{\xi}{x-\xi} - \frac{\xi x}{\varrho^2 - \bar{\xi}x}\right) d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \log\frac{\varrho^2 - \xi x}{\varrho(x-\xi)}\, d\arg f(\xi) + iC,$$

wo $\xi = \varrho_0 e^{i\vartheta}$ und C eine reelle Konstante bezeichnet. Durch Differentiation folgt also, dass

$$(75)\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,\frac{2\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta}-x)^2}\, d\vartheta + \sum \frac{\varrho^2 - |a_\mu|^2}{(x-a_\mu)(\varrho^2 - \bar{a}_\mu x)} - \sum \frac{\varrho^2 - |b_\nu|^2}{(x-b_\nu)(\varrho^2 - b_\nu x)} + R'(x).$$

Diese Formel unterscheidet sich von der analogen, in dem vorhergehenden Abschnitte angewandten (vgl. S. 12) nur durch das Restglied

$$R'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\xi)|\left(\frac{\xi}{(x-\xi)^2} + \frac{\varrho^2\bar{\xi}}{(\varrho^2 - \bar{\xi}x)^2}\right) d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{(x-\xi)(\varrho^2 - \bar{\xi}x)}\, d\arg f(\xi).$$

Wir werden zeigen, *dass* $|R'(x)$ *für* $|x| > \varrho_0' > \varrho_0$ *unter einer von* x *und* ϱ *unabhängigen Schranke liegt.* In der Tat ist in dem betrachteten Kreisringe $|\varrho^2 - \xi\bar{x}| > \varrho^2 - \varrho_0|x| > \varrho(\varrho - \varrho_0)$ $> \varrho(|x| - \varrho_0)$, und demnach

$$\left|\frac{\xi}{(x-\xi)^2} + \frac{\varrho^2\xi}{(\varrho^2 - \bar{\xi}x)^2}\right| \leq \frac{\varrho_0}{|x-\xi|^2} + \frac{\varrho^2\varrho_0}{|\varrho^2 - \bar{\xi}x|^2} < \frac{2\varrho_0}{(|x| - \varrho_0)^2},\quad \text{und}$$

$$\frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{|x-\xi|\,|\varrho^2 - \bar{\xi}x|} < \frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{(|x| - \varrho_0)\varrho(\varrho - \varrho_0)} < \frac{2}{|x| - \varrho_0}.$$

Für $\varrho > |x| > \varrho_0' > \varrho_0$ ist also

$$|R'(x)| < \frac{2\varrho_0}{(\varrho_0' - \varrho_0)^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log|f(\varrho_0 e^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \frac{2}{\varrho_0' - \varrho_0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} |d\arg f(\varrho_0 e^{i\vartheta})|,$$

wo der Ausdruck rechts von $|x|$ und ϱ unabhängig ist, w. z. b. w.

Um die JENSENsche Formel für den vorliegenden Kreisringfall zu modifizieren, setze man in (73) $\lambda(x)$ gleich der Green'schen Funktion des äusseren Kreises $|x| \leq \varrho$ mit ihrem Pol in dem Nullpunkte $x = 0$. Man findet so

$$(76)\quad \begin{aligned} 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \sum \log\frac{\varrho}{|a_\mu|} + \sum \log\frac{\varrho}{|b_\mu|} \\ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho_0 e^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \log\frac{\varrho}{\varrho_0} - \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} d\arg f(\varrho_0 e^{i\vartheta}). \end{aligned}$$

Es bezeichne jetzt $n(r,f)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ in dem Kreisringe $\varrho_0 < |x| < r$, und $N(r,f)$ das Integral

$$N(r,f) = \int_{\varrho_0}^{r} \frac{n(t,f)}{t}\,dt;$$

die erweiterte JENSENsche Formel (76) lässt sich dann in der Form

$$(77)\quad m(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N(r,f) + C_0 + C_0' \log r,$$

schreiben, wo die Konstanten

$$C_0' = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi} d\arg f(\varrho_0 e^{i\vartheta})\,d\vartheta, \quad C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\varrho_0 e^{i\vartheta})|\,d\vartheta - C_0' \log\varrho_0$$

nur von den Werten der Funktion auf dem Kreise $|x| = \varrho_0$ abhängen.

23. Man nehme jetzt an, $f(x)$ sei eine innerhalb eines Kreisringes $R_0 \leq |x| < R$ eindeutige, reguläre analytische Funktion. *Dann existieren für jedes System von Werten* a, b $(a \neq b)$ *und* $\varrho_0 > R_0$ *zwei Konstanten* C *und* C' *derart, dass die Ungleichung*

$$(78)\quad m(r,f) + N(r,f') < C + C' \overset{+}{\log}\varrho + 6\overset{+}{\log}\frac{1}{\varrho - r} + N(\varrho, f-a) + N(\varrho, f-b) + 4\overset{+}{\log} m(\varrho, f)$$

für $\varrho_0 < r < \varrho < R$ *besteht.*

Der Beweis dieser allgemeinen Beziehung ergibt sich durch dieselbe Methode, die im vorhergehenden Abschnitt zu der analogen Ungleichung (27) führte; hierbei hat man nur die Formeln (2) und (4)′ durch die soeben gefundenen (74) bzw. (77) zu ersetzen. Die Modifikationen, die man in dem Beweise vornehmen muss, sind so leichter Art, dass es überflüssig sein dürfte den Nachweis von (78) hier durchzuführen.

Es ist klar, dass die erweiterte Ungleichung (78) sich in genau derselben Weise behandeln lässt, wie die speziellere (27) in dem vorhergehenden Abschnitt. Sämtliche Folgerungen, die oben aus der letzteren gezogen wurden, sind also auch in dem vorliegenden allgemeineren Fall gültig, wo die betrachtete Funktion innerhalb eines endlichen oder unendlichen Kreisringes eindeutig und regulär ist. Insbesondere folgt so, was von besonderem Interesse sein dürfte, dass *sämtliche Eigenschaften, welche oben für ganze Funktionen nachgewiesen wurden, allgemeiner für jede in der Umgebung eines isolierten, wesentlich singulären Punktes eindeutige* und reguläre Funktion gültig sind.

24. Wir wollen zum Schluss näher ausführen, wie der s. g. *allgemeine Picard'sche Satz* aus der erweiterten Beziehung (78) folgt. Dieser Satz sagt bekanntlich aus, dass eine in der Umgebung eines isolierten wesentlich singulären Punktes eindeutige, reguläre analytische Funktion jeden endlichen Wert, ausser möglicherweise einem einzigen, unendlich oft annehmen muss.

Der Nachweis wird indirekt geführt. Sei also $f(x)$ eine analytische Funktion, die in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes eindeutig und regulär ist und die *zwei* Werte a und b $(a \neq b)$ nur in einer endlichen Anzahl von Punkten annimmt. Es soll gezeigt werden, dass $f(x)$ im Punkte $x = \infty$ entweder regulär ist oder dort einen Pol hat. Nach Voraussetzung existiert eine solche Zahl R_0 dass $f(x)$ für $|x| > R_0$ die Werte a und b überhaupt nicht annimmt. In der Ungleichung (78) verschwinden also für $\varrho > r > \varrho_0 > R_0$ sowohl $N(r, f-a)$ wie $N(r, f-b)$ identisch, und es wird somit

$$m(r,f) < C + C' \log \varrho + 6 \overset{+}{\log} \frac{1}{\varrho - r} + 4 \overset{+}{\log} m(\varrho, f).$$

Hieraus schliesst man durch Multiplikation mit $\frac{dr}{r^{k+1}}$ $(k > 0)$ und Integration, wie in dem Beweise des speziellen Picardschen Satzes (vgl. S. 10), dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{m(r,f)}{r^{k+1}} dr$$

für jedes $k > 0$ konvergent ist, und dass folglich die Beziehung

$$\lim_{r \to \infty} \frac{m(r,f)}{r^k} = 0 \tag{79}$$

für jedes $k > 0$ gültig ist.[1])

Die Behauptung folgt nun leicht mittels der Formel (75), welche für die logarithmische Ableitung der Funktion $f(x) - a$ die für $\varrho_0 < |x| < \varrho$ gültige Darstellung

$$\frac{f'(x)}{f(x)-a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\varrho e^{i\vartheta}) - a| \frac{2\varrho e^{i\vartheta}}{(\varrho e^{i\vartheta} - x)^2} d\vartheta + R'(x) \tag{80}$$

gibt, wo $R'(x)$ (vgl. S. 39) gleich

$$R'(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\xi) - a| \left(\frac{\xi}{(x-\xi)^2} + \frac{\varrho^2 \xi}{(\varrho^2 - \bar{\xi} x)^2} \right) d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{\varrho^2 - \varrho_0^2}{(x-\xi)(\varrho^2 - \bar{\xi} x)} d \arg (f(\xi) - a),$$

und $\xi = \varrho_0 e^{i\vartheta}$ ist. Mittels (79) folgt nämlich, wie auf S. 11, dass das erste Glied rechts in (80) für jedes endliche x für $\varrho \to \infty$ verschwindet, während $R'(x)$ hierbei offenbar dem Grenzwert

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(\xi) - a| \frac{\xi \, d\vartheta}{(x-\xi)^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{d \arg (f(\xi) - a)}{x - \xi} \tag{81}$$

[1]) Man bemerke, dass $m(r,f)$ als konvexe Funktion von $\log r$ entweder für jedes $r > \varrho_0$ *beschränkt* oder von einem gewissen Wert r ab eine mit r *wachsende* Funktion ist.

zustrebt. Durch diesen letzten Ausdruck wird also $\frac{f'(x)}{f(x)-a}$ für $|x|>\varrho_0$ dargestellt. Die Funktion (81) ist aber für $x=\infty$ regulär und besitzt dort eine Nullstelle, woraus weiter durch Integration folgt, dass $f(x)$ selbst in $x=\infty$ entweder regulär ist oder einen Pol besitzt, w. z. b. w.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 7.

RECHERCHES

SUR LES

MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES

DANS LA

ZONE PHOTOGRAPHIQUE DE HELSINGFORS

PAR

RAGNAR FURUHJELM

II

Clichés de 6^h à 9^h

HELSINGFORS 1926.
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE

Préface.

Le premier volume du présent travail fut publié en 1916. Le second n'a pu être achevé que dix ans plus tard, l'auteur ayant dû consacrer une grande partie de son temps aux affaires publiques.

Les clichés primaires du Catalogue de l'Observatoire de Helsingfors ont été photographiés durant la période 1892—1896. La nouvelle série, destinée à la détermination des mouvements propres, provient des années 1909—1913. L'intervalle de temps entre les deux séries est donc de 17 années en moyenne. Afin d'obtenir, pour la suite du travail, un intervalle plus considérable, permettant une plus grande précision de la détermination des mouvements propres, nous avons projeté et déjà entrepris de photographier encore à nouveau les régions restantes de la zone de Helsingfors.

Je saisis l'occasion d'exprimer ma gratitude envers la Société des Sciences de Finlande, qui a mis à ma disposition les sommes nécessaires pour salarier les assistants à l'exécution d'un certain nombre de calculs numériques. Je dois remercier également M. J. Runeberg, docteur ès lettres, pour sa traduction française de mon manuscrit.

L'auteur.

Première partie.

I.

Introduction. Les mesures et leur réduction. Résultats des mesures.

Dans le premier volume de ce travail j'ai exposé en détail l'origine et le plan de mes recherches sur les mouvements propres des étoiles appartenant à la zone photographique de l'Observatoire de Helsingfors. J'y ai annoncé, dans l'Introduction, l'intention de poursuivre le travail dans l'ordre suivi pour la publication des positions des étoiles du Catalogue photographique de l'Observatoire;* je commençai donc par la partie de la zone qui se trouve comprise entre 9^h et 12^h d'ascension droite. Conformément à ce plan, le présent volume contient les résultats relatifs aux régions dont les centres sont situés entre 6^h et 9^h d'ascension droite.

Les méthodes suivies pour reconnaître les étoiles à mouvement propre sensible, ainsi que pour la mesure des clichés et pour la réduction des mesures, sont identiques à celles que j'ai employées dans mes recherches antérieures. Je renvoie donc sous tous ces rapports à ce qui en est dit dans les deux premiers chapitres du vol. I:er. Ici, je rappellerai simplement que les mesures furent exécutées à l'aide du „*blink*"-microscope du stéréocomparateur de l'Observatoire, et, pour chaque coordonnée, dans deux positions des clichés différant entre elles de 180°; les accroissements, Δx et Δy, des coordonnées rectilignes furent calculés à part pour chacune des deux positions, après quoi on forma la moyenne des deux valeurs. Au cours du printemps et de l'été 1918, j'exécutai la reconnaissance des étoiles dont les mouvements propres devaient être déterminés. J'exécutai aussi personnellement toutes les mesures; elles furent commencées en 1918 et terminées en 1921.

Le tableau suivant, construit essentiellement de la même manière que le tableau analogue du volume I:er, contient les résultats des mesures pour chacune des régions appartenant à la partie de la zone dont nous traitons ici. Les numéros des régions sont les mêmes que dans le *Catalogue photographique du ciel*. Les époques des deux clichés sont désignées par E et E'; T est l'intervalle du temps, c'est-à-dire $E'—E$. Les quantités k_x, p_x, r_x, k_y . . sont les

* *Catalogue photographique du ciel. Zone de Helsingfors entre + 39° et + 47°.* Jusqu' ici quatre tomes de ce catalogue ont paru, dans l'ordre suivant: Tomes IV, III, II, V, I_2 en 1903, 1908, 1914, 1924 et 1925 respectivement.

constantes des nouveaux clichés relativement aux anciens dans la *première* position; les quantités k'_x . . . . . ont trait à la *seconde* position. Le tableau est, pour chaque région, partagé en deux parties par une ligne horizontale épaisse; au-dessus de celle-ci se trouvent les données des étoiles à mouvement propre, au-dessous celles des étoiles de comparaison. Les colonnes du tableau contiennent les données suivantes:

1:o) les numéros des étoiles dans le *Catalogue photographique du ciel*, Zone de Helsingfors, T. III; un certain nombre d'étoiles faibles, n'étant pas mesurées pour le Catalogue, sont sans numéros;

2:o et 3:o) les valeurs approximatives des coordonnées x et y en mm selon le cliché plus ancien *(A)*;

4:o et 5:o) les différences mesurées, b_1-a_1 et a_2-b_2 en x, a désignant le pointage du cliché ancien, b celui du cliché nouveau, et les indices les positions des clichés;

6:o et 7:o) les mêmes quantités en y;

8:o et 9:o) les moyennes de Δx et Δy, résultant des mesures dans les deux positions, pour les étoiles à mouvement propre; unité 0.01 mm.

Je n'ai pas cru nécessaire de donner, comme dans le volume précédent, les grandeurs des étoiles de comparaison.

Pour deux régions, c. à. d. les numéros 316 et 344, je n'ai pas employé comme clichés anciens ceux du Catalogue proprement dit, parce que les traits du réseau y sont un peu sinueux. En revanche j'ai mesuré les clichés correspondants de la Carte.

Tableau I.

Résultats des mesures.

Région 253.

$E = 1895.18$; $E' = 1911.17$; $T = 15.98$.

$k_x = -1.00$; $p_x = +0.0058$; $r_x = -0.0020$;
$k'_x = +0.49$; $p'_x = +0.0009$; $r'_x = +0.0078$.
$k_y = -1.25$; $p_y = -0.0100$; $r_y = +0.0095$;
$k'_y = +0.86$; $p'_y = +0.0017$; $r'_y = +0.0160$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
7	−57.1	+43.7	+2.85	+0.19	+1.14	−1.91	+1.20	−0.04
28	−47.8	−17.9	+1.29	+0.11	+0.35	−1.95	+0.23	−0.31
35	−43.6	+34.9	+1.42	0.96	1.16	3.79	−0.07	2.26
39	−41.7	− 6.3	+2.30	+0.65	−0.49	−3.02	+1.06	−1.39
50	−37.6	−14.7	+1.66	+0.34	−1.48	−3.97	+0.58	−2.37
53	37.8	20.7	+0.92	0.66	0.59	1.56	−0.30	0.11
54	−39.1	−25.1	+0.15	−0.72	−0.53	−2.67	−0.75	−1.19
62	26.7	61.5	2.68	1.06	0.73	2.45	1.71	0.97
77	−29.2	−59.3	+0.05	−1.13	+1.09	−0.50	−1.06	+0.72
122	− 4.0	−53.7	−0.42	−1.25	−3.30	−6.22	−1.25	−4.68
130	+ 3.3	−14.5	+0.57	−0.03	+0.86	−0.99	−0.01	−0.23
158	+13.0	−46.8	−0.25	−1.71	−1.40	−3.60	−1.32	−2.66
178	+20.2	+ 31.0	+1.15	−0.18	−1.40	−3.63	+0.39	−3.09
235	+45.8	+22.1	+0.68	−0.66	+1.49	−0.16	−0.02	−0.20
251	+52.5	−15.5	+1.09	+0.28	−0.66	−2.32	+0.56	−2.29
—	− 2.4	−26.0	−0.70	−1.94	−2.52	−4.66	−1.65	−3.64
45	−37.4	+28.4	+1.13	−0.75	+1.78	−0.95	—	—
59	−34.1	−25.4	+1.42	+0.01	+0.25	−2.23	—	—
60	−32.9	36.0	+1.13	0.06	0.64	0.99	—	—
63	−28.8	+48.0	+1.13	−1.17	+1.21	−1.41	—	—
192	+27.4	−39.3	+0.33	−0.81	+1.09	−0.31	—	—
204	+31.8	32.8	+ 0.91	0.05	1.61	0.21	—	—
211	+36.9	+35.2	+1.21	−0.45	+1.58	−0.41	—	—
213	39.1	25.6	+0.76	0.68	1.90	0.74	—	—

Région 254.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = -0.64$; $p_x = +0.0096$; $r_x = +0.0003$;
$k'_x = +1.84$; $p'_x = +0.0158$; $r'_x = -0.0382$.
$k_y = +0.29$; $p_y = +0.0088$; $r_y = -0.0166$;
$k'_y = +0.69$; $p'_y = +0.0092$; $r'_y = +0.0018$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	$l\,x$	$l\,y$
6	−64.5	+20.7	+0.60	−1.15	+0.70	−1.39	−0.87	−0.15
9	−61.5	−48.2	+1.60	−3.80	+2.39	−0.89	−0.36	+0.35
18	−59.0	− 0.5	−0.12	−2.71	−0.21	−1.92	−1.55	−1.01
29	−52.6	−18.1	+1.51	−2.17	−0.79	−2.39	−0.05	−1.65
33	−49.8	+53.2	+1.53	+1.04	−0.21	−2.40	+0.24	−0.70
42	−47.9	−37.8	−1.30	−6.00	+1.04	−0.99	−2.94	−0.18
43	−42.9	+55.2	+5.11	+4.38	−5.38	−7.06	+3.75	−5.54
63	−36.7	+18.2	+1.34	+0.02	−1.37	−2.57	+0.47	−1.58
91	−33.1	−48.5	+1.48	−3.74	+1.35	−1.33	−0.03	−0.18
103	−26.7	− 9.2	+2.03	−1.22	−1.13	−2.17	+0.84	−1.43
107	−25.4	−30.2	+0.96	−2.72	+1.88	+1.18	−0.03	+1.56
114	−23.3	+59.5	−0.72	−0.42	−5.40	−6.41	−1.39	−5.05
147	−12.1	−58.2	+0.92	−3.93	+2.29	+0.93	+0.04	+1.48
148	− 5.8	+63.4	+2.55	+2.61	−3.50	−4.13	+1.90	−2.80
176	− 0.5	−13.7	+1.24	−1.29	−3.40	−3.39	+0.83	−3.03
177	− 0.7	−13.8	+0.75	−1.95	−2.97	−2.75	−0.25	−2.50
180	− 0.7	−20.1	+1.67	−0.88	−2.94	−2.73	+1.36	−2.53
190	+ 4.1	−15.0	+0.43	−1.91	−2.52	−1.91	+0.19	−1.83
199	+ 7.6	+40.6	+0.74	−0.31	−0.82	−1.23	+0.14	−0.11
206	+ 7.9	−23.8	+2.21	−1.26	−1.99	−1.78	+1.62	−1.55
221	+15.0	+33.7	+1.04	−0.58	−0.47	−1.17	+0.38	+0.08
246	+16.6	−12.7	+2.40	−0.27	−1.92	−1.93	+2.12	−1.42
249	+15.1	−56.0	+1.70	−3.36	1.17	−1.08	+1.02	1.03
263	+27.4	+58.7	−0.47	−1.33	−2.15	−2.50	−1.06	−1.10
269	+28.2	+13.8	+2.43	+0.02	−2.29	−2.06	+1.92	−1.35
275	+28.6	−30.5	+0.86	−3.22	−3.03	−2.58	+0.36	−2.38
307	+37.2	−11.6	−0.26	−4.10	−1.78	−0.71	−0.88	−0.58
349	+52.0	−26.0	−1.04	−4.83	−1.45	−1.09	−1.18	−0.63
356	+59.3	+18.5	+1.46	−0.60	−1.84	−1.13	+1.43	−0.39
367	+61.5	−13.2	−0.63	−3.60	−0.93	−0.43	−0.48	+0.14
—	−29.7	+57.3	+2.98	+1.66	−2.44	−2.39	+1.45	−1.63
—	+27.9	− 8.9	−0.01	−3.20	−3.08	−3.21	−0.48	−2.53
—	+39.7	− 3.8	−1.54	−6.14	−10.07	−10.43	−2.66	−9.49
34	−47.0	+46.6	+0.88	+1.02	−0.50	−1.78	—	—
36	−45.4	+31.4	+0.77	−0.34	+0.20	−0.86	—	—
72	−37.0	−24.3	+1.20	−2.31	+0.90	−0.43	—	—
73	−36.9	−34.3	+1.29	−2.37	+0.81	−0.16	—	—
274	+28.8	−24.4	+0.01	−3.13	−0.73	−0.69	—	—
282	+30.2	+35.6	+1.06	−0.77	−0.77	−0.95	—	—
300	+35.3	+33.1	+0.05	−1.24	−0.95	−0.57	—	—
319	+41.6	−27.4	+0.12	−3.72	−1.12	−0.47	—	—

Région 255.

$E = 1894.96$; $E' = 1914.03$; $T = 19.06$.

$k_x = +1.44$; $p_x = +0.0192$; $r_x = -0.0653$;
$k'_x = +0.87$; $p'_x = +0.0340$; $r'_x = -0.0314$.
$k_y = +0.99$; $p_y = +0.0390$; $r_y = -0.0173$;
$k'_y = -2.75$; $p'_y = +0.0281$; $r'_y = +0.0085$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	$l\,x$	$l\,y$
38	−45.1	+48.4	+3.86	+3.54	−4.18	−1.68	+1.31	−2.38
47	−47.8	−37.0	−1.95	−0.15	−0.01	+2.46	+0.62	−1.10
58	−40.5	−12.3	−1.16	−0.00	+0.25	+2.76	+0.09	+0.03
68	−38.1	+15.5	+2.79	+2.64	−3.81	−1.59	+2.10	−3.23
85	−30.6	+16.3	+3.17	+4.26	−5.91	−2.06	+3.27	−4.45
86	−33.6	+17.3	+2.90	+3.80	−5.60	−2.02	+2.77	−4.25
109	−28.6	−37.2	−3.24	−0.96	+0.51	+3.65	+0.09	−0.17
117	−24.8	+13.6	+0.11	−0.08	−2.83	−0.02	−0.25	−1.96
127	−23.9	−60.6	−5.63	−1.51	−3.52	−1.75	−0.12	−5.65
134	−19.2	+ 9.3	−1.83	−1.25	+0.30	+3.65	−1.34	+1.32
159	− 6.4	−56.7	−2.71	−0.06	−2.30	+0.58	+2.34	−3.67
171	− 1.8	−20.0	−1.91	−0.55	−1.89	+1.74	+0.95	−1.63
221	+16.4	+20.4	−0.55	−0.44	−2.54	+1.56	+0.11	−0.61
260	+26.8	−61.3	−6.19	−3.94	−1.62	+2.42	−0.24	−2.42
297	+47.7	+60.3	+1.21	−1.94	−4.61	+0.14	−0.85	−0.88
304	+46.0	−10.5	−1.38	−1.54	−2.14	+2.57	+1.42	−0.81
306	+46.6	−48.7	−6.44	−3.63	+0.70	+5.72	−0.29	+0.90
318	+50.1	−35.9	−3.33	−2.11	−2.56	+2.11	+1.50	−2.09
320	+52.1	−44.1	−7.13	−4.95	−1.39	+2.32	−1.37	−1.66
335	+57.7	−41.1	−3.31	−2.54	+0.27	+4.27	+1.75	+0.27
—	−16.1	−25.9	−4.55	−3.06	+0.29	+3.88	−1.83	+0.26
63	−36.1	+39.1	+1.56	+1.92	−2.17	+1.80	—	
64	−36.2	+32.7	+1.34	+1.41	−1.64	+1.22		
74	−37.9	−40.0	−3.25	−0.90	+1.62	+3.81	—	—
92	−30.4	−41.3	−3.34	−1.43	+1.03	+3.23	—	—
262	+32.1	+36.6	+0.44	−1.55	−2.26	+2.48	—	—
275	+36.4	+41.9	+0.77	−0.41	−3.69	+1.24	—	—
281	+36.4	−33.9	−3.81	−2.28	−0.33	+4.30	—	—
294	+41.6	−35.6	−5.40	−3.94	−0.57	+3.96	—	—

Région 256.

$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.97$.

$k_x = +1.46$; $p_x = +0.0109$; $r_x = -0.0305$;
$k'_x = +0.09$; $p'_x = +0.0075$; $r'_x = -0.0331$.
$k_y = -0.53$; $p_y = +0.0105$; $r_y = -0.0142$;
$k'_y = +0.96$; $p'_y = +0.0096$; $r'_y = -0.0028$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	$l\,x$	$l\,y$
6	−64.6	+27.8	−1.72	−0.37	−3.36	−5.68	−1.74	−4.57
19	−55.0	−18.2	−1.37	−0.29	−0.56	−2.62	+0.02	−2.02
26	−51.6	+39.1	+1.49	+2.73	+1.20	−0.97	+1.17	+0.29

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
29	−54.2	+ 9.6	+4.39	+5.62	−1.65	−3.55	+4.98	−2.75
36	−45.1	+45.9	+0.85	+1.46	−1.88	−3.84	+0.06	−2.57
39	−47.9	+16.5	+0.58	+1.77	+0.98	−0.17	+0.98	+0.38
69	−37.3	− 8.5	−0.85	+0.84	−1.20	−3.47	+0.69	−2.52
72	−32.3	+54.5	+0.10	+1.01	−1.06	−3.38	−0.69	−1.74
93	−25.2	+26.8	+1.30	+2.39	+0.79	−1.19	+1.53	+0.07
96	−29.1	−14.6	−2.65	−1.61	−3.76	−5.62	−1.16	−4.86
99	−29.8	−24.4	−1.57	−0.38	−0.74	−2.52	+0.30	−1.91
100	−26.7	−26.6	−1.57	−0.49	−0.86	−2.41	+0.34	−1.91
112	−21.6	− 5.5	−1.19	−0.15	−1.59	−3.40	+0.08	−2.52
120	−16.3	+56.5	+0.39	+1.78	−0.11	−1.88	−0.08	−0.35
179	− 1.8	+24.8	−0.18	+0.52	−1.53	−3.67	+0.14	−2.15
182	− 3.7	− 6.9	−2.31	−0.74	−2.07	−3.17	−0.56	−2.50
195	+ 1.8	−24.4	−1.69	−0.20	−0.63	−2.16	+0.62	−1.40
204	+ 5.4	+40.7	+1.17	+1.82	−2.47	−4.19	+1.02	−2.65
212	+ 8.2	−22.5	−3.15	−1.62	+0.64	−0.46	−0.82	+0.15
213	+ 9.8	−26.0	−2.19	−1.82	+0.04	−1.02	−0.32	−0.45
236	+14.0	−20.6	−2.22	−0.55	−1.62	−2.79	+0.17	−2.08
265	+27.9	+46.8	+0.83	+1.74	−2.04	−2.92	+0.82	−1.55
270	+26.1	−25.4	−2.87	−1.08	−0.86	−2.05	−0.15	−1.27
290	+35.3	+25.1	−1.70	−0.10	−2.05	−2.82	−0.60	−1.67
297	+38.3	−25.6	−2.99	−0.88	+0.47	−0.95	+0.01	+0.04
323	+49.2	−40.9	−1.72	−0.16	+3.37	+3.08	+1.59	+3.45
327	+48.1	−60.0	−5.08	−5.56	+0.73	+1.93	−2.19	+1.34
344	+58.8	+16.0	−1.09	+0.69	−0.75	−1.16	+0.60	−0.08
358	+61.5	+12.2	−2.52	−0.68	−2.41	−2.59	−0.64	−1.64
45	−47.4	−34.7	−2.28	−1.15	+1.55	−0.85	—	—
52	−40.4	+31.4	−0.42	+1.34	+1.26	−0.89	—	—
54	−41.4	+25.3	−0.31	+0.95	+0.46	−1.12	—	—
58	−40.4	−32.5	−1.31	−0.57	+1.39	−0.39	—	—
266	+26.1	+30.7	−0.54	+0.70	−0.37	−1.35		
277	+34.6	+26.1	−0.88	+0.58	−0.10	−1.49	—	—
284	+31.7	−37.9	−3.04	−1.21	+0.84	−0.20	—	—
298	+39.3	−30.2	−3.16	−1.78	+0.02	−1.03	—	—

Région 257.

$E = 1893.18$; $E' = 1911.15$ $T = 17.97$.

$k_x = -1.35$; $p_x = +0.0180$; $r_x = -0.0232$;
$k'_x = +0.67$; $p'_x = +0.0105$; $r'_x = -0.0114$.
$k_y = -2.52$; $p_y = +0.0226$; $r_y = +0.0085$;
$k'_y = +2.66$; $p'_y = +0.0244$; $r'_y = -0.0262$.

9	−56.6	+46.9	+3.32	+1.25	−1.34	−4.38	+0.33	−2.19
10	−56.8	+40.5	+3.36	+0.94	−1.22	−4.44	+0.30	−2.31
16	−51.9	+45.6	+1.74	−0.44	−0.21	−3.71	−1.21	−1.28
23	−48.3	36.7	+2.91	+0.86	−0.48	−4.31	+0.22	−1.89
35	−41.5	+ 4.4	+2.01	−0.68	−0.16	−3.91	−0.34	−2.23
44	−36.5	-28.8	+0.35	−1.70	−1.41	−5.58	−1.03	−4.42
54	−27.6	+29.7	+2.31	+0.67	−0.95	−5.48	+0.24	−2.69
73	−18.8	+48.5	+2.17	−0.68	+1.34	−3.92	−0.70	−0.24
102	−11.1	−38.1	+1.13	−0.50	+2.27	−2.03	+0.47	−0.80
115	− 4.2	+33.9	+1.32	−0.14	+1.14	−3.34	−0.39	−0.27
135	+ 5.5	+46.6	+2.06	−0.02	+1.65	−4.41	−0.04	−0.17
154	+12.2	+19.9	−1.82	−3.44	+2.82	−3.91	−3.14	+0.10
198	+28.0	−42.9	−1.13	−2.66	+1.77	−4.55	−1.09	−2.08
202	+30.1	+22.4	+0.07	−0.96	+1.06	−5.99	−0.74	−1.60
216	+43.9	+ 5.3	+1.01	−1.09	+3.40	−3.98	+0.15	+0.29
222	+41.2	−44.9	+0.70	−2.00	+2.12	−4.70	+0.37	−1.90
223	+41.0	−62.1	−0.29	−1.99	+0.84	−6.31	+0.18	−3.76
228	+48.4	− 2.3	+0.47	−1.37	+2.26	−5.35	−0.06	−1.10
248	+62.8	+31.3	+0.52	−1.77	+3.38	−4.55	−0.61	+0.78
32	−43.0	+34.6	+2.78	+0.26	+0.47	−3.15	—	—
48	−32.3	+43.9	+2.53	+0.30	+1.23	−2.58	—	—
50	−32.9	−47.2	+1.10	−1.18	+3.82	−0.22	—	—
85	−19.4	−44.0	+0.98	−0.85	+3.76	−1.06	—	—
200	+34.1	+44.7	+1.95	−0.57	+2.18	−4.71	—	—
201	+33.5	+33.2	+1.90	−0.80	+2.61	−3.84	—	—
206	+31.8	−29.7	−0.23	−0.95	+2.67	−3.30	—	—
220	+44.6	−28.2	−0.36	−1.64	+3.40	−3.07	—	—

Région 258.

$E = 1895.18$; $E' = 1911.17$; $T = 15.98$.

$k_x = -1.14$; $p_x = +0.0162$; $r_x = +0.0100$;
$k'_x = +1.68$; $p'_x = +0.0137$; $r'_x = +0.0217$.
$k_y = -0.00$; $p_y = +0.0232$; $r_y = +0.0001$;
$k'_y = -0.23$; $p'_y = +0.0176$; $r'_y = +0.0038$.

6	−60.7	+ 3.9	+2.28	−2.04	−2.93	−3.64	−0.45	−3.20
11	−55.5	+40.4	+0.75	−2.55	−1.48	−2.06	−0.82	−0.95
36	−47.7	−19.2	+1.05	−1.60	−0.35	−0.96	−1.02	−1.07
53	−40.4	−26.1	+2.45	−1.38	+0.38	−0.16	−0.21	−0.46
93	−27.6	− 1.3	−0.71	−3.53	−1.09	−0.92	−2.28	−1.09
101	−27.4	−46.3	+3.09	+0.34	−0.15	+0.29	+0.84	−0.93
145	− 7.6	+49.3	+0.68	−2.59	−2.71	−2.91	−0.01	−1.90
148	− 7.6	+11.0	−0.25	−2.43	−0.20	+0.30	−1.00	+0.17
164	− 3.9	+23.8	+1.34	−1.17	−2.68	−2.53	+0.68	−2.23
165	− 2.1	+15.5	−1.13	−4.28	−1.43	−1.35	−2.21	−1.18
178	+ 3.6	+18.5	+1.76	−1.14	−0.14	−0.12	+0.93	+0.13
186	+ 3.7	−42.0	+3.40	+0.74	−0.71	−0.68	+1.73	−1.67
197	+11.2	+50.8	−0.18	−3.20	−2.83	−3.22	−0.45	−2.12
220	+17.3	−23.8	+1.06	−1.64	−1.02	−0.99	−0.14	−1.64
225	+22.4	+22.9	−3.21	−6.35	+0.39	+0.30	−3.81	+0.65
236	+28.5	+25.1	+0.98	−2.54	−1.03	−1.12	+0.31	−0.73
242	+27.6	−24.6	+2.14	−0.19	−1.01	−0.28	+1.27	−1.31
244	+31.3	+17.1	−0.33	−3.59	+0.27	+0.34	−0.95	+0.48
252	+31.1	−50.8	+1.06	−1.97	−2.28	−1.68	−0.52	−3.19
259	+35.3	−49.6	+1.06	−1.33	−1.21	−2.63	−0.13	−3.11
269	+40.2	−30.6	+1.56	−1.33	−1.63	−1.67	+0.50	−2.46
270	+40.3	−33.4	+0.09	−1.90	+0.15	+0.48	−0.56	−0.55

№	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
279	+49.2	−40.2	+0.43	−2.28	−0.76	−0.00	−0.55	−1.41
291	+56.6	+12 2	−0.73	−3.19	+0.31	+0.89	−0.65	+0.61
296	+57.2	−36.9	+0.23	−2.43	−1.36	−0.81	−0.56	−2.07
303	+60.8	−31.9	−0.86	−3.72	−0.93	+0.09	−1.62	−1.30
61	−37.8	+27.0	+1.47	−2.01	−1.28	−0.84	—	—
62	−39.0	+24.8	+1.02	−2.10	−0.46	−0.26	—	—
71	−36.1	−34.1	+2.08	+0.04	+1.34	+1.06	—	—
119	−22.7	−34.6	+2.34	−0.43	+0.79	+0.76	—	—
234	+28.3	+42.4	+0.50	−2.99	−0.42	−0.48	—	—
254	+36.1	+23.6	+0.58	−2.01	−0.56	+0.40	—	—
255	+35.1	−33.4	+0.84	−1.82	+0.58	+0.93	—	—
267	+41.1	−16.8	+0.20	−2.17	+0.07	+0.34	—	—

Région 259.

$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.97$.

$k_x = +1.57$; $p_x = +0.0182$; $r_x = +0.0124$;
$k'_x = -1.82$; $p'_x = +0.0218$; $r'_x = +0.0736$.
$k_y = -0.02$; $p_y = +0.0013$; $r_y = -0.0037$;
$k'_y = -2.86$; $p'_y = +0.0067$; $r'_y = +0.0475$.

6	−55.8	+53.6	−2.00	−3.08	−2.19	−2.55	−1.48	−2.37
17	−50.5	+36.1	−0.81	+0.82	−2.20	−2.01	+0.42	−2.30
36	−44.1	+37.9	−1.77	−1.32	0.14	+0.02	−0.92	0.38
37	−42.6	+34.4	−1.85	+0.24	−0.59	−0.38	−0.30	−0.86
49	−38.3	+39.7	−2.06	−0.60	−2.48	−1.21	−0.51	−2.28
53	−36.8	−39.6	−0.24	+5.34	−0.43	+0.87	−0.00	−0.57
65	−26.2	+34.8	−1.69	+0.06	−1.73	−0.75	+0.03	−1.97
95	−14.1	+34.4	−1.21	+0.47	−1.13	+0.64	+0.70	−1.24
128	−3.4	+18.8	+0.71	+3.58	+2.42	+5.02	+2.76	+2.43
131	−4.8	−0.2	−2.36	+0.94	−1.38	+1.46	−0.93	−1.29
180	+12.3	−39.8	−1.35	+3.93	−1.85	+2.07	−0.30	−1.75
202	+25.9	+59.5	−1.96	−2.55	−1.05	+1.86	+0.69	−1.36
212	+33.8	+38.7	−2.29	−0.98	−1.02	+3.26	+0.58	−0.90
223	+35.6	+32.0	−1.49	−0.08	−2.47	+2.13	+1.18	−2.26
233	+44.5	+35.1	−3.00	−1.75	−1.24	+4.35	−0.10	−0.71
250	+48.9	−14.8	−9.68	−5.44	−9.65	−3.84	−7.34	−9.31
256	+51.0	+19.9	−1.17	+0.98	−2.50	+2.92	+1.65	−2.26
266	+61.2	+34.7	−3.45	−2.61	−1.71	+4.22	−0.44	−1.38
44	−42.4	−28.6	−0.14	+5.65	+0.77	+1.44	—	—
54	−30.8	+44.4	−1.71	−1.13	−0.45	+1.01	—	—
55	−31.9	+41.1	−2.03	−0.52	+0.08	+0.93	—	—
68	−29.4	−28.3	−0.30	+4.10	+0.15	+1.47	—	—
213	+30.1	+38.6	−2.23	−1.86	+0.09	+4.13	—	—
218	+30.0	−41.5	−2.06	+4.03	−0.16	+4.74	—	—
222	+35.5	+33.4	−2.31	−0.87	+0.16	+4.44	—	—
230	+35.6	−41.9	−1.92	+3.96	−0.46	+4.43	—	—

Région 260.

$E = 1895.18$; $E' = 1911.17$; $T = 15.98$.

$k_x = -1.23$; $p_x = +0.0179$; $r_x = +0.0279$;
$k'_x = +1.50$; $p'_x = +0.0180$; $r'_x = +0.0192$.
$k_y = -1.66$; $p_y = +0.0019$; $r_y = -0.0108$;
$k'_y = -0.62$; $p'_y = +0.0074$; $r'_y = +0.0201$.

7	−62.5	−15.1	+3.44	+0.84	−0.32	−3.25	+0.79	−2.70
66	−37.0	−11.6	+1.29	−1.62	+3.40	+1.27	−0.96	+1.31
70	−39.9	−23.6	+3.15	−0.34	+2.22	+0.12	+0.27	+0.11
79	−30.1	−17.9	+1.83	−1.13	−0.19	−1.99	−0.47	−2.17
93	−29.3	+17.2	−0.11	−2.58	+0.54	−1.42	−1.33	−1.36
122	−16.1	+15.0	+1.90	−0.88	+0.38	−0.89	+0.71	−1.25
125	−16.6	−2.2	+2.50	−0.93	+0.05	−1.27	+0.57	−1.69
133	−14.7	−3.8	+1.37	−1.33	+1.48	+0.24	−0.19	−0.23
136	−14.1	−14.9	+2.24	−0.74	+0.34	−0.92	+0.28	−1.43
146	−8.2	+57.5	−0.70	−3.13	−0.10	−1.83	−0.58	−1.80
186	+2.3	−30.9	+3.16	+0.42	−0.27	−0.99	+1.24	−1.93
204	+6.1	−34.6	+2.09	−0.97	+1.94	+1.87	−0.01	+0.57
205	+11.9	+53.6	+0.67	−2.30	+0.77	−0.21	+0.79	−0.66
219	+12.6	−52.4	+3.53	+0.35	+1.05	+0.04	+1.07	−0.89
220	+11.1	−50.7	+3.05	−0.64	+1.42	+0.95	+0.35	−0.24
266	+30.6	−8.4	+0.24	−2.12	−1.07	−0.75	−0.45	−2.23
286	+45.0	−36.7	+1.51	−1.65	+0.91	+1.13	+0.01	−0.49
323	+61.5	+33.8	−1.22	−3.43	+0.15	+0.79	−0.29	−0.80
327	+63.5	+5.7	+0.36	−2.95	+1.71	+2.78	+0.11	+0.83
52	−44.6	+33.6	+0.79	−1.91	+2.13	−0.53	—	—
53	−40.0	+26.8	+1.00	−0.96	+1.72	−0.92	—	—
58	−42.0	−32.5	+2.94	+0.22	+2.93	+0.92	—	—
101	−29.8	−24.9	+2.89	−0.60	+1.55	−0.14	—	—
259	+33.3	+36.7	0.00	−2.72	+1.09	+1.27	—	—
268	+34.0	−32.2	+1.14	−1.72	+1.41	+1.47	—	—
273	+37.8	+37.1	−0.38	−2.76	+1.60	+1.40	—	—
302	+51.1	−29.3	+1.01	−1.87	+0.83	+1.39	—	—

Région 261.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = +0.64$; $p_x = +0.0271$; $r_x = +0.0276$;
$k'_x = +0.23$; $p'_x = +0.0291$; $r'_x = +0.0487$.
$k_y = -1.36$; $p_y = +0.0328$; $r_y = -0.0046$;
$k'_y = +0.94$; $p'_y = +0.0280$; $r'_y = +0.0131$.

17	−60.3	−25.7	+0.35	+1.86	+1.77	−1.81	−1.13	−0.75
35	−51.7	+18.6	+1.09	+0.31	−0.12	−3.46	+0.39	−1.21
37	−50.5	−13.1	+0.12	+0.67	+1.96	−1.55	−1.09	−0.19
70	−44.2	−39.9	−4.16	−2.33	+2.89	−0.15	−5.57	+0.13
77	−37.9	+36.6	+0.30	−1.01	−0.32	−3.53	+0.41	−0.86

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
109	−27.6	+35.7	−0.09	−1.21	+1.18	−2.06	+0.37	+0.55
117	−26.3	−37.7	−0.59	+0.14	+1.71	−1.15	−1.97	−0.97
132	−20.3	+10.5	−0.44	+0.07	−0.28	−2.15	+0.08	−1.02
134	−24.5	+ 9.3	−1.07	−0.39	−1.33	−3.46	−0.62	−2.21
143	−15.1	+29.5	+0.04	−0.25	−1.37	−3.84	+1.03	−1.85
144	−15.1	+26.7	−1.40	−1.69	+0.31	−1.94	−0.51	−0.14
168	−12.7	−55.0	+0.52	+2.56	+1.38	+0.97	−0.48	−0.65
176	− 6.3	+19.7	−0.68	−0.65	−0.82	−2.94	+0.34	−1.46
192	− 8.3	−62.7	−0.05	+2.51	+0.66	−1.57	−0.95	−2.53
222	+ 1.7	+22.9	−1.22	−1.45	−0.23	−2.24	+0.02	−0.75
247	+ 5.5	+27.8	−2.82	−2.30	+0.33	−2.01	−0.91	−0.22
254	+ 6.5	−29.4	−0.01	+0.92	+1.79	−0.03	−0.04	−0.25
270	+13.0	− 3.5	−1.74	−0.46	+0.87	−1.00	−0.43	−0.43
301	+29.9	+27.9	−2.38	−2.94	−0.38	−2.28	−0.32	−0.81
314	+28.7	−52.0	+0.85	+2.93	+0.98	−1.10	+1.15	−1.98
319	+34.3	+50.7	−1.04	−2.63	+0.32	−1.52	+1.50	+0.58
349	+42.8	+ 2.3	−1.42	−1.11	+0.02	−1.31	+0.46	−0.96
362	+46.0	+42.7	−1.61	−2.11	−0.08	−1.57	+1.50	+0.07
363	+46.3	+23.4	−2.05	−1.52	−0.54	−1.25	+0.84	−0.59
379	+52.6	+ 2.7	−3.17	−2.94	−1.60	−2.24	−1.04	−2.27
391	+62.8	+22.6	−2.30	−2.77	−0.50	−2.18	+0.52	−1.13
—	+32.2	−30.6	−2.53	−1.38	+1.65	−0.09	−1.78	−0.49
58	−42.3	+32.8	−0.43	−0.30	+0.56	−2.47	—	—
60	−41.7	+26.9	−0.05	−0.39	+0.48	−2.05	—	—
102	−34.7	−30.7	+1.30	+2.36	+2.89	−0.60	—	—
104	−34.1	−37.8	+1.02	+2.29	+2.49	−0.41	—	—
297	+20.6	−31.2	−0.06	+1.01	+2.35	+0.18	—	—
300	+28.6	+31.4	−2.16	−2.68	−0.14	−1.91	—	—
311	+28.9	−33.1	−0.62	+0.46	+2.14	+0.51	—	—
320	+32.9	+25.7	−2.51	−2.57	+0.80	−0.90	—	—

Région 262.

$E = 1894.96$; $E' = 1914.03$; $T = 19.06$.

$k_x = -3.97$; $p_x = +0.0220$; $r_x = -0.1015$;
$k'_x = -1.40$; $p'_x = +0.0288$; $r'_x = +0.0040$.
$k_y = +0.11$; $p_y = +0.0262$; $r_y = +0.0212$;
$k'_y = -1.74$; $p'_y = +0.0235$; $r'_y = +0.0152$.

6	−62.2	−10.2	+4.32	+2.04	−2.79	−0.96	−0.58	−1.81
10	−62.7	−48.5	−0.15	+2.17	+2.04	+3.66	−0.90	+1.97
13	58.3	69.4	11.29	2.66	4.16	1.56	0.13	1.11
22	−58.8	−35.8	+1.93	+2.30	−2.41	−1.14	−0.31	−2.41
23	−57.1	−44.1	−2.26	−0.14	−0.33	+0.87	−3.18	−0.60
40	−51.4	−41.2	+1.83	+2.88	+1.10	+2.48	+0.37	+0.88
60	−41.8	+20.5	+6.91	+2.63	−2.92	+0.03	+0.02	−0.98
63	−43.3	− 9.0	+3.55	+1.94	−4.18	−2.46	−0.60	−3.57
88	−32.5	−37.1	−1.85	−1.07	+0.80	+2.78	−3.16	+0.64
103	26.4	35.0	3.68	4.51	1.44	0.49	2.44	1.68
115	−23.7	−43.0	−0.31	+1.76	+0.37	+1.40	−0.46	−0.57
160	− 4.8	+45.0	+0.14	−5.81	−12.11	−10.55	−7.84	−10.94
187	+ 1.5	−48.3	−1.19	+0.82	+0.68	+1.51	−0.48	−0.95
239	+24.2	−12.1	+0.97	−0.10	−0.17	+1.52	−1.04	−0.88
242	+28.8	+62.5	+10.45	+0.70	−1.91	−1.03	+0.57	−1.25
246	+25.5	+41.3	+8.71	+0.96	−1.69	−0.87	+0.78	−1.53
279	+36.9	+35.6	+8.30	+1.36	−2.30	−1.82	+1.34	−2.66
340	+63.1	−20.6	+3.25	+0.72	−3.62	−2.30	+1.91	−5.43
49	−45.3	+28.5	+7.45	+2.19	−1.60	+0.15	—	—
67	−41.3	−28.5	+1.75	+2.72	−0.20	+1.80	—	—
81	−33.4	+39.3	+8.38	+2.40	−1.87	+0.34	—	—
89	−34.5	−39.5	+1.66	+2.72	−0.04	+2.33	—	—
249	+25.8	+36.4	+7.19	+0.79	−0.62	+0.97	—	—
250	+25.4	+33.2	+7.40	+0.45	−0.53	+1.85	—	—
257	+28.1	−34.5	−0.24	+0.42	+1.78	+3.06	—	—
286	+35.8	−32.1	−0.70	+0.60	+1.30	+2.75	—	—

Région 263.

$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.96$.

$k_x = +0.38$; $p_x = +0.0092$; $r_x = -0.0200$;
$k'_x = +0.97$; $p'_x = +0.0111$; $r'_x = -0.0095$.
$k_y = -1.95$; $p_y = +0.0287$; $r_y = -0.0066$;
$k'_y = -0.55$; $p'_y = +0.0186$; $r'_y = +0.0312$.

19	−56.5	−41.8	+2.35	+2.96	+7.30	+2.54	+3.36	+3.38
40	−45.4	+15.3	+1.24	+1.46	+3.22	−0.88	+1.33	+0.84
53	−42.8	+11.5	+0.31	+0.01	+0.43	−3.11	+0.23	−1.79
99	−27.1	+17.3	+0.78	+0.84	+2.27	+0.76	+0.95	+0.25
100	−29.1	+16.9	−0.70	−0.82	+2.54	+0.09	−0.63	+0.82
101	−26.7	+13.8	−0.13	+0.25	+1.88	−0.50	+0.25	+0.09
135	−19.1	−21.9	−0.06	+0.04	+2.32	+0.14	+0.79	−0.30
137	−17.4	−28.6	−0.64	−0.95	+1.30	−1.09	+0.12	−1.60
167	− 8.5	−25.6	−0.67	−1.10	+2.35	+0.81	+0.08	−0.17
178	− 2.1	+ 3.5	−1.05	−0.45	−0.19	−1.33	−0.14	−1.89
186	− 2.1	−40.9	+0.47	+0.81	+0.34	−0.73	+1.90	−2.38
191	+ 4.4	+30.8	+1.18	+0.50	+1.74	+0.41	+1.10	+0.49
193	+ 1.0	+27.3	−1.24	−2.47	+1.13	−0.63	−1.57	−0.36
213	+ 8.3	+23.8	−0.19	−0.27	−2.76	−3.68	+0.17	−4.01
221	+ 8.2	−26.1	−0.89	−1.28	+2.38	+0.54	+0.06	−0.51
236	12.6	33.2	0.25	0.38	0.60	1.63	1.90	3.18
243	+16.5	+44.5	+0.32	−0.70	−1.60	−2.73	−0.00	−2.56
249	+17.8	+29.1	+0.28	−0.90	+0.29	−0.85	+0.11	−1.06
264	+24.4	+48.5	−0.40	−1.47	+1.20	+0.61	−0.73	+0.49
274	+24.3	+10.7	−0.89	−1.08	+1.80	+1.96	−0.22	+0.58
295	+28.3	−11.2	−1.00	−1.19	+1.83	+1.45	+0.03	−0.22
297	+28.9	−30.8	−0.82	−1.31	+1.72	+0.62	+0.36	−1.16
299	28.9	57.9	2.61	2.69	2.49	1.90	0.82	0.78
330	+38.3	+24.9	−0.19	−1.10	+0.15	+0.41	+0.05	−0.85

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$J\,x$	$J\,y$
340	+ 43.9	+ 50.4	— 0.03	— 0.92	— 1.70	— 1.18	— 0.10	— 2.04
342	+ 40.7	+ 33.3	— 1.69	— 2.72	+ 0.29	+ 0.51	— 1.61	— 0.56
366	+ 45.8	— 20.4	— 2.21	— 1.71	+ 0.62	+ 1.34	— 0.52	— 1.32
59	— 40.8	— 36.7	— 1.26	— 1.43	+ 3.02	— 0.35	—	—
78	— 30.4	+ 26.1	+ 0.46	+ 0.01	+ 1.35	— 0.65	—	—
97	— 28.6	+ 29.5	+ 1.01	— 0.01	+ 1.29	— 1.04	—	—
107	— 26.9	— 31.7	— 0.84	— 1.15	+ 3.35	+ 0.53	—	—
298	+ 27.2	— 35.7	— 1.05	— 1.39	+ 2.69	+ 1.69	—	—
309	+ 30.6	+ 35.0	— 0.22	— 1.40	+ 1.08	+ 1.37	—	—
311	+ 32.9	+ 28.8	— 0.45	— 1.38	+ 0.63	+ 0.44	—	—
318	+ 31.7	— 30.1	— 0.99	— 1.07	+ 2.65	+ 2.55	—	—

Région 264.

$E = 1893.18$; $E' = 1911.15$; $T = 17.97$.

$k_x = — 1.70$; $p_x = — 0.0008$; $r_x = + 0.0121$;
$k'_x = + 0.35$; $p'_x = + 0.0136$; $r'_x = + 0.0110$.
$k_y = + 0.13$; $p_y = — 0.0041$; $r_y = — 0.0295$;
$k'_y = + 1.65$; $p'_y = — 0.0094$; $r'_y = — 0.0276$.

6	— 65.3	— 2.0	+ 1.27	— 0.56	+ 1.06	— 0.69	— 0.76	— 0.76
18	— 50.0	+ 31.1	+ 2.09	0.00	+ 2.08	— 0.34	+ 0.41	+ 0.12
27	— 45.3	— 6.2	+ 2.80	+ 0.89	+ 1.76	— 0.39	+ 0.80	+ 0.32
66	28.2	8.2	2.43	0.94	1.31	2.50	0.02	1.87
93	13.3	62.2	1.76	0.16	— 1.34	2.86	0.91	2.01
125	3.5	62.6	1.04	2.70	1.17	3.59	1.84	2.01
145	4.1	26.6	3.15	0.21	— 0.90	2.43	0.73	— 0.48
155	+ 6.8	— 10.1	+ 1.88	— 0.18	+ 0.11	— 1.14	+ 0.10	+ 0.63
157	+ 5.7	— 54.7	+ 3.23	+ 1.24	+ 1.25	— 0.52	+ 0.97	+ 1.78
164	+ 14.1	— 1.4	+ 0.63	— 1.35	— 1.42	— 2.77	— 0.96	— 0.79
178	+ 18.5	— 25.7	+ 3.65	+ 1.64	— 1.60	— 3.00	+ 1.79	— 0.70
191	+ 20.7	— 43.3	+ 3.31	+ 1.25	— 0.51	— 2.21	+ 1.23	+ 0.41
196	27.6	30.2	3.32	1.02	2.23	2.94	2.02	1.11
204	30.6	55.6	1.01	0.46	— 1.65	— 2.44	0.44	0.66
212	32.6	5.5	0.12	2.25	2.06	3.46	1.72	0.90
228	40.2	23.4	1.31	0.06	— 2.75	4.74	0.48	1.86
232	+ 40.6	— 35.4	+ 2.53	— 0.12	— 3.30	— 5.74	+ 0.38	— 2.23
233	+ 40.6	— 52.9	+ 1.02	— 1.97	— 4.70	— 6.69	— 1.50	— 3.28
250	+ 57.1	— 15.1	+ 2.16	+ 0.05	— 1.43	— 2.48	+ 0.62	+ 0.66
251	+ 56.8	— 22.1	+ 3.43	+ 1.92	— 6.78	— 7.46	+ 2.10	— 4.45
—	— 24.3	+ 29.5	— 0.52	— 1.93	— 0.36	— 1.32	— 1.71	— 0.84
—	+ 9.3	61.6	1.36	1.85	2.11	3.72	0.14	2.17
60	— 25.8	+ 38.3	+ 1.96	+ 0.06	+ 0.19	— 1.20	—	—
61	— 27.7	+ 27.1	+ 1.06	— 0.65	+ 1.18	— 0.56	—	—
72	— 26.6	— 22.3	+ 1.77	+ 0.30	+ 0.55	— 1.22	—	—
74	— 27.7	— 36.0	+ 1.83	+ 0.29	+ 0.79	— 0.57	—	—
195	+ 28.4	+ 40.1	+ 0.96	— 1.37	— 0.27	— 1.60	—	—
205	+ 30.7	+ 29.5	+ 1.18	— 1.00	— 1.22	— 2.12	—	—
214	+ 33.3	— 32.1	+ 1.98	— 0.94	— 0.68	— 2.48	—	—
224	+ 35.8	— 40.9	+ 2.82	+ 0.21	— 2.13	— 3.97	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$J\,x$	$J\,y$

Région 265.

$E = 1895.18$; $E' = 1911.22$; $T = 16.04$.

$k_x = — 1.65$; $p_x = + 0.0035$; $r_x = — 0.0032$;
$k'_x = + 3.85$; $p'_x = + 0.0104$; $r'_x = — 0.0208$.
$k_y = — 1.90$; $p_y = — 0.0025$; $r_y = — 0.0210$;
$k'_y = + 0.26$; $p'_y = — 0.0022$; $r'_y = — 0.0373$.

8	— 62.3	— 40.0	+ 3.48	— 2.55	+ 3.80	+ 2.06	+ 1.61	+ 0.39
21	— 53.3	+ 12.2	+ 1.51	— 3.53	+ 3.24	+ 2.42	— 0.42	+ 0.42
24	— 50.4	— 32.0	+ 1.04	— 5.04	+ 2.73	+ 1.23	— 0.86	— 0.23
27	— 54.2	— 36.9	+ 3.85	— 1.79	+ 3.42	+ 1.06	+ 2.20	— 0.07
64	— 30.0	+ 48.0	— 1.13	— 5.41	+ 1.40	— 0.04	— 2.95	— 1.13
83	— 25.9	— 32.3	+ 0.16	— 4.40	+ 1.01	— 1.29	— 0.81	— 1.64
95	— 21.3	— 9.6	+ 2.04	— 3.70	+ 2.09	— 0.28	+ 0.24	— 0.51
125	— 13.4	— 58.1	+ 1.89	— 3.80	+ 0.61	— 1.79	+ 0.75	— 1.66
136	— 9.6	— 17.7	+ 2.15	— 3.52	+ 0.83	— 1.40	+ 0.56	— 1.34
137	— 9.6	— 37.1	+ 1.02	— 4.44	+ 1.15	— 0.82	— 0.23	— 0.85
154	— 3.6	— 57.8	— 0.85	— 6.35	— 2.05	— 3.72	— 1.83	— 3.67
167	+ 8.7	+ 38.9	+ 3.13	— 1.71	— 2.84	— 5.22	+ 1.40	— 4.70
176	+ 6.9	— 38.1	+ 1.17	— 5.24	+ 0.65	— 1.75	— 0.43	— 1.08
179	+ 9.2	— 58.8	+ 1.42	— 5.29	+ 1.88	— 0.49	— 0.06	+ 0.28
181	+ 10.3	+ 44.8	+ 2.49	— 2.85	+ 0.65	— 1.62	+ 0.46	— 1.11
202	15.7	28.0	1.53	4.52	0.54	1.77	0.04	0.91
210	22.6	16.9	1.22	3.97	0.17	2.26	0.31	1.42
217	27.6	36.1	0.78	4.15	0.53	2.09	0.82	— 0.88
259	+ 44.4	+ 26.7	+ 0.53	— 4.75	+ 0.48	— 1.95	— 1.02	— 0.32
—	+ 28.1	— 62.9	+ 0.93	— 5.73	+ 1.71	— 0.54	— 0.35	+ 0.73
31	— 47.4	+ 33.1	+ 2.18	— 1.91	+ 2.74	+ 1.63	—	—
55	— 39.3	+ 41.8	+ 1.78	— 3.17	+ 2.56	+ 1.64	—	—
68	30.8	31.4	1.62	3.94	2.44	0.29	—	—
69	34.6	31.3	1.58	4.55	3.10	1.10	—	—
230	30.1	41.2	1.72	3.32	1.62	1.69	—	—
235	30.5	29.8	1.46	3.70	1.61	1.32	—	—
239	+ 30.1	— 28.0	+ 1.83	— 4.08	+ 1.16	— 1.63	—	—
240	+ 34.3	— 32.5	+ 1.16	— 5.38	+ 0.64	— 1.04	—	—

Région 266.

$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.97$.

$k_x = + 1.62$; $p_x = + 0.0133$; $r_x = + 0.0121$;
$k'_x = + 1.38$; $p'_x = + 0.0091$; $r'_x = + 0.0189$.
$k_y = — 0.72$; $p_y = + 0.0060$; $r_y = + 0.0023$;
$k'_y = + 0.34$; $p'_y = + 0.0095$; $r'_y = + 0.0256$.

2	— 60.8	+ 35.4	— 0.37	— 0.42	+ 0.25	— 2.73	+ 0.97	— 0.30
15	— 57.9	— 14.6	— 7.43	— 7.49	— 8.96	— 10.38	— 6.84	— 9.17
22	— 54.7	+ 20.0	+ 0.05	+ 0.49	— 1.56	— 4.21	+ 1.46	— 2.15

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
33	−44.1	+34.5	−1.21	−1.18	−0.91	−3.18	+0.34	−1.35
35	−40.3	+ 7.3	−0.27	−0.25	−0.54	−2.81	+0.90	−1.25
65	−27.6	−18.8	−0.16	+0.01	−0.31	−2.15	+0.82	−1.18
72	−23.7	+49.0	−1.22	−0.97	−0.34	−2.18	+0.89	−0.74
75	−23.5	+29.4	−1.67	−1.51	−0.50	−2.02	+0.11	−0.89
78	−24.1	+ 2.4	−0.84	−0.81	+0.02	−2.06	+0.44	−0.86
92	−16.3	−24.6	+0.39	+0.08	−1.89	−2.90	+1.17	−2.54
106	− 6.5	+39.4	−1.26	−0.91	−0.72	−1.65	+0.95	−0.98
161	+20.3	+55.9	−0.86	−1.54	+0.34	−0.74	+1.39	−0.23
170	+29.0	+10.6	−1.05	−1.53	−0.11	−1.01	+0.70	−1.07
201	+54.3	− 4.2	+0.46	−0.02	+1.94	+2.02	+1.76	+1.00
204	+58.9	+31.5	−2.16	−2.09	+2.08	+2.13	+0.52	1.34
207	+59.9	−34.5	−2.83	−2.83	+1.22	+1.54	−1.19	+0.08
209	+62.2	+15.4	−3.12	−3.41	−0.03	+0.39	−0.82	−0.75
212	+63.3	− 3.8	−3.60	−3.77	+0.80	+1.27	−1.53	−0.07
—	+21.1	+56.7	−1.63	−4.63	−2.04	−3.70	−0.51	−2.91
38	−40.9	−28.0	−0.55	−0.40	+0.74	−0.83	—	—
48	−38.4	−30.5	−0.62	−0.80	+1.13	−1.01	—	—
57	−29.9	+36.6	−1.78	−1.52	−0.35	−1.73	—	—
59	−29.5	+26.1	−1.72	−1.60	+1.01	−1.39	—	—
165	+22.0	−32.3	−1.77	−0.72	+0.83	+0.03	—	—
173	+28.7	−27.7	−1.72	−1.09	+0.82	+0.83	—	—
179	+34.4	+30.3	−1.85	−2.56	+0.83	+0.65	—	—
183	+37.7	+32.8	−2.81	−2.31	+0.66	+0.23	—	—

Région 267.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = -1.85$; $p_x = +0.0179$; $r_x = -0.0147$;
$k'_x = -0.73$; $p'_x = +0.0220$; $r'_x = -0.0106$.
$k_y = -1.27$; $p_y = +0.0160$; $r_y = +0.0072$;
$k'_y = +0.46$; $p'_y = +0.0089$; $r'_y = -0.0277$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
27	−52.8	+33.7	+3.84	+2.58	−0.49	−0.36	+0.43	−0.95
31	−51.6	+ 5.6	+3.44	+2.75	+0.81	+1.39	+0.70	+0.23
32	−52.0	+ 6.2	+3.16	+2.09	+0.25	+0.44	+0.22	−0.51
35	−52.5	−49.2	+2.77	+1.70	+4.86	+3.24	+0.51	+2.49
36	−50.3	−53.7	+1.82	+1.99	+2.91	+1.65	+0.29	+0.69
40	−49.9	+50.1	+3.28	+4.18	+0.08	+1.66	+0.81	+0.58
45	−42.4	+58.8	+1.18	+0.12	−0.86	−1.59	−2.22	−1.33
62	−38.4	+34.4	+3.90	+3.21	−0.41	−0.24	+1.06	−0.69
64	−36.5	+16.8	+3.09	+2.35	+0.57	+0.05	+0.49	−0.26
86	−32.8	−50.4	+1.24	+1.25	+1.78	+0.26	−0.06	0.35
94	−24.0	+54.4	+0.99	−0.01	−1.06	−2.35	−1.97	−1.67
117	−16.5	+24.4	−2.46	+1.57	−2.32	−3.38	+0.08	−3.12
119	−16.7	+ 6.9	+1.07	+0.79	−2.77	−3.42	−0.78	−3.58
124	−15.5	−19.3	+3.18	+1.31	−0.67	−1.91	+0.88	−2.09
161	− 0.1	+37.5	+5.09	+4.61	−4.51	−6.11	+3.08	−5.24
180	+ 0.4	+44.5	+2.42	+1.48	+1.25	−0.96	+0.11	+0.30
200	+ 8.6	− 6.2	−0.62	−0.72	−3.05	−4.56	−1.71	−4.20
214	+17.7	+55.3	+0.61	−0.60	−1.11	−3.54	−1.63	−1.86
240	+24.0	+17.7	+1.10	+0.17	+1.42	−0.79	−0.40	+0.37
241	+22.1	+11.0	+1.16	+0.56	+0.66	−1.41	−0.12	−0.41
249	+21.9	−58.5	−1.08	−1.30	−0.65	−3.78	−1.30	−3.12
254	+27.1	−17.1	+0.94	+0.16	−1.85	−4.10	+0.02	−3.31
257	+25.9	−28.5	+0.63	+0.29	+0.65	−3.11	+0.04	−1.72
267	+31.2	+ 8.2	+0.84	−0.37	+1.44	−1.13	−0.53	+0.17
272	30.8	−51.8	1.15	0.15	+2.01	−2.21	+0.63	−0.83
279	+36.3	+19.2	+2.51	+1.76	+0.67	−2.79	+1.33	−0.85
307	+53.9	+20.2	+1.57	+0.63	+0.30	−3.04	+0.63	−0.97
316	+57.8	+29.0	+2.58	+0.86	−2.12	−6.00	+1.21	−3.51
322	+59.0	−10.8	−1.45	−2.93	+1.30	−2.92	−2.16	−0.74
330	+61.4	− 1.3	+1.44	+0.74	+0.56	−2.72	+1.04	−0.87
46	−42.2	+26.5	+2.46	+1.86	+0.34	−0.22	—	—
56	−42.8	−32.1	+2.10	+0.79	+2.02	+1.40		
74	−34.2	+26.1	+2.90	+1.99	+0.07	+0.44	—	—
82	32.6	39.4	+2.37	+1.40	+1.84	+0.90		
245	+22.5	−20.1	+0.96	0.00	+1.11	−1.34	—	—
259	+30.0	−37.5	+0.47	−0.15	+1.99	−1.02	—	—
261	+30.9	+36.3	+1.86	+0.25	+1.60	−1.31	—	—
278	+35.7	+34.4	+2.15	+0.33	+1.01	−1.59	—	—

Région 268.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = +2.34$; $p_x = +0.0073$; $r_x = +0.0388$;
$k'_x = +0.56$; $p'_x = +0.0157$; $r'_x = +0.0228$.
$k_y = -0.57$; $p_y = +0.0136$; $r_y = +0.0085$;
$k'_y = -0.71$; $p'_y = +0.0152$; $r'_y = -0.0477$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
3	−64.4	+43.0	−2.01	−0.35	−2.62	+1.03	+0.85	−2.08
4	−64.7	+23.6	−3.41	−0.97	−2.47	+1.28	−0.75	−2.16
16	−59.0	+ 2.8	−4.80	−2.43	−3.36	−0.30	−2.76	−3.58
29	−48.2	+22.4	−3.06	−0.28	−2.90	+0.69	−0.08	−2.37
32	−46.2	+ 1.6	−2.23	+0.34	−1.82	+0.88	+0.02	−1.99
47	−42.3	−61.5	−1.45	+0.20	−0.24	+2.05	−1.55	−1.45
50	−39.3	+32.3	−2.38	+0.34	−2.04	+0.30	+0.97	−1.81
82	−25.0	− 4.7	−0.76	+1.04	−0.84	+1.11	+1.16	−1.06
87	−28.3	−30.0	+0.09	+1.58	−0.49	+1.17	+1.04	−1.29
120	−15.9	−37.1	−0.84	+0.73	−1.07	−0.18	+0.06	−2.10
127	−12.8	− 2.0	−2.69	−0.74	−0.88	+0.98	−0.47	−0.87
152	+ 4.5	−33.7	−2.86	−0.83	−2.48	−2.71	+0.69	−2.66

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
165	+ 9.7	+ 56.0	—4.51	—2.20	—2.40	—3.33	—0.07	—2.51
172	+ 10.8	+ 42.4	—2.82	—1.56	+ 0.06	—0.32	+ 0.69	+ 0.05
230	+ 35.2	+ 50.4	—1.53	+ 0.20	—0.55	—1.77	+ 2.73	—0.38
240	+ 35.7	—53.8	+ 0.48	+ 1.61	+ 2.40	+ 0.27	+ 1.24	+ 0.62
262	+ 51.8	+ 3.5	—4.66	—2.97	—1.61	—3.52	—1.66	—2.14
—	24.3	— 8.5	—2.28	—0.05	—0.03	+ 2.64	—0.25	+ 0.06
33	—45.8	—28.8	—0.62	+ 0.53	+ 0.83	+ 3.90	—	—
51	—39.9	+ 28.8	—3.87	— 0.84	—0.87	+ 1.82	—	—
59	—37.4	—33.9	— 1.08	+ 0.83	+ 1.01	+ 3.15	—	—
74	— 29.4	+ 43.9	— 3.07	—0.59	— 0.13	+ 1.09	—	—
214	+ 26.2	—29.6	—1.07	+ 0.19	+ 0.92	—0.45	—	—
217	+ 32.3	+ 44.0	—4.39	—1.95	+ 0.88	—0.91	—	—
218	+ 33.3	+ 36.5	—3.96	—2.30	+ 0.27	—1.32	—	—
225	+ 34.0	—39.1	- 1.33	—0.43	+ 1.11	- 0.68	—	—

Région 269.

$E = 1894.96$; $E' = 1914.03$; $T = 19.06$.

$k_x = + 1.42$; $p_x = + 0.0161$; $r_x = + 0.0196$;
$k'_x = — 0.01$; $p'_x = + 0.0215$; $r'_x = — 0.0433$.
$k_y = - 0.78$; $p_y = + 0.0162$; $r_y = + 0.0167$;
$k'_y = + 0.10$; $p'_y = + 0.0078$; $r'_y = — 0.0226$.

22	—45.7	—20.8	+3.33	+3.49	—4.56	—4.36	+3.50	—5.18
29	—44.0	- 15.0	+ 0.90	+ 1.67	—0.74	+ 0.11	+ 1.34	- 0.96
50	—32.1	— 43.0	+ 0.81	— 0.07	—0.19	+ 0.37	+ 0.98	- 0.86
61	—26.9	- 23.9	- 0.28	0.19	+ 0.06	+ 0.24	+ 0.24	- 0.56
96	—10.2	—33.5	—0.37	—0.82	+ 1.24	+ 0.76	+ 0.31	+ 0.23
120	+ 0.7	+55.5	+ 0.71	+5.42	+ 1.14	+ 0.11	+3.13	+ 0.95
126	+ 9.7	+55.8	— 3.90	+ 1.08	—0.39	— 1.56	- 1.18	—0.61
128	+ 5.9	+ 25.2	— 2.34	+ 0.83	+ 0.19	— 1.05	- 0.24	— 0.45
150	+13.7	—52.3	+ 0.05	—2.18	+ 1.80	—0.07	+ 0.51	—0.06
155	+16.2	+10.7	—2.81	—0.45	+ 0.97	—0.27	—0.74	+ 0.18
184	+34.6	+ 0.4	—2.88	—0.99	+ 0.39	—1.16	—0.58	—0.62
185	+32.0	— 2.5	—2.40	—0.72	+ 2.24	—0.02	—0.22	—0.83
205	+53.4	+53.3	—0.85	+ 3.36	—3.60	—6.31	+ 2.33	—4.49
210	+54.6	—12.6	—2.35	—2.64	+ 2.02	—1.20	—0.61	+ 0.08
215	+57.2	+18.3	—1.67	+ 0.54	+ 1.81	—1.06	+ 1.00	+ 0.42
26	—43.1	+41.3	—1.90	+ 2.74	—0.58	+ 0.17	—	—
30	—42.0	—23.2	—0.26	—0.44	+ 0.30	+ 0.69	—	—
40	—37.5	—22.3	+ 0.25	+ 0.08	+ 1.09	+ 1.61	—	—
54	—25.2	+ 32.4	—1.97	+ 2.05	—0.59	+ 0.26	—	—
173	+28.6	—40.1	—1.65	—2.06	+ 1.63	—0.79	—	—
177	+33.7	+39.6	—2.56	+ 1.11	+ 1.19	—1.32	—	—
186	+32.1	—19.1	—1.68	—1.68	+ 1.50	—0.66	—	—
200	+49.1	+31.1	—2.34	+ 0.07	+ 1.03	—0.95	—	—

Région 270.

$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.97$.

$k_x = — 1.27$; $p_x = + 0.0104$; $r_x = + 0.0096$;
$k'_x = — 1.02$; $p'_x = + 0.0233$; $r'_x = — 0.0121$.
$k_y = — 0.81$; $p_y = + 0.0172$; $r_y = — 0.0042$;
$k'_y = + 0.85$; $p'_y = + 0.0184$; $r'_y = + 0.0204$.

9	58.4	+ 50.8	+ 1.98	+ 2.10	1.38	5.29	- 0.15	1.94
16	—59.1	—20.1	+2.04	+1.66	+0.53	—3.03	—0.26	—1.11
51	—37.0	+11.5	+1.64	+2.00	—0.51	—3.74	+0.04	—1.60
59	—31.3	— 3.3	+1.91	+1.89	+0.35	—1.46	+0.23	—0.34
60	—32.2	4.0	+ 1.25	+ 1.94	+ 0.98	1.32	—0.08	+ 0.04
82	—24.2	—49.5	+2.91	+1.97	+0.72	—1.71	+0.95	—1.16
146	+ 6.9	+29.3	+1.22	+0.69	+0.32	—2.08	—0.11	—0.39
151	+ 6.1	—29.0	+1.29	+0.82	+2.24	+0.80	+0.04	+0.98
153	+ 9.1	—45.2	+0.71	—0.21	+0.02	—1.37	—0.68	—1.53
163	+14.5	—54.3	+2.42	+0.96	+1.50	+0.53	+0.86	—0.05
169	+18.5	— 2.6	+1.07	+0.87	—2.05	—2.77	+0.14	—2.58
186	+26.7	+45.2	+0.19	+0.16	+0.01	—1.22	—0.58	+0.00
190	+26.9	—21.5	+0.36	—0.61	—1.43	—2.39	—0.78	—2.49
197	+33.8	+15.8	+1.29	+0.80	+1.63	+0.82	+0.45	+1.26
211	+35.5	+12.9	—1.32	—1.41	—3.48	—4.37	—1.93	—3.96
217	+ 44.6	+30.9	+ 0.57	0.00	+ 0.38	— 0.32	— 0.14	+ 0.24
242	+59.5	+39.5	—0.86	—0.87	—1.68	—1.37	—1.05	—1.28
255	+62.8	+18.4	—0.04	—1.54	—2.36	—2.51	—0.90	—2.59
—	+20.9	— 6.7	+3.37	+3.51	—0.80	—1.66	+2.66	—1.50
45	—41.3	—25.4	+2.39	+ 1.99	+ 1.98	- 0.83	—	—
48	—35.7	+43.4	+ 1.25	+ 2.06	- 0.11	— 2.52	—	—
53	—37.6	—34.1	+ 2.00	+ 1.48	+ 1.56	0.90	—	—
55	—32.1	+29.0	+0.83	+2.15	+0.22	—2.36	—	—
204	+34.8	— 28.8	+ 0.68	0.84	+ 0.70	+ 0.11	—	—
208	+39.9	+ 44.0	+ 0.53	+ 0.89	+ 0.37	- 0.25	—	—
209	+39.2	+38.5	+0.85	+0.62	+0.06	—0.87	—	—
213	+37.2	—25.2	+1.15	+0.25	+0.99	+0.18	—	—

Région 271.

$E = 1896.11$; $E' = 1911.10$; $T = 14.98$.

$k_x = — 0.03$; $p_x = + 0.0434$; $r_x = + 0.0166$;
$k'_x = — 0.37$; $p'_x = + 0.0478$; $r'_x = + 0.0075$.
$k_y = + 2.46$; $p_y = + 0.0516$; $r_y = + 0.0037$;
$k'_y = — 1.43$; $p'_y = + 0.0374$; $r'_y = — 0.0225$.

6	—56.2	—15.1	+3.90	+3.75	—1.15	+3.97	+0.88	+0.73
7	—56.8	—22.1	+4.74	+4.32	—4.85	—0.39	+1.47	—3.62
27	—38.7	— 4.6	—0.08	+0.03	—3.55	+1.61	—2.04	—1.02
31	—35.1	—49.0	+2.38	+2.86	—0.82	+4.00	+0.23	—0.40

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Jx	Jy
40	−26.0	−51.9	+3.07	+2.57	+0.20	+4.68	+0.81	+0.40
45	−20.7	+ 6.4	+1.24	+1.95	−1.51	+2.99	+0.53	+1.34
48	− 20.7	40.9	+ 3.72	+ 3.46	1.05	+ 2.78	+ 1.95	0.63
82	+ 0.9	−31.5	+0.60	+1.28	−4.03	−0.55	+0.40	−3.17
83	+ 4.1	−61.9	+1.00	+1.58	+0.13	+3.24	+0.53	−0.52
91	+11.4	+25.4	−0.31	−0.69	−3.37	−0.31	+0.12	−0.08
101	+18.6	− 3.8	−0.12	+0.75	−3.45	+0.34	+0.91	−1.03
104	+16.3	−36.7	+0.50	+0.98	−0.68	+2.60	+0.84	0.00
119	+28.7	+34.7	−0.61	−0.04	−2.54	+0.71	+1.20	+1.41
120	+25.9	+33.2	−1.63	−1.33	−5.58	−2.12	−0.10	−1.62
140	+40.1	+33.9	−1.97	−1.64	−5.76	−3.29	+0.23	−2.12
147	+48.0	+55.5	−2.81	−2.76	−6.22	−4.29	−0.13	−1.82
—	− 3.1	−40.3	+2.41	+1.86	−1.26	+2.40	+1.31	−0.74
24	−40.5	−37.8	+2.27	+2.68	−0.73	+3.53	—	—
29	−35.1	−37.4	+2.34	+1.88	−0.60	+3.70		
34	−28.5	+38.8	+0.33	+1.64	−4.20	+1.39	—	—
35	−29.8	+30.7	+1.10	+1.71	−4.52	+0.32	—	—
118	+28.8	+38.5	−1.99	−1.25	−4.82	−0.93	—	—
128	+31.5	+46.8	−1.96	−1.89	−4.30	−0.91	—	—
133	+34.9	−27.9	−1.23	−0.75	−1.28	+1.50	—	—
137	+36.6	−21.9	−1.00	−1.20	−0.80	+1.75	—	—

Région 272.

$E = 1895.18$; $E' = 1911.22$; $T = 16.04$.

$k_x = -1.17$; $p_x = +0.0027$; $r_x = -0.0016$;
$k'_x = -1.35$; $p'_x = +0.0037$; $r'_x = -0.0027$.
$k_y = +0.60$; $p_y = +0.0032$; $r_y = +0.0346$;
$k'_y = -0.29$; $p'_y = +0.0011$; $r'_y = +0.0152$.

3	−65.4	+27.1	+1.50	+1.21	−3.31	−1.69	−0.17	−0.66
25	46.4	3.8	− 0.29	− 0.53	4.65	2.85	0.99	2.44
27	−45.5	−17.4	+2.70	+3.40	−0.42	+1.12	+1.68	+1.59
41	−41.8	+ 8.0	+1.63	+1.30	−2.79	−1.35	+0.06	−0.85
71	−20.0	+60.3	+0.87	+0.57	−2.71	−1.00	−0.73	−1.07
72	−22.7	+57.4	+1.35	+1.32	−1.00	+0.52	−0.11	+0.60
77	−21.0	− 9.8	+3.45	+3.25	−2.18	−1.18	+2.04	−1.02
114	− 5.2	−57.0	−0.35	+0.14	−1.19	−0.71	−1.26	−0.78
116	− 0.3	+46.9	+0.77	+0.81	−1.20	−0.60	−0.57	−0.64
157	+18.3	+11.0	+1.01	+1.50	−0.73	−0.15	+0.03	−0.71
179	− 26.1	+ 8.5	− 0.22	+ 1.07	1.43	0.70	− 0.54	1.54
183	+25.5	−14.8	+1.30	+1.09	+0.42	+0.47	+0.04	−0.07
199	+31.4	−42.4	+0.55	+0.29	+0.18	−0.10	−0.65	−0.68
200	+34.1	−52.8	+0.04	+0.93	−0.30	−0.66	−0.55	−1.29
209	+39.9	+21.2	+1.92	+1.71	−1.70	−1.65	+0.64	−2.47
239	+56.8	−27.4	−0.99	−0.11	+0.87	+0.43	−1.57	−0.66
-	51.9	26.0	+ 1.25	+ 1.66	- 3.34	- 1.89	+ 0.08	1.22
—	+ 37.4	57.0	2.19	2.40	+ 0.66	+ 0.86	3.31	- 0.13

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Jx	Jy
35	−43.5	+35.6	+1.31	+1.65	−2.78	−1.40	—	—
50	−38.8	+37.4	+1.72	+2.07	−2.21	−0.02	—	—
54	−37.3	33.2	+ 0.79	+ 1.23	− 1.86	- 0.17		
62	−32.5	−29.8	+1.27	+1.06	−0.82	+0.42	—	—
154	+19.2	+31.6	+1.18	+1.18	+0.46	+1.35	—	—
173	+20.7	−40.3	+1.21	+1.40	−0.41	+0.23	—	—
196	+32.8	+34.1	+0.76	+1.01	+0.66	+0.61	—	—
198	+30.1	−29.6	+1.24	+1.44	+0.48	+0.54	—	—

Région 273.

$E = 1896.13$; $E' = 1913.10$; $T = 16.97$.

$k_x = -1.27$; $p_x = +0.0453$; $r_x = +0.0222$;
$k'_x = -0.56$; $p'_x = +0.0545$; $r'_x = -0.0241$.
$k_y = -3.01$; $p_y = +0.0426$; $r_y = -0.0167$;
$k'_y = -1.50$; $p'_y = +0.0423$; $r'_y = -0.0119$.

11	−51.9	− 4.2	+6.10	+4.18	+5.26	+3.31	+1.64	+1.10
14	−46.2	+31.4	+2.52	+3.12	+4.39	+2.10	−0.43	+1.66
17	−47.2	−34.6	+3.37	+1.17	+5.71	+3.08	−0.97	+0.00
21	−43.4	+15.3	+1.46	+1.34	+2.50	+0.67	−1.70	−0.64
25	−42.9	− 4.0	+2.02	+0.77	+3.55	+1.82	−1.65	−0.35
28	−38.1	+ 6.1	+2.82	+2.66	+3.18	+1.84	−0.08	−0.03
31	−37.1	−49.2	+2.58	+0.31	+5.50	+4.26	−1.27	+0.00
32	−33.3	+57.7	+0.63	+2.59	−0.91	−2.38	−1.02	−1.93
44	−25.2	+38.6	+0.49	+0.88	+0.05	−1.78	−1.52	−1.84
59	−21.6	−62.7	+2.25	−0.08	+7.46	+6.62	−0.85	+1.81
67	−18.9	−59.8	+2.61	−0.92	+4.54	+2.88	−0.96	−1.35
81	− 9.6	− 3.4	+1.62	+1.19	+2.10	+0.66	+0.01	−1.15
98	− 0.8	7.2	+ 3.69	+ 2.74	0.15	1.17	+ 2.34	− 3.21
102	+ 4.0	−42.3	+4.04	+1.61	+4.50	+2.61	+2.15	−0.43
122	+12.6	−53.0	+2.98	+0.30	+2.61	+1.83	+1.40	−2.10
142	+27.1	−54.7	+1.23	−2.53	+4.37	+2.78	−0.15	−0.61
150	+33.1	−16.0	−1.32	−2.75	−2.59	−3.42	−1.28	−5.47
156	+38.7	+28.4	−1.03	−1.15	+1.03	+0.06	−0.10	+0.05
157	+39.1	+20.5	+0.12	−0.51	+0.68	−0.22	+0.82	−0.59
36	30.2	+ 37.4	+ 1.19	+ 2.50	+ 1.86	- 0.28	—	-
42	−32.8	−37.6	+3.10	+0.79	+5.63	+3.74	—	—
48	−21.3	+45.9	+1.45	+3.73	+1.14	+0.18	—	—
55	−20.3	−37.9	+3.90	+1.12	+4.83	+3.29	—	—
132	+20.3	+29.2	−0.65	−0.09	+1.69	+0.18	—	—
136	+21.0	−26.7	+0.36	−1.37	+4.23	+2.56	—	—
137	+ 23.1	29.7	+ 1.04	− 0.98	+ 3.12	+ 2.10	-	—
140	+ 27.6	+ 34.9	- 0.02	− 0.13	+ 1.14	- 0.25	—	—

Région 274.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = +2.40$; $p_x = +0.0032$; $r_x = +0.0173$;
$k'_x = +1.87$; $p'_x = +0.0046$; $r'_x = -0.0199$.
$k_y = -2.20$; $p_y = +0.0128$; $r_y = -0.0352$;
$k'_y = -0.54$; $p'_y = +0.0099$; $r'_y = -0.0078$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
2	−60.6	+20.3	−0.84	−0.76	+2.27	−1.11	+1.07	−1.86
11	−56.5	+29.1	−2.87	−1.23	−0.44	−3.53	−0.17	−4.24
17	−56.4	−10.8	−3.53	−3.45	+2.37	−1.32	−1.56	−2.18
27	−53.7	−1.3	−1.93	−1.08	+2.09	−1.33	+0.42	−2.16
44	−41.1	+23.6	−2.22	−1.28	+2.65	+0.09	+0.19	−0.62
53	−38.4	+56.5	−3.28	−1.21	+1.62	−1.39	−0.33	−1.44
76	−32.7	+12.1	−3.77	−2.19	+3.01	+0.20	−0.98	−0.33
79	−33.6	−3.3	−1.80	−1.30	+1.89	−0.23	+0.45	−1.29
100	−23.2	−15.0	−1.32	−1.70	+3.04	+1.06	+0.55	+0.01
163	+9.0	+50.8	−1.52	+0.77	+1.59	−0.31	+1.73	+0.04
168	+6.2	+17.6	−2.30	−0.32	+0.31	−1.22	+0.82	−1.49
177	+11.8	−7.8	−2.02	−1.42	+0.95	−0.55	+0.47	−1.00
187	+18.7	+25.8	−2.44	−0.86	−5.64	−6.34	+0.53	−6.66
194	+17.4	−10.0	−0.83	−0.94	−4.50	−5.19	+1.33	−5.95
204	+21.6	−0.6	−2.68	−1.46	+1.52	+0.49	+0.15	+0.09
207	+20.3	−31.2	−2.22	−2.34	−1.79	−2.74	−0.03	−3.55
221	+34.0	+49.4	−4.57	−2.18	−2.51	−3.27	−1.17	−2.96
228	+31.2	+0.5	−3.44	−3.55	+0.69	+0.12	−1.24	−0.29
232	+34.0	−40.0	−0.69	−1.75	+0.70	−0.40	+1.10	−0.94
245	+43.1	+15.8	−3.50	−2.58	+0.90	+1.01	−0.75	+0.69
246	+44.1	+12.4	−3.78	−2.61	−1.80	−2.02	−0.91	−2.19
261	+51.4	−4.0	2.13	2.78	−1.57	+0.61	−0.11	−0.78
272	+56.7	−5.8	−1.63	−2.44	+1.12	+0.81	+0.33	+0.75
—	+2.4	−19.4	−1.03	−1.29	+0.86	−1.27	+1.01	−1.74
—	+36.7	−11.6	−3.05	−3.30	−0.10	−0.92	−0.88	−1.22
67	−31.5	+36.6	−2.99	−1.64	+3.34	+0.70	—	—
68	−33.8	+33.0	−3.33	−1.11	+3.11	+0.69	—	—
82	−31.9	−34.7	−1.47	−2.15	+3.34	+0.48	—	—
92	−28.3	−39.0	−1.35	−2.08	+3.49	+1.32	—	—
211	+29.3	+27.8	−2.41	−0.78	+0.26	−0.64	—	—
216	+25.8	−39.1	−2.12	−2.88	+2.05	+0.96	—	—
222	+33.5	+37.8	−3.21	−1.25	+0.46	+0.10	—	—
231	+33.4	−31.8	−2.16	−3.24	+1.81	+0.84	—	—

Région 275.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = -0.34$; $p_x = +0.0157$; $r_x = +0.0039$;
$k'_x = -0.23$; $p'_x = +0.0136$; $r'_x = +0.0534$.
$k_y = +0.04$; $p_y = +0.0105$; $r_y = -0.0167$;
$k'_y = +0.63$; $p'_y = +0.0107$; $r'_y = -0.0042$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
8	−60.4	+3.8	+0.46	−0.28	−1.22	−2.87	−0.97	−2.30
45	−45.8	−34.5	+2.48	+3.51	+0.88	−0.05	+1.05	−0.09
76	−31.2	−26.8	+0.97	+2.19	−1.60	−2.13	+0.07	−2.14
85	−29.1	+45.5	−0.67	−3.21	+1.14	−0.04	−1.35	+1.06
98	−28.4	−25.4	+1.82	+3.39	+1.98	+1.59	+1.17	+1.55
107	−23.6	+17.8	+1.13	−0.17	−0.37	−0.34	+0.36	−0.07
108	−21.1	+7.4	+0.29	+0.17	−1.58	−1.68	−0.15	−1.43
122	−17.9	+3.1	−1.29	−1.51	+0.92	+0.78	−1.85	+1.03
124	−17.0	−26.3	+1.61	+3.09	−2.28	−2.46	+1.06	−2.49
144	−8.8	−4.8	+0.69	+0.74	−2.15	−1.79	+0.17	−1.78
173	+2.0	+32.4	+0.02	−1.23	−0.59	−1.08	+0.07	−0.13
192	+7.7	−38.1	−0.16	+1.28	−0.96	−1.24	−0.70	−1.09
193	+7.3	−54.5	+1.03	+3.32	−3.38	−4.02	+0.43	−3.86
197	+12.8	+6.6	+0.34	+0,35	−1.08	−0.59	+0.43	−0.30
199	+10.4	−34.7	+0.12	+1.61	+0.64	+0.33	−0.26	+0.56
219	+24.0	+34.8	+0.57	−1.48	−3.23	−3.48	+0.61	−2.40
243	+25.8	−16.9	−0.64	+0.12	+0.16	−0.09	−0.65	+0.46
250	+31.7	−37.9	−0.11	+1.52	−0.18	+0.13	−0.20	+0.24
255	+36.6	+30.8	−1.48	−3.02	−2.30	−2.36	−1.12	−1.29
262	+37.4	−56.3	−1.19	+1.38	−0.37	−0.47	−1.25	−0.29
268	+41.0	+8.8	+1.28	+0.84	−4.14	−3.85	+1.62	−3.14
274	+46.2	+43.0	+0.43	1.77	1.49	1.34	+0.96	0.14
277	+48.0	+7.5	−2.24	−3.45	−2.49	−2.30	−2.21	−1.48
279	+46.5	−13.1	−1.30	−1.00	−5.05	−4.88	−1.13	−4.28
288	+54.9	−13.1	+0.81	+1.48	+0.12	+0.55	+1.29	+1.10
289	+50.6	−14.5	−0.04	−0.09	−1.90	−1.65	−0.02	−1.06
—	+27.3	+13.4	+0.39	−0.91	−2.31	−2.74	+0.24	−1.76
58	−35.6	−26.2	+0.97	+2.63	+0.71	−0.13	—	—
68	−32.4	+19.7	+0.70	−0.34	+0.05	−0.70	—	—
99	−28.8	−28.2	+1.16	+1.96	+0.36	−0.95	—	—
106	−24.8	+30.7	+0.44	−1.48	+0.78	−0.19	—	—
230	+24.9	−23.6	+0.03	+1.49	−0.14	−0.11	—	—
237	+27.5	+26.4	+0.03	−1.30	−0.94	−1.19	—	—
239	+29.8	+22.3	−0.22	−1.27	−1.10	−1.51	—	—
260	+37.6	−33.9	−0.35	+0.83	+0.11	−0.13		

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
Région 276.								
	$E = 1894.96$; $E' = 1914.03$; $T = 19.06$.							
	$k_x = +1.64$; $p_x = +0.0138$; $r_x = -0.0126$;							
	$k'_x = +0.35$; $p'_x = +0.0181$; $r'_x = -0.0107$.							
	$k_y = -0.98$; $p_y = +0.0275$; $r_y = +0.0123$;							
	$k'_y = -0.17$; $p'_y = +0.0302$; $r'_y = -0.0127$.							
8	−53.0	+53.2	+3.81	+4.67	−5.49	−4.45	+3.77	−4.02
11	−50.3	+18.1	+1.65	+3.61	−0.31	+0.88	+2.61	+0.22
16	−53.9	−12.8	−1.18	+0.21	+0.29	+0.69	−0.20	−0.46
30	−41.9	+7.2	+0.14	+1.85	−2.80	−1.25	+1.23	−2.39
38	−35.9	−49.0	−1.28	+0.18	+1.33	+1.13	+0.44	−0.77
46	−27.4	+5.3	−1.47	+0.31	−0.97	−0.18	−0.09	−1.00
48	−28.0	−51.6	−1.13	−0.14	+0.44	+0.43	+0.51	−1.64
51	−20.8	+43.9	−3.41	−1.95	−6.40	−5.68	−2.53	−5.34
73	−14.1	−39.1	−0.20	+1.21	−1.13	−1.08	+1.73	−2.81
115	+14.7	−35.9	−2.86	−0.76	+2.20	+1.74	−0.16	+0.36
125	+21.5	+35.3	−2.03	−1.62	−2.27	−3.06	−0.89	−2.21
137	+29.2	+6.1	−1.45	−0.64	+1.14	+0.07	+0.34	+0.21
139	+25.3	−31.2	−0.87	+0.48	+0.42	−1.01	+1.56	−1.76
163	+53.2	+18.0	−2.53	−2.20	+0.14	−1.80	−0.73	−0.87
177	+62.0	+37.7	−3.94	−3.28	−0.33	−3.02	−2.06	−1.14
178	+61.0	−13.5	−1.99	−1.26	+3.76	+2.00	+0.49	+1.92
21	−49.3	+25.1	−0.37	+1.26	−0.41	−0.25	—	—
39	−33.0	+33.3	−1.52	+0.09	−0.74	−0.10	—	—
42	−34.7	−28.5	−1.87	−0.35	+2.13	+1.86	—	
47	−27.6	−41.3	0.93	+0.10	+1.48	+1.34		
133	+29.6	+25.3	−1.62	−0.93	+0.73	−1.19	—	—
134	+27.7	+26.4	−1.30	−0.18	+1.01	−0.81	—	—
146	+32.7	−44.6	−2.92	−1.71	+2.17	+0.63	—	—
147	+30.6	−48.0	−2.88	−1.19	+2.62	+1.73	—	—
Région 277.								
	$E = 1894.93$; $E' = 1911.90$; $T = 16.97$.							
	$k_x = -0.97$; $p_x = +0.0285$; $r_x = +0.0118$;							
	$k'_x = +1.92$; $p'_x = +0.0179$; $r'_x = -0.0219$.							
	$k_y = -0.29$; $p_y = +0.0173$; $r_y = -0.0106$;							
	$k'_y = -0.10$; $p'_y = +0.0275$; $r'_y = -0.0243$.							
13	−58.8	+30.9	+0.47	−1.53	+0.68	+0.77	−1.58	+0.19
33	−43.7	+39.0	+0.85	−0.96	−0.63	−0.32	−0.79	−0.56
36	−41.0	+17.9	+0.85	−1.51	−1.88	−1.81	−0.89	−2.35
90	−14.3	−32.0	+1.24	−2.74	+1.64	+1.77	−0.45	+0.54
93	−14.1	−39.9	+2.95	−1.32	+0.40	+1.14	+1.16	−0.56
139	+9.7	−32.2	+3.20	−1.31	+0.48	+0.10	+1.81	−0.46
147	+14.6	+42.3	+0.50	−0.58	−0.94	−2.57	+0.56	−0.75
156	+18.4	−0.8	+1.58	−1.02	−2.22	−2.50	+1.18	−2.24
177	+27.5	+10.6	+0.50	−1.92	−0.14	−0.94	+0.35	−0.02
195	+39.7	+27.7	+1.00	−0.40	−2.13	−2.70	+1.55	−1.30
206	+37.0	−33.1	−0.18	−3.91	−0.08	−0.81	−0.55	−0.73
225	+54.5	+53.1	+1.37	+0.18	−1.07	−2.37	+2.25	+0.22
253	+60.9	−52.7	+0.59	−4.36	−0.15	−1.61	+0.27	−1.19
26	−48.0	+34.0	+1.38	−0.70	+0.40	+0.66	—	—
28	−46.5	+28.3	+1.79	−0.45	+0.03	+0.39	—	—
30	−46.8	−37.2	+3.29	−1.85	+1.55	+2.29	—	—
40	−41.6	−32.6	+2.72	−1.59	+1.25	+1.70	—	—
174	+29.7	+31.0	+0.23	−1.27	−0.27	−1.14	—	—
184	+30.7	+28.9	+0.02	−1.99	−0.75	−2.05	—	—
205	+35.7	−28.1	+0.27	−2.93	+0.58	−0.06	—	—
207	+40.0	−39.3	−0.42	−4.11	+0.28	+0.55	—	—
Région 278.								
	$E = 1893.18$; $E' = 1911.15$; $T = 17.97$.							
	$k_x = -1.50$; $p_x = -0.0007$; $r_x = +0.0249$;							
	$k'_x = -2.60$; $p'_x = +0.0229$; $r'_x = -0.0023$.							
	$k_y = -0.96$; $p_y = -0.0034$; $r_y = -0.0069$;							
	$k'_y = +1.19$; $p'_y = -0.0026$; $r'_y = +0.0308$.							
2	64.4	+55.7	+0.67	+0.78	+0.29	−5.38	−0.04	−1.82
21	−51.3	−42.3	+3.83	+4.86	−0.03	−4.51	+1.24	−1.41
26	−45.7	+25.5	+1.15	+2.52	+0.63	−2.85	+0.35	−0.53
27	−48.4	+22.2	+0.37	+1.55	−1.05	−4.62	−0.60	−2.21
29	−49.0	+5.8	+2.23	+2.70	−3.08	−6.52	+0.51	−4.12
30	−48.0	−9.1	+3.04	+4.36	+1.40	−2.75	+1.39	+0.04
47	−38.7	−34.2	+2.91	+4.13	−6.09	−9.96	+0.62	−7.34
51	−36.2	−60.7	+3.59	+4.71	−0.23	−3.42	+0.62	−1.09
60	−30.0	+43.2	+0.02	+1.11	+1.12	−1.63	−0.47	+0.08
73	−24.4	+22.1	+0.99	+1.57	+0.37	−2.31	−0.26	−0.63
76	−23.1	−10.8	+0.44	+1.27	−1.83	−5.23	−1.47	−3.10
84	−18.9	+3.6	−0.03	+1.84	+0.01	−2.41	−1.07	−0.87
98	−14.5	−44.6	+0.98	+2.73	−0.14	−2.04	−1.27	−0.66
99	−13.4	−48.0	+1.41	+3.29	−2.23	−4.80	−0.86	−3.10
100	−5.1	+45.2	−0.07	+1.22	−0.80	−2.73	−0.39	−1.72
101	−9.2	+46.7	−1.17	−0.55	−2.80	−6.14	−1.80	−4.38
112	−0.9	+46.6	+0.26	+1.56	+0.95	−1.22	−0.02	−0.15
144	+10.7	−47.8	+2.43	+3.05	−1.31	−2.89	−0.44	−1.97
156	+16.7	−56.6	+4.08	+5.91	−1.42	−2.39	+1.60	−1.81
159	+21.4	+14.2	+0.39	+1.09	+0.37	−0.50	−0.95	−0.25
165	+21.1	−35.9	+1.55	+2.68	+0.17	−1.25	−0.77	−0.57
169	+20.4	−59.8	+2.75	+3.93	−1.04	−2.90	−0.12	−1.92

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
176	+26.1	−16.4	+1.39	+2.81	−4.80	−6.10	−0.32	−5.59
208	+52.6	+54.0	+1.18	+1.65	0.00	+0.03	+0.69	−0.66
211	+53.1	+27.1	−0.46	+0.67	−0.48	−0.60	−1.26	−1.14
—	+59.8	−27.5	+2.67	+3.15	+1.40	+0.76	+0.25	+0.56
—	+60.5	−52.1	−0.35	+1.87	−6.84	−6.18	−2.48	−6.95
46	−37.7	−34.3	+2.54	+3.75	+1.60	−1.88	—	—
52	−31.0	+36.5	+0.53	+1.56	+1.13	−2.39	—	—
59	−29.5	+47.7	+0.53	+1.72	+1.17	−2.02	—	—
69	−29.3	−35.0	+1.96	+3.34	+0.85	−2.37	—	—
168	+21.6	−42.2	+2.53	+3.31	+0.19	−0.88	—	—
188	+32.0	−43.2	+2.83	+3.59	+0.75	−0.46	—	—
191	+37.9	+37.2	+0.26	+1.80	+1.05	+0.32	—	—
197	+41.5	+37.9	+0.74	+1.65	+0.88	+0.32	—	—

Région 279.

$E = 1896.08$; $E' = 1914.08$; $T = 17.99$.

$k_x = -1.49$; $p_x = +0.0494$; $r_x = +0.0163$;
$k'_x = -0.42$; $p'_x = +0.0562$; $r'_x = +0.0173$.
$k_y = +0.52$; $p_y = +0.0539$; $r_y = +0.0045$;
$k'_y = -0.26$; $p'_y = +0.0536$; $r'_y = +0.0218$.

16	−52.4	−27.3	+4.11	+2.91	−0.76	−0.77	−0.66	−1.41
33	−41.9	−53.3	+4.42	+2.67	+2.01	+0.84	−0.51	−0.76
36	−39.0	+24.6	+2.96	+2.04	−3.00	−3.14	−0.10	−1.10
50	−30.4	−25.3	+2.37	+2.24	−2.50	−1.14	0.68	−2.65
55	−28.3	+29.2	+2.37	+1.88	−3.99	−3.33	+0.17	−1.58
77	−17.8	−29.5	+0.49	+0.35	−0.83	+0.49	−1.97	−1.39
89	−13.7	−51.5	+3.46	+2.44	−0.62	−0.34	+0.40	−2.94
94	−8.0	−17.4	+1.29	+0.43	−0.41	+0.74	−0.81	−0.53
99	−6.8	−53.0	+0.80	−1.22	+0.74	+0.78	−2.41	−1.87
121	+7.6	+46.3	+2.15	+1.08	−2.32	−1.56	+1.84	+0.58
146	+24.5	+41.9	−0.89	−2.40	−5.39	−5.04	−0.60	−3.15
161	+27.0	+25.0	+0.68	−0.20	−1.96	−1.40	+1.13	−0.56
166	+29.3	−29.8	+0.79	−0.61	−0.14	+1.02	+0.18	−1.42
168	+26.2	−32.7	+0.22	−0.04	+1.02	+2.83	−0.03	−0.04
180	+38.3	−6.0	−0.54	−1.92	−3.70	−2.20	−0.26	−3.64
204	+50.0	+41.0	−1.38	−2.16	+3.16	+5.09	+0.60	+5.80
207	+55.0	+21.7	−2.25	−3.93	−2.45	−0.78	−0.77	−1.04
209	+51.9	−23.0	−1.41	−2.68	−0.55	+1.24	−0.64	−1.44
210	+52.2	−32.9	−1.04	−3.50	+0.53	+2.35	−1.02	−0.88
—	−27.4	−46.8	+5.67	+4.14	+0.99	+1.44	+1.72	−0.81
—	+28.0	−38.5	+1.89	+0.09	+0.83	+0.99	+0.86	−1.40
20	−45.1	+33.9	+2.63	+2.16	−2.38	−3.03	—	—
47	−30.0	+34.2	+2.48	+1.67	−2.50	−2.11	—	—
60	−27.9	−36.4	+3.67	+2.21	+1.06	+1.42	—	—
71	−24.7	−37.9	+3.59	+2.93	+1.52	+2.31	—	—
157	+21.9	−30.6	+0.22	−0.58	+0.69	+1.54	—	—
162	+25.8	+22.0	−0.01	−1.25	−1.71	−0.67	—	—
176	+35.4	+22.2	−0.28	−2.06	−1.59	−0.53	—	—
181	+36.6	−18.3	+0.19	−1.08	+1.34	+2.51	—	—

Région 280.

$E = 1896.13$; $E' = 1911.15$; $T = 15.02$.

$k_x = -2.72$; $p_x = +0.0302$; $r_x = +0.0112$;
$k'_x = +0.24$; $p'_x = +0.0326$; $r'_x = -0.0117$.
$k'_y = -0.28$; $p_y = +0.0301$; $r_y = +0.0151$;
$k'_y = +0.54$ $p'_y = +0.0371$; $r'_y = +0.0097$.

34	−33.4	+59.6	+4.42	+2.10	−4.75	−6.07	+0.95	−2.87
41	−31.4	−24.5	+2.59	−0.75	−2.18	−1.70	−1.29	−2.25
67	−24.2	−53.9	+3.49	+0.20	+0.41	+1.07	−0.14	−0.64
70	−15.3	+26.9	+3.14	+0.60	−1.62	−1.79	+0.14	−0.48
95	−0.0	−42.3	+3.06	−0.31	+0.77	0.00	+0.14	−0.90
112	+8.2	+6.9	+3.33	+0.36	−2.10	−2.38	+0.86	−1.97
118	+9.1	−22.8	+0.93	−1.72	−0.18	+0.35	−1.34	−0.67
124	+19.6	+56.9	+2.44	+0.70	−4.44	−6.20	+0.93	−3.52
130	+15.0	−28.9	+3.74	+0.58	−0.80	−0.61	+1.40	−1.73
155	+34.9	−39.5	+4.98	+2.31	−3.32	−3.45	+3.51	−5.01
158	+37.9	+52.6	+1.26	−0.48	−1.57	−3.01	+0.32	−0.86
172	+43.3	−12.7	−1.63	−5.10	−0.75	−2.14	−3.24	−2.27
174	+49.2	+29.3	+0.47	−1.59	+0.53	−0.44	−0.26	+0.55
177	+47.8	−31.1	+0.89	−2.15	+1.22	+0.79	−0.36	−0.50
181	+53.3	−12.5	−0.25	−3.05	+1.85	+1.29	−1.21	+0.62
188	+57.0	−44.9	−1.34	−5.68	−1.24	−2.24	−2.94	−3.82
35	−30.3	+41.8	+2.95	+1.51	−1.86	−2.52	—	—
46	−26.7	+48.0	+3.28	+1.32	−2.05	−3.01	—	—
52	−27.4	−25.6	+3.42	+0.21	+1.71	+1.23	—	—
53	−25.4	−34.5	+4.20	−0.08	+0.76	−0.01	—	—
139	+24.7	−40.1	+2.31	−1.06	+0.83	+0.86	—	—
142	+29.1	+24.2	+1.30	−1.10	+0.29	−1.16	—	—
154	+34.5	−35.5	+2.26	−1.84	+1.99	+0.87	—	—
159	+35.2	+39.1	+1.40	−1.14	+0.23	−1.07	—	—

Région 281.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = -1.96$; $p_x = -0.0033$; $r_x = +0.0022$;
$k'_x = +0.80$; $p'_x = +0.0040$; $r'_x = +0.0097$.
$k_y = -2.40$; $p_y = +0.0102$; $r_y = -0.0218$;
$k'_y = +1.39$; $p'_y = +0.0030$; $r'_y = -0.0215$.

6	−63.7	−3.7	−0.04	−1.84	+2.35	−1.12	−1.56	−1.29
29	−50.2	−60.3	+3.22	+0.81	−0.48	−4.30	+1.06	−4.87

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
31	−46.4	+12.7	+2.37	−0.37	+2.58	−0.90	+0.47	−0.58
36	−49.8	−15.6	+2.57	+0.67	+2.82	−1.22	+0.93	−0.39
40	−47.8	−37.5	+1.86	−0.72	+2.89	−0.66	−0.24	−0.67
47	−40.6	+ 3.8	+3.58	+0.71	+1.56	−1.21	+1.57	−1.18
50	−43.5	−33.0	+1.95	−0.18	+0.89	−2.87	+0.09	−2.66
55	−35.8	+24.4	+2.61	−0.20	+2.46	−1.19	+0.76	−0.48
59	−36.8	+ 0.5	+2.17	−0.14	+0.82	−2.68	+0.42	−2.22
60	−38.6	− 7.6	+1.09	−1.41	+2.49	−0.82	−0.80	−0.55
73	−30.5	+43.9	+1.66	−1.31	−2.03	−5.58	−0.15	−4.68
77	−33.9	−16.2	+2.16	+0.02	+2.38	−1.32	+0.39	−0.82
103	−20.1	−31.5	+2.58	−0.35	−1.84	−5.55	+0.34	−4.84
123	−13.6	+ 6.7	+0.09	−2.64	+0.74	−2.54	−1.82	−1.65
125	−11.1	−36.0	+1.02	−0.97	+1.80	−1.55	−0.77	−0.86
146	+ 3.1	+ 32.3	+3.41	0.25	+ 3.34	0.40	+ 1.19	+ 1.25
151	+ 3.3	+ 7.6	+0.24	−2.99	−3.26	−6.82	−1.91	−5.42
155	+ 1.1	−31.8	+2.07	−0.86	+2.00	−2.36	−0.16	−0.87
199	+ 18.8	20.7	+ 3.56	+ 0.22	+ 1.27	− 2.39	+ 1.19	− 0.79
207	+22.3	+16.8	+2.36	−0.71	−0.80	−4.09	+0.35	−2.36
214	+28.7	+52.5	+2.30	−2.00	−0.64	−4.97	−0.11	−2.33
219	+30.0	+17.6	+4.60	+1.20	−2.42	−6.00	+2.43	−3.95
225	+31.8	+33.2	+2.35	−1.36	+0.72	−3.24	+0.12	−0.86
264	+51.3	+59.7	+4.04	−0.59	−2.28	−6.65	+1.52	−3.47
273	+56.0	+48.1	+4.73	+1.32	+0.86	−3.20	+2.75	−0.15
275	+58.6	+31.9	+2.31	−2.08	+0.09	−3.92	−0.25	−0.93
—	−14.7	−40.9	+0.60	−1.30	+2.36	−1.12	−1.18	−0.47
—	+38.1	+ 7.8	+5.23	+1.82	+0.11	−3.79	+3.01	−1.48
42	−41.3	+30.9	+1.77	−1.28	+2.98	−1.12	—	—
52	−37.4	+35.9	+1.41	−1.02	+2.72	−0.16	—	—
66	−38.2	−29.9	+2.20	−0.13	+3.61	−0.33	—	—
102	−22.9	−28.7	+1.99	−0.31	+3.24	−0.99	—	—
224	+32.5	+36.5	+1.78	−1.12	+1.34	−2.35	—	—
233	+38.9	+30.2	+2.58	−1.06	+1.35	−2.19	—	—
240	+36.9	−30.8	+1.64	−0.99	+1.83	−2.32	—	—
246	+42.2	−32.2	+2.35	−0.68	+1.75	−1.96	—	—

Région 282.

$E = 1894.96$; $E' = 1913.01$; $T = 18.05$.

$k_x = -1.39$; $p_x = +0.0085$; $r_x = +0.0129$;
$k'_x = -0.06$; $p'_x = +0.0116$; $r'_x = -0.0065$.
$k_y = +1.10$; $p_y = +0.0011$; $r_y = -0.0031$;
$k'_y = -0.75$; $p'_y = +0.0011$; $r'_y = +0.0026$.

2	−63.7	+43.3	+2.50	+0.89	−1.20	−0.13	+0.46	−0.45
4	−62.9	+ 7.7	−2.19	−3.14	−2.39	−0.62	−3.99	−1.33
5	−60.9	−14.4	+2.90	+0.53	−2.63	−1.91	+0.32	−2.13
16	−56.6	−13.1	+2.74	+1.06	−1.24	−0.28	+0.56	−0.61
53	−34.8	−45.7	+1.86	+0.20	−1.11	+0.51	−0.19	−0.18
58	−26.6	+30.3	+2.15	+1.70	−2.92	−1.30	+1.02	−1.91
60	−29.7	+27.4	+1.88	+1.33	−1.49	+0.26	+0.67	−0.41
76	−17.2	+54.0	−0.25	−0.37	−5.10	−3.45	−1.03	−4.04
111	− 3.9	+36.8	+0.30	−0.70	−3.60	−2.04	−0.85	−2.60
112	− 3.7	+26.9	+0.85	−0.04	−3.13	−1.47	−0.26	−2.09
116	− 3.1	− 6.5	+2.46	+1.46	−2.01	−0.71	+1.18	−1.19
119	− 3.0	−33.4	+1.86	+0.23	−0.64	+0.96	+0.18	+0.29
156	+12.8	−41.0	+1.43	−0.81	−0.44	+0.98	−0.42	+0.40
178	+ 16.6	+ 3.9	+ 0.75	0.35	−3.27	− 1.67	− 0.35	2.29
204	+24.6	+58.9	−0.39	−0.83	−2.87	−0.05	−0.89	−1.21
218	+25.1	+ 7.9	+1.96	+0.74	−0.98	+0.60	+0.90	0.00
255	+41.6	− 5.9	+0.76	−0.78	−5.48	−2.87	−0.34	−4.00
257	+45.0	−15.9	+1.23	−0.10	−1.73	+0.49	+0.23	−0.45
265	+47.9	− 8.9	+1.28	−0.51	−1.56	+0.33	+0.12	−0.43
274	+ 54.2	−18.3	0.49	2.53	+ 1.59	+ 3.31	− 1.75	+ 2.62
275	+51.8	−26.4	+1.09	−0.50	−0.89	+0.87	+0.00	+0.15
280	+51.2	−60.6	+3.79	+0.98	−3.75	−1.83	+1.98	−2.67
	−28.0	+21.6	+2.79	+ 1.27	−3.48	−1.94	+1.09	− 2.52
—	+58.1	+43.8	−1.20	−0.64	−3.56	−1.29	−0.92	−2.18
—	+62.2	+30.9	+0.94	+0.49	−5.26	−2.34	+0.71	−3.58
42	−36.1	+25.5	+1.79	+0.81	−1.72	−0.16	—	—
52	−30.3	−39.9	+1.64	−0.21	−0.98	+0.88	—	—
59	−27.7	+30.5	+1.13	+0.51	−1.00	+0.84	—	—
74	−20.2	−34.9	+2.22	+0.33	−0.31	+1.17	—	—
215	+28.8	+31.5	+0.59	−0.08	−0.44	+1.43	—	—
228	+32.6	+31.3	+0.54	−0.21	−1.36	+0.77	—	—
235	+31.4	−37.5	+1.98	−0.51	−1.11	+0.97	—	—
246	+36.4	−30.5	+1.42	−0.50	−1.88	+0.19	—	—

Région 283.

$E = 1896.25$; $E' = 1911.21$; $T = 14.96$.

$k_x = +0.78$; $p_x = +0.0309$; $r_x = +0.0129$;
$k'_x = +0.25$; $p'_x = +0.0251$; $r'_x = +0.0044$.
$k_y = +0.07$; $p_y = +0.0365$; $r_y = +0.0210$;
$k'_y = -0.30$; $p'_y = +0.0297$; $r'_y = -0.0045$.

13	−53.8	+18.3	+1.87	+1.75	−2.30	−1.41	+0.98	−0.91
19	−47.0	−13.4	+1.97	+2.47	−0.41	+0.98	+1.30	+0.11
22	−44.4	+37.8	+0.52	+0.83	−3.71	−2.98	+0.28	−1.84
29	−38.6	+31.5	+2.44	+2.98	−3.46	−2.90	+2.42	−1.93
36	−30.1	−18.0	−0.19	−0.55	−2.18	−1.95	−0.84	−2.53
46	−27.9	−35.0	+1.01	+1.41	−0.22	+1.01	+0.64	−0.65
56	−18.8	+20.6	+4.06	+5.21	−6.53	−6.00	+4.80	−5.58
68	− 5.9	+28.8	+0.20	+1.06	−1.85	−1.75	+1.23	−0.92
75	− 0.0	+47.4	−1.54	+0.11	−2.07	−0.89	+0.21	−0.02
79	− 4.6	−19.3	+0.25	+1.04	+4.08	+4.62	+0.86	+3.64
86	+ 3.1	+14.9	−1.10	−1.04	−4.57	−4.39	−0.34	−4.11
99	+ 8.9	+23.4	−0.69	+0.31	−1.92	−1.84	+0.77	−1.30

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
119	+23.7	7.6	1.08	0.59	1.78	1.57	+ 0.27	2.24
120	+24.7	−61.2	−0.69	−0.02	+1.13	+2.27	+0.31	−0.64
129	+27.6	−18.8	−0.12	−0.27	−0.31	−0.61	+0.93	−1.43
136	+33.6	− 5.9	−0.95	−1.22	+0.83	+0.13	+0.31	−0.06
144	+36.8	−14.1	+1.37	+0.85	+0.72	−0.08	+2.53	−0.56
147	+43.2	+10.9	−0.87	−0.11	−1.46	−1.60	+1.32	−1.64
153	+47.9	−11.3	−1.08	−0.55	+2.27	+1.61	+0.94	+1.06
154	+49.3	−34.6	−1.87	−2.21	+2.24	+1.52	−0.44	+0.21
155	+53.3	+46.8	−6.36	−4.61	−2.63	−3.05	−3.07	−1.84
159	+50.8	−12.4	−0.76	−0.64	−0.21	−1.12	+1.13	−1.61
160	+53.4	−20.7	+0.86	+1.04	+0.69	+0.37	+2.78	−0.71
164	+57.8	−34.9	−2.08	−1.07	+0.32	+0.48	+0.26	−1.34
—	+ 0.0	−38.7	+0.19	+1.03	−0.38	−0.38	+0.79	−1.77
—	+37.0	−47.2	+1.49	+0.64	+1.00	+0.39	+2.20	−1.28
16	−45.5	+45.1	+0.77	+0.56	−2.39	−0.17	—	—
17	−49.0	+38.0	+0.37	+1.52	−2.59	−0.59	—	—
20	−45.1	−38.6	+0.96	+1.17	+0.02	+1.19	—	—
26	−42.9	−38.8	+0.36	+0.30	+0.65	+1.44	—	—
122	+29.4	+40.8	−2.68	−1.50	−1.51	−1.43	—	—
131	+ 30.2	+ 31.2	− 2.49	− 1.39	− 0.17	1.04	—	—
141	+30.3	−43.3	−1.03	−0.10	+2.00	+2.14	—	—
145	+36.0	−34.8	−0.73	−1.14	+2.28	+1.15	—	—

Région 284.

$E = 1896.25$; $E' = 1913.23$; $T = 16.98$.

$k_x = -0.29$; $p_x = +0.0317$; $r_x = +0.0088$;
$k'_x = +1.00$; $p'_x = +0.0380$; $r'_x = -0.0118$.
$k_y = +0.39$; $p_y = +0.0437$; $r_y = +0.0093$;
$k'_y = +0.27$; $p'_y = +0.0445$; $r'_y = -0.0051$.

2	−63.4	+28.2	+3.15	+1.82	−2.97	−2.02	+0.59	−0.79
12	−47.8	+53.1	+4.22	+2.67	−2.25	−1.89	+2.05	+0.70
26	−44.9	−52.9	+4.16	+2.33	−0.89	+0.06	+2.11	−2.32
27	−38.5	+52.4	+2.09	+0.44	−3.47	−3.28	+0.20	−0.65
33	−34.4	+ 4.5	+1.75	+0.36	−1.50	−0.79	+0.20	−0.54
34	−32.7	− 3.1	+2.70	+0.73	−1.68	−0.72	+0.93	−0.93
55	−15.8	+34.4	+1.77	+0.55	−3.05	−2.20	+0.91	−0.74
71	−14.5	− 7.7	+1.49	+0.43	−2.95	−2.47	+0.82	−2.69
84	− 3.1	+13.0	+0.92	+0.29	−2.14	−1.54	+0.83	−0.93
87	− 3.5	−31.2	+1.30	−0.29	+1.81	+1.95	+0.79	+0.85
99	+11.5	+ 7.2	−0.35	−1.50	−1.77	−1.38	−0.18	−0.95
105	+17.3	+14.6	+0.66	−0.98	+0.14	+0.04	+0.78	+1.02
107	+15.8	− 5.4	+0.13	−1.28	−0.52	−0.30	+0.33	−0.35
111	+16.7	−43.1	+2.20	+0.06	−0.16	+0.09	+2.13	−1.64
122	+27.0	−10.2	−0.36	−2.31	−2.75	−2.77	−0.02	−2.93
135	+43.2	−15.5	−1.49	−3.02	−1.91	−2.73	−0.37	−2.76
139	+45.7	+37.3	−1.99	−3.28	−1.79	−3.20	−0.74	−0.61
144	+56.3	+34.4	−4.02	−4.59	−2.81	−3.48	−2.04	−1.41

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
18	−45.9	−30.3	+ 2.02	+ 0.22	+ 0.88	+ 1.18	—	—
19	−47.0	−33.7	+1.71	+0.62	−0.25	+1.00	—	—
21	−44.9	+43.0	+1.04	+0.80	−1.62	−1.00	—	—
28	−37.9	+38.2	+1.83	+1.22	−2.95	−2.11	—	—
124	+33.6	+40.5	−1.47	−1.88	−1.79	−2.73	—	—
127	+30.4	−26.0	−0.14	−3.08	+1.93	+1.28	—	—
130	+39.9	−40.4	−0.54	−2.46	+1.37	+1.39	—	—
133	+42.4	+32.7	−1.37	−2.07	−2.00	−2.06	—	—

Région 285.

$E = 1893.18$; $E' = 1913.15$; $T = 19.97$.

$k_x = -1.78$; $p_x = +0.0066$; $r_x = -0.0037$;
$k'_x = -0.40$; $p'_x = +0.0246$; $r'_x = -0.0027$.
$k_y = -2.17$; $p_y = +0.0203$; $r_y = +0.0206$;
$k'_y = +0.30$; $p'_y = +0.0206$; $r'_y = +0.0060$.

7	−59.1	+54.2	+3.13	+1.33	−0.97	−3.49	+0.04	−1.27
11	−59.4	+27.3	+3.00	+1.14	−0.50	−2.41	−0.03	−1.04
27	−54.2	−52.0	+0.89	+0.63	−1.77	−4.04	−1.01	−4.18
48	−43.7	+19.5	+2.17	+0.55	+1.22	−0.94	−0.47	+0.18
91	−35.1	−43.1	+2.31	+1.06	−0.73	−2.76	+0.19	−3.09
112	−28.3	− 7.5	+1.34	+0.13	−0.70	−2.72	−0.77	−2.42
115	−25.4	−26.9	+1.68	+0.97	+0.84	−1.37	−0.07	−1.41
117	−27.4	−42.4	+4.17	+2.93	−2.29	−4.85	+2.17	−5.01
141	−14.4	+54.2	+0.44	−1.15	−4.53	−6.90	−1.84	−5.34
142	−11.2	+44.1	+0.76	−0.35	−0.42	−2.78	−1.20	−1.48
148	− 8.1	+51.1	+1.71	+0.07	−0.45	−3.40	−0.49	−1.70
154	− 5.5	− 0.6	+2.91	+1.52	−1.97	−4.44	+1.03	−4.08
165	− 2.0	+41.6	−1.71	−2.41	+3.21	+1.42	−3.31	+2.25
166	− 4.5	+33.5	+0.64	+0.32	+0.90	−1.68	−0.78	−0.58
171	− 1.0	−12.3	+3.92	+3.17	+0.39	−2.10	+2.48	−2.02
183	+ 1.3	−28.6	+0.32	−0.35	+0.96	−1.35	−0.99	−1.73
211	+17.6	−28.3	+1.30	+0.12	+1.25	−1.38	−0.01	−1.81
218	+24.8	+ 1.1	+3.33	+2.52	−0.25	−2.83	+2.22	−2.78
251	+42.8	−34.4	−0.24	−1.70	+1.07	−1.92	−1.28	−2.63
252	+40.7	−45.7	−0.86	−1.69	+0.70	−2.45	−1.58	−3.28
253	+45.2	+41.3	+2.75	+1.51	+0.45	−2.67	+1.61	−1.80
264	+51.2	−16.8	−1.62	−3.17	+1.70	−2.06	−2.63	−2.14
266	+51.9	−46.7	+3.82	+2.91	−11.21	−15.11	+3.23	−15.74
—	−54.1	−27.4	+2.20	+1.44	+4.11	+1.84	−0.03	+2.19
—	−19.4	−52.3	+3.93	+3.32	−0.37	−2.65	+2.39	−3.25
—	+10.8	−59.5	+2.43	+1.87	+1.64	−1.23	+1.41	−2.09
94	−30.8	+34.3	+1.86	+0.96	+1.09	−0.94	—	—
96	−32.9	+27.4	+2.01	+1.40	+0.70	−1.22	—	—
101	−32.1	−27.6	+2.06	+1.00	+2.08	−0.19	—	—
116	−26.1	−35.4	+2.01	+1.25	+2.31	+0.44	—	—
224	+28.2	+27.7	+1.83	−0.15	+2.54	−0.65	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
229	+29.0	−34.7	+1.01	−0.70	+3.75	+0.45	—	—
230	+26.7	−33.0	+1.59	−0.23	+3.13	+0.76	—	—
239	+38.9	+34.7	+1.87	−0.35	+1.89	−0.93	—	—

Région 286.

$E = 1896.08$; $E' = 1914.08$; $T = 17.99$.

$k_x = +0.92$; $p_x = +0.0532$; $r_x = +0.0261$;
$k'_x = +1.84$; $p'_x = +0.0516$; $r'_x = -0.0146$.
$k_y = -0.03$; $p_y = +0.0579$; $r_y = +0.0020$;
$k'_y = -1.03$; $p'_y = +0.0482$; $r'_y = +0.0372$.

4	−58.8	+41.2	+1.83	+1.33	+1.66	−0.18	+0.12	+3.55
7	−58.9	−32.7	+2.77	+0.35	+0.09	−1.70	−0.33	−1.91
14	−54.5	+21.8	+0.64	+0.70	−3.57	−4.50	−0.68	−2.34
32	−39.0	−56.0	+1.47	−1.68	+0.09	−0.05	−1.08	−2.71
34	−30.3	+52.5	−1.24	0.07	5.32	5.77	0.56	−2.70
36	−30.1	−1.2	+0.51	−1.05	−1.15	−1.28	−0.47	−1.22
42	−26.6	+41.2	−0.35	+0.28	−3.43	−4.09	+0.19	−1.58
47	−20.4	+54.1	−1.36	−0.21	−2.90	−3.83	−0.16	−0.62
63	−17.4	+45.8	+1.64	+2.93	−3.35	−2.90	+3.01	−0.88
68	−17.7	+12.7	+0.89	+0.96	−1.86	−0.99	+1.45	−0.93
84	−6.2	+48.4	−0.43	+0.62	−1.42	−1.04	+1.42	+0.92
86	−5.1	+25.1	−1.50	−0.59	−1.43	−0.05	+0.21	+0.16
91	−3.3	+47.2	−1.98	−0.48	−4.45	−4.24	+0.24	−2.30
92	−0.8	+38.9	+1.57	+2.30	−2.87	−2.24	+3.50	−1.01
101	+3.3	+24.7	−1.81	−1.62	−2.84	−1.38	−0.02	−1.39
102	+3.1	−16.7	−2.17	−3.44	−2.23	−1.05	−1.36	−3.12
112	+9.4	−28.8	0.63	1.86	0.18	−1.77	+0.46	1.45
140	+33.4	+62.3	−3.51	2.19	−4.61	3.95	+0.63	2.16
142	+30.9	+30.5	2.34	−2.83	2.63	0.99	+0.58	1.32
155	+40.2	−49.7	−3.63	−7.59	+0.11	+2.49	−2.41	−2.66
158	+45.5	+39.8	−3.67	−3.00	−2.39	−0.33	+0.66	−0.67
162	+49.8	−28.5	−1.88	−4.01	+0.37	+2.57	+0.88	−1.54
176	+58.7	+0.9	−4.59	−5.98	−1.56	+1.62	−0.82	−1.60
—	−3.7	+25.9	−1.07	−0.93	−0.36	+0.64	+0.33	+1.06
—	−58.9	−22.8	+0.77	−1.56	−1.08	−2.84	−2.23	−2.54
—	−30.4	−52.2	+4.54	+1.09	+3.45	+3.34	+2.30	+0.69
—	+7.1	−29.7	+0.11	−2.20	−3.76	−2.28	+0.53	−5.26

23	−42.8	+30.5	+0.21	+0.36	−2.05	−1.55	-	—
24	−41.6	+18.3	+0.68	+0.46	−0.70	−1.48	—	—
31	−39.8	−42.3	+2.36	−0.22	+2.22	+1.27	—	—
39	−34.5	−42.2	+2.46	−0.30	+2.41	+1.69	—	—
128	+24.4	+23.0	−2.65	−2.59	−1.79	+0.43	—	—
147	+37.7	+23.2	−3.20	−3.06	−0.88	+1.31	—	—
153	+40.2	−31.2	−1.75	−4.19	+1.88	+4.12	—	—
154	+40.7	41.4	−3.00	−5.29	+2.73	+4.85	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
4	−56.2	+29.5	−2.55	−0.12	+0.27	−2.41	−1.69	+0.53
7	−59.6	−30.8	+0.61	+0.81	+0.71	−1.47	−0.33	−0.45
10	−53.4	−12.4	−0.89	+0.33	+1.63	−0.32	−0.82	+0.93
12	−50.8	−44.9	+0.66	+0.49	−1.53	−2.83	−0.48	−2.94
20	−44.9	−36.5	+1.07	+1.90	+0.35	−1.63	+0.75	−1.32
25	−36.1	+17.2	−0.05	+2.16	−0.89	−3.50	+1.54	−1.54
34	−25.3	+49.9	−3.60	−0.16	−2.59	−5.84	−0.50	−2.92
59	−12.4	−7.6	−0.44	+0.88	+1.37	−1.58	+0.92	−0.89
61	−10.8	−49.6	+0.90	+0.57	+2.46	−0.90	+0.72	−0.79
63	−9.2	+44.4	−4.03	+0.01	−2.14	−5.30	−0.27	−3.06
75	0.1	13.8	−2.62	1.62	+2.62	−0.51	−1.18	−0.28
84	+9.4	−2.3	−2.79	−0.68	+0.61	−2.47	−0.32	−2.20
97	+20.7	+32.3	−3.48	−0.63	+1.61	−2.29	+0.30	−0.93
110	+30.8	+57.4	−5.43	−2.18	−2.99	−7.21	−0.70	−5.24
111	+31.9	+46.5	−4.32	−1.64	−0.10	−4.31	−0.05	−2.69
114	+31.6	+26.1	−3.00	−1.66	+2.16	−1.95	+0.22	−0.98
120	+33.1	−57.9	−0.77	−1.88	+5.90	+1.03	−0.26	−0.16
137	+56.8	+13.9	−5.18	−3.20	+2.21	−1.94	−1.15	−2.06
140	+60.3	+7.9	−5.04	−3.76	+2.56	−1.47	−1.37	−2.43
—	−36.5	+55.0	−2.86	+1.64	−1.55	−4.10	+0.56	−1.05

21	38.2	+46.9	−2.74	+0.48	−0.47	−2.96	-	—
27	−38.7	−46.0	+0.46	+0.22	+2.20	−0.54	—	—
35	26.5	+35.9	−2.55	+0.59	+0.72	−2.21	-	—
39	−27.9	−48.9	+1.23	+0.60	+3.18	+0.48	-	—
104	+22.1	−39.2	−1.09	−0.79	+4.74	+1.05	—	—
105	+25.8	+33.3	−3.38	−1.22	+2.86	−0.91	—	—
109	+26.9	−44.6	−1.19	−1.47	+4.37	+1.51	—	—
113	+31.0	+27.1	−3.85	−1.62	+2.77	−1.29	—	—

Région 287.

$E = 1896.25$; $E' = 1911.21$; $T = 14.96$.

$k_x = +1.88$; $p_x = +0.0267$; $r_x = +0.0363$;
$k'_x = +0.50$; $p'_x = +0.0295$; $r'_x = +0.0001$.
$k_y = -2.54$; $p_y = +0.0279$; $r_y = +0.0371$;
$k'_y = +0.68$; $p'_y = +0.0313$; $r'_y = +0.0221$.

4	−56.2	+29.5	−2.55	−0.12	+0.27	−2.41	−1.69	+0.53
7	−59.6	−30.8	+0.61	+0.81	+0.71	−1.47	−0.33	−0.45
10	−53.4	−12.4	−0.89	+0.33	+1.63	−0.32	−0.82	+0.93
12	−50.8	−44.9	+0.66	+0.49	−1.53	−2.83	−0.48	−2.94
20	−44.9	−36.5	+1.07	+1.90	+0.35	−1.63	+0.75	−1.32
25	−36.1	+17.2	−0.05	+2.16	−0.89	−3.50	+1.54	−1.54
34	−25.3	+49.9	−3.60	−0.16	−2.59	−5.84	−0.50	−2.92
59	−12.4	−7.6	−0.44	+0.88	+1.37	−1.58	+0.92	−0.89
61	−10.8	−49.6	+0.90	+0.57	+2.46	−0.90	+0.72	−0.79
63	−9.2	+44.4	−4.03	+0.01	−2.14	−5.30	−0.27	−3.06
75	0.1	13.8	−2.62	1.62	+2.62	−0.51	−1.18	−0.28
84	+9.4	−2.3	−2.79	−0.68	+0.61	−2.47	−0.32	−2.20
97	+20.7	+32.3	−3.48	−0.63	+1.61	−2.29	+0.30	−0.93
110	+30.8	+57.4	−5.43	−2.18	−2.99	−7.21	−0.70	−5.24
111	+31.9	+46.5	−4.32	−1.64	−0.10	−4.31	−0.05	−2.69
114	+31.6	+26.1	−3.00	−1.66	+2.16	−1.95	+0.22	−0.98
120	+33.1	−57.9	−0.77	−1.88	+5.90	+1.03	−0.26	−0.16
137	+56.8	+13.9	−5.18	−3.20	+2.21	−1.94	−1.15	−2.06
140	+60.3	+7.9	−5.04	−3.76	+2.56	−1.47	−1.37	−2.43
—	−36.5	+55.0	−2.86	+1.64	−1.55	−4.10	+0.56	−1.05

21	38.2	+46.9	−2.74	+0.48	−0.47	−2.96	-	—
27	−38.7	−46.0	+0.46	+0.22	+2.20	−0.54	—	—
35	26.5	+35.9	−2.55	+0.59	+0.72	−2.21	-	—
39	−27.9	−48.9	+1.23	+0.60	+3.18	+0.48	-	—
104	+22.1	−39.2	−1.09	−0.79	+4.74	+1.05	—	—
105	+25.8	+33.3	−3.38	−1.22	+2.86	−0.91	—	—
109	+26.9	−44.6	−1.19	−1.47	+4.37	+1.51	—	—
113	+31.0	+27.1	−3.85	−1.62	+2.77	−1.29	—	—

Région 288.

$E = 1896.16$; $E' = 1911.17$; $T = 15.01$.

$k_x = +0.14$; $p_x = +0.0273$; $r_x = +0.0066$;
$k'_x = +1.80$; $p'_x = +0.0351$; $r'_x = -0.0262$.
$k_y = +0.14$; $p_y = +0.0255$; $r_y = +0.0011$;
$k'_y = -0.72$; $p'_y = +0.0257$; $r'_y = -0.0059$.

1	−62.1	+59.9	+1.22	−0.05	−3.87	−4.50	−0.97	−3.09
12	55.6	+31.8	−0.85	−2.27	1.11	−0.70	−2.63	−0.51

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
29	−46.7	+ 0.8	+1.13	−1.60	−1.09	+0.24	−0.72	−0.81
44	−44.7	−60.6	−0.21	−2.24	+2.21	+3.36	−1.05	+0.83
45	−45.0	−60.9	+0.73	−0.92	+4.08	+5.38	+0.07	+2.77
47	−39.4	+31.8	+0.16	−0.76	−0.98	−0.18	−0.87	−0.15
51	−37.0	− 6.1	−0.59	−2.35	+1.25	+1.75	−1.59	+0.96
53	−37.4	−28.7	+0.38	−1.85	+0.20	+1.53	−0.65	−0.25
54	−31.7	+61.1	+2.15	+1.55	−3.36	−3.45	+1.22	−2.21
60	−30.9	−13.0	+0.89	−1.42	−1.44	−0.68	−0.18	−1.75
62	−31.9	−38.8	+1.44	−1.45	+1.65	+2.35	+0.35	+0.64
68	−26.2	−29.3	+0.90	−1.62	+1.05	+1.12	+0.08	−0.01
93	−16.6	+14.1	−0.63	−1.77	−1.79	−0.90	−0.88	−1.31
103	−14.3	+25.3	+0.21	−0.87	−1.45	0.96	0.05	0.87
114	− 5.7	+42.8	−0.74	−1.59	−2.02	−1.27	−0.74	−0.85
116	− 5.3	+13.5	+3.39	+2.26	−11.18	−9.92	+3.50	−10.50
117	− 5.4	+12.9	+3.27	+2.43	−11.18	−10.77	+3.52	−10.94
134	− 3.4	−30.2	+0.84	−1.69	+0.45	+0.86	+0.73	−0.42
149	+ 8.0	+40.1	−0.84	−1.77	−0.60	+0.86	−0.48	+0.88
160	+12.6	+10.2	−0.20	−1.77	−1.45	−0.39	+0.27	−0.92
200	+32.1	+34.6	−0.19	−1.50	−0.70	−0.43	+0.79	+0.10
215	+42.4	+ 5.9	−0.28	−2.39	−0.83	−0.12	+0.90	−0.51
218	+40.3	−27.0	−1.46	−4.43	−0.25	+0.02	−0.45	−0.99
222	+48.7	+ 9.8	−1.93	−3.48	−2.68	−1.73	−0.31	−2.12
225	+49.4	−15.0	+0.01	−2.38	+1.17	+1.34	+1.47	+0.70
231	+50.8	+48.2	−1.33	−2.12	−0.77	−0.66	+0.36	+0.35
236	+54.5	− 1.1	−1.22	−3.46	0.00	+0.82	+0.34	+0.22
—	+24.7	− 8.3	+1.14	−1.53	−0.98	−0.23	+1.63	−1.04
—	+60.4	−44.9	−4.12	−5.89	+0.57	+1.45	−1.71	−0.28
55	−31.3	+41.8	+0.35	−0.20	−0.75	+0.43	—	—
65	−25.7	+36.2	+0.19	+0.73	−1.88	−0.96	—	—
69	−26.7	−34.7	+0.85	−1.85	+1.02	+1.86	—	—
87	−21.8	−28.1	+0.83	−1.79	+0.52	+1.77	—	—
191	+29.6	+29.0	−1.12	−2.35	−0.19	+0.50	—	—
196	+29.2	−29.4	−0.77	−3.27	−0.74	+1.20	—	—
201	+31.6	+24.9	0.97	−2.09	1.12	0.51	—	—
206	+31.9	−33.9	−0.98	−4.05	+0.37	+1.20	—	—

Région 289.

$E = 1896.13$; $E' = 1912.15$; $T = 16.01$.

$k_x = -0.13$; $p_x = +0.0421$; $r_x = -0.0114$;
$k'_x = +4.37$; $p'_x = +0.0295$. $r'_x = -0.0780$.
$k_y = +0.87$; $p_y = +0.0249$; $r_y = +0.0288$;
$k'_y = -1.26$; $p'_y = +0.0354$; $r'_y = +0.0276$.

1	−64.2	− 8.6	+2.84	−2.38	−2.77	−0.15	+0.44	−0.10
3	−62.4	−60.4	+2.25	−6.31	−5.74	−2.43	+0.55	−4.34
9	−58.2	−18.1	−0.61	−5.90	−0.35	+3.06	−2.41	+2.26
17	−46.3	+31.7	+2.10	−0.46	−4.08	−1.77	−0.13	−0.86
32	−32.0	−59.1	+3.22	−5.06	−3.75	−0.93	+2.69	−3.41
44	−15.9	+10.3	−1.92	−5.56	−4.51	−1.41	−2.65	−2.39
51	−11.0	−19.3	+1.71	−3.98	−1.90	+0.25	+1.46	−1.29
56	− 6.0	+31.4	+2.15	−0.81	−2.94	−0.80	+1.17	−0.95
69	+ 3.4	+60.7	+0.24	+0.12	−3.43	−1.39	−0.29	−0.87
80	+ 9.6	− 9.8	+1.26	−3.62	−2.10	+0.78	+1.71	−1.42
89	+15.6	+35.2	−1.56	−3.63	−4.38	−2.35	−1.49	−2.93
108	+32.5	+ 0.3	−0.53	−4.64	−2.20	−0.55	+0.69	−2.48
109	+33.4	−45.7	−2.35	−9.47	+0.77	+2.27	−0.55	−0.99
112	+38.2	+13.8	−2.64	−5.95	−1.16	+1.09	−1.42	−0.89
122	+43.9	−35.2	−0.45	−6.98	+2.29	+4.07	+1.55	+0.68
140	+63.1	+25.9	−1.05	−4.31	+0.05	+1.24	+0.54	−0.55
143	+61.7	12.9	1.08	− 6.31	+ 0.58	+ 1.90	+ 1.21	− 1.08
24	−40.0	−37.2	+0.65	−6.80	−0.95	+1.17	—	—
33	−27.7	+46.3	+1.72	−0.69	−3.09	−1.30	—	—
34	−26.0	+42.7	+2.20	+0.69	−2.39	−1.10	—	—
36	−28.3	−32.5	+1.29	−5.48	−1.03	+2.22	—	—
101	+29.4	+21.5	−0.99	−3.27	−0.93	+0.87	—	—
106	+32.5	+23.4	−1.24	−3.91	−0.15	+2.06	—	—
116	+38.5	−24.0	−1.84	−7.50	+0.67	+2.66	—	—
120	+43.0	−24.7	−1.50	−7.32	+1.17	+3.55	—	—

Région 290.

$E = 1896.21$; $E' = 1913.18$; $T = 16.97$.

$k_x = +0.62$; $p_x = +0.0419$; $r_x = +0.0116$;
$k'_x = -1.19$; $p'_x = +0.0419$; $r'_x = +0.0020$.
$k_y = -0.50$; $p_y = +0.0431$; $r_y = -0.0209$;
$k'_y = +0.40$; $p'_y = +0.0436$; $r'_y = -0.0141$.

1	−65.0	+11.2	+3.21	+4.18	+0.60	−1.14	+0.76	−0.97
5	61.0	11.1	+ 2.00	+3.60	+ 3.74	+ 2.40	0.22	+1.47
6	−60.3	−34.4	+1.41	+2.77	+2.70	+2.07	−0.96	−0.21
9	−58.1	−12.3	+3.11	+4.11	+0.50	−0.35	+0.91	−1.52
10	−55.8	−20.7	+4.69	+6.24	+1.27	+1.03	+2.70	−0.77
13	−51.8	−34.9	+2.23	+2.79	+1.17	+0.59	−0.18	−1.58
17	−44.2	+58.1	+1.34	+3.19	−1.96	−4.88	+0.52	−1.72
42	−21.2	+ 2.2	−0.33	+2.57	−0.59	−0.52	−0.04	−0.88
44	−24.1	−29.5	+1.20	+2.90	+0.59	+0.23	+0.55	−1.34
62	− 9.5	−20.4	+0.41	+2.51	−0.42	−0.05	+0.63	−1.33
75	+ 3.2	−59.5	−0.28	+0.00	+0.51	−1.06	−0.70	−2.84
78	+ 7.9	− 9.5	+0.12	+1.87	+1.09	+0.98	+0.97	+0.71
88	+19.7	+56.2	−4.11	−1.61	−4.81	−6.40	−1.93	−2.87
92	+24.3	+13.2	−2.03	−0.02	−3.24	−3.61	−0.20	−2.47
94	+21.0	−14.8	+0.62	+2.13	+0.07	−0.56	+1.87	−0.57
105	+34.0	−52.7	−2.17	−1.25	+2.11	+1.52	−0.93	+0.07
109	+36.5	+18.4	−2.36	−0.14	−0.49	−1.68	+0.12	+0.29
113	+41.6	+53.1	−3.56	−0.97	−2.11	−3.24	−0.44	+0.31
114	+44.3	−12.2	−2.42	−1.07	−0.72	−1.29	−0.25	−0.81
121	+51.3	+35.8	−2.26	−1.26	−2.01	−3.30	+0.35	−0.26

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
123	+52.2	+ 4.8	−2.15	−1.14	−1.80	−2.33	+0.29	−0.99
124	+58.5	+57.4	−2.11	+0.76	−4.80	−5.20	+1.88	−1.54
129	+62.7	−35.9	−3.33	2.35	−3.27	−5.56	−0.25	−1.81
130	+61.9	+11.5	−4.28	−2.68	−1.61	−2.02	−1.10	−0.28
-	-53.8	+46.8	0.04	+2.55	−0.43	-1.51	0.96	+0.07
18	−43.1	+30.5	+0.68	+2.64	−0.01	−0.86	—	—
22	−36.0	+39.6	+0.86	+2.68	+0.02	−1.70	—	—
29	−34.1	−26.0	+0.81	+2.79	+2.28	+1.24	—	—
30	−30.8	−37.0	+1.10	+2.67	+2.41	+1.46	—	—
98	+28.2	+25.0	−2.11	−0.24	−1.72	−2.45	—	—
99	+25.7	+24.6	−2.26	+0.50	−0.93	−1.42	—	—
103	+27.1	−37.1	−1.05	+0.40	+1.51	+0.84	—	—
105	+32.1	−42.6	−1.47	−0.58	+2.06	+1.18	—	—

Région 291.

$E = 1896.21$; $E' = 1913.18$; $T = 16.97$.

$k_x = -1.30$; $p_x = +0.0396$; $r_x = +0.0213$;
$k'_x = +1.14$; $p'_x = +0.0363$; $r'_x = +0.0016$.
$k_y = -1.50$; $p_y = +0.0405$; $r_y = +0.0116$;
$k'_y = -0.14$; $p'_y = +0.0389$; $r'_y = +0.0193$.

5	−57.9	+37.8	+3.50	+0.62	+0.22	−3.11	+0.22	+0.13
8	−47.5	+34.6	+3.04	+0.92	−0.50	−2.86	+0.50	−0.39
16	−44.2	−62.0	+3.36	−0.41	+2.23	−1.19	−0.99	−2.08
18	−38.2	+ 0.6	+1.75	−0.31	+1.17	−0.38	−0.80	+0.18
20	−32.3	−27.5	+3.97	−0.01	+2.49	+0.39	+0.36	+0.02
27	−21.9	− 2.6	+0.71	−0.88	−0.61	−2.29	−1.02	−2.04
28	−20.9	−13.5	+2.16	−0.18	+1.33	−0.27	−0.04	−0.50
30	−21.6	−33.9	+2.81	−0.40	+3.00	+0.59	−0.08	−0.03
42	− 8.8	+24.3	+0.37	+0.05	−0.52	−1.44	+0.07	−0.70
48	− 4.8	+50.4	−1.15	−2.74	−3.83	−5.24	−1.63	−3.28
54	+ 3.5	−46.5	+0.22	−1.44	+2.48	+1.60	−1.08	−0.68
55	+ 9.7	+48.6	+0.33	−1.15	−0.26	−2.58	+0.43	−0.46
62	+ 6.9	−52.5	+1.37	−2.01	+2.85	+1.17	−0.74	−1.00
68	+10.2	+ 0.4	+1.46	−0.77	+1.56	+0.30	+0.65	−0.03
74	+19.2	−12.5	+0.45	−1.89	+0.70	−0.17	−0.21	−1.35
96	+35.7	−25.0	−1.64	−3.52	+2.76	+2.62	−1.59	+0.33
99	+45.4	+27.0	−1.85	−3.84	−3.31	−4.57	−0.89	−4.39
103	+54.3	+59.2	−2.52	−3.45	−1.49	−2.35	−0.33	−1.23
109	+52.5	−23.3	−1.40	−3.64	+2.93	+1.90	−0.87	−0.14
—	−62.1	−15.0	+2.09	−1.65	+0.08	−1.56	−2.38	−1.19
—	+17.3	−50.6	−0.02	−3.75	+2.96	+1.82	−1.88	−0.70
—	+35.8	−25.0	−0.24	−2.54	+1.58	+0.42	−0.39	−1.36
13	−40.4	+22.9	+2.18	+0.40	+0.29	−1.01	—	—
15	−41.7	−16.9	+3.42	+0.38	+2.39	+0.85	—	—
22	−30.3	−41.0	+4.10	+0.70	+2.04	+0.03	—	—
26	−24.8	+42.5	+0.76	−1.06	−0.60	−2.26	—	—
79	+21.9	-34.4	+0.78	−2.11	+2.88	+1.92	—	—
86	+28.8	−26.9	+0.27	−2.56	+3.28	+1.98	—	—
91	+32.6	+22.7	0.06	2.10	+0.77	−0.02	—	—
97	+40.3	+27.9	−0.47	−2.26	+0.95	−0.52	—	—

Région 292.

$E = 1896.11$; $E' = 1911.10$; $T = 14.99$.

$k_x = +0.18$; $p_x = +0.0465$; $r_x = +0.0219$;
$k'_x = +1.34$; $p'_x = +0.0441$; $r'_x = +0.0091$.
$k_y = +1.43$; $p_y = +0.0406$; $r_y = -0.0038$;
$k'_y = +1.42$; $p'_y = +0.0453$; $r'_y = -0.0428$.

4	−63.0	−16.6	+2.30	+0.40	−2.55	+0.10	−1.00	−1.98
7	−63.1	−46.6	+5.96	+4.43	−10.15	−7.77	+2.37	−11.01
14	−46.4	+50.8	+0.78	+0.78	−5.13	−2.84	+0.22	−1.46
16	−49.3	−19.6	+0.03	−0.43	−0.36	+2.11	−1.97	+0.30
19	−45.2	−49.5	+1.90	+0.61	−0.42	+1.83	−0.79	−1.04
33	−25.3	−25.5	+1.02	−0.23	−0.25	+1.12	−0.39	+0.17
37	−23.3	+60.6	−0.52	−0.02	−5.64	−5.16	+0.37	−1.91
40	−23.1	+14.5	−0.18	−0.96	−2.73	−1.79	−0.63	−0.75
49	−15.5	−54.3	+2.46	+1.11	+0.47	+0.59	+1.00	−0.73
52	−12.5	+24.8	−0.30	−0.27	−2.41	−1.65	+0.29	+0.16
63	− 6.4	−12.1	−0.23	−0.52	−1.32	−0.59	−0.09	−0.20
66	− 9.1	−50.5	+0.24	−1.08	−1.35	−0.90	−0.85	−2.08
74	− 3.4	−61.5	+1.35	−0.36	+2.02	+2.02	+0.14	+0.72
87	+ 5.7	+46.9	−1.40	−0.93	−4.45	−4.61	+0.58	−0.96
101	+16.1	−11.2	−0.65	−1.80	−1.15	−1.87	+0.09	−0.19
102	+17.2	−38.9	+1.11	−0.26	−2.21	−2.30	+1.36	−2.09
121	+35.1	−27.0	−3.74	−4.93	+1.16	−0.36	−2.40	+1.48
131	+47.1	+14.4	−2.57	−3.63	−2.21	−4.08	+0.02	−0.00
134	+48.9	−45.5	−1.13	−2.95	+0.92	−0.97	+0.23	+0.58
137	+52.3	+20.2	−3.99	−4.94	−2.28	−4.68	−1.02	+0.03
142	+56.0	+10.1	−4.85	−5.66	−1.79	−3.76	−1.80	+0.39
145	+57.0	−38.4	−2.28	−3.49	+1.01	−1.64	−0.14	+0.79
147	+60.7	−27.4	−4.59	−5.73	+0.29	−2.99	−2.07	+0.31
—	+60.8	+44.8	−4.49	−5.17	−4.84	−7.45	−0.62	−1.38
20	−44.5	+37.0	+1.17	+0.52	−2.32	−1.25	—	—
27	−38.3	−40.3	+2.30	+0.75	−0.90	+1.42	—	—
28	−34.2	+38.4	+0.72	−0.55	−2.55	−1.48	—	—
34	−27.9	−30.9	+1.72	+0.26	+0.43	+1.65	—	—
114	+29.1	−31.7	−0.57	−2.04	+0.07	−1.09	—	—
118	+34.6	−40.4	−0.93	−2.92	+0.51	−1.04	—	—
119	+37.1	+37.3	−2.97	−2.92	−3.32	−5.02	-	—
120	+37.9	+25.4	−2.50	−3.51	−3.13	−4.02	—	—

Région 293.

$E = 1896.08$; $E' = 1914.08$; $T = 17.99$.

$k_x = +\ 0.35$; $p_x = +\ 0.0444$; $r_x = -\ 0.0103$;
$k'_x = +\ 0.57$; $p'_x = +\ 0.0544$; $r'_x = -\ 0.0150$.
$k_y = +\ 0.20$; $p_y = +\ 0.0477$; $r_y = +\ 0.0049$;
$k'_y = -\ 3.15$; $p'_y = +\ 0.0430$; $r'_y = +\ 0.0227$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
2	−63.5	+40.3	+2.43	+2.12	−3.83	−0.45	−0.91	−0.91
23	−51.4	+ 1.0	+1.69	+1.33	−2.06	+0.19	−0.58	−1.65
42	−39.6	−24.6	+1.93	+0.91	−3.40	−0.75	+0.23	−4.12
44	−33.0	+45.4	+2.91	+2.74	−3.20	−1.36	+1.07	−1.24
66	−20.6	+ 7.3	+1.02	+1.23	−1.05	+2.65	+0.47	−0.06
72	−23.2	−59.7	+1.24	+0.67	+0.09	+2.28	+1.02	−2.68
81	−17.3	−46.3	−1.16	−1.29	+0.97	+3.63	−1.03	−1.04
93	− 9.6	+47.7	−1.11	−0.62	−3.30	−0.40	−1.48	−1.02
117	+ 7.7	−34.6	−1.17	−1.30	−0.10	+3.24	+0.04	−1.58
126	+13.7	+18.3	−0.06	−0.60	−2.98	+1.14	+0.58	−1.75
133	+11.6	−51.5	−2.59	−3.24	+0.92	+3.89	−1.23	−1.56
145	+21.2	+29.3	−1.30	−1.12	−1.27	+2.40	−0.07	+0.13
157	+34.1	+48.2	−2.47	−3.12	−2.82	+0.71	−1.26	−0.81
161	+31.6	− 7.2	−3.25	−4.38	−0.24	+3.17	−1.70	−0.77
165	+35.4	+41.0	−1.14	−2.11	−3.02	+0.96	+0.09	−1.13
170	+39.5	−13.9	−2.93	−4.31	−0.21	+4.09	−1.03	−0.71
176	+40.6	−15.9	−2.10	−3.16	−0.68	+4.28	+0.03	−0.95
190	+57.7	−41.5	−4.00	−5.31	+2.91	+7.12	−0.82	+0.86
192	+56.5	−53.0	−2.73	−4.52	+2.23	+5.93	+0.30	−0.58
—	−61.2	−28.1	+4.74	+4.59	+0.20	+1.07	+2.45	−1.27
55	−27.2	+23.1	+1.19	+1.12	−1.51	+1.54	—	—
59	−26.0	−38.6	+0.29	+0.65	+0.96	+3.56	—	—
63	−22.3	+20.5	+1.29	+1.08	−0.74	+2.01	—	—
70	−22.9	−36.7	−0.05	−0.27	+1.54	+4.60	—	—
143	+22.5	+35.1	−1.08	−0.90	−1.91	+2.63	—	—
146	+22.0	+21.8	−1.46	−1.82	−1.44	+1.97	—	—
171	+38.1	−30.0	−2.13	−3.21	+1.91	+5.72	—	—
172	+36.3	−38.6	−2.05	−3.01	+1.80	+5.47	—	—

Région 294.

$E = 1895.21$; $E' = 1913.23$; $T = 18.02$.

$k_x = -\ 1.68$; $p_x = +\ 0.0253$; $r_x = -\ 0.0027$;
$k'_x = -\ 0.01$; $p'_x = +\ 0.0249$; $r'_x = +\ 0.0100$.
$k_y = +\ 1.15$; $p_y = +\ 0.0203$; $r_y = +\ 0.0132$;
$k'_y = +\ 1.50$; $p'_y = +\ 0.0158$; $r'_y = -\ 0.0319$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
15	−49.3	+13.8	+2.73	+0.63	−3.44	+0.11	−0.36	−0.55
16	−46.0	+ 7.8	+3.33	+1.33	−1.95	−0.41	+0.36	−0.14
19	−41.9	+60.6	+1.81	0.85	−3.46	−1.33	−1.19	−0.37
29	−35.6	+ 9.5	+2.31	+0.28	−1.64	−0.46	−0.41	+0.11
32	−33.1	+47.5	+1.63	−0.65	−3.95	−3.69	−1.01	−1.95
36	−33.4	− 3.9	+0.76	−1.47	−4.53	−3.89	−2.05	−3.27
37	−33.0	− 8.8	+2.86	+0.80	+0.33	+1.22	+0.12	+1.63
49	−29.5	−46.9	+3.33	+1.63	−2.44	−1.56	+0.72	−1.79
57	−16.7	+34.8	+1.58	−0.54	−4.07	−2.88	−0.61	−1.67
58	−16.8	+34.8	+1.73	−0.29	−2.32	−1.86	−0.41	−0.29
64	−17.2	−41.8	+3.22	+1.21	+0.65	+0.20	+0.78	+0.83
66	−11.6	− 7.3	+2.07	+0.44	−1.03	−1.15	+0.09	−0.00
76	− 2.2	−24.7	+2.14	+1.06	−1.05	−1.42	+0.61	−0.37
77	− 1.7	−55.7	+3.02	+0.99	−0.48	−1.53	+0.91	−0.70
79	+ 4.2	+39.8	+1.28	−1.38	−2.99	−4.04	−0.64	−1.43
80	+ 0.0	+36.3	+0.99	−0.68	−1.19	−2.19	−0.56	+0.29
85	+ 5.3	− 3.2	+4.26	+1.97	−3.86	−4.94	+2.39	−3.08
88	+ 9.3	−24.7	+1.15	−0.14	−2.90	−3.69	−0.19	−2.32
89	+ 8.1	−49.2	+0.96	−0.20	+0.31	−0.87	−0.44	+0.23
98	+11.4	−26.7	+0.81	−0.91	−2.06	−3.77	−0.71	−1.96
100	+13.5	−45.3	+1.84	−0.01	+0.35	−1.43	+0.24	+0.09
103	+19.5	+22.5	+1.12	−1.05	−1.95	−3.30	−0.23	−0.71
118	+27.4	−54.3	+1.35	−0.38	−0.58	−2.11	+0.13	−0.74
125	+39.8	+47.2	−0.91	−3.21	−2.18	−5.29	−1.73	−1.18
151	+53.0	−24.2	+1.61	−1.10	+0.14	−2.70	+0.65	+0.10
152	+53.7	−30.7	+2.03	−0.78	−0.14	−1.14	+1.01	+0.63
153	+55.1	+42.9	+0.33	−1.46	−2.69	−5.94	+0.13	−1.70
159	+63.9	−47.9	−0.64	−1.77	+0.68	−3.05	−0.62	−0.12
34	−30.7	+21.8	+2.61	+0.53	−2.11	−0.64	—	—
45	−26.3	−33.8	+2.34	+1.44	—	—	—	—
47	−27.9	−35.5	+2.51	+1.37	−0.82	−0.22	—	—
48	−26.1	−38.3	—	—	−0.80	−0.14	—	—
55	−23.8	+33.1	+1.97	−0.44	−1.91	−1.22	—	—
117	+29.0	−39.9	+0.62	−0.67	−0.42	−2.20	—	—
119	+31.2	+20.2	+1.00	−0.83	−1.35	−3.24	—	—
122	+31.5	−36.3	+0.70	−0.79	+0.58	−1.26	—	—
132	+42.6	+30.3	+0.93	−0.74	−1.10	−3.17	—	—

Région 295.

$E = 1896.16$; $E' = 1911.17$; $T = 15.01$.

$k_x = +\ 0.77$; $p_x = +\ 0.0439$; $r_x = -\ 0.0145$;
$k'_x = +\ 0.31$; $p'_x = +\ 0.0434$; $r'_x = -\ 0.0258$.
$k_y = -\ 2.45$; $p_y = +\ 0.0336$; $r_y = -\ 0.0077$;
$k'_y = +\ 0.63$; $p'_y = +\ 0.0219$; $r'_y = -\ 0.0168$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
1	−63.2	+48.6	+1.93	+2.23	+0.24	−1.71	−1.11	−1.07
7	−60.9	− 0.8	+0.22	−0.18	+2.55	+0.31	−2.08	−0.25
13	−56.3	−44.7	−1.00	−0.97	+4.04	+0.60	−2.00	−0.52
33	−40.7	+49.1	+0.94	+2.25	+0.33	−1.24	−0.63	−0.49
39	−40.3	−41.1	−1.25	−0.89	+2.85	+0.06	−1.46	−1.09
43	−39.9	+21.4	+2.23	+2.20	−0.59	−2.98	+0.58	−2.59
46	−38.2	−10.4	−2.72	−3.20	+0.39	−2.96	−3.88	−2.95
70	−21.9	+33.0	−2.64	−1.73	+2.09	−1.01	−3.26	+0.27

N°	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
98	−11.5	+51.3	+1.47	+2.69	+1.55	−0.82	+1.09	+0.73
111	− 8.3	+ 14.4	+ 0.31	+ 0.76	+ 1.97	0.84	+ 0.42	− 0.04
121	− 0.2	+21.4	−0.20	+0.80	+1.89	−1.09	+0.40	+0.08
134	+ 3.7	+32.3	−0.24	+0.51	+1.16	−2.49	+0.18	−0.63
140	+ 9.4	+53.6	−0.71	−0.04	−1.87	−5.25	−0.50	−2.87
144	+ 8.3	+21.1	−1.58	−1.42	+1.03	−2.55	−1.02	−0.98
163	+19.0	+44.1	−0.14	+0.60	+0.27	−2.37	+0.70	−0.50
192	+32.0	+17.7	−1.52	−1.01	+2.31	−1.27	+0.31	+0.49
202	+38.9	−18.7	−1.61	−1.22	+2.39	−0.85	+1.20	−0.18
215	+48.9	+12.8	−4.50	−3.85	−1.29	−5.17	−1.76	−3.18
221	+48.5	−56.8	−4.95	−4.50	+4.49	+1.01	−0.92	+1.35
236	+56.5	−16.4	−3.64	−4.21	+3.60	−0.47	−0.59	+0.89
239	+55.5	−30.7	−3.08	−2.50	+2.59	−1.71	+0.79	−0.64
246	+63.0	−13.4	−4.62	−5.60	+1.10	−2.88	−1.55	−1.39
—	− 1.5	+31.3	−0.80	+0.40	−1.73	−4.51	−0.36	−3.18
60	−31.4	−35.6	+0.29	−0.27	+4.09	+0.59	—	—
68	−27.8	−34.0	−0.11	+0.36	+3.52	+0.59	—	—
71	−24.6	+33.1	+0.45	+0.94	+1.84	−0.62	—	—
72	−21.0	+26.4	+0.76	+2.00	+1.51	−1.09	—	—
181	+24.6	−32.1	−2.78	−2.25	+3.38	−0.52	—	—
185	+29.1	+25.9	−1.18	−0.93	+1.61	−1.35	—	—
191	+32.4	+28.9	−2.14	−1.00	+0.89	−2.23	—	—
203	+35.3	−29.1	−2.39	−2.50	+3.22	−0.32	—	—

Région 296.

$E = 1896.13$; $E' = 1911.14$; $T = 15.01$.

$k_x = -2.10$; $p_x = +0.0339$; $r_x = -0.0097$;
$k'_x = -1.07$; $p'_x = +0.0325$; $r'_x = -0.0279$.
$k_y = +0.16$; $p_y = +0.0144$; $r_y = -0.0042$;
$k'_y = -1.58$; $p'_y = +0.0121$; $r'_y = +0.0024$.

N°	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
12	−50.3	−13.0	+3.81	+2.58	−1.17	+0.29	+0.18	−1.37
16	−47.9	+25.7	+4.10	+2.84	−0.96	−0.52	−0.19	−1.15
24	−44.2	+ 8.8	+ 2.44	+ 1.02	1.31	0.54	− 1.49	1.55
49	−15.8	+46.0	+2.51	+2.63	−2.54	−0.11	−0.40	−1.44
57	−14.7	+44.0	+3.27	+2.58	−2.39	−1.16	+0.02	−1.91
71	− 9.4	−46.1	+2.46	+0.79	+0.78	−1.71	+0.59	−0.08
82	− 4.1	−40.3	+1.23	−0.28	+0.09	+1.84	−0.49	−0.28
84	− 0.6	−50.5	+0.39	−1.30	+1.49	+3.41	−1.11	+1.07
90	+ 2.0	+18.2	+1.96	+1.15	−0.25	+1.26	−0.30	+0.04
94	+ 0.6	+ 6.7	+2.09	+1.14	−1.04	+0.96	−0.07	−0.66
96	+ 4.7	−15.9	+1.90	+0.64	−0.96	+0.67	+0.13	−1.06
107	+13.0	+40.8	+2.22	+1.86	−2.10	−0.75	+0.11	−1.58
128	+ 22.4	+ 41.7	+ 2.24	+ 1.39	0.82	+ 0.82	+ 0.19	− 0.14
143	+ 30.9	+ 49.3	+ 1.76	+ 1.51	7.99	− 6.27	+ 0.14	− 7.15
151	+44.8	+57.6	+1.60	+0.98	−1.39	−0.08	+0.11	−0.64
152	+41.5	+20.6	+1.45	+0.47	−2.21	−1.09	+0.37	−2.05
156	+ 42.2	− 43.9	0.32	− 2.02	− 0.36	+ 2.16	0.53	− 0.35
168	+55.4	+17.7	+0.91	−0.09	−0.04	+1.71	+0.33	+0.40
177	+60.8	−42.4	−1.25	−2.55	−0.23	+1.90	−0.67	−0.38
—	+21.9	+42.5	+2.78	+2.27	−0.90	+1.51	+0.86	+0.17
36	−33.7	−20.8	+3.13	+1.56	+0.01	+2.43	—	—
37	−34.8	−31.0	+3.01	+1.59	+0.50	+1.57	—	—
38	−26.0	+20.6	+2.81	+2.35	−0.41	+1.06	—	—
50	−17.4	+30.0	+3.20	+2.37	−0.24	+0.98	—	—
129	+21.8	+32.7	+1.01	+0.32	−0.58	+1.78	—	—
138	+26.5	−23.5	+0.72	−0.84	+0.60	+2.05	—	—
139	+29.9	−29.5	+0.91	−0.58	−0.18	+1.49	—	—
144	+31.2	+21.7	+2.05	+1.84	−0.95	+1.23	—	—

Région 297.

$E = 1895.23$; $E' = 1913.19$; $T = 17.97$.

$k_x = -1.20$; $p_x = +0.0277$; $r_x = -0.0098$;
$k'_x = -0.02$; $p'_x = +0.0239$; $r'_x = +0.0078$.
$k_y = -0.34$; $p_y = +0.0171$; $r_y = -0.0036$;
$k'_y = +0.70$; $p'_y = +0.0133$; $r'_y = +0.0008$.

N°	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
1	−64.6	+53.5	+3.01	+0.75	−1.47	−2.95	−0.44	−1.31
6	−55.5	+36.0	+2.42	+0.24	−1.18	−2.43	−0.75	−1.15
8	−55.4	+ 4.9	+3.41	+1.20	−0.56	−2.15	+0.26	−1.18
15	−47.6	+57.3	+4.33	+2.43	−3.28	−4.09	+1.48	−2.70
17	−45.5	+11.3	+1.98	+0.31	+0.54	−0.60	−0.65	+0.26
21	−44.0	+35.7	+2.38	−0.30	−2.85	−4.69	−0.74	−3.11
22	−41.9	+33.7	+1.69	−0.28	−2.61	−4.09	−1.02	−2.71
23	−40.1	+15.1	+2.60	+0.94	+0.18	−1.04	+0.11	−0.07
35	−33.3	−30.6	+2.55	+1.78	+1.16	−0.18	+0.72	+0.16
36	−26.3	+ 5.9	+1.92	+0.12	−0.83	−1.81	−0.27	−1.08
46	−20.1	−11.9	+1.39	+0.61	+0.33	+0.08	−0.11	+0.18
49	−18.9	−19.1	+1.67	+0.89	−0.18	−0.95	+0.20	−0.70
63	− 0.3	+35.6	+2.20	+0.51	−1.08	−2.10	+0.70	−0.87
71	+ 0.3	+ 29.1	+ 2.22	+ 0.73	− 0.69	− 1.87	+ 0.84	− 0.65
79	+10.2	+11.8	+0.78	+0.42	−1.24	−1.21	+0.23	−0.85
81	+12.8	− 5.3	+0.56	−0.82	−1.09	−1.85	−0.40	−1.35
100	+29.4	−33.0	−0.09	+0.28	−0.35	−0.87	+0.27	−0.88
103	+33.0	−37.1	+0.42	+0.18	+0.31	−0.40	+0.57	−0.38
104	+38.0	− 8.3	+0.33	−0.63	−0.12	−0.69	+0.23	−0.29
114	+49.7	+58.8	+1.18	+0.03	−0.18	−0.81	+1.22	+0.65
116	+48.3	+17.9	−0.51	−2.15	+0.15	−0.59	−0.71	+0.30
121	+45.0	−62.5	−0.76	−1.42	+2.31	+1.22	−0.47	+1.05
122	+52.3	+11.2	+0.43	−1.61	−1.04	−1.47	+0.14	−0.83
125	+ 52.1	− 34.3	+ 0.26	− 1.22	+ 1.43	+ 0.11	+ 0.29	+ 0.50
126	+ 57.8	+ 9.8	+ 0.44	− 0.85	0.38	− 1.42	+ 0.66	− 0.49
—	+54.9	+17.9	−0.14	−2.68	−0.08	−0.10	−0.62	+0.44

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
25	−44.0	−25.9	+2.29	+1.28	+1.27	+0.28	—	—
34	−34.1	−27.0	+1.92	+1.36	+0.53	−1.02	—	—
41	−24.6	+20.3	+2.03	+0.15	+0.23	−1.16	—	—
42	−21.6	+19.0	+1.87	+0.37	+0.02	−0.83	—	—
88	+23.1	+23.8	+0.92	−0.36	−0.30	−1.19	—	—
90	+20.4	−27.1	+0.48	−0.44	+0.36	−0.96	—	—
97	+28.8	+23.1	+0.66	−0.89	−0.07	−0.78	—	—
105	+37.1	−30.3	−0.40	−0.76	+1.17	+0.34	—	—

Région 298.

$E = 1895.30$; $E' = 1913.27$; $T = 17.97$.

$k_x = +0.16$; $p_x = +0.0165$; $r_x = +0.0308$;
$k'_x = -0.01$; $p'_x = +0.0194$; $r'_x = +0.0173$.
$k_y = -0.89$; $p_y = +0.0182$; $r_y = +0.0194$;
$k'_y = +0.62$; $p'_y = +0.0226$; $r'_y = -0.0126$.

5	−58.5	+27.0	−1.07	−0.19	−3.18	−3.26	−0.95	−2.61
17	−53.0	−23.4	+1.41	+0.74	+2.16	+1.87	−0.36	+1.58
19	−48.6	+58.9	−1.40	+0.10	−0.98	−1.16	−0.03	+0.16
23	−48.8	−20.0	+2.16	+1.54	+0.54	+0.66	+0.56	+0.23
25	−48.4	63.1	+6.12	+6.01	−0.21	+0.11	+3.75	1.31
27	−40.2	+29.4	−0.64	+0.02	+0.01	−0.94	−0.24	+0.13
33	−39.0	+43.8	−0.45	+0.73	−0.47	−1.69	+0.57	−0.18
42	33.8	37.6	+1.45	+0.88	+0.92	+0.11	−0.27	−0.26
51	−21.0	+40.7	−0.16	+1.43	−0.79	−1.96	+1.30	−0.60
58	−18.2	+51.4	−1.49	−0.43	+0.42	−0.81	+0.02	+0.78
75	−13.1	−13.3	−0.56	−0.60	−0.21	−0.96	−1.06	−0.95
100	−0.4	+21.6	+0.15	+0.86	−0.86	−1.93	+1.09	−1.09
110	+1.5	−1.6	−0.16	+0.16	+0.13	−0.97	+0.05	−0.59
112	+2.1	−17.8	+0.60	+0.55	+0.17	−1.22	+0.25	1.02
116	+5.4	+60.6	+0.51	+1.86	−0.91	−2.45	+2.81	−0.59
128	+12.6	−38.6	+0.50	+0.14	−0.74	−2.48	−0.31	−2.57
130	+20.0	+21.3	+0.69	+1.92	+2.34	+0.25	+2.25	+1.52
154	+32.2	+19.5	−1.59	−2.02	−0.01	−2.59	−0.68	−1.14
171	+40.2	+49.1	−2.12	−1.26	−0.31	−2.97	+0.28	−0.91
179	+45.9	−47.9	+0.28	−0.52	+0.70	−1.90	−0.37	−1.86
182	+48.9	−61.8	+1.56	−0.15	+1.65	−1.70	+0.17	−1.58
190	+55.0	−41.5	+0.56	−0.76	+2.98	−0.66	−0.03	−0.01
—	+16.8	−55.7	+1.30	+0.05	+0.22	−1.73	−0.28	−2.08
44	−27.7	+36.4	−0.92	−0.40	−0.60	−1.05	—	—
45	−29.0	+20.6	−0.22	+0.28	−0.10	−1.20	—	—
55	−22.1	−40.0	+1.94	+1.68	+1.17	+1.09	—	—
56	−22.3	−41.8	+0.98	+0.88	+1.60	+0.53	—	—
148	+27.8	+32.2	−1.32	−1.10	+1.06	−1.42	—	—
151	+28.9	−38.8	+0.35	−0.11	+1.97	−0.11	—	—
158	+31.3	−41.1	+0.79	+0.09	+2.09	−0.52	—	—
160	+35.2	+31.0	−1.99	−0.93	+1.15	−1.59	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
1	−60.3	+20.5	−0.82	−0.73	−2.17	−1.38	−1.65	−0.22
4	−56.9	+10.3	−2.23	−0.96	−1.51	−0.28	−2.32	+0.36
8	−57.3	−38.2	−0.65	+1.74	+0.59	+1.52	+0.08	+1.14
10	−51.1	+44.8	+0.05	−1.06	−4.12	−2.38	−1.28	−1.25
12	−53.2	−27.4	−1.01	+1.21	−0.92	+0.56	−0.31	+0.11
20	−47.2	−6.2	−0.72	−0.07	−4.14	−2.73	−0.76	−2.72
35	−37.8	−15.8	−0.81	+0.60	−2.52	−0.78	−0.17	−1.31
62	−14.1	+16.2	−1.45	−1.22	−2.66	−1.16	−0.93	−1.16
74	−8.2	−47.5	−2.89	−0.90	−2.94	−0.84	−0.96	−2.77
81	+4.5	+17.4	−1.86	−2.27	−2.96	−1.00	−1.17	−1.48
83	+2.6	−13.8	−2.30	−1.22	−0.80	+0.97	−0.73	−0.14
107	+16.9	−7.1	−1.42	0.97	−1.97	+0.05	+0.17	−1.24
110	+18.0	−38.7	−2.00	−0.25	−0.60	+1.56	+0.46	−0.57
116	+23.6	−13.4	−1.72	−1.23	−1.02	+0.22	+0.11	−0.93
120	+21.7	−40.4	−3.54	−1.45	−0.56	+1.93	0.79	−0.47
121	+29.7	+58.2	−1.20	−3.02	4.19	−3.17	−0.76	2.57
146	+42.3	+33.3	−1.01	−2.20	−2.45	−1.05	+0.22	−1.44
148	+49.6	−34.5	−3.44	−1.53	−0.61	+1.74	−0.06	−0.86
150	+53.1	+42.1	−1.51	−2.06	−0.89	+1.62	+0.28	+0.72
156	+50.0	+5.0	−3.23	−2.78	−2.21	+0.40	−0.80	−1.39
—	−25.0	−42.4	−2.97	−0.32	−0.59	+1.82	−1.20	+0.11
—	+5.9	−17.0	−0.96	+0.42	−1.61	+0.89	+0.86	−0.71
45	−29.5	+36.8	+0.03	−0.07	3.09	−1.26		
46	−28.5	+26.8	+0.29	0.53	−1.80	−0.18		
50	27.9	−34.2	−1.04	+0.93	0.47	+1.62		—
53	−24.5	−31.2	1.42	−0.78	−0.60	+1.39	—	
124	+27.4	−26.7	−2.14	1.14	−0.17	+2.20	—	—
130	+32.2	+24.1	−0.74	−1.52	−1.39	+0.73	—	—
136	+30.8	−28.5	−2.98	−1.70	−1.11	+1.64	—	—
143	+38.4	+30.1	−1.54	−2.23	−0.96	+1.52	—	—

Région 299.

$E = 1896.25$; $E' = 1911.21$; $T = 14.96$.

$k_x = +1.13$; $p_x = +0.0221$; $r_x = -0.0242$;
$k'_x = +0.62$; $p'_x = +0.0322$; $r'_x = +0.0126$.
$k_y = +1.19$; $p_y = +0.0223$; $r_y = +0.0112$;
$k'_y = -0.90$; $p'_y = +0.0259$; $r'_y = +0.0190$.

Région 300.

$E = 1896.25$; $E' = 1911.21$; $T = 14.96$.

$k_x = -0.90$; $p_x = +0.0326$; $r_x = +0.0008$;
$k'_x = -1.27$; $p'_x = +0.0299$; $r'_x = +0.0186$.
$k_y = +0.06$; $p_y = +0.0215$; $r_y = -0.0055$;
$k'_y = -1.82$; $p'_y = +0.0224$; $r'_y = -0.0092$.

7	−53.2	−41.5	+2.17	+3.19	+1.64	+2.73	−0.46	+0.00
9	−54.8	−52.9	+2.41	+4.08	+1.30	+1.15	−0.06	−1.21
17	−41.9	−19.0	+2.49	+2.62	−0.08	+1.00	−0.02	−1.15

N.o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
22	32.4	- 18.3	- 2.20	+ 2.62	+ 1.58	+ 2.43	- 0.13	+ 0.48
25	25.0	+ 27.1	+ 1.98	+ 1.30	0.65	+ 0.33	+ 0.03	0.63
29	— 21.5	+ 22.9	+ 1.71	+ 1.54	— 1.22	+ 0.23	+ 0.09	— 1.03
30	23.8	10.7	- 2.43	+ 1.86	5.73	4.62	+ 0.21	6.46
32	— 16.0	+ 51.6	+ 1.52	+ 0.48	— 1.04	+ 0.44	— 0.08	— 0.16
44	— 13.7	— 39.7	+ 1.69	+ 2.46	— 0.38	+ 1.00	+ 0.17	— 1.54
50	— 9.8	— 2.6	+ 1.37	+ 1.79	+ 0.05	+ 1.18	+ 0.16	— 0.39
57	— 2.3	+ 25.4	+ 1.44	+ 0.97	— 0.49	+ 0.56	+ 0.29	— 0.30
69	+ 0.2	— 42.8	+ 1.61	+ 2.24	+ 2.18	+ 2.96	+ 0.43	+ 0.75
80	+ 14.7	+ 10.0	+ 1.16	+ 0.54	— 1.21	+ 0.54	+ 0.32	— 0.88
86	+ 11.7	— 50.4	+ 1.10	+ 2.13	+ 0.78	+ 1.91	+ 0.40	— 0.55
92	+ 20.8	— 9.6	— 0.35	— 0.04	— 0.82	+ 0.27	— 0.72	— 1.22
98	+ 25.7	+ 34.3	+ 0.52	— 0.56	— 1.37	— 0.04	+ 0.03	— 0.64
101	+ 29.8	— 62.1	— 0.52	+ 1.26	+ 0.21	+ 1.07	— 0.39	— 1.39
108	+ 41.5	+ 44.5	+ 0.21	— 0.84	— 2.75	— 1.97	+ 0.33	— 1.95
114	+ 44.0	— 53.4	— 0.66	— 0.68	— 3.51	— 2.77	— 0.89	— 4.87
122	+ 60.7	31.2	1.89	0.70	1.56	+ 0.21	0.78	1.79
—	- 32.9	— 17.5	+ 2.45	+ 3.17	+ 0.61	+ 1.28	+ 0.53	— 0.56
—	+ 57.9	— 1.6	+ 0.03	+ 0.41	— 0.48	+ 1.79	+ 0.93	+ 0.16
24	- 29.2	+ 34.2	+ 2.03	- 2.00	1.09	+ 0.87	-	-
31	— 23.9	— 38.4	+ 1.55	+ 2.68	+ 0.50	+ 2.49	—	—
33	— 17.3	+ 29.6	+ 1.68	+ 1.37	— 0.55	+ 1.59	—	—
37	— 18.0	— 10.2	+ 1.21	+ 1.40	+ 1.07	+ 2.80	—	—
89	+ 16.6	— 36.4	+ 0.67	+ 1.75	— 0.05	+ 2.06	—	—
97	+ 28.2	+ 36.2	— 0.40	— 0.85	— 0.32	+ 1.05	—	—
103	+ 31.5	— 34.8	+ 0.06	+ 1.30	+ 0.80	+ 2.56	—	—
105	+ 37.8	+ 25.7	— 0.45	— 0.35	— 1.08	+ 0.77	—	—

Région 301.

$E = 1895.21$; $E' = 1911.21$; $T = 15.99$.

$k_x = 1.58$; $p_x = + 0.0086$; $r_x = - 0.0081$;
$k'_x = - 1.26$; $p'_x = + 0.0154$; $r'_x = - 0.0098$.
$k_y = + 0.16$; $p_y = + 0.0142$; $r_y = + 0.0094$;
$k'_y = + 0.35$; $p'_y = + 0.0179$; $r'_y = + 0.0195$.

1	— 65.0	+ 47.7	— 0.62	— 1.09	— 1.05	— 2.74	— 3.48	+ 0.07
21	— 54.0	— 24.0	+ 2.19	+ 1.55	— 0.29	— 1.06	+ 0.02	— 0.02
23	— 53.5	— 30.6	+ 1.32	+ 1.17	— 0.89	— 1.15	— 0.54	— 0.48
26	— 49.8	+ 42.9	+ 2.25	+ 1.66	— 1.14	— 2.14	— 0.45	+ 0.02
36	— 43.9	— 48.0	+ 0.91	+ 0.24	— 0.67	— 0.92	— 0.94	— 0.67
41	— 39.6	+ 22.0	+ 1.91	+ 1.65	— 2.45	— 2.94	— 0.31	— 1.52
42	— 35.7	+ 4.9	+ 2.39	+ 1.97	— 2.67	— 2.78	+ 0.28	— 1.87
60	— 24.6	— 5.0	— 0.64	— 0.81	— 1.48	— 1.67	— 2.39	— 1.04
75	— 6.4	+ 12.3	+ 2.02	+ 1.60	— 1.74	— 1.43	+ 0.20	— 1.04
82	— 5.7	— 42.5	— 0.33	— 0.32	+ 0.18	+ 0.10	— 1.43	— 0.20
85	— 3.7	— 1.6	+ 2.37	+ 2.10	— 0.71	— 0.33	+ 0.78	— 0.24
86	— 1.8	— 49.3	+ 1.25	+ 0.98	— 0.46	+ 0.16	+ 0.11	— 0.65
92	+ 2.7	+ 18.6	+ 2.04	+ 1.38	0.28	+ 0.23	+ 0.15	+ 0.48
95	+ 0.9	42.6	+ 0.82	+ 0.35	+ 1.25	- 0.49	- 0.44	- 0.43
96	- 3.6	50.8	+ 0.92	+ 0.08	+ 0.54	0.16	- 0.42	- 0.42
102	+ 9.8	+ 4.6	— 0.62	— 0.84	— 0.29	— 0.06	— 2.08	+ 0.01
105	- 11.9	+ 42.7	- 2.77	- 2.05	- 3.05	— 3.40	+ 0.74	— 2.45
109	+ 11.5	— 34.8	+ 2.75	+ 2.41	— 1.31	— 1.16	+ 1.61	— 1.70
129	+ 38.8	+ 60.4	+ 4.49	+ 4.33	+ 0.14	+ 0.73	+ 2.91	+ 1.10
130	+ 35.5	+ 35.3	+ 0.72	+ 0.95	— 1.11	— 0.51	— 0.47	— 0.50
133	+ 38.1	+ 13.3	+ 6.02	+ 5.38	— 0.13	+ 0.62	+ 4.62	+ 0.16
136	+ 35.4	— 21.7	+ 0.51	+ 0.09	— 1.35	— 0.70	— 0.50	— 1.63
153	+ 59.5	— 45.7	— 0.77	— 1.91	+ 0.84	+ 2.51	— 1.63	+ 0.33
155	+ 61.3	+ 19.1	— 0.41	— 0.12	— 1.48	— 0.99	— 1.12	— 1.56
—	+ 0.8	+ 10.1	+ 2.50	+ 2.01	— 2.24	— 1.63	+ 0.75	— 1.53
38	— 36.9	+ 39.3	+ 2.17	+ 2.32	— 0.71	— 1.46	—	—
40	— 36.3	+ 23.0	+ 1.95	+ 1.74	— 0.82	— 1.63	—	—
46	— 33.4	— 27.6	+ 2.12	+ 1.92	— 0.18	— 0.38	—	—
48	30.8	36.2	+ 1.25	+ 1.17	0.19	0.57	—	—
114	+ 20.2	+ 41.5	+ 1.53	+ 1.08	— 0.95	— 0.75	—	—
123	+ 31.9	+ 30.6	+ 1.94	+ 1.55	— 0.26	— 0.36	—	—
137	+ 38.8	— 25.3	+ 0.78	+ 0.27	+ 0.55	+ 1.37	—	—
138	- 35.7	31.1	+ 1.10	+ 0.36	- 0.99	+ 0.55	—	-

Région 302.

$E = 1896.16$; $E' = 1911.16$; $T = 15.00$.

$k_x = + 0.43$; $p_x = + 0.0285$; $r_x = + 0.0118$;
$k'_x = - 0.45$; $p'_x = + 0.0430$; $r'_x = + 0.0317$.
$k_y = - 2.02$; $p_y = + 0.0322$; $r_y = + 0.0083$;
$k'_y = - 0.91$; $p'_y = + 0.0265$; $r'_y = + 0.0055$.

9	— 60.3	— 30.5	+ 2.86	+ 3.96	+ 1.36	+ 0.13	+ 0.58	— 1.20
17	— 59.0	— 16.2	+ 1.81	+ 3.22	+ 2.59	+ 0.63	+ 0.04	+ 0.07
28	52.4	- 13.5	+ 1.45	+ 1.95	+ 1.22	- 0.14	0.47	0.96
46	— 39.3	+ 21.7	+ 0.27	+ 2.01	+ 1.23	— 0.35	+ 0.20	— 0.11
47	— 35.7	+ 19.9	— 0.37	— 0.05	+ 1.28	— 0.19	— 1.07	— 0.08
48	— 38.1	— 12.1	+ 0.48	+ 1.90	+ 1.91	+ 0.78	— 0.44	— 0.21
51	— 33.4	+ 46.9	— 0.70	— 0.92	— 0.13	— 2.16	— 0.99	— 1.00
101	— 12.0	— 26.8	+ 0.82	+ 1.97	+ 2.30	+ 1.15	+ 0.37	— 0.44
105	— 7.7	+ 25.3	— 0.47	+ 0.25	+ 0.70	— 1.29	+ 0.15	— 0.97
119	— 1.8	— 40.5	+ 2.29	+ 3.78	+ 3.37	+ 2.23	+ 2.08	+ 0.16
122	— 3.6	— 59.7	+ 0.69	+ 2.17	+ 6.64	+ 5.16	— 0.00	+ 2.71
125	+ 0.5	+ 7.5	+ 0.42	+ 0.96	+ 1.28	— 0.30	+ 0.86	— 0.75
142	+ 12.6	+ 63.9	— 1.06	— 0.91	— 3.15	— 5.09	+ 0.84	— 3.79
168	+ 15.5	— 32.6	— 5.40	— 4.57	+ 0.64	— 1.07	— 5.14	— 2.74
177	+ 25.0	+ 47.2	— 0.21	+ 0.37	+ 0.53	— 1.09	+ 1.99	— 0.53
193	+ 32.2	— 1.2	— 0.72	— 0.48	+ 1.00	— 0.37	+ 0.52	— 1.41
198	+ 35.7	+ 27.8	— 2.82	— 2.29	+ 0.50	— 0.78	— 0.68	— 1.03
212	+ 40.0	— 46.1	— 1.55	— 0.62	+ 3.73	+ 2.27	— 0.66	— 0.09
221	+ 51.8	— 43.2	— 1.70	— 1.16	+ 2.94	+ 1.76	— 0.52	— 0.73
227	+ 59.0	+ 9.3	— 1.79	- 1.57	+ 0.98	- 1.33	+ 0.62	- 1.77

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
54	−30.5	+30.4	+0.31	+1.09	+0.88	−0.05	—	—
61	−28.7	+34.3	−0.23	+0.38	+0.75	−0.08	—	—
72	−28.2	−36.2	+0.83	+2.67	+2.96	+1.33	—	—
84	−22.2	−34.7	+0.57	+2.57	+2.79	+2.02	—	—
178	+27.1	+25.4	−1.30	−1.85	+1.46	+0.37	—	—
190	+34.5	+26.3	−1.93	−1.61	+1.27	+0.34	—	—
203	+38.4	−27.8	−1.33	−0.14	+3.17	+2.17	—	—
205	+36.4	−32.4	−0.94	−0.20	+3.58	+1.75	—	—

Région 303.

$E = 1896.13$; $E' = 1911.14$; $T = 15.01$.

$k_x = -1.13$; $p_x = +0.0349$; $r_x = +0.0015$;
$k'_x = -1.29$; $p'_x = +0.0286$; $r'_x = -0.0013$.
$k_y = -0.65$; $p_y = +0.0239$; $r_y = +0.0008$;
$k'_y = -0.68$; $p'_y = +0.0310$; $r'_y = +0.0055$.

6	55.8	+17.8	+2.33	+2.32	+0.80	+0.58	0.66	+0.69
15	−52.3	−42.4	+1.74	+1.66	+0.37	+0.89	−1.17	−1.03
29	−44.4	+10.0	+2.38	+2.89	0.47	0.14	+0.02	0.55
39	−34.7	+50.7	0.39	+1.16	−2.47	−2.35	1.92	1.57
52	−26.6	−1.9	+1.81	+1.80	1.84	1.23	0.25	2.17
75	−12.2	+6.5	+0.30	+0.53	3.84	3.59	−1.18	−4.16
77	−14.3	27.0	+1.92	+2.14	+0.10	+0.13	+0.36	1.25
84	−7.0	55.4	+1.13	+1.86	−0.66	+0.79	+0.06	−1.43
89	3.3	18.4	+1.89	−1.70	+0.97	+1.36	+0.47	−0.00
95	+2.5	+58.1	+0.99	+0.96	0.28	0.50	0.15	+0.53
96	+4.8	28.5	+1.29	+1.49	−1.44	2.24	−0.33	1.74
101	+6.4	−12.5	+2.39	+2.52	+0.51	+0.13	+1.44	0.02
110	+12.7	+23.2	−0.57	−0.71	+1.06	+1.17	0.17	−1.04
121	+12.4	−56.5	+0.34	+0.67	+1.39	+0.78	0.32	1.17
123	+18.2	+13.8	+0.26	+0.16	−0.55	−0.82	−0.42	−1.02
126	+15.6	−24.8	+0.84	+0.85	+1.33	+1.70	+0.12	+0.12
143	+31.0	−33.0	+0.54	+0.69	+1.04	+0.83	+0.38	−0.73
165	+56.8	−7.6	−1.08	−1.15	+1.25	+1.11	−0.52	+0.12
166	+56.8	−29.8	−1.02	−0.97	+0.74	+0.06	−0.40	−1.26
167	+59.1	−41.8	−1.20	−1.87	+0.65	+0.59	−0.87	−1.38
171	+62.6	−23.5	−1.03	−1.34	+2.74	+2.67	−0.41	+1.20
—	+19.5	+42.6	+1.74	+0.78	−0.97	−0.77	+0.67	−0.43
35	−39.3	+24.0	+2.18	+1.77	−0.19	−0.60		
43	−34.0	−36.0	+2.51	+2.53	+1.58	+1.73	—	—
45	−30.3	−37.7	+2.50	+2.31	+1.28	+1.49	—	—
53	−24.4	+25.3	+1.82	+2.16	+0.41	+0.16	—	—
145	+37.5	+36.9	+0.27	+0.41	−0.05	+0.04	—	—
146	+39.8	+22.3	−0.40	+0.56	−0.15	−0.17		
152	+43.4	−23.2	−0.22	+0.25	+1.64	+1.85	—	—
153	+40.7	−32.5	−0.79	−0.68	+1.21	+1.77	—	—

Région 304.

$E = 1895.23$; $E' = 1913.19$; $T = 17.97$.

$k_x = -0.36$; $p_x = +0.0161$; $r_x = -0.0097$;
$k'_x = -0.16$; $p'_x = +0.0225$; $r'_x = +0.0226$.
$k_y = -1.90$; $p_y = +0.0234$; $r_y = -0.0047$;
$k'_y = -0.83$; $p'_y = +0.0108$; $r'_y = -0.0004$.

4	−59.8	+18.0	+0.27	+0.36	+1.54	+0.37	−0.98	−0.25
5	−56.1	+11.1	+2.49	+1.13	+0.94	−1.07	+0.54	−1.38
8	−57.6	−34.3	+1.36	+2.22	+3.56	+0.24	+0.19	−0.19
9	−53.3	+17.8	+0.02	−0.25	+2.99	+0.73	−1.29	+0.66
10	−50.6	+9.6	+2.40	+1.28	+2.40	+0.26	+0.67	−0.00
18	−40.9	−50.0	+1.53	+2.38	+2.23	+0.27	+0.58	−1.07
35	−29.5	−25.9	+0.76	+1.08	+2.20	−0.04	−0.07	−0.80
41	−18.4	+38.2	+0.85	−0.21	−0.91	−2.30	−0.05	−2.37
46	−15.8	−8.2	−0.04	+0.82	+1.30	−0.43	−0.23	−1.11
52	13.6	15.9	+1.00	+1.35	+0.02	1.80	+0.54	2.56
68	+2.1	−62.2	−1.11	+0.45	+4.41	+2.70	−0.97	+1.13
71	+5.2	+13.8	+0.37	0.56	+1.75	+0.39	−0.16	0.05
86	+16.2	−46.6	−1.34	0.30	+1.42	−0.23	−1.07	−1.52
101	+38.2	−1.1	+0.23	−0.67	+1.60	+1.71	+0.25	+0.37
102	+36.3	2.0	0.34	1.08	+1.79	+1.05	−0.28	+0.11
111	+49.4	+47.5	+0.22	1.86	+0.42	+0.78	+0.18	+0.17
113	+46.3	+1.9	+0.25	−0.38	0.10	−0.33	+0.58	−1.43
116	+55.0	−22.3	−1.25	1.13	−1.17	0.14	−0.52	1.09
120	+50.9	50.8	1.82	−1.01	+1.50	+0.67	1.02	−1.02
	57.2	+58.8	−3.52	+2.15	+0.35	1.88	+1.85	1.26
	42.5	+25.4	+3.00	−2.51	1.07	1.75	+1.83	−2.45
	−41.5	−58.9	1.10	2.83	+0.53	3.27	1.04	1.61
	+59.5	+16.8	+0.77	+0.83	+3.13	+2.46	+1.80	+1.86
21	−38.6	+14.8	+1.43	+0.69	+1.26	+0.40	—	—
34	−27.0	−24.0	−0.03	+1.17	+2.70	+1.35	—	—
37	−20.1	+18.5	+1.16	+0.37	+1.73	+0.67	—	—
48	−17.6	−34.6	+0.32	+1.28	+2.99	+1.22	—	—
88	+22.0	+29.1	−0.14	−1.48	+1.51	+0.53	—	—
93	+29.3	−32.8	−0.08	+0.38	+2.45	+1.32	—	—
98	+39.3	+37.2	−0.07	−1.27	+0.76	+0.66	—	—
103	+38.0	−42.3	−0.41	+0.30	+2.48	+0.85	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
Région 305.								
$E = 1897.98$; $E' = 1914.03$; $T = 16.05$.								
$k_x = -1.00$; $p_x = +0.0650$; $r_x = +0.0081$;								
$k'_x = +1.14$; $p'_x = +0.0660$; $r'_x = -0.0176$.								
$k_y = -1.59$; $p_y = +0.0504$; $r_y = -0.0180$;								
$k'_y = -1.14$; $p'_y = +0.0410$; $r'_y = +0.0257$.								
6	-59.5	-47.1	+4.33	+1.28	+3.66	+1.43	0.80	0.74
9	57.0	61.1	+4.98	+1.66	+5.40	+1.50	−0.04	0.49
16	−50.2	−40.9	+4.47	+1.35	+4.58	+2.69	−0.11	+0.59
28	-40.5	17.0	+3.70	+1.61	0.18	-1.76	+0.15	-2.96
62	17.1	- 24.8	+1.93	0.49	+2.26	+1.23	0.21	0.69
70	−13.4	+ 0.2	+4.14	+3.33	+1.62	+1.34	+2.93	+0.17
73	−14.9	−46.9	+7.14	+4.12	+4.37	+2.52	+4.95	0.00
102	+ 8.4	−41.4	+0.53	−1.98	+1.39	+1.24	+0.09	−1.98
127	+38.0	+11.0	−0.91	−2.52	−0.12	+1.12	+0.79	−0.51
132	+43.0	−34.9	−2.12	−4.62	+2.15	+1.90	−0.31	−1.10
146	+58.3	+16.9	−2.65	−4.32	−0.36	+0.12	+0.32	−0.94
152	+61.9	−48.4	−3.15	−7.84	+3.35	+4.52	−1.14	+0.12
-	+41.8	−61.2	−3.18	−5.23	+4.58	+3.91	−1.10	−0.07
29	−40.0	−21.5	+3.50	+1.02	+3.26	+1.01	—	—
35	−32.7	+28.7	+2.28	+0.62	+1.44	−0.48	—	—
38	−32.3	−18.3	+3.52	+0.55	+3.26	+1.28	—	—
49	−24.5	+19.6	+3.04	+1.96	+0.32	−0.91	—	—
110	+15.5	+18.1	−0.01	−2.09	+0.22	+0.68	—	—
116	+22.0	+19.9	−0.74	−2.22	+0.40	+1.23	—	—
122	+26.6	−37.9	−0.14	−3.30	+3.15	+3.25	—	—
123	+27.6	−39.7	−0.76	−3.69	+2.95	+3.39	—	—
Région 306.								
$E = 1896.21$; $E' = 1913.18$; $T = 16.97$.								
$k_x = +0.92$; $p_x = +0.0483$; $r_x = +0.0294$;								
$k'_x = +0.73$; $p'_x = +0.0489$; $r'_x = +0.0255$.								
$k_y = -1.08$; $p_y = +0.0345$; $r_y = -0.0155$;								
$k'_y = +0.18$; $p'_y = +0.0413$; $r'_y = -0.0015$.								
2	−63.3	+ 5.3	+3.14	+1.75	+0.05	−2.46	+0.34	−1.99
4	−64.9	−34.2	+0.39	+0.56	+1.86	−0.84	−2.79	−1.79
6	−59.1	+42.3	+0.57	+1.20	−1.39	−3.27	0.00	−1.66
24	40.3	+35.7	+0.84	+0.50	+0.32	1.96	+0.51	0.28
27	−43.9	+ 4.0	−0.02	+1.63	−0.09	−0.52	−0.39	−0.97
34	−31.8	−12.8	+2.07	+1.41	+2.04	−0.13	+0.66	−0.25
44	25.0	+27.2	+1.05	+1.18	0.84	1.83	+1.47	0.97
49	21.4	32.3	-0.01	0.02	+1.17	+0.19	-1.11	1.17
68	+ 1.2	+52.2	-0.44	0.00	1.66	3.38	+2.09	0.98
69	+ 0.9	+30.1	−0.99	−0.62	-1.47	−2.48	+0.88	1.28
70	+ 3.0	+18.0	−1.15	−1.25	−2.12	−2.89	+0.26	−2.25
77	+ 1.7	−51.2	+0.76	+1.21	+2.04	−0.67	+0.48	−1.69
80	+ 6.8	+36.2	−0.73	−1.04	+0.81	−0.71	+1.26	+1.03
81	+ 9.1	+ 9.8	+0.50	+0.96	+1.10	+0.34	+2.26	+0.71
83	+ 8.8	−43.9	−0.01	+0.30	+3.32	+1.49	+0.19	+0.37
90	+13.8	− 8.7	−0.05	+0.09	+0.53	+0.01	+1.27	−0.39
97	+15.7	+34.1	−0.90	−1.84	−3.00	−4.44	+1.15	−2.74
103	+22.2	+61.1	−2.13	−1.98	−6.14	−6.21	+1.53	−4.12
108	+20.7	− 9.3	−1.59	−0.42	−0.34	−0.87	+0.57	−1.23
110	+27.9	+49.0	-1.51	−2.62	-2.32	−3.36	+1.46	1.20
111	+25.6	- 8.0	−1.13	−0.82	− 0.35	−0.46	+0.87	−0.94
115	+31.5	43.8	0.62	−0.71	+2.05	+1.26	+0.48	-0.17
125	+48.4	+ 0.4	−4.03	3.74	−0.05	-0.23	−0.69	−0.16
130	+54.6	+25.9	−1.67	−2.65	+0.16	0.06	+2.03	+1.04
25	−45.1	+28.7	−0.06	+0.90	+0.87	−1.47	—	—
33	−39.4	+26.8	+0.09	+0.08	+0.50	−1.31	—	—
39	−27.6	−37.8	+1.60	+1.54	+3.36	+1.92	—	—
50	−22.6	−33.9	+1.66	+1.56	+2.25	+1.00	—	—
105	+24.8	+30.9	−2.72	−2.35	−0.65	−1.45	—	—
109	+25.0	−26.2	−1.21	−1.29	+1.51	+0.84	—	—
116	+36.0	+28.4	−3.24	−3.33	+0.02	−1.20	—	—
120	+38.3	−38.5	−2.37	−1.89	+1.71	+1.12	—	—
Région 307.								
$E = 1895.26$; $E' = 1910.29$; $T = 15.03$.								
$k_x = +1.50$; $p_x = +0.0141$; $r_x = +0.0161$;								
$k'_x = +0.27$; $p'_x = +0.0057$; $r'_x = +0.0192$.								
$k_y = -1.22$; $p_y = -0.0136$; $r_y = -0.0058$;								
$k'_y = -0.89$; $p'_y = -0.0135$; $r'_y = +0.0249$.								
3	−59.6	+28.4	−3.85	−2.20	+2.09	+0.50	−2.22	+0.42
13	−52.9	− 1.7	−1.16	−1.48	+1.77	−0.18	−0.99	+0.26
15	−51.0	−31.3	−0.46	−0.20	−0.01	−1.99	−0.50	−1.14
28	−43.2	−36.7	−1.97	−1.32	+0.62	−0.10	−1.83	+0.11
33	−38.6	+13.8	−2.55	−1.23	+0.63	−0.24	−1.15	−0.68
37	−37.8	−46.2	−1.14	−0.88	+0.78	−1.22	−1.31	−0.29
60	−16.0	+58.9	−3.56	−0.90	+1.95	+1.61	−0.46	+0.08
61	−17.9	+58.0	−3.70	−2.00	+2.11	+1.82	−1.12	+0.30
82	− 7.8	+61.8	−2.27	−0.57	+0.94	+1.02	+0.48	−0.84
91	− 4.0	+ 9.1	−2.83	−1.26	+0.38	+0.03	−1.04	−0.93
95	+ 0.5	+37.5	−3.80	−2.05	−0.22	0.80	−1.37	−2.08
109	+10.9	−42.5	+1.09	+0.68	+1.75	+2.00	+1.12	+1.29
123	+24.7	+25.1	−2.45	−0.65	+0.38	+0.50	+0.02	−1.19
127	+23.3	− 3.0	−3.08	−2.02	+0.74	+0.85	1.38	-0.52
130	+23.4	21.6	−2.73	-2.01	+2.17	+1.87	− 1.63	+1.03
133	+21.5	59.2	−0.31	+0.45	− 1.61	- 1.44	+0.12	− 1.98
134	+29.4	+34.0	− 2.99	− 1.51	+2.09	+2.76	−0.47	+0.63

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
140	+27.6	−23.6	−0.82	+0.65	−0.12	−0.26	+0.66	−1.19
145	+32.2	−52.5	−0.94	+0.09	+0.81	+0.11	−0.15	−0.19
147	+38.6	+21.3	−1.98	−1.04	+0.85	+1.85	+0.13	−0.36
148	+35.7	+10.0	−2.48	−0.45	−1.00	+0.10	−0.05	−1.98
157	+43.7	−0.2	−1.87	−0.04	+0.68	+1.89	+0.36	−0.19
158	+44.1	−38.0	−2.66	−1.54	−0.83	−0.24	−1.45	−1.49
164	+53.1	+27.8	−2.45	−1.05	+0.24	+0.61	+0.15	−1.51
170	+57.3	+31.1	−3.03	−0.75	+0.17	+2.01	+0.11	−0.93
—	−36.1	−17.4	−0.11	+0.28	+0.09	−0.94	+0.30	−0.90
—	+40.5	−54.2	+0.55	+1.11	−0.39	+0.19	+1.16	−0.81
30	−36.1	+18.0	−1.29	−0.25	+1.74	+0.23	—	—
36	−37.5	−31.1	−0.60	+0.44	+1.41	−0.28	—	—
46	−25.3	+27.4	−1.89	−0.88	+1.37	+0.47	—	—
56	−23.1	−20.0	−0.39	+0.43	+0.99	+0.03	—	—
122	+21.8	+33.3	−2.50	−1.28	+1.91	+1.61	—	—
131	+23.3	−32.8	−1.06	+0.09	+0.57	+0.72	—	—
135	+27.2	+33.7	−1.93	−0.74	+1.46	+2.46	—	—
141	+25.3	−25.8	−2.00	+0.15	+0.49	+1.32	—	—

Région 308.

$E = 1895.21$; $E' = 1913.19$; $T = 17.98$.

$k_x = -0.98$; $p_x = +0.0098$; $r_x = +0.0215$;
$k'_x = -1.07$; $p'_x = +0.0159$; $r'_x = -0.0039$.
$k_y = +0.45$; $p_y = +0.0159$; $r_y = +0.0063$;
$k'_y = -0.06$; $p'_y = +0.0098$; $r'_y = -0.0304$.

14	−48.3	−46.0	+2.04	+1.21	−0.35	+1.55	−0.42	−0.38
16	−44.5	+18.8	+0.94	+1.31	−3.23	−1.25	−0.31	−2.34
40	−15.6	−61.4	+2.36	+1.01	+0.84	+1.94	−0.08	+0.61
41	−17.5	−62.3	+1.15	+0.17	+1.12	+1.94	−1.14	+0.71
46	−11.3	−1.4	+0.22	+0.21	−3.05	−1.77	−0.96	−2.36
53	−9.8	+24.8	−1.40	+0.59	−1.46	+0.42	−1.34	−0.13
60	−7.5	−58.5	+3.08	+2.02	−0.56	−0.24	+0.91	−1.04
69	−3.7	−13.0	+1.16	+0.95	−1.65	−0.26	−0.13	−0.97
80	+9.0	+11.1	−1.63	−0.98	−1.63	−0.83	−2.11	−0.78
83	+6.0	−43.8	+2.16	+1.66	+1.79	+1.90	+0.58	+1.54
90	+16.7	+51.8	−0.83	+0.49	+0.01	−0.08	−0.52	+1.02
107	+28.4	+2.8	+0.60	+0.80	−1.77	−1.36	+0.06	−0.99
128	+49.3	−19.2	+0.78	−0.13	−0.38	−1.97	−0.24	−0.63
130	+53.0	+53.3	−1.30	−0.11	−1.96	−3.16	−0.58	−1.04
135	+63.1	+27.9	−0.63	−0.39	−0.04	−1.75	−0.48	+0.41
19	−36.4	+28.8	+0.87	+1.30	−0.73	+0.89	—	—
25	−31.3	−30.9	+1.38	+1.30	−0.41	+1.02	—	—
29	−26.3	+22.0	+1.12	+2.03	−0.91	+0.87	—	—
34	20.3	−30.8	+1.90	+1.43	0.28	+1.03		
95	+24.8	+26.4	−0.06	+0.70	−0.97	−0.84	—	—
103	+25.8	+28.3	−0.16	+0.86	−0.93	−1.36	—	—
111	+28.0	−33.0	+2.09	+0.68	−0.22	−0.67	—	—
117	+34.1	−25.9	+1.03	+0.23	+1.11	−0.29	—	—

Région 309.

$E = 1896.16$; $E' = 1914.13$; $T = 17.97$.

$k_x = -0.18$; $p_x = +0.0476$; $r_x = +0.0127$;
$k'_x = +1.35$; $p'_x = +0.0439$; $r'_x = -0.0021$.
$k_y = -4.11$; $p_y = +0.0521$; $r_y = -0.0296$;
$k'_y = -1.12$; $p'_y = +0.0478$; $r'_y = -0.0403$.

8	−56.0	+9.4	+1.82	−0.27	+4.40	+1.47	−1.15	−1.17
26	−48.8	+16.6	+1.17	−0.43	+5.34	+2.33	−1.18	+0.34
33	−43.3	+51.7	+0.84	−0.85	+3.75	−0.10	−1.12	+0.28
42	−36.4	+51.0	+1.15	−0.37	+1.59	−0.99	−0.42	−1.04
48	−39.0	−9.5	+3.21	+0.31	+2.82	−0.59	+0.51	−3.33
50	−31.5	+52.2	−0.03	−0.17	+2.68	−0.23	−0.68	+0.11
56	−31.1	−40.4	+1.86	0.00	+4.52	+1.60	−0.12	−2.65
61	−26.1	+16.4	+1.13	+0.18	+3.64	+0.54	+0.13	−0.62
91	−8.6	+60.4	−0.42	−0.84	+2.63	+0.05	−0.12	+1.44
127	+1.4	−29.7	+0.35	−1.39	+4.13	+1.11	−0.03	−1.43
137	+6.9	−29.0	−3.35	−4.06	+2.67	−0.21	−2.96	−2.59
139	+5.8	−51.6	−1.73	−4.19	+4.87	+0.64	−2.38	−2.24
140	+9.5	−57.4	+1.00	−1.45	+6.98	+2.37	+0.49	−0.47
141	+14.4	+51.7	+1.85	+1.13	+0.84	−3.16	+3.01	−0.69
144	+11.2	−1.7	+0.37	−1.35	+0.48	−2.23	+0.59	−3.18
188	+36.0	+20.0	−2.72	−4.41	+2.66	−0.81	−1.23	+0.57
211	+46.7	+19.3	−0.96	−3.21	−1.10	−4.23	+0.74	−2.68
216	+51.7	−19.1	+0.44	−2.46	+2.82	−0.60	+1.84	−0.65
217	+58.5	+40.2	−1.66	−3.77	+0.92	−3.43	+0.76	+0.18
218	+56.1	+29.5	−4.91	−5.86	+1.62	−1.85	−2.08	+0.71
225	+60.1	−53.3	−2.26	−5.29	+3.70	+0.37	−0.72	−1.14
—	−11.2	+18.4	+3.72	+3.00	+3.32	+0.86	+3.53	+0.00
55	−31.3	−36.3	+3.06	+0.06	+6.99	+4.15	—	—
59	−25.7	+39.8	+0.67	−0.09	+3.05	+0.34	—	—
60	−25.1	+34.4	+0.47	−0.60	+2.74	+0.69	—	—
67	−29.7	−33.5	+1.77	+0.13	+6.73	+3.61	—	—
166	+20.9	−32.7	−0.80	−2.51	+4.91	+1.82	—	—
168	+27.6	−41.5	−1.27	−2.55	−1.30	−1.86	—	—
180	+33.4	−35.7	−1.25	−3.09	+5.20	+1.79	—	—
186	+37.6	−35.5	−1.76	−2.49	+1.03	−2.47	—	—

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
Région 310.								
	E = 1895.30; E' = 1913.27; T = 17.97.							
	k_x = + 0.28; p_x = + 0.0354; r_x = − 0.0281.							
	k'_x = + 1.68; p'_x = + 0.0332; r'_x = + 0.0013.							
	k_y = + 0.54; p_y = + 0.0250; r_y = + 0.0227;							
	k'_y = − 0.62; p'_y = + 0.0269; r'_y = − 0.0009.							
6	−55.0	− 6.8	+2.00	+0.44	−1.87	+0.20	+0.40	−0.45
9	− 55.6	28.9	0.54	- 0.72	2.22	0.20	1.17	1.39
13	−53.6	−41.0	−0.80	−1.52	−2.93	−0.79	−1.47	−2.38
20	−49.6	−22.8	+0.49	−0.65	−0.09	+1.70	−0.50	+0.72
21	−47.6	−49.3	+1.00	+0.92	+0.46	+2.19	+0.97	+0.52
23	- 44.2	+ 18.7	+ 0.57	0.31	2.57	0.26	0.66	0.49
24	−40.7	−25.1	−0.19	−0.77	−2.78	−0.49	−0.55	−1.89
43	- 31.4	+ 39.4	0.45	2.77	0.48	+ 1.17	2.23	+ 1.67
47	−33.8	+ 1.8	−0.05	−0.84	−4.57	−2.24	−0.65	−3.02
52	27.2	+ 37.3	+ 2.09	+ 0.25	3.09	- 0.75	+ 0.72	0.69
55	−28.3	−10.3	+0.66	−0.57	−2.17	+0.09	+0.19	−1.04
59	−23.0	+ 8.3	+0.10	−1.30	−2.22	−0.05	−0.51	−0.71
69	−10.7	+60.5	+1.08	−1.96	−0.79	+0.36	−0.64	+1.43
71	− 10.9	+22.6	−1.52	−3.14	−2.15	−0.05	−2.03	−0.43
72	14.7	+ 6.5	- 0.50	1.24	1.74	+ 0.20	0.48	0.48
82	− 8.4	59.2	2.47	2.13	0.51	+ 1.12	0.82	1.18
84	− 1.9	−33.8	−0.17	+0.31	+1.04	+1.71	+1.44	+0.47
106	+17.2	−24.8	−0.53	−1.10	+1.78	+2.75	+1.09	+1.39
144	+35.6	−21.7	−2.45	−3.15	+1.24	+1.25	−0.31	+0.25
153	+41.2	+ 6.9	−1.05	−2.55	−1.37	−0.39	+0.50	−1.19
163	+47.7	+16.6	−1.58	−3.20	+0.22	+0.23	0.00	+0.10
44	−31.6	+28.1	+1.34	−0.96	−2.00	−0.18	—	—
48	−31.7	−28.4	+0.53	−0.11	−0.42	+1.47	—	—
53	−29.5	+35.1	+1.52	−0.70	−2.17	−0.09	—	—
62	20.4	- 31.0	0.40	1.22	0.21	+ 1.28		
113	+ 24.0	+ 26.2	0.09	2.44	+ 0.06	+ 0.02		
123	+29.2	+29.5	−0.27	−2.53	−1.18	−0.46	—	—
136	+32.7	−26.2	−2.21	−2.54	+0.78	+1.23	—	—
137	+ 32.9	31.5	- 2.81	3.17	+ 0.94	+1.65		—
Région 311.								
	E = 1897.98; E' = 1914.01; T = 16.03.							
	k_x = − 1.57; p_x = + 0.0599; r_x = + 0.0105;							
	k'_x = + 1.23; p'_x = - 0.0515; r'_x = − 0.0322.							
	k_y = − 2.20; p_y = + 0.0692; r_y = + 0.0163;							
	k'_y = − 0.52; p'_y = + 0.0524; r'_y = + 0.0074.							
3	−61.5	+ 2.6	+5.82	+3.31	+0.59	+0.10	+0.94	−0.12
5	57.0	+ 48.1	+ 3.58	+ 2.65	1.96	− 1.96	- 0.75	+ 0.28
10	−58.6	−50.2	+3.39	−1.73	+3.66	+2.27	−2.06	−0.75
12	−53.6	−21.9	+3.12	−0.44	+1.94	+0.05	−1.57	−1.06
15	- 47.9	+ 17.1	+ 5.36	+ 2.78	+ 1.89	+ 0.74	+ 1.04	+ 1.56
41	−29.7	−34.7	+3.41	−1.14	+3.38	+0.96	−0.31	−0.95
49	- 24.8	25.9	+ 2.19	- 1.89	+ 4.25	- 2.31	1.10	+ 0.63
55	15.9	38.8	+ 3.49	1.56	5.15	+ 2.41	+ 0.33	+ 0.25
56	−18.9	−50.0	+3.03	−1.34	+4.13	+2.04	+0.16	−1.09
69	− 4.1	+40.9	+0.94	−0.34	−1.35	−2.58	−0.54	−0.79
71	− 1.2	−32.5	+1.53	−1.97	+3.38	+1.33	−0.10	−0.96
81	+ 3.1	−29.3	+0.78	−2.85	+3.47	+ 0.91	−0.71	−0.99
104	+20.2	−16.5	+1.93	−1.34	+2.91	+0.90	+1.43	−0.69
109	+ 25.5	27.1	- 0.73	- 4.88	+ 3.41	+ 1.24	− 1.26	− 0.99
117	+37.8	+54.9	−1.39	−2.81	−1.64	−3.19	−0.76	−0.88
127	+44.7	−56.0	−0.44	−5.16	+5.31	+2.86	+0.12	−1.21
128	+48.1	+48.0	+3.38	+2.45	+1.10	−1.80	+4.90	+0.64
133	+ 54.1	+ 59.7	2.58	3.66	0.59	2.61	− 0.92	+ 0.03
135	+50.4	−43.0	+0.08	−4.20	+4.81	+2.25	+1.04	−1.04
-	+ 42.4	+ 7.1	1.49	4.27	+ 1.90	- 0.99	- 0.77	0.97
22	35.4	+ 30.3	+ 3.24	- 1.53	- 0.58	1.24	—	-
31	−33.2	−20.9	+4.32	+0.07	+3.35	+2.17	—	—
37	−25.6	+27.4	+2.56	+0.99	−0.45	−1.63	—	—
40	−27.0	−26.1	+3.30	−0.93	+3.75	+1.32	—	—
94	+19.2	−24.7	+0.55	−3.26	+4.60	+2.34	—	—
103	+ 24.9	- 26.4	0.03	1.61	+ 1.08	− 0.16	—	
106	+ 25.6	+ 29.0	0.06	- 1.65	+ 0.74	0.89		—
108	+27.9	−23.5	−0.11	−3.20	+3.46	+1.13	—	—
Région 312.								
	E = 1895.22; E' = 1913.18; T = 17.96.							
	k_x = − 0.44; p_x = + 0.0231; r_x = + 0.0016;							
	k'_x = − 0.75; p'_x = + 0.0324; r'_x = + 0.0039.							
	k_y = + 0.15; p_y = + 0.0225; r_y = − 0.0008;							
	k'_y = + 1.76; p'_y = + 0.0203; r'_y = + 0.0229.							
3	62.8	− 34.6	+ 0.67	0.10	+ 0.48	2.90	2.14	0.30
12	−46.0	+16.8	+1.97	+1.92	−1.88	−4.69	+0.12	−1.46
20	−44.3	−48.6	−0.80	−1.16	+0.10	−3.17	−2.94	−1.13
24	−35.9	− 7.9	+1.30	+1.46	+1.16	−1.33	−0.23	+1.09
25	−32.5	+44.6	+1.24	+1.02	−0.53	−3.50	−0.24	+0.25
39	−23.6	+18.4	− 7.32	− 6.98	− 9.88	−11.99	− 8.35	− 9.33
43	−24.9	− 57.1	+0.71	+1.30	+0.08	−3.07	−0.44	−1.48
44	−19.3	+60.7	− 0.03	−0.44	−1.69	−4.91	−1.20	−0.83
51	14.8	+ 47.6	0.05	0.11	2.16	4.79	0.95	1.33
54	− 5.4	+23.4	+0.32	+1.24	−1.58	−2.89	+0.10	−0.71
60	− 4.1	+20.8	+0.41	+1.25	−0.73	−2.15	+0.18	+0.01
67	+ 0.4	− 7.0	+0.84	+0.87	−1.42	−2.78	+0.25	−1.30
71	+ 8.4	+43.6	+0.07	+1.26	−2.45	−4.34	+0.42	−1.59
72	+ 9.9	+ 29.5	− 0.21	+ 0.52	3.58	- 4.35	0.08	− 2.49
79	+10.1	−32.6	−0.19	+0.84	+0.93	−0.62	−0.08	+0.30

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
80	+16.3	31.3	-1.04	0.36	3.38	4.23	0.75	2.36
81	+15.8	+30.2	−0.23	−0.06	−3.28	−4.39	−0.22	−2.41
87	+23.7	− 8.5	−0.77	−1.32	−1.67	−2.23	−1.00	−1.43
89	+23.5	−43.9	+1.02	+1.75	−0.15	−1.23	+1.32	−0.93
93	+32.0	+13.3	−0.94	−0.93	−0.97	−1.16	−0.60	−0.17
97	+39.8	+22.0	−1.64	−0.76	−1.20	−1.67	−0.62	−0.44
101	+42.7	− 6.2	−3.05	−2.09	+0.44	+0.78	−1.99	+0.96
107	+45.9	−40.4	+0.21	−0.77	−0.10	+0.02	+0.29	−0.45
109	53.7	60.5	1.91	2.02	1.98	2.26	1.24	1.18
110	+55.7	+59.5	−0.84	−1.51	−0.28	−1.01	−0.06	+0.96
111	+55.2	+45.5	−1.87	−2.41	−2.16	−2.21	−1.07	−0.87
115	+59.8	−30.2	−2.35	−1.27	+0.08	+0.57	−0.83	−0.02
116	+60.6	+27.7	−0.61	−0.74	−2.33	−2.49	+0.48	−1.53
—	−42.0	+17.5	−0.27	+0.11	−7.32	−9.50	−1.79	−6.61
31	−28.8	+23.9	+1.23	+1.62	−0.34	−2.57	—	—
33	−27.2	−31.6	+1.44	+1.72	+0.64	−1.82	—	—
35	−25.4	−36.6	+0.80	+1.60	+0.38	−1.80	—	—
38	−21.2	+24.0	+0.69	+1.46	−0.75	−2.77	—	—
88	+24.4	−15.5	−0.25	−0.16	+0.14	−0.84	—	—
92	+33.9	+14.4	−0.61	−0.70	−0.78	−1.07	—	—
100	+42.9	+33.1	−0.32	−0.63	−0.90	−1.93	—	—
103	+41.0	−14.1	−0.37	−0.20	+0.42	−0.29	—	—

Région 313.

$E = 1895.29$; $E' = 1913.26$; $T = 17.96$.

$k_x = -1.27$; $p_x = +0.0127$; $r_x = +0.0421$;
$k'_x = -1.69$; $p'_x = +0.0240$; $r'_x = +0.0485$.
$k_y = +1.43$; $p_y = +0.0228$; $r_y = -0.0096$;
$k'_y = +3.12$; $p'_y = +0.0186$; $r'_y = -0.0245$.

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
2	−58.3	+25.9	+2.43	+2.23	−0.59	−0.92	+0.95	+1.06
10	−46.4	−61.7	+5.22	+5.38	−1.81	−3.38	+0.17	−2.39
12	−42.4	− 8.3	+5.40	+5.28	−3.15	−3.75	+2.70	−2.07
13	−39.0	+34.7	+1.40	+1.39	−0.93	−1.30	+0.76	+1.21
44	−20.6	+37.5	+0.60	+0.82	−2.82	−3.92	+0.55	−0.66
50	−21.3	−40.3	+1.87	+2.89	−1.22	−2.51	−1.31	−0.78
81	−10.5	−41.2	+2.88	+4.45	−4.15	−5.55	+0.13	−3.61
92	− 1.0	−31.2	+1.02	+2.13	−0.94	−2.74	−1.33	−0.22
95	+ 1.6	−20.4	+2.03	+2.85	−2.14	−4.15	+0.06	−1.26
104	+12.3	+ 2.7	+0.09	+1.15	−2.36	−4.32	−0.51	−0.80
106	+12.0	−56.8	+0.24	+0.69	−2.16	−4.81	−3.36	−2.18
121	+20.9	+11.0	+0.32	+0.51	−1.96	−3.18	−0.18	+0.28
130	+31.4	+39.1	−1.22	−1.52	−4.16	−5.74	−0.50	−1.33
149	+54.8	− 0.9	−0.39	−0.82	−1.25	−3.58	−1.11	+0.77
152	+51.6	−60.9	+1.20	+1.92	−1.65	−4.15	−1.72	−1.00
157	+56.1	− 5.4	+0.08	+0.19	−1.54	−3.89	−0.56	+0.40
164	+62.3	+ 0.7	−0.11	−0.79	−0.52	−3.69	−0.75	+1.25

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
166	+ 62.8	44.8	+ 0.82	0.71	3.05	6.44	1.59	2.32
—	+23.5	+47.2	−0.62	−1.28	−0.71	−3.20	+0.14	+1.70
35	−29.0	+32.7	+0.28	+0.43	−2.16	−3.31		
40	−29.3	−18.7	+2.50	+3.18	−0.78	−2.21	—	—
41	−28.5	−30.9	+3.15	+4.44	−1.10	−2.14	—	—
48	−23.5	+27.7	+0.11	+0.85	−0.86	−2.32	—	—
113	+17.7	−30.5	+2.25	+2.75	−0.07	−2.47	—	—
119	24.8	27.5	0.03	0.10	2.23	3.89		
124	+25.2	+18.5	+0.28	+0.49	−2.86	−4.88		
126	+28.9	−32.6	+2.08	+2.14	−1.09	−3.29		

Région 314.

$E = 1895.26$; $E' = 1910.29$; $T = 15.03$.

$k_x = -1.26$; $p_x = +0.0078$; $r_x = -0.0102$;
$k'_x = +1.64$; $p'_x = +0.0113$; $r'_x = +0.0233$.
$k_y = +3.42$; $p_y = -0.0012$; $r_y = -0.0282$;
$k'_y = +0.81$; $p'_y = +0.0019$; $r'_y = +0.0222$.

No	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
4	−56.1	+28.0	+1.90	−3.13	−1.16	−2.67	−0.78	+0.05
10	−51.8	+31.1	+2.54	−2.41	−2.57	−2.99	−0.03	−0.81
32	−34.6	+43.6	+4.07	−0.76	−1.43	−1.22	+1.80	+0.70
40	−29.4	+32.9	+0.88	−3.30	−2.22	−1.06	−1.08	+0.39
62	−15.2	−54.2	+1.04	−0.33	−4.13	−2.43	+0.05	−1.22
69	−10.5	+ 3.9	+2.04	−1.13	−2.53	−0.87	+0.57	+0.38
82	− 8.6	−44.5	+0.31	−1.52	−2.43	−0.01	−0.79	+0.85
85	− 1.6	+29.4	+0.98	−3.29	−3.01	−0.30	−0.78	+0.46
90	− 4.7	+16.7	+2.09	−0.96	−2.80	−0.49	+0.82	+0.46
109	+ 9.3	+16.0	+1.87	−1.28	−3.63	−0.62	+0.68	+0.02
113	+10.4	+32.7	+2.91	−1.21	−3.50	−0.65	+1.35	+0.08
124	+19.3	+16.9	−0.10	−3.36	−5.26	−2.06	−1.24	−1.48
130	+21.9	+23.6	+0.71	−3.05	−4.71	−1.20	−0.61	−0.77
136	+23.9	−41.9	−0.82	−2.68	−3.74	−0.44	−1.60	+0.08
142	+27.3	+18.6	+1.30	−2.57	−4.74	−0.55	−0.06	−0.44
148	+28.3	−55.8	+2.04	−0.45	−4.21	−0.09	+0.89	+0.02
154	+34.3	−32.2	−0.50	−2.40	−5.73	−1.76	−1.14	−1.53
167	+42.3	+15.3	+0.43	−3.16	−7.20	−2.17	−0.67	−2.44
176	+46.4	−13.0	−0.08	−2.56	−5.79	−0.59	−0.77	−0.93
180	+52.9	− 7.3	+0.25	−3.07	−3.81	+0.97	−0.76	+0.85
186	+60.2	+ 8.7	+0.67	−2.74	−5.31	+0.62	−0.21	−0.04
—	+50.5	−26.5	+0.66	−2.63	−6.46	−0.08	−0.49	−1.01
41	− 26.6	+26.4	+1.16	−2.70	−2.98	−2.07	-	-
43	−25.1	−19.7	+1.46	−0.75	−2.09	−0.60		—
44	−26.9	−31.4	+1.32	−0.40	−3.31	−1.83		-
49	−23.5	+34.5	+1.99	−1.81	−2.39	−1.04	—	
131	+20.1	+24.8	+1.72	−2.04	−3.70	−0.15	—	—
132	+21.2	+16.5	+1.28	−2.31	−4.22	−0.38	—	—
144	+27.3	−22.4	+0.66	−1.46	−4.30	−0.75	—	—
146	+29.0	−33.8	+0.47	−1.52	−4.21	+0.23	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
Région 315.								
	$E = 1895.21$; $E' = 1913.18$; $T = 17.97$.							
	$k_x = +0.32$; $p_x = +0.0081$; $r_x = +0.0073$;							
	$k'_x = -0.34$; $p'_x = +0.0185$; $r'_x = -0.0135$.							
	$k_y = +0.43$; $p_y = +0.0242$; $r_y = -0.0094$;							
	$k'_y = -1.75$; $p'_y = +0.0359$; $r'_y = +0.0186$.							
4	57.6	−18.8	+1.03	+0.95	0.46	0.13	+0.26	−1.25
5	−51.7	+53.5	+1.22	+1.63	−0.79	−2.14	+0.56	−0.28
11	−42.3	+27.8	+0.94	+1.04	0.07	+0.58	+0.33	+0.62
23	28.3	+51.7	0.61	+0.62	−1.95	1.29	0.54	0.59
25	29.1	+16.3	+1.26	+2.37	1.62	0.50	+1.36	1.09
34	−15.7	+16.7	+0.91	+2.39	−1.27	+0.81	+1.37	−0.32
37	15.5	−5.3	−0.40	+0.36	1.37	+1.14	0.22	0.86
46	−11.5	−53.2	−0.34	−0.63	+0.04	+2.74	−0.48	−0.82
47	−9.3	+53.7	−0.22	+1.94	−1.26	−0.19	+0.56	+0.27
51	6.7	+19.4	+0.01	+1.43	1.95	+0.92	+0.56	0.56
57	−5.3	−12.4	+6.79	+7.71	+0.22	+2.75	+7.21	+0.47
73	+0.8	−0.8	+0.07	+1.23	−1.38	+1.86	+0.65	−0.44
79	+7.3	+29.4	−1.08	+0.11	1.23	+1.11	0.49	+0.13
95	+19.5	+39.0	−1.46	−0.14	−2.43	−0.49	−0.67	−1.04
105	+23.8	+27.6	−0.45	+0.68	1.53	+0.94	+0.33	0.23
107	+24.8	+8.7	+0.66	+1.81	−1.11	+2.74	+1.52	+0.30
108	+23.0	0.3	0.89	0.37	2.43	+2.01	0.33	0.98
125	+35.2	+36.6	2.19	0.81	3.00	−0.18	1.15	1.31
141	+58.5	+48.8	−2.94	−1.72	−1.53	+1.83	−1.71	+0.68
147	+62.4	−2.2	−0.99	−1.45	−3.01	+1.35	−0.39	−1.84
—	+21.3	+37.1	+0.15	+1.48	−0.77	+1.42	+0.97	+0.68
15	−35.3	+20.7	+0.21	+1.26	−0.92	−0.16	—	—
22	−31.0	−24.3	+0.42	+0.09	+0.85	+2.19	—	—
29	−22.9	−25.4	+0.03	+0.68	+0.34	+2.56	—	—
42	−13.9	+20.7	−1.03	+1.15	−0.83	+0.78	—	—
111	+25.9	+27.6	−0.58	+0.43	−1.26	+1.43	—	—
113	+28.6	−19.0	−0.50	−0.40	−0.81	+2.80	—	—
114	+28.0	−29.5	−0.52	−0.37	+0.24	+3.01	—	—
117	+31.4	+32.2	−0.67	−0.24	−1.24	+1.46	—	—
Région 316.								
	$E = 1902.08$; $E' = 1922.21$; $T = 20.12$.							
	$k_x = -3.13$; $p_x = +0.0059$; $r_x = -0.0350$;							
	$k'_x = -0.40$; $p'_x = +0.0143$; $r'_x = -0.0196$.							
	$k_y = -0.69$; $p_y = +0.0082$; $r_y = +0.0238$;							
	$k'_y = -0.69$; $p'_y = +0.0017$; $r'_y = +0.0109$.							
4	−55.4	+40.1	+5.46	+2.15	−1.81	−2.79	+0.38	−1.14
5	58.1	+29.4	+3.11	+0.55	1.25	−1.37	−1.32	0.16
9	−56.5	−53.4	+0.43	−1.70	−0.25	−2.17	−1.51	−0.49
18	−45.5	+3.6	+0.67	−1.90	−2.66	−3.57	−2.94	−2.30
41	−37.3	−19.8	+2.18	−0.22	−2.40	−3.40	−0.62	−2.34
82	−19.5	−7.7	+2.95	+0.75	+0.08	−1.65	+0.09	−0.48
99	−6.0	−1.1	+2.34	−0.82	−0.42	−1.70	−1.04	−0.96
102	−1.9	+58.9	+4.38	+0.83	+0.68	−0.48	−0.78	+0.42
103	−0.7	+54.4	+4.71	+1.48	−0.29	−1.56	−0.16	−0.64
110	2.1	−17.3	+1.57	−0.70	1.85	3.50	0.87	2.72
119	+3.3	−2.6	+2.37	−0.36	−0.20	−1.76	−0.65	−1.05
122	+4.6	−41.1	+0.96	−1.41	+0.57	−0.61	−0.81	−0.30
123	+0.4	47.7	+0.71	0.78	+1.33	−0.76	−0.49	+0.04
126	+6.6	+58.6	+3.82	−0.19	+1.52	+0.62	−1.48	+1.24
131	+5.4	+14.8	+2.72	1.08	−1.75	−2.84	1.29	2.31
133	+5.3	−23.2	+3.16	+0.10	−0.55	−0.85	+0.55	−0.91
147	+17.6	−15.4	+2.64	−0.29	+0.74	−1.46	+0.00	−0.74
148	+17.3	−26.1	+0.85	−1.43	+1.00	−0.22	−1.17	−0.03
159	+25.5	+22.5	+4.62	+0.80	+0.51	0.57	+0.58	−0.36
167	+31.1	−58.8	+0.41	−1.06	+0.85	−2.11	−0.17	−1.46
178	+42.8	+51.8	+2.14	−2.31	+0.36	−1.43	−2.83	−1.02
180	+44.7	+21.7	+4.08	+0.61	+0.12	−1.37	+0.43	−1.29
195	+46.5	+31.3	+3.45	+0.13	−0.29	−2.28	−0.36	−1.94
204	+52.9	+1.6	+4.65	+0.94	+1.24	−0.43	+1.52	−0.51
208	+56.3	+20.0	+1.05	−2.47	−3.19	−5.05	−2.45	−5.00
209	+57.5	+8.6	+4.78	+1.23	+1.15	−1.24	+1.58	−1.00
210	+58.3	−2.7	+4.22	+0.71	+1.65	−0.32	+1.35	−0.36
—	+17.4	+54.4	+4.36	+0.10	+0.63	−0.43	−0.84	+0.07
—	+22.0	+13.9	+5.00	+1.04	−1.33	−2.97	+1.09	−2.46
—	+24.5	+11.2	+3.06	+0.29	+0.74	0.62	−0.15	−0.31
35	−39.4	+29.8	+4.69	+1.17	−0.35	−0.60	—	—
51	30.3	−30.6	−2.21	+0.31	+0.38	−1.22	—	—
52	−28.3	+27.6	+4.18	+1.52	−0.45	−1.30	—	
66	−24.2	−31.5	+2.00	+0.24	+0.30	−0.95	—	—
158	+26.1	+30.7	+3.92	+0.53	+1.59	+0.09	—	—
161	+25.7	−20.8	+2.55	−0.32	+2.13	+0.37	—	—
162	+29.4	−33.5	+1.69	−0.94	+0.91	−0.75	—	—
169	+38.7	+27.4	+3.79	+0.68	+0.95	−1.17	—	—
Région 317.								
	$E = 1895.30$; $E' = 1913.27$; $T = 17.97$.							
	$k_x = -2.90$; $p_x = +0.0291$; $r_x = +0.0348$;							
	$k'_x = -0.02$; $p'_x = +0.0329$; $r'_x = +0.0176$.							
	$k_y = -2.35$; $p_y = +0.0120$; $r_y = +0.0122$;							
	$k'_y = -0.62$; $p'_y = +0.0105$; $r'_y = -0.0297$.							
2	−63.8	+16.2	+3.01	+1.31	+2.04	+2.36	−0.85	+0.34
25	36.0	−48.8	+4.51	+1.25	+2.51	+2.99	−0.96	+0.40
28	−31.3	+18.3	+0.45	−1.70	+1.91	+2.25	−2.57	+0.52
38	−27.1	+4.4	+4.42	+2.56	+2.30	+1.86	+1.30	+0.41
41	25.1	−20.9	+3.81	+0.40	+0.44	−0.08	−0.68	−1.76

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
44	20.7	+27.8	+ 2.32	- 0.71	0.17	- 0.63	0.56	- 1.75
68	— 8.3	+46.8	+0.52	—1.65	+1.32	— 0.22	—1.05	—0.48
71	— 1.8	+52.5	—0.03	—1.53	+1.31	— 0.18	—0.92	—0.34
76	— 2.3	—61.2	+4.88	+0.54	+3.68	+1.55	—0.43	+0.42
87	+ 5.2	—59.7	+4.72	+0.21	+4.21	+1.62	—0.40	+0.80
90	+ 14.5	+ 41.4	— 0.29	— 2.28	— 3.07	— 5.62	1.21	5.24
101	+18.2	—31.0	+5.83	+1.66	—4.41	— 7.09	+2.03	—7.42
104	+19.5	—49.1	+5.42	+1.35	—4.10	— 7.01	+1.24	—7.42
118	+31.0	+ 0.3	+0.99	—2.12	—0.60	— 2.89	—1.05	—2.96
121	+ 36.5	+ 20.3	0.17	- 1.99	+0.67	1.38	0.87	1.30
122	+ 36.4	+ 20.2	0.08	- 2.36	+ 1.03	1.64	1.02	- 1.24
130	+40.6	— 9.8	+9.65	+6.50	—6.55	—10.05	+7.62	—9.54
—	— 2.9	+33.7	+2.36	+0.91	+1.50	+0.51	+0.96	—0.13
—	—32.9	—12.7	+5.34	+1.77	+2.33	+2.15	+0.74	+0.32
—	+35.0	+23.7	+0.67	—2.73	+2.23	—0.78	—0.77	—0.19
27	—34.4	+30.3	+3.09	+0.76	+1.79	+1.32	—	—
31	—31.9	—32.4	+5.58	+1.64	+2.39	+2.10	—	—
36	—26.0	+26.3	+2.07	+0.18	+1.51	+1.19	—	—
50	—23.0	—28.3	+4.34	+1.35	+2.35	+1.34	—	—
103	+19.9	—38.0	+3.41	+0.06	+2.52	+0.01	—	—
113	+25.5	+38.7	+0.98	—1.57	+2.10	—0.53	—	—
114	+27.7	+31.0	+1.25	—1.29	+2.39	—0.62	—	—
117	+25.4	—39.0	+3.33	—0.25	+3.68	+0.76	—	—

Région 318.

$E = 1895.23$; $E' = 1913.19$; $T = 17.97$.

$k_x = -0.10$; $p_x = +0.0174$; $r_x = +0.0201$;
$k'_x = -0.10$; $p'_x = +0.0216$; $r'_x = +0.0156$.
$k_y = -2.90$; $p_y = +0.0214$; $r_y = -0.0290$;
$k'_y = +0.65$; $p'_y = +0.0225$; $r'_y = -0.0141$.

4	—58.9	+48.1	+6.91	+8.34	+3.13	—0.98	+7.24	—0.26
8	—59.1	—42.9	+3.03	+2.59	+6.43	+1.43	+0.79	+0.59
10	—52.5	+59.6	+0.55	+0.20	+2.80	—0.94	+0.32	—0.01
19	—45.1	—43.8	+1.86	+1.32	+4.76	+0.32	—0.16	—0.52
22	—43.7	—27.1	+2.78	+2.43	+4.29	—0.61	+1.17	—0.82
26	—35.1	—43.1	+0.28	—0.55	+2.87	—1.93	—1.69	—2.35
27	—30.3	+59.7	+0.42	—0.28	+2.07	—2.30	+0.44	—0.58
33	—32.3	—36.4	+0.58	—0.17	+3.71	—0.55	—1.17	—1.04
40	—27.1	—41.6	+1.12	+1.37	+3.92	—0.36	—0.13	—0.84
58	—12.1	—45.0	+0.89	+0.66	+2.09	—1.74	—0.36	—2.19
76	+ 9.0	+57.3	—0.15	—0.40	+0.18	—3.88	+0.82	—1.52
83	+ 9.5	—46.4	+0.91	+ 1.17	+ 3.10	— 0.92	+ 0.30	— 0.84
84	+ 5.7	—51.9	+0.53	+0.48	+ 3.39	- 0.35	0.41	— 0.62
95	+ 12.6	—11.9	— 2.80	— 3.15	- 1.56	- 5.26	— 3.04	- 4.52
100	+15.1	+25.2	—0.14	+0.49	—0.42	—3.06	+0.82	—1.98
109	+22.0	—39.5	—0.03	—0.76	+3.14	—1.00	—0.77	—0.45
115	+ 30.1	+ 47.4	+ 0.04	0.70	+ 1.84	1.85	+ 1.00	+ 0.55
118	+31.1	+ 2.7	—0.89	—1.28	+1.14	—1.95	—0.53	—0.80
119	+31.3	—26.3	+0.58	—0.14	+1.81	—1.90	+0.25	—1.08
120	+30.2	—26.6	—1.70	—2.18	—0.48	—3.74	—1.92	—3.16
135	+48.7	+22.3	+0.07	—0.60	+0.12	—2.59	+0.98	—0.82
140	+ 49.2	48.9	- 2.24	2.66	0.09	3.61	2.46	2.99
141	+54.5	+27.8	—1.13	—1.93	—0.44	—3.73	—0.07	—1.42
144	+54.0	—40.2	+0.05	—1.35	+0.76	—2.44	—0.41	—1.68
146	+59.2	+36.4	—0.33	—1.54	+1.04	—2.52	+0.77	+0.21
149	+ 59.4	49.1	7.10	- 6.42	+ 1.07	2.88	6.58	- 1.82
151	+ 63.4	+ 17.0	- 0.72	1.08	+ 1.86	1.05	+ 0.54	+ 1.01
37	—25.8	+30.5	—0.63	—0.84	+2.93	—1.29	—	—
39	—25.7	—24.3	+1.30	+1.72	+3.54	+0.45	—	—
42	—21.4	+42.6	—0.56	+0.17	+3.29	—1.05		
52	16.3	30.4	+ 1.47	+ 0.98	+ 4.05	+ 0.13		
112	+25.2	—22.0	+0.29	—0.13	+2.99	—0.46		
116	+33.4	+35.5	—0.89	—0.85	+1.04	—1.87		
117	+31.1	+26.0	—0.54	—0.57	+0.98	—1.66	—	—
121	+33.2	—34.5	—0.71	—0.80	+2.94	—0.46		

Région 319.

$E = 1897.98$; $E' = 1914.03$; $T = 16.05$.

$k_x = -2.07$; $p_x = +0.0463$; $r_x = -0.0047$;
$k'_x = +1.12$; $p'_x = +0.0592$; $r'_x = +0.0203$.
$k_y = -3.15$; $p_y = +0.0498$; $r_y = -0.0152$;
$k'_y = -1.11$; $p'_y = +0.0536$; $r'_y = +0.0046$.

8	—59.5	—40.0	+6.34	+4.28	+5.35	+2.50	+1.39	—0.58
10	—52.4	—60.3	+5.29	+4.44	+7.36	+3.60	+1.15	—0.04
13	—47.4	+45.6	+3.72	—0.49	+1.72	—1.35	—1.00	+0.16
16	—45.3	—30.2	+4.07	+1.96	+4.68	+1.57	—0.08	—0.80
17	—42.6	+27.6	+5.23	+1.16	+2.36	—1.04	+0.69	—0.27
23	—35.8	+63.3	+2.35	—2.53	+4.85	+0.91	—1.96	+3.84
33	—33.0	—20.8	+3.52	+1.55	+3.11	+0.79	+0.16	—1.43
34	—30.2	—60.2	+2.72	+2.46	+5.22	+3.05	+0.05	—1.27
39	—28.9	—32.3	+3.17	+1.90	+4.68	+2.33	+0.28	—0.45
41	—28.2	—51.3	+5.21	+3.29	+5.15	+2.79	+1.88	—0.96
53	—17.4	—23.5	+1.57	—0.50	+3.32	+1.23	—1.04	—1.16
65	— 7.3	+24.4	+1.69	—0.90	+1.25	0.00	—0.27	—0.28
82	+ 9.5	+46.3	+1.49	—1.93	+1.23	—1.01	+0.16	+0.42
84	+ 8.1	+ 3.9	+2.04	—1.32	+2.46	+1.06	+0.34	—0.13
85	+ 6.1	—11.7	+0.99	—1.04	+3.81	+1.67	—0.27	+0.03
105	+ 25.9	— 5.7	+ 0.99	— 1.81	+ 1.02	0.21	+ 0.43	- 1.88
107	+ 32.6	+ 62.4	+ 0.33	5.70	- 2.34	3.66	- 0.95	- 1.73
109	+ 30.2	+ 32.3	+ 0.98	2.80	+ 1.72	+ 0.21	+ 0.46	+ 0.66
111	+38.0	+51.3	+0.65	—4.06	+0.87	—0.81	+0.22	+0.75
119	+46.7	+43.7	—0.51	—5.62	+1.04	—1.03	—0.74	+0.38

№	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
120	+ 49.5	+ 27.6	− 0.12	− 4.07	+ 0.03	1.20	0.25	− 1.03
122	+46.0	+ 4.0	+0.05	−3.27	+3.63	+2.37	+0.37	+1.32
124	+ 59.6	+ 3.9	− 1.29	− 4.08	+ 0.96	0.13	+ 0.01	1.19
125	+57.1	− 2.2	−2.50	−5.27	+2.59	+1.88	−1.36	+0.29
−	−31.2	22.8	+2.93	+2.02	+ 6.25	+ 3.36	+ 0.18	+ 1.33
29	−31.9	+41.3	+3.71	+0.24	+2.08	−0.59	—	—
38	−29.6	−24.6	+3.61	+1.35	+3.96	+1.63	—	—
45	−21.5	−23.4	+2.46	+0.51	+4.57	+1.78	—	—
50	−19.2	+32.0	+3.35	−1.03	+2.30	−0.19	—	—
101	+24.9	+34.4	+0.06	−4.51	+0.46	−1.41	—	—
114	+35.6	−18.2	+0.62	−2.21	+4.00	+2.65	—	—
115	+38.1	−37.1	+0.07	−3.36	+4.88	+4.03	—	—
121	+48.5	+26.5	+0.76	−3.21	+0.75	−0.44	—	—

Région 320.

$E = 1895.29$; $E' = 1913.26$; $T = 17.96$.

$k_x = + 1.44$; $p_x = + 0.0073$; $r_x = + 0.0173$;
$k'_x = + 0.24$; $p'_x = + 0.0268$; $r'_x = + 0.0012$.
$k_y = - 0.78$; $p_y = + 0.0234$; $r_y = + 0.0119$;
$k'_y = + 0.78$; $p'_y = + 0.0176$; $r'_y = + 0.0007$.

5	−58.9	− 0.7	−1.71	−0.71	+0.60	−0.08	−1.38	+0.61
6	−57.7	− 5.3	−0.56	+0.57	−0.18	−0.90	−0.19	−0.28
12	−51.4	+ 0.7	+0.34	+0.66	+0.89	−0.71	+0.46	+0.43
14	−52.1	−44.9	+0.33	+0.43	−0.02	−2.33	−0.08	−1.76
26	−38.0	+29.2	+0.10	+2.07	−7.68	−8.54	+1.55	−7.27
29	−36.9	+11.1	−0.57	+1.13	−7.84	−8.17	+0.59	−7.54
38	−15.3	+50.0	+4.15	+6.38	−8.94	−9.85	+6.31	−8.27
54	−14.3	− 8.4	−2.42	−0.75	+0.22	−1.35	−1.06	−0.65
55	−10.9	−29.0	−0.43	+0.71	+0.03	−1.06	+0.53	−1.04
57	−12.8	−38.5	−0.75	+0.16	+0.58	−0.98	−0.03	−0.91
70	− 1.3	−40.4	−2.52	−1.56	−0.44	−2.06	−1.59	−2.06
71	− 0.1	−51.9	−0.69	−0.30	+1.74	+0.01	−0.13	−0.18
72	− 4.9	−58.7	+0.38	+0.04	+2.60	−0.06	+0.42	+0.10
76	+ 8.9	+44.6	−3.39	−1.52	−3.38	−5.80	−1.06	−3.74
119	+48.6	−28.2	−2.34	−1.43	−0.68	−2.61	−0.48	−2.53
−	24.8	+60.3	−3.31	−0.85	−2.29	−4.06	−1.10	−1.78
	31.9	−37.5	−0.08	+0.04	+2.08	−0.49	−0.07	+0.22
—	−39.7	− 5.5	−1.55	−0.48	+0.93	−0.91	−0.90	+0.14
—	+53.8	+33.9	−1.17	+1.23	+1.60	−0.55	+2.10	+0.88
	+28.6	−47.1	−3.70	−1.59	+1.80	−0.92	−1.75	−0.70
—	+ 47.2	45.4	− 5.66	5.55	+ 5.74	+ 3.59	4.38	+ 3.44
32	−31.6	+21.3	−1.78	+0.76	−0.92	−1.84	—	—
35	−20.4	+28.5	−1.69	+0.13	+0.26	−0.77	—	—

№	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
36	21.6	43.3	0.55	+ 0.76	− 1.91	+ 0.36		
46	−18.8	−32.7	−0.62	−0.09	+1.36	−0.48	—	—
99	+ 26.9	19.8	1.13	0.75	− 0.89	− 1.11		
105	+35.7	+43.1	−2.23	−1.46	+0.42	−1.89	—	—
107	+ 37.7	+ 21.9	2.22	1.08	− 0.91	0.63		
116	+42.6	−20.7	−1.66	−1.51	+2.01	+0.18	—	—

Région 321.

$E = 1895.26$; $E' = 1910.29$; $T = 15.03$.

$k_x = - 1.11$; $p_x = - 0.0032$; $r_x = - 0.0144$;
$k'_x = + 0.29$; $p'_x = - 0.0100$; $r'_x = - 0.0261$.
$k_y = + 0.31$; $p_y = - 0.0120$; $r_y = - 0.0065$;
$k'_y = - 0.45$; $p'_y = - 0.0086$; $r'_y = + 0.0088$.

3	− 62.3	−12.7	−0.10	−2.50	−0.55	−0.49	−1.04	−0.39
15	− 45.0	− 14.1	− 1.66	− 0.70	0.80	0.97	+ 0.08	− 1.04
16	−48.9	+ 8.7	+0.93	−0.11	−0.16	−0.35	+0.14	−0.35
19	−41.4	+48.5	−1.08	−2.66	−3.54	−3.48	−2.99	−4.03
23	−40.6	−18.4	+1.00	−1.06	−4.75	−5.27	+0.20	−4.84
31	−32.4	+20.8	+1.59	+0.90	+0.08	−0.07	+0.62	−0.24
43	−22.6	+62.8	+2.37	+0.60	−0.66	+0.62	−0.04	−0.71
44	−22.9	+33.4	+1.33	+0.81	−1.47	−0.56	+0.13	−1.40
45	−24.0	+33.6	+0.49	−0.94	−2.31	−2.32	−1.15	−2.70
49	−20.4	−36.5	+2.06	+0.58	−0.08	+0.37	+1.78	+0.47
50	−24.7	−59.8	+0.47	−0.50	−1.96	−1.78	+0.95	−1.29
59	−19.0	−39.9	+0.24	−0.69	−1.77	−2.09	+0.29	−1.56
73	− 5.3	+11.0	−0.60	−1.18	−3.67	−2.70	−1.49	−3.35
74	− 7.9	+ 6.8	+4.18	+2.60	−3.74	−3.07	+2.90	−3.53
83	− 0.4	+19.6	+2.20	+1.09	−0.79	−0.17	+0.84	−0.75
93	+ 4.9	+10.6	−2.57	−3.80	−2.63	−1.53	−3.84	−2.26
106	+19.0	+62.1	+0.45	−1.24	−2.16	−1.36	−2.18	−2.49
119	+20.2	+24.0	+4.56	+3.18	−0.71	−0.24	+2.84	−0.82
125	+24.3	−40.7	−0.46	−2.60	−5.88	−4.65	−1.27	−4.94
141	+31.7	−39.5	−1.28	−2.81	−1.38	−0.04	−1.86	−0.41
152	+40.4	−12.5	+2.11	+1.04	−1.36	+0.53	+1.15	−0.40
174	+60.6	−11.6	+0.91	+0.69	−0.77	+0.67	+0.22	−0.07
176	+60.1	−57.9	+1.35	−0.44	−0.78	+0.21	+0.82	+0.17
—	−58.0	−25.8	+0.71	−1.85	−0.14	−2.02	−0.07	−0.82
—	−18.9	−39.9	+0.40	+0.10	−0.94	−0.59	+0.77	−0.40
—	+60.9	−58.0	+1.81	+1.25	−1.18	+2.44	+1.89	+1.09
37	−28.9	+38.3	+0.90	−0.33	+0.30	+0.22	—	—
42	27.5	29.0	+ 1.55	− 0.12	0.40	+ 0.13	—	
53	−19.6	+21.9	+0.58	−0.15	−0.68	−0.32	—	—
58	−19.2	−25.5	+1.19	−1.36	+0.24	+1.00	—	—
117	+23.9	+21.5	+2.02	+0.58	+0.30	+1.30	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$f\,x$	$f\,y$
123	+23.5	−29.2	+0.11	−1.68	−1.36	−0.32	—	—
124	+25.0	−36.0	−0.12	−1.10	−1.16	−0.01	—	—
135	+32.9	+23.5	+2.48	+1.57	+0.07	+1.60	—	—

Région 322.

$E = 1895.21$; $E' = 1913.18$; $T = 17.97$.

$k_x = -1.71$; $p_x = +0.0296$; $r_x = +0.0178$;
$k'_x = -2.59$; $p'_x = +0.0279$; $r'_x = +0.0228$.
$k_y = -1.46$; $p_y = +0.0119$; $r_y = +0.0431$;
$k'_y = -1.10$; $p'_y = +0.0162$; $r'_y = +0.0137$.

10	−46.6	+48.7	+0.84	+2.21	−0.88	−0.81	−0.97	−0.11
16	−44.3	− 2.4	+2.14	+2.96	−2.40	−1.12	−0.92	−1.81
30	−38.7	−34.6	+3.44	+4.23	−1.23	−1.15	−0.13	−1.85
36	−26.7	+54.4	+1.44	+2.58	−2.48	−2.38	+0.20	−2.18
41	−23.4	−12.6	+2.78	+3.56	+0.61	+1.13	+0.09	+0.08
44	−23.0	−57.4	+2.82	+3.86	+2.46	+2.26	−0.63	+0.93
53	− 6.5	+63.8	−0.25	+0.43	+2.04	+0.88	−0.95	+1.26
59	− 5.1	−38.0	+2.57	+4.24	+1.42	+0.48	+0.33	−0.72
61	− 4.6	+28.2	+0.44	+2.51	−1.26	−2.23	−0.24	−2.49
66	+ 4.5	+57.3	−0.03	+0.78	+1.99	+1.04	−0.48	+0.91
73	+ 0.7	−32.5	+0.39	+2.00	+0.48	−0.36	−1.59	−1.70
74	+ 7.1	+63.4	+0.08	+0.03	+0.62	−0.99	−0.60	−0.78
81	+ 5.6	−24.1	+1.70	+3.09	+1.67	+1.02	−0.08	−0.43
84	+ 9.5	−43.5	+3.52	+5.00	+3.25	+2.23	+1.50	+0.58
101	+18.1	−44.6	+3.63	+4.69	+2.38	+1.08	+1.62	−0.69
104	+18.6	−58.1	+0.71	+1.27	+3.42	+1.39	−1.80	−0.21
118	+32.3	+20.9	+1.28	+2.44	+3.32	−1.81	+1.06	+0.66
120	+30.1	+13.6	+0.52	+1.70	+2.58	+1.46	+0.10	+0.07
121	+31.0	+ 2.3	+1.03	+2.00	+1.62	+0.01	+0.30	−1.31
132	+44.9	+ 0.7	+0.38	+1.11	+4.38	+2.30	−0.10	+0.79
136	+47.7	+27.4	+0.22	+0.97	+1.63	−0.58	+0.37	−1.72
137	+46.7	+23.3	−1.11	−0.96	+2.04	−0.03	−1.37	−1.27
143	+50.8	+ 3.5	+0.56	+0.80	+3.87	+2.03	+0.06	+0.27
150	+55.5	− 5.1	−0.45	−0.26	+0.07	−2.64	−1.01	−4.21
152	+58.2	−55.6	−0.97	−0.14	+5.17	+3.52	−2.16	+0.63
154	+61.1	−38.4	+0.91	+0.56	+6.73	+3.47	−0.44	+1.54
25	−39.6	+25.5	+1.99	+2.63	−0.29	+0.18	—	—
29	−36.0	−28.6	+3.45	+4.03	+0.37	+1.00	—	—
39	−24.0	+19.6	+2.34	+3.36	−0.33	+0.07	—	—
42	−20.3	−24.6	+2.74	+3.86	+1.04	+1.65	—	—
107	+20.9	+21.7	+0.88	+1.53	+1.81	+0.55	—	—
112	+28.5	−16.4	+1.03	+1.85	+3.26	+2.17	—	—
117	+31.1	+29.8	+0.25	+0.95	+3.02	+1.89	—	—
135	+44.8	−20.8	+0.71	+2.19	+3.00	+1.29	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$f\,x$	$f\,y$

Région 323.

$E = 1896.16$; $E' = 1913.15$; $T = 16.99$.

$k_x = -2.49$; $p_x = +0.0590$; $r_x = +0.0248$;
$k'_x = -1.97$; $p'_x = +0.0567$; $r'_x = -0.0208$.
$k_y = -0.37$; $p_y = +0.0393$; $r_y = +0.0221$;
$k'_y = -2.50$; $p'_y = +0.0462$; $r'_y = +0.0312$.

2	−61.9	+ 2.0	+6.17	+5.23	−1.28	+0.64	−0.10	−0.02
7	−58.0	+20.2	+3.13	+2.36	−3.84	−2.34	−2.80	−2.12
8	−57.0	+ 8.8	+5.21	+4.76	−1.44	+0.47	−0.52	−0.02
9	−56.6	− 2.5	+4.08	+3.45	−0.80	+0.93	−1.74	+0.03
36	−34.2	−49.6	+6.81	+3.81	+1.51	+3.19	+1.00	−0.29
40	−28.2	+13.1	+0.89	+1.98	−2.42	− 0.55	−2.40	−1.61
46	−21.0	+36.7	+0.25	+2.86	−0.59	+0.82	−1.81	+0.81
54	−20.9	−11.1	+4.42	+5.08	−19.39	−16.80	+1.28	−19.45
56	−17.3	+10.5	+1.14	+1.59	−2.42	+0.54	−1.84	−1.46
57	−19.9	+ 6.7	+1.23	+1.20	−2.25	+0.90	−2.15	−1.29
61	−11.4	+ 3.2	+4.15	+3.86	+0.22	+2.97	+1.12	+0.60
70	− 7.9	+31.8	+2.42	+3.46	−3.14	−1.04	+0.31	−1.95
72	− 9.7	+14.6	−0.05	+0.93	+0.96	+3.24	−2.32	+1.54
73	− 7.4	+ 4.2	+3.88	+4.33	−0.05	+2.29	+1.45	+0.06
87	+ 1.1	+25.7	+2.91	+3.64	+0.24	+1.56	+1.16	+0.54
97	+ 0.2	−16.2	+3.60	+2.93	+1.03	+3.55	+1.01	+0.15
100	+ 7.6	− 1.4	+0.85	+0.03	−0.23	+2.45	−1.35	−0.59
110	+12.7	− 8.1	+2.11	+1.36	−1.00	+1.77	+0.22	−1.73
116	+15.1	+63.9	−1.51	+0.57	−2.67	−2.05	−1.70	−1.46
117	+16.6	+53.9	+1.89	+3.21	−1.71	−0.96	+1.39	−0.91
126	+17.1	−46.8	+3.53	+0.59	−0.27	+1.99	+0.72	−3.03
134	+28.4	+54.9	−0.08	+1.48	−1.70	0.20	+0.22	−0.79
141	+33.2	− 3.8	−0.13	−0.72	−0.69	+1.61	−0.74	−2.02
152	+38.0	− 2.1	−0.56	−1.16	+0.16	+2.36	−0.90	−1.28
162	+44.7	+ 2.2	+0.28	+0.33	−0.70	+2.35	+0.66	−1.70
163	+41.9	+ 1.6	+1.00	−0.21	+2.43	+5.09	+0.59	+1.27
171	+45.3	+13.2	+0.16	−0.25	+0.72	+2.45	+0.37	−0.49
—	+31.0	−24.8	+6.16	+5.67	−1.38	+0.30	+5.43	−3.86
21	−42.3	+28.7	+4.15	+4.85	−0.79	+0.28	—	—
35	−31.1	−44.5	+5.18	+2.16	+0.97	+3.15	—	—
39	−29.5	+40.4	+3.52	+4.93	−2.18	−0.13	—	—
58	−19.4	−16.9	+4.13	+3.03	+0.46	+2.52	—	—
113	+14.2	−44.9	+2.56	+0.49	+1.75	+4.40	—	—
128	+21.6	+36.6	+0.19	+1.37	−0.65	+0.90	—	—
130	+23.1	−15.7	+1.89	+0.40	+2.78	+5.14	—	—
159	+42.5	+32.5	−0.88	+0.04	−0.51	+2.32	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
Région 324.								
$E = 1896.13$; $E' = 1911.14$; $T = 15.01$.								
$k_x = +1.91$; $p_x = +0.0396$; $r_x = +0.0248$;								
$k'_x = -0.16$; $p'_x = +0.0378$; $r'_x = +0.0106$.								
$k_y = +2.03$; $p_y = +0.0262$; $r_y = +0.0346$;								
$k'_y = +0.21$; $p'_y = +0.0258$; $r'_y = -0.0149$.								
8	−46.4	−15.1	−0.85	+0.93	−6.82	−2.08	−1.14	−3.26
22	−30.7	+19.4	−2.26	−0.06	−8.35	−4.73	−1.13	−4.61
35	−23.2	+20.5	−2.84	−0.50	−4.05	−0.75	−1.33	−0.52
49	−14.2	+47.4	−0.91	+1.44	−5.80	−3.52	+1.43	−2.17
70	−1.7	−26.5	−1.12	+1.24	−1.43	+1.04	+0.40	+0.25
80	+6.1	+48.0	−2.36	+0.39	−2.45	−0.76	+0.97	+0.70
83	+5.6	+1.6	−2.72	+0.15	−2.01	−0.15	−0.16	+0.02
84	+4.9	+1.7	−2.50	−0.30	−1.74	−0.25	−0.30	+0.11
88	+8.4	−28.7	−2.22	−0.75	−2.40	−1.97	−0.79	−1.89
89	+8.7	−41.2	−1.76	−0.17	−1.84	−0.91	−0.48	−1.41
104	+15.2	−56.3	−1.50	−0.78	+0.61	+1.59	−0.68	+0.60
112	+28.9	+12.4	−2.74	−0.29	−2.20	−2.48	+0.69	−1.18
116	+30.3	−16.5	−0.63	+1.06	−7.86	−7.67	+1.97	−7.37
117	+35.6	+41.4	−3.84	−1.61	−1.34	−1.70	+0.26	+0.32
129	+45.9	+10.7	−5.39	−3.38	−2.66	−2.93	−1.54	−1.85
139	+61.1	−35.6	−0.85	−0.38	−0.62	−1.85	+1.99	−1.64
—	+0.7	+45.5	−2.58	−0.20	−3.29	−1.26	+0.32	+0.02
—	+21.3	+23.8	−3.39	−0.76	−1.74	−1.42	+0.04	−0.05
—	+45.8	+45.8	−8.07	−5.54	−6.17	−7.60	−3.34	−5.02
—	+54.7	−27.1	−2.73	−1.24	+0.41	−0.71	+0.53	−0.27
16	−38.9	−23.3	+0.43	+1.49	−2.93	+0.83	—	—
21	−31.3	+31.0	−1.30	+0.96	−4.31	−0.75	—	—
28	−30.0	+24.1	−1.77	+1.08	−3.82	−0.72	—	—
31	−28.2	−19.0	−0.22	+1.83	−1.85	+1.38	—	—
99	+19.3	+41.7	−3.73	−1.46	−2.36	−1.21	—	
108	+24.6	−19.8	−2.87	−0.62	−1.03	−0.72	—	
111	+26.3	+43.9	−3.70	−0.83	−1.88	−1.55		
114	+26.2	−35.0	−1.92	−0.42	−0.34	+0.42	—	—
Région 325.								
$E = 1897.98$; $E' = 1914.01$; $T = 16.03$.								
$k_x = -1.39$; $p_x = +0.0547$; $r_x = +0.0024$;								
$k'_x = +0.91$; $p'_x = +0.0542$; $r'_x = +0.0046$.								
$k_y = -0.12$; $p_y = +0.0451$; $r_y = +0.0294$;								
$k'_y = -0.45$; $p'_y = +0.0488$; $r'_y = -0.0046$.								
8	−60.2	−48.4	+2.34	+0.09	−1.91	+0.72	−2.47	−2.40
9	−58.4	+22.7	+4.62	+1.61	−4.26	−1.77	−0.23	−1.51
12	−55.2	−39.8	+4.61	+0.73	−0.07	+1.69	−0.71	−0.65
14	−52.4	+28.1	+3.20	−0.03	−4.33	−2.47	−1.41	−1.71
16	−50.0	−49.0	−0.47	−3.92	−0.37	+2.74	−5.33	−0.78
17	−47.4	+36.5	+3.48	+1.06	−3.81	−2.64	−0.42	−1.21
22	−43.8	+17.0	+3.86	+1.83	−2.54	−0.70	+0.28	−0.56
27	−35.2	+15.8	+4.19	+1.72	−3.27	−1.59	+0.85	−1.54
35	−35.0	+2.3	+0.83	−1.32	−2.10	−0.05	−2.38	−0.82
38	−34.4	−35.8	+5.77	+3.28	+0.11	+1.79	+2.29	−0.59
44	−21.5	+62.4	+1.99	+0.09	−4.65	−4.02	−0.15	−1.42
66	−7.7	+60.6	+1.35	−0.38	−2.02	−1.21	+0.04	+1.04
73	−1.7	+63.3	+1.35	−1.38	−2.62	−1.84	−0.12	+0.47
82	+2.9	+54.6	−0.46	−3.21	−6.73	−6.46	−1.72	−4.35
83	+4.6	+4.1	+0.30	−1.82	−1.42	−1.02	−0.73	−1.37
88	+7.8	+21.2	+1.39	−1.11	−1.00	−1.06	+0.40	−0.41
96	+14.8	−44.0	+1.00	−1.40	+1.12	+1.38	+0.21	−1.28
113	+27.5	+34.1	+1.29	−1.10	−1.75	−2.14	+1.47	−0.97
114	+25.3	+31.0	−0.01	−2.33	−1.87	−2.06	+0.07	−1.10
129	+31.0	−33.0	−0.47	−2.78	+0.41	+0.15	−0.29	−1.94
133	+36.0	−50.3	−1.90	−3.93	+0.15	+0.84	−1.37	−2.59
136	+42.6	−44.8	+1.19	−0.48	+2.39	+1.87	+2.27	−0.78
138	+45.1	−24.1	−0.62	−3.27	+0.64	−0.07	+0.18	−1.69
139	+50.2	+4.0	−0.49	−2.97	−0.71	−1.34	+0.78	−1.74
144	+59.4	−3.4	−2.27	−5.01	+0.17	−0.37	−0.66	−1.28
—	+25.0	+3.0	−1.78	−4.00	−0.74	−0.56	−1.75	−1.10
20	−40.1	+25.2	+4.19	+1.39	−1.90	+0.08	—	—
21	−44.6	+25.6	+3.48	+1.48	−2.65	−1.02		
36	−30.8	−38.4	+2.47	+0.43	+0.72	+2.27	—	—
49	−21.7	−36.5	+3.00	+0.61	+1.35	+2.28	—	—
106	+23.7	+28.5	−0.13	−2.50	−0.24	−1.03	—	—
110	+22.7	−37.4	−0.35	−2.51	+2.50	+2.40	—	—
116	+28.7	+20.6	−0.44	−2.71	−0.20	−0.95	—	—
117	+27.5	−19.5	+0.89	−1.44	+1.78	+1.30	—	—
Région 326.								
$E = 1896.25$; $E' = 1911.21$; $T = 14.96$.								
$k_x = -1.56$; $p_x = +0.0374$; $r_x = -0.0122$;								
$k'_x = +0.57$; $p'_x = +0.0352$; $r'_x = +0.0233$.								
$k_y = -2.04$; $p_y = +0.0314$; $r_y = +0.0255$;								
$k'_y = +1.81$; $p'_y = +0.0274$; $r'_y = +0.0014$.								
2	−56.4	+43.8	+3.47	−1.05	0.00	−2.73	−1.09	+0.57
4	−58.3	+4.1	+3.10	+0.93	+1.70	−1.02	−0.57	+1.13
5	−54.1	+27.6	+3.59	+0.19	−1.51	−4.11	−0.41	−1.38
7	−47.4	−2.5	+1.94	−0.61	+1.07	−1.96	−1.56	+0.00
10	−44.7	+3.6	+3.32	+0.47	−0.19	−3.43	−0.20	−1.22
15	−35.9	+23.5	+2.51	−0.98	+0.47	−2.13	−0.90	+0.23
25	−28.5	+42.6	+2.57	−0.89	+0.39	−2.28	−0.45	+0.58
32	−20.2	−39.3	+2.78	+1.27	+2.98	−0.35	+0.57	+0.32
34	−22.5	−46.6	+2.06	+1.30	+3.65	+0.14	+0.11	+0.71
35	−21.8	−58.0	+1.60	+1.22	+2.16	−0.97	−0.19	−0.93

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
43	— 7.2	+ 9.5	+1.33	—0.91	+0.91	—2.16	—0.49	—0.36
44	— 7.3	+ 9.5	+0.89	—1.29	+0.65	—2.34	—0.91	—0.58
46	— 5.8	—37.2	+0.29	—1.18	+1.87	—1.76	—1.36	—1.07
47	— 4.4	+ 6.0	+1.73	—0.33	+1.46	—1.83	+0.08	—0.06
51	— 4.7	—33.2	+1.43	—0.26	+1.62	—3.15	—0.26	—1.79
52	2.0	57.1	+ 1.33	+ 0.76	+ 4.09	0.26	+ 0.16	+ 0.15
61	+ 7.9	+21.6	+3.76	+0.54	+0.10	—4.24	+2.06	—1.65
66	+16.4	+52.0	+8.92	+3.71	—4.02	—9.68	+6.70	—5.66
76	+27.7	+21.3	+1.01	—2.45	—0.79	—5.12	—0.08	—2.82
80	+29.5	— 2.4	+0.91	—1.43	+3.04	—0.75	+0.30	+0.56
85	+30.4	+48.7	+5.65	+1.25	+1.30	—3.86	+4.33	—0.37
88	+32.1	— 3.4	+1.44	—1.14	+2.63	—2.03	+0.80	—0.34
—	— 7.9	—59.8	+0.18	—0.17	+3.34	+0.09	—1.11	—0.05
23	—31.6	—38.4	+2.36	+1.89	+2.01	—1.05	—	—
27	—20.4	+25.7	+2.36	—0.68	+1.00	—2.32	—	—
31	—21.3	—30.5	+1.83	+0.91	+3.24	—0.39	—	—
37	—19.8	+30.4	+3.02	—0.82	—0.04	—3.28	—	—
74	+25.6	+40.8	+1.01	—1.94	+1.71	—2.60	—	—
77	+26.8	+20.6	+0.83	—2.00	+2.13	—2.26	—	—
83	+29.0	—27.3	—0.06	—1.09	+3.54	—0.83	—	—
91	+35.9	—28.5	+0.14	—1.50	+3.62	—1.55	—	—

Région 327.

$E = 1896.16$; $E' = 1913.15$; $T = 16.99$.

$k_x = + 0.10$; $p_x = + 0.0463$; $r_x = + 0.0166$;
$k'_x = — 0.74$; $p'_x = + 0.0435$; $r'_x = + 0.0176$.
$k_y = — 3.15$; $p_y = + 0.0331$; $r_y = + 0.0291$;
$k'_y = + 1.76$; $p'_y = + 0.0390$; $r'_y = — 0.0041$.

6	—58.3	+34.1	+4.50	+5.49	—1.43	—3.20	+2.64	—1.05
18	—48.2	+31.7	+1.16	+1.33	—1.65	—4.48	—0.69	—2.01
19	—48.2	+19.2	+1.91	+1.66	—1.86	—4.65	—0.37	—2.65
26	—41.8	+ 4.0	+1.22	+1.82	+1.61	—1.59	—0.61	—0.01
28	—40.5	— 6.0	+4.36	+4.01	+1.59	—1.51	+1.94	—0.36
49	—26.2	+43.7	+2.29	+2.66	—7.23	—11.30	+1.73	—8.06
51	—28.7	— 5.2	+1.76	+1.67	+1.43	—1.67	+0.01	—0.66
60	—19.9	—62.3	+0.30	+0.84	+4.13	—0.42	—1.71	—0.83
68	—12.3	—47.1	+0.60	+1.22	+4.99	+0.47	—0.77	+0.49
70	—13.1	—58.2	+1.23	+2.14	+3.16	—1.22	—0.22	—1.66
79	— 1.9	+32.7	—0.97	+0.21	+1.38	—2.62	—0.22	—0.11
86	+ 4.3	+24.1	+1.11	+2.58	+1.62	—2.85	+2.13	—0.49
110	+12.7	—33.5	+1.05	+2.33	+4.43	—0.28	+1.36	+0.01
119	+20.8	—48.6	—1.80	—0.10	+3.90	—1.26	—1.17	—1.39
125	+26.3	— 8.6	—0.99	0.32	+ 4.75	—0.49	+0.06	+ 0.79
134	+37.3	— 3.7	—1.38	—0.48	+2.27	—3.58	+0.36	—1.95
137	+37.3	—61.6	—0.57	+0.02	+4.86	—1.47	+0.03	—1.69
139	+44.0	— 9.7	—0.88	+0.20	+5.57	—1.42	+1.15	+0.48
144	+42.2	—31.2	—1.73	—1.64	+3.69	—2.67	—0.64	—1.84
157	+56.3	+48.9	—2.37	—1.64	+1.37	—6.73	+1.04	—2.31
164	+60.1	+25.3	—3.66	—2.33	+1.75	—4.72	—0.18	—2.01
	11.8	+39.8	2.56	0.80	0.07	4.30	1.85	1.30
31	—41.4	—30.2	+1.56	+2.54	+2.86	—0.82	—	—
36	—35.7	—23.4	+2.48	+3.17	+2.98	—0.70	—	
41	—32.3	+28.9	+0.96	+1.27	+1.25	—3.02	—	—
42	—30.6	+25.2	+1.09	+2.07	+1.42	—1.94	—	—
120	+29.7	+28.9	—2.21	—1.22	+3.05	—3.16	—	—
126	+33.3	+33.9	—2.18	—1.21	+3.02	—3.47	—	—
130	+32.7	—29.9	—0.93	—0.09	+5.07	—0.11	—	—
135	+38.2	—26.0	—1.39	—0.45	+5.14	—1.10	—	

Région 328.

$E = 1896.16$; $E' = 1913.15$; $T = 16.99$.

$k_x = — 0.29$; $p_x = + 0.0377$; $r_x = — 0.0202$;
$k'_x = + 0.46$; $p'_x = + 0.0523$; $r'_x = + 0.0215$.
$k_y = — 0.92$; $p_y = + 0.0372$; $r_y = + 0.0068$;
$k'_y = — 1.40$; $p'_y = + 0.0420$; $r'_y = + 0.0141$.

13	—55.3	—14.2	+1.40	+1.66	+0.75	+0.70	—0.88	—0.42
27	—50.0	11.8	+ 3.01	+ 3.20	+ 0.80	+ 1.26	+ 0.93	0.07
29	—40.1	+16.1	+2.77	+0.75	—1.96	—1.23	+0.05	—1.69
40	—35.1	—36.2	—0.77	+0.66	+1.51	+2.25	—1.57	—0.35
56	—27.6	—47.7	+0.90	+1.87	+0.06	+1.18	+0.19	—2.13
59	—23.8	+26.9	+1.99	—0.13	—2.49	—1.96	—0.03	—2.07
60	—20.5	—18.8	+1.10	+1.37	+1.29	+1.71	+0.39	—0.19
64	—19.1	+ 9.6	+0.18	—0.19	—2.59	—1.70	—0.77	—2.72
71	—12.3	+15.0	+2.20	+1.08	—0.89	—0.03	+1.18	—0.90
75	—10.1	—14.7	—4.46	—4.27	— 5.46	—4.76	—4.74	—6.75
76	—10.3	—14.5	—4.92	—4.01	4.85	—4.36	—4.85	—6.23
79	—10.6	—49.6	—4.78	—2.28	+1.17	+1.72	—3.95	—1.57
80	— 9.6	+35.7	+2.36	+0.11	—2.14	—2.59	+0.91	—2.00
84	— 4.1	+63.8	+2.70	—1.18	—2.35	—1.83	+0.70	—0.68
96	+ 5.0	+56.1	+2.78	—0.63	—0.60	—0.84	+1.42	+0.29
129	+17 8	—25.9	—3.73	—3.53	+1.04	+1.51	—2.76	—1.09
147	+25.9	—15.6	+0.18	—0.26	+1.57	+2.11	+1.20	—0.21
162	+35.2	+44.0	+0.23	—3.74	+0.28	+0.27	—0.05	+0.49
170	+40.9	+33.0	—1.54	—4.33	— 2.46	—2.75	—0.99	—2.88
184	+53.5	—16.0	—5.41	—4.66	+3.05	+3.12	—2.55	+0.73
185	+52.2	—31.1	—4.25	—4.33	+1.71	+3.28	—1.87	—0.44
—	+ 5.9	—42.3	—4.02	3.09	+1.15	+1.25	—3.23	—1.69
—	+52.9	+45.3	—1.82	—5.49	—1.62	—0.77	—1.16	—1.11

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Jx	Jy
43	−32.1	+22.7	+2.19	+0.31	−0.05	+0.40	—	—
46	−32.0	−29.5	+0.94	+1.66	+2.16	+2.09	—	—
49	−27.2	+40.5	+1.75	+0.07	−1.06	−0.72	—	—
67	−15.8	−26.0	+0.49	+2.05	+1.64	+2.01	—	—
135	+20.6	+20.4	−0.49	−2.17	+0.23	+0.18	—	—
139	+23.5	−31.2	−1.73	−1.74	+2.71	+3.43	—	—
140	+21.8	−35.3	−0.90	−0.57	+1.71	+3.17	—	—
142	+28.9	+23.3	+0.25	−1.34	+0.54	+1.12	—	—

Région 329.

$E = 1895.21$; $E' = 1913.18$; $T = 17.97$.

$k_x = +0.34$; $p_x = +0.0193$; $r_x = +0.0238$;
$k'_x = +1.48$; $p'_x = +0.0268$; $r'_x = +0.0316$.
$k_y = -2.37$; $p_y = +0.0211$; $r_y = -0.0244$;
$k'_y = -1.00$; $p'_y = +0.0205$; $r'_y = +0.0088$.

1	−61.5	+ 0.9	+0.30	−0.44	+4.49	+1.20	−0.55	+0.70
4	−57.8	+27.5	+0.39	−1.51	+0.43	−2.35	−0.22	−2.52
5	−59.0	+23.5	−1.44	−3.16	+1.47	−1.07	−2.10	−1.45
6	−55.5	+ 3.5	+0.34	−1.27	+2.37	+0.46	−0.74	−0.64
12	−51.0	− 5.2	−0.98	−2.60	−2.00	−3.81	−2.19	−5.09
15	−50.0	−55.8	+1.65	+1.76	+3.44	+1.72	−0.08	−0.65
21	−46.5	−38.7	+1.98	+1.12	+4.12	+2.12	+0.31	+0.27
43	−26.6	−26.0	+2.44	+1.45	+2.08	0.11	+1.52	1.45
44	−28.9	−29.1	+0.37	−0.66	+2.65	+0.67	−0.70	−0.86
46	−20.6	+56.6	−0.08	−2.22	+1.95	+0.11	+0.85	+0.36
68	− 4.4	−56.4	+1.29	−0.17	+2.77	+1.13	−0.19	−0.94
76	+ 3.0	−62.8	+0.08	−1.12	+3.03	+2.63	−1.27	−0.14
109	+29.2	+ 0.7	+0.15	−1.12	+3.11	+2.16	+1.11	+1.18
114	+33.7	−11.5	+1.21	+0.32	+0.47	−0.27	+2.13	−1.56
121	+41.6	+17.6	−2.12	−3.59	+0.72	+0.25	−0.50	−0.51
134	+58.1	− 4.8	−3.50	−6.02	+0.43	+1.21	−2.64	−0.51
—	−23.1	+57.8	−1.50	−2.02	+1.29	−0.81	+0.22	−0.42
	29.6	57.1	1.41	0.23	3.15	1.12	0.53	0.96
34	−30.6	−31.6	+0.88	+0.14	+4.28	+1.67	—	—
39	−29.9	+19.3	−0.18	−1.09	+1.94	−0.42	—	—
45	−25.6	−39.6	+1.26	+0.80	+3.87	+2.06	—	—
48	−24.0	+32.8	−0.74	−2.23	+2.49	+0.12	—	—
100	+22.3	+28.6	−1.10	−2.63	+1.59	+1.12	—	—
101	+24.1	−35.6	+0.08	−0.89	+2.06	+0.96	—	—
105	+28.7	+27.2	−1.85	−3.32	+1.26	+0.94	—	—
124	+40.0	−24.6	−0.61	−2.05	+1.86	+2.08	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Jx	Jy

Région 330.

$E = 1896.16$; $E' = 1913.15$; $T = 16.99$.

$k_x = -1.06$; $p_x = +0.0525$; $r_x = -0.0248$;
$k'_x = +1.96$; $p'_x = +0.0607$; $r'_x = -0.0356$.
$k_y = -1.79$; $p_y = +0.0443$; $r_y = +0.0307$;
$k'_y = +0.78$; $p'_y = +0.0471$; $r'_y = -0.0284$.

27	−44.3	+27.0	+4.36	+1.47	−0.68	−0.40	+0.04	+0.24
35	−36.5	+11.8	+1.88	−0.03	−1.79	−2.09	−1.05	−1.86
45	−30.4	+51.7	+3.40	+0.40	+0.38	−1.50	−0.93	+1.33
57	−27.2	+ 0.4	+1.93	−0.24	−0.03	−0.30	−0.25	−0.61
62	−20.1	− 1.4	+1.08	−0.89	−0.47	−0.13	−0.55	−0.84
64	−19.3	+56.4	+3.13	+0.13	−2.63	−5.04	−0.71	−1.74
74	−17.5	− 6.2	+3.41	+0.68	+0.32	−0.75	+1.69	−0.98
77	−17.3	−29.1	+1.82	−1.00	+2.52	+1.21	+0.76	+0.05
83	−11.2	+47.8	+2.07	−0.39	+0.98	−1.95	−0.79	+1.20
86	−14.8	+28.8	+1.07	−1.32	−1.52	−3.73	−1.38	−1.79
96	− 5.8	+ 8.5	+2.26	−0.58	+1.32	−0.61	+0.71	+0.25
109	+ 8.2	+33.7	+0.53	−1.84	−0.04	−2.86	−0.76	−0.42
110	+ 8.1	+33.8	+0.06	−2.47	−0.13	−3.11	−1.31	−0.59
111	+ 6.3	+34.3	+0.62	−2.20	−2.32	−5.41	−1.02	−2.80
114	+ 9.5	+19.1	−2.15	−4.41	−15.62	−18.83	−2.86	−16.86
122	+ 10.4	+ 18.5	0.47	3.21	0.69	2.03	1.36	0.34
132	+18.5	+41.0	+0.49	−2.56	+1.46	−3.45	−0.78	+0.35
147	+20.4	−58.8	−3.78	−7.29	+2.74	−0.63	−2.15	−2.16
150	+28.5	+ 8.0	+1.57	−2.01	+1.14	−2.81	+1.60	−1.00
159	+39.1	− 0.4	−2.31	−5.83	−0.85	−5.08	−1.40	−3.53
174	+48.4	− 6.2	+0.55	−3.35	+3.51	−1.95	+1.97	−0.06
178	+52.4	+40.9	−1.50	−3.63	+0.83	−4.17	−0.39	−0.36
185	+58.8	+46.8	−1.96	−4.51	+1.45	−4.68	−0.87	−0.05
186	+58.1	+25.8	−2.39	−4.99	−0.14	−5.58	−0.73	−2.25
189	+57.4	− 6.2	+0.20	−3.05	+3.11	−2.46	+2.45	−0.52
191	+ 57.8	49.9	2.58	5.41	6.83	1.68	1.23	1.40
50	−30.8	−34.7	+1.77	−1.11	+2.73	+1.91	—	—
55	−29.9	+29.2	+3.39	+0.91	−0.62	−1.22	—	—
61	−24.2	+30.3	+3.40	+0.56	−0.10	−1.72	—	—
63	−23.1	−37.4	+1.02	−2.10	+2.35	+1.59	—	—
140	+24.5	+43.3	+0.56	−2.01	+1.06	−3.25	—	—
143	+20.2	−27.8	−0.72	−4.14	+3.33	+0.03	—	—
156	+36.5	+40.1	+0.06	−2.64	+0.66	−3.83	—	—
161	+35.2	−22.8	−0.96	−4.95	+4.19	−0.90	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
Région 331.								
	$E = 1896.13$; $E' = 1911.14$; $T = 15.01$.							
	$k_x = +0.78$; $p_x = +0.0282$; $r_x = -0.0043$; $k'_x = -0.12$; $p'_x = +0.0247$; $r'_x = -0.0173$. $k_y = -0.69$; $p_y = +0.0408$; $r_y = -0.0087$; $k'_y = -1.98$; $p'_y = +0.0454$; $r'_y = -0.0323$.							
8	51.8	35.6	+1.75	+1.89	0.05	+2.37	+1.17	2.77
23	36.8	+34.4	1.68	0.02	1.23	+1.00	1.87	0.72
33	-28.6	+44.6	+1.88	+3.74	0.47	+1.68	+1.90	+0.60
51	-2.5	+28.7	-1.66	-0.16	0.25	+0.65	0.95	+0.05
57	+0.6	11.6	0.18	−0.19	−0.32	+0.51	+0.28	1.72
60	+4.0	35.2	1.46	1.58	0.46	+1.02	0.70	2.49
70	+14.3	+55.3	1.00	+0.59	3.33	2.46	0.10	2.05
76	+12.8	45.4	+1.08	+1.29	-1.61	0.83	+2.35	4.25
80	+17.0	28.1	0.86	0.74	+1.79	+2.98	+0.28	+0.18
83	+25.4	−13.0	−2.75	−2.40	+0.13	+0.85	−1.43	−0.88
87	+28.1	+34.1	−1.58	−0.85	+0.21	+0.93	−0.51	+1.28
91	+27.3	−52.7	−2.42	−2.14	+3.32	+3.97	−0.66	+1.10
98	+43.7	+27.2	−1.65	−1.09	−0.42	−0.93	−0.18	+0.05
106	+53.5	−19.9	−2.93	−2.27	−1.17	−1.52	−0.64	−2.43
110	+57.2	+45.2	−3.28	−1.62	−1.40	−2.28	−1.09	−0.06
—	−48.9	+18.2	−2.00	−1.72	−0.14	+3.56	−3.02	+0.15
—	−1.0	+43.8	−1.18	+0.89	+0.32	+1.29	−0.31	+1.34
—	−57.9	−26.9	+0.18	+0.08	+2.25	+5.04	−0.77	−0.03
—	+48.1	+21.9	+1.81	+2.74	−2.19	−2.34	+3.64	−1.67
—	+52.1	+26.8	−3.25	−2.87	+0.64	+0.21	−1.63	+1.31
—	+25.4	−26.1	−1.39	1.25	+2.73	+3.17	0.03	+1.01
16	−42.0	+21.1	+0.36	+1.54	+0.14	+2.37	—	—
27	−31.2	+29.1	+0.42	+1.47	+0.01	+2.43	—	—
35	−26.3	−31.1	+0.03	+0.53	+2.43	+4.16	—	—
39	-22.6	26.3	0.50	-0.17	−1.53	+3.25		
77	+19.6	+27.8	−0.49	+0.99	−1.13	−1.09	—	—
90	+28.6	−21.2	−2.07	−1.45	+1.47	+1.92	—	—
94	+39.9	+31.7	2.54	1.29	-0.62	-0.31		
100	+44.6	−16.5	−1.65	−0.68	+1.00	+2.15	—	—
Région 332.								
	$E = 1895.23$; $E' = 1913.19$; $T = 17.97$.							
	$k_x = -0.46$; $p_x = +0.0179$; $r_x = -0.0069$; $k'_x = -3.11$; $p'_x = +0.0194$; $r'_x = +0.0157$. $k_y = +1.20$; $p_y = +0.0235$; $r_y = -0.0019$; $k'_y = -0.83$; $p'_y = +0.0259$; $r'_y = -0.0275$.							
1	−63.8	−23.8	+1.54	+4.29	−1.99	+1.08	−0.16	−1.79
2	−57.9	+4.1	+1.31	+3.75	−1.91	+1.14	−0.32	−0.94
12	48.9	3.6	+1.55	+4.35	0.67	+1.65	+0.23	0.12
26	−23.4	+60.8	+2.24	+3.32	−0.38	+2.18	+0.83	+2.24
35	−18.9	−16.2	+0.92	+3.87	−0.63	+1.70	+0.18	+0.04
44	−13.4	−27.3	+0.55	+3.55	−3.60	−1.72	−0.10	−3.35
59	−1.2	−15.2	+2.01	+4.59	−0.68	+1.21	+1.42	+0.06
60	−2.4	−32.6	+0.77	+4.58	−0.23	+1.97	+0.70	+0.21
62	+5.4	+54.8	−1.87	−0.78	−2.23	−0.72	−2.77	+0.14
64	+8.7	−56.1	−2.60	+0.69	+0.43	+1.76	−2.82	+0.02
66	+13.8	+26.2	+0.68	+2.81	−1.87	+0.37	+0.33	+0.29
68	+13.7	+14.6	+1.65	+4.32	1.95	+0.10	+1.52	0.17
74	+18.2	-3.0	1.62	+0.19	2.44	0.86	2.17	-1.27
93	+49.8	+16.0	1.92	0.17	2.07	1.07	1.83	-0.26
100	+56.9	+18.2	-0.23	+1.01	-1.33	0.94	0.25	+0.33
101	+59.5	+8.6	1.46	+0.60	1.76	1.21	1.06	−0.21
103	+56.5	-55.4	3.10	+1.15	0.70	+0.92	-1.95	-0.24
	19.1	-48.5	-3.11	+5.70	−4.51	-1.99	+2.48	-2.15
	+12.4	-52.2	+2.35	+2.74	3.09	+0.03	+1.21	+0.12
	+19.3	26.1	+0.83	+2.95	2.63	−1.30	+0.35	−2.14
21	−29.1	+24.5	+1.51	+3.77	−1.20	+0.88	—	—
33	−23.6	−35.0	+0.93	+4.43	−0.27	+2.26	—	—
36	−17.7	−34.2	+0.25	+3.13	−0.77	+2.33	—	—
39	−13.0	+35.3	+0.59	+2.87	−2.18	+0.38	—	—
65	+13.1	+31.4	−0.07	+1.76	−1.96	−0.46	-	
85	+32.2	−27.2	+0.19	+3.14	−1.12	−0.11	—	—
86	+37.3	−24.4	−0.86	+3.08	+0.14	+1.18	—	—
92	+47.8	+38.7	+0.38	+1.63	−2.54	−1.36	—	—
Région 333.								
	$E = 1897.98$; $E' = 1914.01$; $T = 16.03$.							
	$k_x = -0.39$; $p_x = +0.0450$; $r_x = +0.0012$; $k'_x = +0.02$; $p'_x = +0.0515$; $r'_x = +0.0281$. $k_y = -0.00$; $p_y = 0.0516$; $r_y = 0.0129$; $k'_y = +1.54$; $p'_y = +0.0526$; $r'_y = -0.0162$.							
27	32.4	+16.9	+1.90	+1.54	0.11	-1.86	+0.21	+0.19
39	−23.9	−59.2	+2.75	+5.17	+5.13	+4.19	+1.75	+2.00
42	−11.9	+17.1	+0.14	+0.28	−1.93	−3.35	−0.30	−1.15
46	−11.2	−42.6	−0.02	+1.34	+2.04	+0.45	−0.69	−0.36
51	−3.8	+30.8	+0.19	−0.47	−2.93	−3.59	−0.05	−0.94
61	+9.7	+5.7	−0.42	+0.47	−0.66	−1.47	+0.39	+0.14
65	+12.4	+60.5	+0.04	−2.04	−1.58	−4.00	+0.30	+1.31
70	+14.5	−25.4	−0.76	+0.14	+0.39	−1.49	−0.16	−0.89
72	+13.6	−28.9	−0.80	−0.05	+1.04	−0.52	−0.37	−0.27
81	+23.4	−18.4	−3.64	−3.22	−3.53	−5.01	−2.75	−4.12
82	+23.3	−52.8	−0.48	+0.43	+4.89	+3.04	+0.14	+2.32
84	+27.7	+44.8	−1.87	−2.74	−3.85	−4.54	−0.49	−0.68
86	+25.6	−9.2	+0.61	+0.69	−0.39	−1.37	+1.56	−0.21
93	+38.8	+32.4	+1.07	−0.29	−0.84	−3.14	+2.55	+1.03
103	+44.0	−55.0	−1.87	−1.27	+2.14	+0.81	−0.44	+0.02

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
108	+49.2	52.0	−2.87	−3.77	+2.46	+0.47	−1.89	+0.24
113	+62.8	+45.2	4.40	5.28	−3.25	3.54	1.33	+0.64
114	+62.8	+30.5	−1.03	−3.06	−2.17	−3.00	+1.25	+0.68
115	+62.9	− 5.5	−3.33	−3.93	−0.29	−2.04	−0.86	+0.23
25	−39.7	−30.1	+2.60	+3.55	+2.01	+0.53	—	—
26	−30.3	+27.7	+1.66	+0.62	−1.04	−2.66	—	—
31	−27.3	+28.5	+1.46	+0.34	−1.54	−2.72	—	—
38	−23.9	−32.8	+1.31	+1.83	+2.49	+1.00	—	—
77	+15.6	−36.6	−0.34	+0.16	+0.78	−0.15	—	—
85	+25.9	+27.4	−1.07	−2.16	−2.17	−3.59		
89	+27.0	−30.8	−0.91	−0.89	+1.73	−0.35		
90	+32.8	+29.8	−0.66	−2.13	−1.11	−3.19		

Région 334.

$E = 1895.29$; $E' = 1913.26$; $T = 17.96$.

$k_x = -1.03$; $p_x = +0.0308$; $r_x = -0.0012$;
$k'_x = -2.05$; $p'_x = +0.0292$; $r'_x = -0.0299$.
$k_y = -0.16$; $p_y = +0.0128$; $r_y = -0.0076$;
$k'_y = +0.35$; $p'_y = +0.0123$; $r'_y = +0.0073$.

5	−56.2	+49.0	+1.51	+3.47	−1.95	−2.39	−1.50	−1.31
11	−53.1	+25.4	+2.31	+1.57	−1.19	−2.61	−1.59	−1.33
14	−51.4	−25.5	+2.70	+1.30	2.72	−3.63	0.69	3.24
21	−49.5	−26.0	+2.11	+2.28	+1.03	−0.09	−0.42	+0.39
22	47.6	−41.3	+1.27	+0.80	+0.22	0.41	−1.29	−0.36
23	−44.5	+15.0	+4.96	+5.25	−4.62	−5.45	+1.99	−4.60
30	39.1	19.0	+0.99	+1.09	+0.38	1.05	−1.37	0.32
31	−31.4	+47.2	−0.03	+2.03	−1.88	−2.54	−2.21	−1.37
34	−30.1	+ 7.6	+2.50	+3.80	+0.07	−0.23	+0.58	+0.26
58	− 5.3	−19.5	+0.93	+1.55	−1.00	−0.99	−0.16	−0.98
63	− 3.4	+40.0	−0.29	+2.23	−3.74	−4.54	−1.29	−3.39
68	− 3.0	− 5.3	+0.01	+0.73	−1.90	−1.73	−1.17	−1.63
77	+ 1.3	−13.7	−0.45	+0.89	+0.35	+0.06	−1.06	+0.28
78	+ 0.2	−34.7	+0.48	+0.59	−1.25	−2.22	−0.46	−1.91
84	+14.8	+26.0	−2.24	−0.44	−1.53	−0.92	−2.84	−0.64
98	+24.6	+13.1	+0.58	+2.39	−0.82	−0.39	+0.48	−0.18
103	+26.8	+ 3.0	−0.36	+0.79	−2.19	−1.94	−0.56	−1.77
108	+33.7	−58.6	+0.74	−0.59	−1.03	−0.73	+0.45	−1.35
118	+51.9	+33.4	−0.12	+2.15	−3.01	−2.31	+0.51	−1.98
—	−49.6	−26.0	+0.29	−0.14	+0.08	−0.67	−2.55	−0.37
—	−31.5	+34.2	+0.69	+1.93	+0.04	−1.04	−1.70	+0.18
—	+26.2	+36.1	−0.63	+1.25	−1.14	−2.05	−1.00	−0.88
—	+31.3	+16.6	−1.32	+0.47	−0.32	−0.12	−1.29	+0.24
33	30.2	+16.8	+1.97	+3.86	0.09	− 0.57		
35	33.1	−16.7	+2.99	+3.09	+0.96	+0.13		
36	−30.9	−42.5	+1.96	+2.15	+0.05	−0.63	—	
39	−28.3	+39.0	+0.98	+2.59	−0.57	−1.19		
105	+32.9	+27.2	+0.83	+2.51	−0.25	−0.30		
107	+33.7	−30.9	−0.61	−0.13	+0.16	+0.50	—	
110	+37.2	+23.0	+0.12	+2.08	−1.16	−0.57	—	
114	+40.8	−28.4	−0.67	−0.75	−0.35	+0.12	—	

Région 335.

$E = 1895.26$; $E' = 1910.29$; $T = 15.03$.

$k_x = +0.46$; $p_x = -0.0099$; $r_x = -0.0023$;
$k'_x = +2.49$; $p'_x = +0.0011$; $r'_x = +0.0136$.
$k_y = -2.46$; $p_y = -0.0004$; $r_y = +0.0207$;
$k'_y = -0.70$; $p'_y = +0.0032$; $r'_y = +0.0081$.

3	−58.4	−30.8	−1.92	−3.15	+0.38	−0.13	−0.35	−0.66
8	−46.2	+ 4.5	−3.26	−5.29	+0.83	+1.03	−2.26	+0.02
12	41.3	4.4	+0.17	2.36	−0.56	−0.84	+0.87	−1.69
16	−35.9	+57.5	−3.25	−3.97	+0.84	−0.37	−1.74	−0.75
27	−27.7	−25.9	−0.57	−2.33	+1.66	+0.85	+0.36	+0.03
47	−12.3	−33.0	−0.32	−2.54	+0.92	+0.17	+0.21	−0.91
54	− 7.9	−38.4	+3.55	+1.80	+0.46	−1.16	+4.27	−1.87
63	− 3.9	−33.5	−3.37	−5.82	+1.44	−0.02	−3.05	−0.86
70	+ 1.6	+ 4.5	−0.86	−3.03	+2.43	+0.67	−0.49	−0.04
75	+ 1.5	15.3	−1.11	−3.63	+0.27	−1.56	−0.90	−2.26
79	+ 8.7	−35.9	−0.91	−2.88	+2.07	−0.43	−0.50	−0.93
88	+ 10.5	61.9	−0.18	−1.78	+2.97	+0.57	+0.41	−0.05
97	+21.3	−33.9	−0.17	−2.42	+1.78	−0.64	−0.05	−1.36
109	+ 33.0	53.1	−1.19	3.59	+2.45	+0.03	−1.27	−0.89
111	+39.5	+38.2	−1.01	−3.56	+4.39	+1.89	−1.30	+1.04
125	+57.3	+33.4	+0.35	−1.94	+2.78	−0.93	−0.01	−1.43
127	+55.4	−32.4	−1.64	−3.77	+3.79	+0.60	−1.86	−0.23
—	−55.5	+45.5	−1.37	−1.08	−1.27	+0.24	+0.87	−1.23
—	−56.9	+28.1	−1.97	−3.11	+0.18	+1.61	−0.41	+0.17
—	−35.1	+34.3	+0.86	−0.13	−0.42	+0.13	+2.23	−1.17
—	−56.7	−15.8	−1.39	−4.84	+0.65	+0.58	−0.96	−0.17
25	−29.6	+15.5	−0.88	−2.62	+1.49	+0.18	—	—
26	−29.3	−19.3	−0.87	−3.14	+1.35	−0.25	—	—
33	−22.3	+33.1	−0.26	−2.71	+2.30	+0.80	—	—
42	−16.0	−28.5	−0.78	−2.82	+2.68	+1.27	—	—
96	+23.9	−25.8	+0.32	−1.37	+2.71	+0.91	—	—
100	+25.6	+24.7	−0.57	−2.68	+2.42	+0.48	—	
104	+28.1	−20.7	−0.65	−2.44	+3.19	+1.22	—	—
106	+31.7	+33.0	+0.18	−2.00	+3.78	+1.04	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy

Région 336.

$E = 1895.21$; $E' = 1913.18$; $T = 17.97$.

$k_x = -0.19$; $p_x = +0.0228$; $r_x = +0.0380$;
$k'_x = -0.55$; $p'_x = +0.0206$; $r'_x = -0.0232$.
$k_y = -0.27$; $p_y = +0.0376$; $r_y = +0.0122$;
$k'_y = -2.20$; $p'_y = +0.0223$; $r'_y = -0.0500$.

3	−63.7	−17.8	−2.41	+0.58	−0.65	+4.33	2.53	−0.06
11	−47.9	−5.0	−0.28	−0.82	−0.57	+5.16	−1.99	0.00
16	−41.0	−7.7	+3.27	+3.05	+0.22	+4.59	+1.85	+0.16
19	−40.1	−45.3	+4.81	+2.56	+1.67	+4.76	+2.11	−0.13
23	−37.8	+34.7	−0.02	+2.24	−2.57	+1.90	+0.17	−1.25
25	−38.8	+31.1	−0.70	+1.46	−1.53	+2.94	−0.60	−0.33
28	−39.9	−33.7	+3.92	+1.67	+1.42	+4.70	+1.31	+0.06
29	−35.9	−63.0	+1.89	−1.69	+1.19	+4.53	−1.51	−0.94
34	−26.6	+50.7	+0.06	+3.59	−1.68	+1.66	+1.25	−0.23
35	−28.8	+41.5	−5.12	−2.55	−5.52	−1.94	−4.52	−4.27
39	−29.4	+7.2	+0.27	+1.28	+1.86	+6.48	−0.18	+2.59
63	−8.7	+4.7	−0.76	+0.59	−0.65	+2.73	−0.61	−0.22
74	−3.5	+7.6	−1.10	+0.20	−0.68	+1.46	−0.84	−0.68
76	−4.1	−44.5	−0.25	−1.56	+1.22	+3.24	−1.69	−0.41
80	+3.1	−42.3	+1.25	−0.03	+1.79	+2.66	−0.01	−0.21
85	+5.5	−51.9	+1.96	−0.87	+1.64	+2.72	−0.09	−0.50
87	+10.8	+53.9	−3.42	−0.12	−1.67	−0.71	−1.50	−0.60
112	+25.9	+16.3	−1.14	+1.04	−0.23	+0.13	+0.26	−0.31
115	+25.7	−45.6	+5.98	+4.35	+2.25	+2.20	+5.02	+0.11
135	+45.7	+3.9	−0.90	−0.61	−0.09	−0.74	−0.10	−0.66
144	+58.1	+30.2	−2.77	−0.65	+0.14	−1.82	0.59	−0.07
151	+63.8	−3.2	0.00	0.23	+0.64	−0.76	+0.87	0.18
17	−40.5	−28.6	+1.88	+0.64	+0.93	+4.86	—	—
26	−37.0	+23.4	+0.55	+2.26	−1.65	+3.40	—	—
32	−30.6	−18.6	+1.50	+0.41	+0.83	+4.25	—	—
37	−25.5	+29.0	−0.31	+1.77	−0.87	+2.84	—	—
100	+20.0	−30.3	+0.92	−0.05	+0.76	+1.21	—	—
103	+22.8	+19.9	−1.42	+0.23	−0.35	+0.41	—	—
111	+27.5	+26.0	−1.50	+0.48	+0.09	+0.55	—	—
120	+33.0	−16.5	+0.46	−0.60	+1.86	+1.47	—	—

Région 337.

$E = 1896.13$; $E' = 1911.14$; $T = 15.01$.

$k_x = +0.05$; $p_x = +0.0437$; $r_x = -0.0363$;
$k'_x = -0.49$; $p'_x = +0.0397$; $r'_x = -0.0170$.
$k_y = -1.02$; $p_y = +0.0306$; $r_y = +0.0273$;
$k'_y = -0.35$; $p'_y = +0.0307$; $r'_y = +0.0136$.

1	−61.4	+41.1	+2.74	+1.68	−2.51	−2.47	1.66	−0.65
7	−56.1	+25.8	+1.73	+1.07	−3.05	−3.31	1.85	−1.93
10	−57.7	−6.1	+2.88	+2.58	−0.17	−0.03	+0.26	+0.20
33	−22.9	+1.4	+0.36	+0.93	−0.90	−0.57	−0.56	−0.91
63	+17.0	−20.7	−1.77	−1.67	+1.14	−0.10	−0.68	−1.14
65	+20.4	+14.2	−0.08	+0.23	−0.52	−1.07	+0.32	−1.46
73	+26.1	−7.9	−1.53	−0.53	+0.02	−1.24	+0.05	−2.06
77	+28.4	−47.9	−3.55	−2.18	+1.43	−0.17	−0.62	−2.11
93	+58.2	+50.2	+0.60	−0.23	+0.94	−1.13	+1.05	0.43
96	+56.0	−58.1	−7.19	−5.18	+1.21	−1.11	−2.52	−3.56
97	+61.0	+60.7	−0.04	−1.91	+1.41	−0.71	−0.26	+0.27
—	−54.8	+46.8	+2.78	+1.66	−1.89	−1.86	−1.53	0.00
23	−37.4	+27.5	+2.18	+2.09	−0.20	−0.78	—	—
26	−33.9	−21.6	+1.09	+1.48	+0.06	+0.20	—	—
29	−25.2	−18.6	+0.46	+1.46	+1.26	+0.79	—	—
31	−22.6	+29.1	+1.88	+1.95	−0.79	−0.94	—	—
69	+25.5	+19.4	+0.05	+0.23	+0.57	−0.56	—	—
70	+25.4	+17.1	−0.53	−0.35	+1.40	+0.69	—	—
74	+27.8	−22.7	−2.57	−1.14	+3.01	+1.85	—	—
75	+29.0	−29.6	−2.43	−1.31	+2.52	+1.36	—	—

Région 338.

$E = 1895.30$; $E' = 1913.27$; $T = 17.97$.

$k_x = -1.09$; $p_x = +0.0323$; $r_x = +0.0001$;
$k'_x = +0.55$; $p'_x = +0.0408$; $r'_x = -0.0099$.
$k_y = +0.28$; $p_y = +0.0238$; $r_y = +0.0275$;
$k'_y = +1.48$; $p'_y = +0.0294$; $r'_y = -0.0040$.

10	−59.6	−19.7	+1.22	−0.86	−4.16	−4.19	−2.17	−3.12
16	−54.1	+45.2	+1.61	+0.84	−4.81	−4.54	1.25	−1.95
22	−47.1	+24.5	+0.62	−0.37	−2.15	−1.52	−1.98	+0.25
28	−41.6	−33.9	+0.36	−2.47	−1.58	−1.72	−2.67	−1.19
39	−34.5	+26.3	+2.13	+0.61	−2.16	−1.98	−0.29	−0.08
40	−30.0	−24.0	−0.40	−2.03	−0.70	−1.26	−2.46	−0.38
41	−32.0	−47.0	+2.01	+0.12	−0.11	−0.76	−0.14	−0.43
47	−29.9	−57.1	+0.57	−0.32	−1.50	−1.47	−0.96	−1.77
51	−23.1	+7.0	+0.98	−0.27	−1.37	−1.74	−0.79	−0.21
76	−0.4	+27.3	−0.38	−1.37	−2.96	−3.82	−1.29	−1.78
79	−4.4	−27.1	+1.25	−0.19	−1.60	−2.81	+0.23	−2.00
99	+23.2	+37.6	+0.49	−1.51	−2.23	−4.33	−0.11	−1.67
100	+21.4	+9.2	−0.37	−1.81	−0.83	−2.12	−0.62	−0.60
103	+27.6	+43.6	+0.73	−1.03	−2.84	−5.52	+0.37	−2.46
109	+37.0	+56.9	−0.34	−0.87	−1.08	−3.47	+0.20	−0.32
110	+36.7	+43.9	+1.60	+0.90	−2.33	−4.86	+2.11	−1.99
118	+40.2	+3.5	−0.41	−2.25	+0.47	−1.64	−0.14	−0.09
125	+49.6	+9.7	+0.31	−1.18	+1.40	−1.38	+1.05	+0.57
128	+51.5	−19.0	0.69	2.72	+0.53	−2.48	0.19	−0.19
135	+60.1	−59.5	2.83	−5.14	+3.15	0.12	1.77	−0.10
	25.2	43.6	+0.64	0.70	+0.32	+0.32	1.00	+0.33
33	−39.2	−33.7	+2.13	+0.69	0.77	−0.40	—	—
37	−33.5	+37.9	+2.27	+1.28	2.19	2.53	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
44	27.5	+39.4	+1.86	+0.53	-1.90	2.44	—	—
60	−19.3	−37.3	+1.98	+0.24	+0.29	−0.26	—	—
95	+19.5	+47.9	+0.19	0.73	0.61	−2.78	—	—
97	+15.9	+35.5	+0.87	−0.64	−0.96	−2.79	—	—
106	+27.9	−45.9	+0.22	−2.53	+1.85	−0.36	—	—
114	+36.5	−48.5	−0.13	−2.47	+1.60	−0.07	—	—

Région 339.

$E = 1897.98$; $E' = 1914.03$; $T = 16.05$.

$k_x = +0.78$; $p_x = +0.0655$; $r_x = +0.0132$;
$k'_x = -0.20$; $p'_x = +0.0663$; $r'_x = -0.0097$.
$k_y = -0.46$; $p_y = +0.0502$; $r_y = -0.0275$;
$k'_y = -0.08$; $p'_y = +0.0519$; $r'_y = -0.0298$.

5	−57.8	+16.5	−0.15	+0.30	+0.68	+0.01	−3.41	−0.73
9	−50.5	+18.5	+0.51	+1.82	+0.58	+0.84	−1.84	−0.06
16	−53.3	−55.0	+1.69	+2.04	+3.37	+2.82	−1.45	−1.51
18	−48.3	+8.8	−0.05	+1.40	−1.04	−1.03	−2.19	−2.24
40	−28.0	+14.9	+4.45	+5.58	+0.10	−0.01	+3.49	−0.26
58	−14.8	−21.9	−1.08	−0.37	+3.44	+3.07	−1.45	+1.44
68	+2.9	−27.1	−1.18	−0.51	+1.27	+0.03	−0.41	−0.92
75	+10.8	+56.6	-2.82	0.63	2.57	2.92	0.62	+0.18
78	+15.9	−32.7	−0.89	−0.91	+1.80	+1.11	+0.38	−0.03
91	+31.8	+4.2	-3.73	3.39	2.08	2.15	1.16	1.26
94	+37.3	+62.3	−4.39	−2.34	−3.17	−3.15	−0.51	+0.82
104	+50.0	−17.5	−4.77	−4.59	−0.17	−0.21	−1.12	+0.08
107	+50.8	+51.3	−3.91	−1.77	−3.65	−3.94	+0.89	+0.01
112	+55.0	−47.2	−2.27	−2.18	+1.86	+1.34	+1.61	+0.49
21	−44.2	+31.5	+1.84	+4.54	−0.25	−0.07	—	—
27	−39.9	+22.3	+1.18	+2.90	+0.41	−0.13	—	—
37	−31.1	−44.7	+1.99	+1.41	+3.66	+3.97	—	—
44	−29.2	−42.2	+1.74	+1.20	+3.67	+2.56	—	—
86	+27.2	+42.2	3.22	1.64	-3.01	3.37	—	—
88	+26.7	−40.0	−2.81	−2.22	+1.35	+0.95	—	—
89	+31.8	+43.7	−3.14	−1.99	−1.62	−2.63	—	—
97	+37.3	−37.8	−2.13	−1.43	+1.35	+1.26	—	—

Région 340.

$E = 1897.98$; $E' = 1914.03$; $T = 16.05$.

$k_x = +0.55$; $p_x = +0.0283$; $r_x = -0.0203$;
$k'_x = +2.26$; $p'_x = +0.0404$; $r'_x = -0.0290$.
$k_y = -1.76$; $p_y = +0.0420$; $r_y = +0.0128$;
$k'_y = -0.52$; $p'_y = +0.0522$; $r'_y = +0.0038$.

2	−64.3	+33.1	+5.15	+4.07	+0.41	−0.80	+2.99	+0.75
5	−61.8	−54.4	+1.16	−0.36	+2.82	+2.14	+1.02	−0.71
10	−56.6	−51.6	+1.31	+0.25	+5.32	+3.44	+1.51	+1.28
16	−40.3	+30.4	+0.74	+0.43	−0.48	−1.31	−0.14	−0.26
17	41.4	5.5	-0.01	−1.54	+0.72	-0.32	-0.65	−0.85
18	−39.9	+45.1	+2.85	+1.09	−1.59	−2.27	+0.89	−0.62
19	−37.9	+40.8	−0.41	−1.21	−2.39	−3.03	−1.71	−1.61
30	−26.9	−43.4	+0.15	−1.66	+2.64	+1.47	+0.79	−0.91
50	−7.4	−56.1	+0.16	−2.33	+4.02	+2.59	+1.45	−0.42
51	−4.9	+22.7	+0.47	−0.69	−0.41	−0.74	+0.56	−0.61
57	+2.3	+33.5	−0.84	−2.42	−1.13	−2.31	−0.97	−1.30
74	+5.4	−30.0	−0.34	−1.70	+3.12	+1.68	+1.31	−0.20
87	+19.6	−38.1	−1.87	−4.57	+4.24	+2.18	−0.20	+0.11
92	+27.4	+45.3	−2.87	−4.07	+1.41	−0.85	−2.23	+1.04
99	+34.4	−35.4	−1.34	−2.35	+1.17	−0.86	+1.61	−2.94
104	+37.0	−57.8	−2.31	−4.52	+4.67	+1.85	+0.68	−0.91
106	+43.5	+6.1	−1.27	−3.00	+1.04	−0.74	+0.61	−1.06
119	+51.6	−29.2	−1.45	−3.16	+4.36	+2.62	+1.59	+0.54
123	+61.5	+27.1	−3.01	−4.70	+1.39	−0.30	−1.01	+0.17
	−18.2	+0.2	−2.10	−2.96	+1.23	+0.05	−1.76	−0.34
	+40.3	−38.2	−0.76	−3.21	+5.07	+3.56	+1.75	+1.04
20	−39.6	−34.0	−0.36	−1.95	+2.77	+1.76	—	—
23	−34.6	+31.6	+1.54	+0.09	+0.36	−0.73	—	—
29	−30.0	−30.7	−0.34	−1.64	+3.03	+1.56	—	—
33	−18.6	+38.1	+0.55	−0.44	−0.13	−1.23	—	—
81	+18.2	+23.3	−0.49	−2.92	+1.17	−1.45	—	—
94	+29.1	−28.3	−2.20	−4.11	+3.17	+3.12	—	—
95	+27.7	30.3	-1.43	4.41	+3.86	+2.04	—	—
100	+36.4	+18.7	−1.57	−2.60	+1.75	−0.33	—	—

Région 341.

$E = 1895.32$; $E' = 1913.29$; $T = 17.97$.

$k_x = -0.52$; $p_x = +0.0269$; $r_x = +0.0248$;
$k'_x = +0.74$; $p'_x = +0.0155$; $r'_x = +0.0188$.
$k_y = -0.74$; $p_y = +0.0450$; $r_y = +0.0245$;
$k'_y = +1.93$; $p'_y = +0.0400$; $r'_y = -0.0166$.

1	−60.0	+33.6	+1.56	+0.81	−2.94	−2.09	+0.75	−0.26
17	−37.3	−45.7	+2.56	+0.21	+0.71	−0.85	−0.29	−1.27
54	+4.0	+0.2	−0.52	−1.61	+0.42	−2.00	−0.87	−0.20
57	+1.0	−10.2	+1.85	+1.09	+1.06	−1.25	+1.38	+0.06
71	+17.5	−42.8	+0.69	−1.03	+3.11	−1.45	−0.62	+0.46
85	+29.0	+4.1	−0.95	−1.42	+4.24	+0.38	−0.37	+2.96
93	+36.9	+27.0	−1.74	−1.81	−1.11	−5.44	−0.29	−1.67
95	+39.3	−50.1	−1.77	−2.98	+0.55	−3.96	−2.52	−3.39
97	+43.1	+2.3	+0.16	−0.99	+0.41	−4.37	+0.66	−1.46
99	+44.2	−5.4	−1.84	−3.01	+2.54	−2.16	−1.49	+0.38
103	+51.3	+2.8	−1.91	−2.31	+0.29	−4.43	−0.85	−1.56
109	+56.7	+12.1	−1.59	−3.08	+0.32	−4.69	−0.75	−1.30

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
112	+61.6	+ 5.0	−2.01	−2.88	+4.42	−1.84	−0.92	+1.85
115	+62.9	−34.0	−2.59	−3.99	+1.93	−3.73	−2.59	−2.00
—	+42.8	−27.4	−1.02	−2.88	+3.14	−1.95	−1.53	−0.14
15	−36.3	+17.9	+1.52	−0.44	−0.54	−1.70	—	—
19	−32.3	+27.5	+0.73	−0.37	1.58	2.73	-	-
21	−32.1	−40.6	+2.45	+0.52	+2.25	+0.55	-	-
33	−15.5	−43.0	+1.44	−0.15	+1.71	−0.40	—	—
72	+15.0	−49.6	+0.95	−0.26	+2.74	−0.95	—	—
76	+22.4	+23.4	−0.68	−1.59	0.00	−3.25	—	—
82	+22.0	- 39.5	+1.79	+0.34	+3.78	+0.15		-
84	+27.1	+23.4	- 1.28	- 1.99	+0.46	−3.43	—	—

Région 342.

$E = 1895.26$; $E' = 1910.29$; $T = 15.03$.

$k_x = +0.02$; $p_x = +0.0217$; $r_x = +0.0119$;
$k'_x = +1.18$; $p'_x = +0.0163$; $r'_x = -0.0246$.
$k_y = -3.35$; $p_y = -0.0119$; $r_y = +0.0309$;
$k'_y = -0.57$; $p'_y = -0.0142$; $r'_y = -0.0049$.

4	−52.0	+33.3	−0.55	−0.75	+0.39	−0.82	−1.25	−1.93
16	− 39.0	+ 27.6	+1.12	+1.78	+ 0.86	− 1.38	+ 1.13	- 2.07
22	−32.0	−22.5	+0.33	−1.42	+0.91	−1.22	−0.41	−1.40
23	−34.3	−50.8	−0.39	−2.58	+2.11	+0.35	−1.21	+0.37
25	−27.5	−16.5	+0.60	−1.60	+0.03	−1.37	−0.32	−2.05
29	−18.0	− 3.3	+1.22	−0.38	+2.32	−0.70	+0.70	−0.87
30	−18.4	−16.3	+2.28	−0.05	+1.13	−1.83	+1.47	−1.86
44	− 4.7	+42.3	−2.56	−1.64	+2.61	+0.20	−1.86	−1.04
46	− 0.1	+12.5	+0.80	+0.63	+1.89	−1.13	+1.23	−1.74
48	− 4.1	−41.5	+0.49	−2.44	+2.41	+0.04	−0.19	−0.14
56	+14.2	+50.6	−1.26	+0.36	+0.05	−3.64	+0.10	−4.60
73	+31.8	− 0.6	+0.31	− 0.85	+3.20	−1.10	+0.93	−1.31
79	+39.6	+18.6	+0.24	−0.16	+6.61	+1.27	+1.27	+1.22
84	+44.0	+49.1	−2.08	−0.42	+3.29	−0.49	−0.13	−1.77
97	+60.9	−19.9	−4.13	−4.13	+5.37	+0.64	−2.25	+0.51
—	−55.8	−32.4	−0.67	−2.77	−0.36	−1.55	−1.97	−1.76
—	- 6.1	−50.7	+1.91	- 0.14	+2.80	− 0.44	+1.69	−0.04
13	−43.2	−30.9	+1.01	−1.58	+2.34	+1.07	—	—
17	−36.8	+24.4	+0.91	−0.03	+3.13	+1.40	—	—
19	−39.4	−24.4	+0.51	−1.26	+1.36	+0.05	—	—
27	−22.5	+14.6	+0.78	+0.06	+1.99	+0.23	—	—
65	+26.3	+30.3	−1.73	−1.49	+4.79	+1.19	—	—
68	+28.2	−34.3	−0.26	−2.74	+3.15	−0.64	—	—
69	+32.3	+22.5	−1.10	−0.99	+4.56	+0.77	—	—
77	+34.1	−23.6	+0.46	−1.60	+4.57	+0.30	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy

Région 343.

$E = 1894.29$; $E' = 1913.25$; $T = 18.97$.

$k_x = +0.29$; $p_x = +0.0200$; $r_x = -0.0180$;
$k'_x = +0.62$; $p'_x = +0.0234$; $r'_x = +0.0070$.
$k_y = -3.05$; $p_y = +0.0012$; $r_y = +0.0007$;
$k'_y = -0.48$; $p'_y = -0.0025$; $r'_y = -0.0309$.

3	60.1	4.1	0.32	+0.14	+2.37	+1.68	0.57	0.65
16	−47.0	+30.0	+0.61	+0.16	+2.51	+1.67	+0.19	−0.40
25	−42.3	− 3.5	+2.10	+1.34	+2.93	+1.87	+1.22	0.00
31	−32.8	+21.8	−0.99	−1.37	+2.61	+2.05	−1.17	+0.06
45	−22.0	−56.2	−0.12	−0.94	+1.78	+0.08	−1.25	−1.13
47	−18.1	+24.3	+2.14	+2.20	−0.45	−2.80	+2.54	−3.68
50	−15.7	+ 1.8	−0.42	−0.85	+2.82	+1.17	−0.50	−0.01
56	−12.2	+21.4	−0.47	−0.62	+3.39	+1.51	−0.08	+0.49
60	−14.2	− 5.5	+1.27	+0.99	+2.33	−0.12	+1.21	−0.87
68	− 0.8	+30.2	+0.17	+0.83	+2.33	+0.29	+1.31	−0.48
69	− 2.4	− 9.3	+0.49	+0.51	+2.76	+0.40	+0.78	−0.21
101	+26.6	+ 1.9	−1.88	−2.07	+0.19	−3.19	−0.92	−2.86
104	+34.7	−17.6	−1.68	−2.34	+3.29	+0.01	−1.03	+0.42
108	+35.8	− 5.5	−1.17	−1.92	+3.67	+0.06	−0.38	+0.64
115	+44.6	−44.0	−1.09	−1.40	+2.90	−0.54	−0.37	+0.12
117	+48.9	+14.8	−1.85	−2.33	+1.81	−2.22	−0.39	−1.24
—	+29.5	+43.2	−4.67	−4.27	+2.60	−1.36	−2.83	−0.73
	+40.2	+53.5	- 2.42	2.35	+3.89	+0.42	- 0.39	+ 0.96
38	−26.1	−18.1	+0.77	+0.33	+3.38	+1.46	—	—
40	−23.2	+31.4	−0.48	−0.30	+2.69	+1.36	—	—
41	−24.7	+29.5	−0.66	−0.57	+2.70	+1.00	—	—
43	−24.3	−20.2	+0.79	+0.18	+3.35	+1.20	—	—
92	+20.0	−31.7	−0.51	−1.25	+2.27	−0.87	—	—
96	+24.5	+36.8	−1.57	−1.57	+3.56	+0.34	—	—
99	+24.6	−32.6	−0.23	−0.90	+3.34	+0.06	—	—
100	+26.9	+47.8	−1.12	−1.16	+3.09	−0.52	—	—

Région 344.

$E = 1905.04$; $E' = 1922.05$; $T = 17.01$.

$k_x = -2.16$; $p_x = +0.0058$; $r_x = +0.0034$;
$k'_x = +2.52$; $p'_x = +0.0171$; $r'_x = -0.0123$.
$k_y = -0.92$; $p_y = +0.0061$; $r_y = -0.0372$;
$k'_y = +1.30$; $p'_y = +0.0061$; $r'_y = +0.0134$.

4	−55.9	+50.4	+3.83	−0.04	+4.18	−1.79	+1.21	+1.03
7	−52.8	+60.8	+1.75	−2.06	+3.39	−1.90	−0.85	+0.68
18	−47.7	−35.3	+1.24	−3.04	−0.13	−4.14	−1.11	−2.73

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
21	−43.2	−13.3	+4.27	−0.34	+1.91	−1.92	+1.70	−0.41
26	−39.8	+17.6	+2.29	−1.96	+2.38	−2.15	−0.19	−0.06
27	−35.5	−17.0	+2.04	−2.72	+1.70	−1.71	−0.48	−0.33
35	−30.3	−12.5	+4.16	−0.55	+1.37	−2.36	+1.69	−0.74
47	−18.2	+10.0	+1.03	−3.27	−1.29	−3.45	−1.19	−2.34
53	−13.6	+62.3	+2.82	−0.86	−0.62	−2.86	+0.72	−1.33
55	−12.7	+54.6	+0.75	−2.76	+1.52	−1.27	−1.21	+0.49
56	−14.4	+32.6	+1.91	−1.74	+0.71	−1.87	−0.04	−0.36
60	− 5.4	+62.6	+0.93	−2.16	−0.62	−2.85	−0.77	−1.23
73	+ 4.0	−20.6	+3.60	−2.30	+1.04	−0.78	+0.96	+0.24
75	+ 1.6	−58.4	+4.64	0.92	0.44	3.24	+2.32	−1.99
78	+ 5.6	+25.7	+1.39	−3.18	−0.71	−2.21	−0.76	−1.04
82	+13.8	− 3.6	+2.17	−3.20	+0.55	−1.35	−0.16	−0.06
89	+17.7	− 3.0	+2.18	−3.28	−0.68	−1.98	−0.15	−0.95
92	+21.2	+20.4	+2.70	−2.74	+0.07	−1.65	+0.31	−0.22
93	+24.6	+ 2.5	+1.49	−2.33	−3.85	−4.79	+0.03	−3.81
95	+21.5	42.8	+4.51	1.09	−10.51	11.64	+2.32	−10.89
96	+20.3	−41.8	−1.14	−6.24	−4.27	−5.64	−3.09	−4.77
109	+36.1	+52.6	+1.13	−3.29	−1.75	−2.36	−0.72	−1.12
120	+46.8	−43.8	+2.49	−2.93	+0.01	−0.28	+0.69	+0.34
123	+51.4	+40.6	−2.11	−6.77	−6.16	−6.03	−3.85	−5.04
—	−56.5	− 8.4	+4.15	−0.85	+2.73	−2.09	+1.21	−0.21
—	+ 9.0	+10.8	+2.08	−2.25	+0.58	−1.25	+0.15	+0.03
—	+29.8	+57.0	−3.13	−7.28	−5.88	−6.64	−4.94	−5.36
—	+45.3	+33.7	+1.63	−2.85	−2.56	−2.36	−0.06	−1.52
—	+48.9	− 2.2	+2.00	−2.44	−3.40	−3.22	+0.53	−2.55
19	−42.5	+39.5	+1.94	−1.63	+2.90	−1.33	—	—
30	−35.2	−41.2	+2.30	−2.61	+2.02	−1.86	—	—
33	−34.0	+45.0	+2.00	−1.56	+2.10	−2.24	—	—
42	−29.8	−34.8	+3.20	−1.77	+1.86	−1.74	—	—
97	+26.0	+44.9	+2.09	−2.38	−1.00	−1.41	—	—
101	+30.3	+52.8	+2.10	−1.92	−0.69	−1.62	—	—
107	+30.9	−37.7	+1.40	−4.05	+0.87	+0.39	—	—
111	+38.7	−41.4	+2.25	−3.65	−0.31	−1.00	—	—

Région 345.

$E = 1894.31$; $E' = 1913.28$; $T = 18.97$.

$k_x = -0.92$; $p_x = +0.0271$; $r_x = -0.0263$;
$k'_x = +1.29$; $p'_x = +0.0332$; $r'_x = -0.0169$.
$k_y = -0.59$; $p_y = +0.0112$; $r_y = +0.0182$;
$k'_y = -1.38$; $p'_y = +0.0069$; $r'_y = +0.0072$.

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
2	−61.7	+10.0	+5.72	+4.20	0.92	−0.81	+3.33	0.17
5	−59.5	+19.2	+1.98	+0.70	−1.43	−0.13	−0.17	−0.83
12	−53.2	−59.5	+2.08	−2.01	+0.76	+1.07	−1.66	+0.06
41	−23.1	+59.5	+1.94	+1.99	−0.11	+1.31	+1.72	+0.45
54	−19.8	−33.2	+1.13	−2.65	−1.10	+0.04	−1.33	−1.56
58	−14.0	−58.0	+3.66	−1.29	+1.28	+0.76	+0.67	−0.31
62	− 5.8	−57.7	+1.48	−2.46	+1.67	+2.08	−0.75	+0.44
67	− 0.3	−48.4	+0.88	−3.04	+0.79	+1.69	−1.13	−0.17
73	+ 4.5	−55.6	+1.10	−3.61	+5.39	+5.56	−1.19	+3.93
75	+10.0	+50.3	−1.07	−1.30	+1.14	+1.37	−0.46	+0.60
76	+ 5.8	+39.8	−0.79	−1.82	−0.64	+0.31	−0.75	−0.86
86	+24.4	+16.1	+0.20	−1.33	−0.92	−0.10	+0.43	−1.66
99	+30.3	+ 6.7	+1.00	−1.54	−0.16	+0.73	+0.86	−1.02
106	+44.3	+25.4	−1.88	−2.93	−0.36	+0.13	−0.76	−1.43
117	+59.6	+ 6.6	+2.39	−0.36	−5.61	−5.09	+3.02	−7.03
121	+62.8	35.5	+1.40	−3.21	3.40	2.87	+1.00	−5.23
—	−28.0	−55.9	+3.32	−0.83	+4.93	+6.16	+0.32	+4.40
—	+61.7	+ 6.6	+0.79	−1.88	+1.44	+2.08	+1.52	+0.05
—	+24.8	−51.3	−0.01	−4.84	+3.76	+3.29	−1.73	+1.76
35	−27.1	+25.9	+1.66	−0.02	−0.33	+0.88	—	—
37	29.2	19.9	+2.30	−0.56	+0.53	+1.36	—	—
38	−29.7	−36.7	+1.89	−1.49	−0.32	+0.72	—	—
45	−21.0	+36.5	+0.59	+0.58	+0.45	+1.74	—	—
85	+20.9	+30.8	−0.89	−1.79	+0.23	+0.76	—	—
89	+29.9	+24.9	−0.84	−2.01	+0.72	+1.33	—	—
102	+37.6	−32.4	+0.90	−3.07	+1.96	+1.91	—	—
103	+39.2	−33.6	+1.34	−2.69	+1.88	+2.50	—	—

Région 346.

$E = 1894.31$; $E' = 1913.28$; $T = 18.97$.

$k_x = -0.68$; $p_x = +0.0196$; $r_x = +0.0181$;
$k'_x = -0.09$; $p'_x = +0.0331$; $r'_x = -0.0063$.
$k_y = +0.78$; $p_y = +0.0223$; $r_y = +0.0030$;
$k'_y = +1.08$; $p'_y = +0.0236$; $r'_y = +0.0092$.

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
6	−55.4	+51.3	+1.50	+2.78	−1.59	−2.47	+0.60	+0.41
7	−58.2	−17.4	−0.07	−0.93	−0.76	−1.78	−2.52	−0.38
11	−54.0	−47.3	+2.57	+2.11	−0.21	−0.99	+0.25	−0.42
29	−39.2	− 9.3	+1.60	+0.81	−4.08	−4.58	−0.27	−3.37
33	−26.2	+62.0	−0.19	+0.21	−5.58	−5.76	−0.70	−3.16
44	−22.3	−60.9	+2.63	+1.88	+1.14	+0.87	+0.92	+0.67
45	−18.5	+42.5	−1.01	−0.84	−2.21	−2.58	−1.54	−0.37
56	−14.2	−41.8	+2.70	+1.99	+3.30	+2.44	+1.33	+2.92
60	− 8.9	+15.9	−0.62	−0.45	−1.95	−2.64	−1.05	−0.94
62	− 9.4	−11.4	+0.25	+0.07	−2.27	−2.94	−0.54	−1.87
77	+14.3	+55.8	+0.81	+1.42	−9.63	−10.11	+1.43	−7.74
84	+12.7	−55.1	−0.34	−1.86	+0.90	+0.47	−1.47	+0.27
87	+19.9	−48.4	+1.63	+0.24	−0.58	−1.18	+0.78	−1.18
95	+34.0	+58.9	−3.39	−3.53	−3.89	4.04	−2.59	−1.89
100	+36.7	+14.0	−0.57	−0.74	−1.12	−0.53	+0.00	+0.20
104	+40.5	−45.2	+1.30	+0.15	+0.36	+0.32	+1.13	−0.01
113	+59.1	+45.4	−2.56	−2.45	−4.40	−3.86	−1.06	−2.52
—	17.1	+54.5	−0.42	+0.18	−1.58	−2.24	−0.63	+0.38

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
30	−33.4	+28.6	+0.84	+1.09	−2.03	−2.88	—	—
35	−28.8	+27.6	+0.73	+1.28	−1.20	−1.61	—	—
37	−27.3	−29.9	+1.33	+0.35	+0.07	−0.35	—	—
41	−21.4	−37.7	+2.21	+1.23	−0.04	−0.25	—	—
90	+23.6	−29.5	+1.08	−0.62	+0.16	−0.09	—	—
93	+29.2	+27.5	−0.44	−0.58	−1.05	−1.38	—	—
94	+27.1	+25.7	−0.27	−0.56	−1.30	−1.11	—	—
97	+32.5	−18.3	+0.05	−1.58	−0.72	−0.86	—	—

Région 347.

$E = 1894.30$; $E' = 1913.27$; $T = 18.97$.

$k_x = -1.08$; $p_x = +0.0196$; $r_x = +0.0030$;
$k'_x = +2.94$; $p'_x = +0.0203$; $r'_x = +0.0225$.
$k_y = -0.62$; $p_y = +0.0180$; $r_y = -0.0305$;
$k'_y = +0.30$; $p'_y = +0.0185$; $r'_y = +0.0217$.

2	−60.5	+ 5.9	+3.72	+0.35	−0.35	−4.84	+1.83	−2.91
13	−53.3	−29.5	+3.85	+0.04	+2.25	−1.51	+1.44	−0.56
21	− 41.9	+26.5	+3.96	− 1.07	+1.20	−1.69	+1.88	−0.10
40	−26.3	−58.3	+0.62	−2.50	+0.33	2.03	−1.27	−2.19
42	−22.4	+ 8.5	− 0.12	−3.78	− 0.54	− 2.29	−1.35	−1.51
43	−22.9	−17 1	−1.34	−4.56	+0.84	−1.01	−2.69	−0.66
45	−16.8	+24.7	− 0.93	−4.90	0.84	− 2.47	−2.00	−1.44
51	−12.0	− 6.8	+2.33	−1.53	+1.89	−0.02	+1.00	+0.59
56	− 2.0	+36.5	+3.05	−1.21	−5.51	−7.05	+2.27	−5.78
62	− 3.8	−45.7	+0.61	−2.01	+0.55	−1.05	−0.43	−1.26
67	+ 1.3	− 6.6	+1.25	−2.16	+1.21	+0.69	+0.42	+0.67
78	+13.8	+23.2	+1.93	−2.40	+0.07	−0.45	+1.26	+0.13
93	+33.9	−61.3	−0.29	−3.33	−0.85	−0.28	−0.98	−1.69
99	+35.8	−44.3	+2.03	−1.41	+2.20	+2.21	+1.39	+1.39
105	+45.2	−45.0	+0.93	−1.66	−0.36	+0.74	+0.89	−0.59
113	+59.5	−19.3	−2.12	−5.58	−2.47	−1.47	−1.97	−2.22
—	−22.2	+45.2	−3.91	−7.64	6.70	−8.59	4.71	7.08

30	−35.1	−33.0	+1.60	−1.97	+2.46	−0.12	—	—
34	−28.9	+37.2	+1.51	−3.55	−0.24	−2.46	—	—
38	−27.9	−23.3	+1.87	− 1.66	+3.09	+0.10		
41	−20.9	+27.8	+1.50	−2.47	+0.43	−1.34	—	—
88	+27.6	−13.2	+0.37	−2.81	−0.96	−0.05	—	
95	+38.8	+31.3	0.00	−4.59	−0.69	+0.43	—	—
96	+36.1	+31.6	+0.42	−4.53	−0.10	+0.34	—	—
102	+43.3	−23.5	+0.59	−3.37	−0.70	+0.76	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy

Région 348.

$E = 1895.29$; $E' = 1913.26$; $T = 17.96$.

$k_x = -0.61$; $p_x = +0.0202$; $r_x = -0.0101$;
$k'_x = -1.48$; $p'_x = +0.0235$; $r'_x = -0.0404$.
$k_y = -2.97$; $p_y = +0.0124$; $r_y = -0.0459$;
$k'_y = -0.95$; $p'_y = +0.0093$; $r'_y = +0.0059$.

1	−62.1	+ 3.0	+0.97	+1.16	+4.33	−0.85	−1.41	−1.43
6	−56.5	+12.2	+2.00	+1.97	+4.58	−0.85	−0.60	−1.09
11	−51.8	+ 4.9	+1.34	+2.36	+7.71	+3.07	−0.45	+2.45
14	−51.7	−34.1	+0.97	+0.40	+4.70	−0.03	−0.62	−1.02
27	−36.2	−39.6	+0.66	+0.20	+4.47	+0.77	−0.40	−0.49
31	−31.5	+ 8.9	+0.16	+1.46	+3.93	+0.84	−1.15	−0.11
33	−33.0	−57.6	+1.27	+0.33	+1.76	−2.64	+0.48	−3.68
44	−20.7	− 7.7	+0.33	+1.30	+2.67	−0.18	−0.49	−1.21
55	−11.8	−26.7	+0.78	+1.27	+3.15	+0.48	+0.39	−0.67
61	− 5.7	−19.9	−3.88	−3.30	−2.36	−4.40	−4.26	−5.67
75	+ 6.7	+24.1	+1.01	+2.33	−4.03	−5.47	+0.17	−6.31
81	+10.5	+26.1	+0.75	+3.06	+1.27	+0.30	+0.43	−0.68
86	+11.3	− 14.1	+ 0.20	+ 0.70	+ 1.11	+ 0.06	+ 0.01	− 1.30
87	+11.0	− 19.1	+ 1.82	+ 2.10	− 1.42	− 2.37	+ 1.63	− 3.84
91	+19.5	+30.4	+1.54	+3.20	+2.00	+1.37	+0.98	+0.44
113	+41.1	−17.3	-1.80	2.10	-0.71	0.33	−1.66	−1.84
114	+49.7	+36.9	+0.68	+2.65	− 0.80	+ 0.65	+ 0.77	− 0.64
124	+62.0	+41.3	−0.34	+1.44	+0.74	+1.68	−0.18	+0.93
128	+61.1	−21.7	+0.03	+0.45	−1.50	+0.04	+1.08	−1.70
—	−27.0	− 3.1	−4.42	−3.50	−1.81	−5.45	−5.51	−6.16
—	+49.6	−19.1	−2.20	−2.24	−2.62	−1.55	−1.70	−3.26
—	+61.5	+28.8	−3.10	−1.41	−0.38	+0.62	−2.68	−0.29

22	−36.2	+19.2	+1.52	+2.63	+4.61	+0.90	—	—
26	−38.7	−32.8	+0.78	+1.07	+5.55	+1.34	—	—
40	−26.3	−36.7	+1.27	+1.40	+4.44	+1.40	—	—
45	− 18.4	+27.6	+1.06	+2.70	+3.06	− 0.33	—	
101	+24.5	− 29.4	− 0.37	− 0.62	+1.95	+0.88	-	—
104	+29.5	+40.2	+0.16	+2.47	+0.32	+0.50	—	—
110	+36.2	+45.4	+0.82	+3.20	+1.75	+1.57	—	—
111	+39.5	−22.3	- 0.45	0.82	+ 1.50	+1.31		

Région 349.

$E = 1894.32$; $E' = 1913.32$; $T = 19.00$.

$k_x = +0.31$; $p_x = -0.0002$; $r_x = +0.0100$;
$k'_x = -0.97$; $p'_x = +0.0083$; $r'_x = -0.0007$.
$k_y = -0.74$; $p_y = +0.0120$; $r_y = -0.0042$;
$k'_y = +1.78$; $p'_y = +0.0128$; $r'_y = -0.0359$.

2	−64.5	+49.4	+1.07	+3.13	−1.22	−1.58	+1.73	−1.56
14	−45.2	− 9.6	−0.25	+0.83	+1.05	−0.49	−0.27	−0.22

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
15	−49.6	−20.1	−0.19	+1.27	+0.05	−0.75	−0.08	−1.07
20	−43.1	+ 5.3	−0.43	+0.38	+0.36	−0.47	−0.50	−0.33
25	−35.8	+11.9	+0.71	+1.76	−0.45	−1.53	+0.81	−1.04
38	−15.1	+14.8	+0.26	+1.95	+0.22	−1.33	+0.78	−0.15
44	−11.4	−35.1	−1.60	−0.54	+0.59	−1.89	−1.61	−0.79
58	+ 3.7	−54.1	+1.82	+2.22	−7.08	−10.14	+1.45	−8.68
63	+10.7	+30.6	−1.80	+0.25	−2.89	−5.06	−0.91	−2.86
86	+34.3	−37.3	−2.48	−1.94	−0.09	−3.23	−2.57	−0.92
87	+32.6	−40.4	−1.15	−0.23	+1.21	−2.24	−1.07	+0.16
88	+32.8	−41.6	−2.62	−1.90	−0.75	−4.38	−2.65	−1.90
94	+36.6	−10.9	−2.27	−1.70	−2.36	−6.05	−2.22	−3.09
96	+44.4	+29.0	−0.53	+1.16	+0.74	−2.79	+0.30	+0.74
98	+40.9	+21.2	−0.76	+0.93	+0.88	−2.58	+0.02	+0.75
103	+46.3	−44.2	−2.24	−1.82	+0.12	−3.49	−2.39	−0.78
104	+52.6	+58.5	+0.16	+1.98	−0.24	−4.05	+1.23	+0.15
105	+52.6	+ 2.5	+1.72	+3.02	−0.74	−4.62	+2.27	−1.07
106	+51.5	− 8.3	−1.63	−0.96	+1.26	−2.58	−1.45	+0.79
107	+51.5	−15.7	−1.44	−1.06	+0,52	−3.56	−1.44	−0.16
—	−31.3	−44.0	−0.76	+0.22	−0.82	−2.37	−0.93	−2.24
—	25.6	−53.6	+0.70	+1.73	−0.48	−2.65	+0.53	−2.22
—	+ 5.7	−54.1	−2.34	−1.14	−0.85	−3.57	−2.29	−2.25
—	+46.1	−20.7	−1.35	−0.02	+0.72	−2.58	−0.93	+0.26
—	+53.8	−27.7	−2.22	−1.74	−0.95	−6.06	−2.22	−2.24
—	+53.2	−11.7	+5.61	+6.60	+1.38	−3.71	+5.93	+0.27
31	−25.7	−35.3	+0.16	+1.43	+1.04	−0.33	—	—
34	−22.7	+41.8	−0.57	+1.16	+0.76	−1.16	—	—
36	−24.7	−29.5	+0.22	+1.28	+1.53	−0.18	—	—
37	−18.3	+29.3	−1.09	+0.76	−0.08	−2.25	—	—
77	+26.0	−25.4	−0.57	+0.32	+1.35	−2.23	—	—
78	+28.4	−34.3	+0.19	+0.71	+0.50	−2.94	—	—
80	+32.9	+31.8	−0.57	+0.83	+0.37	−2.92	—	—
82	+31.9	+24.0	−0.28	+1.01	+0.27	−3.26	—	—

Région 350.

$E = 1894.31$; $E' = 1913.28$; $T = 18.97$.

$k_x = +\ 2.50$; $p_x = +\ 0.0310$; $r_x = -\ 0.0286$;
$k'_x = -\ 0.58$; $p'_x = +\ 0.0298$; $r'_x = -\ 0.0129$.
$k_y = -\ 1.07$; $p_y = +\ 0.0174$; $r_y = -\ 0.0213$;
$k'_y = +\ 0.50$; $p'_y = +\ 0.0202$; $r'_y = +\ 0.0085$.

4	−65.3	−43.9	−0.76	+3.19	+2.15	−0.92	+1.16	−0.90
5	−57.6	+14.7	−1.36	+1.23	+0.54	−3.36	−1.16	−1.78
17	−39.8	− 4.3	−0.51	+2.52	−6.10	−9.22	+0.84	−8.28
23	−20.0	− 1.5	−5.31	−1.96	−0.44	−2.55	−3.25	−1.94
26	−17.8	+15.5	−1.44	+0.89	+1.05	−0.70	−0.17	+0.06
32	− 8.5	+14.7	−1.59	+1.38	−1.85	−3.50	+0.29	−2.73
37	+ 5.0	−15.2	−4.03	−0.72	−2.25	−3.73	−0.94	−3.52
38	+ 6.1	+40.1	−2.98	−0.69	−2.76	−4.11	−1.52	−2.92
55	+24.4	+16.6	−5.43	−2.14	−5.68	−6.13	−2.42	−5.72
56	+24.0	+16.3	−4.95	−1.45	−5.38	−6.25	−1.85	−5.64
67	+33.6	− 8.1	−2.33	+0.17	+0.17	−0.45	+1.06	−0.36
76	+41.8	+36.0	−1.69	+0.35	+0.12	+0.16	+0.82	+0.80
87	+54.1	+33.8	−2.87	−0.91	−1.08	−1.34	+0.01	−0.51
88	+50.2	+18.5	−1.92	+0.04	−1.47	−1.74	+1.16	−1.22
90	+58.7	+60.0	−3.34	−2.28	−12.35	−13.75	−1.31	−11.83
96	+55.9	−48.5	−5.38	−2.45	−0.78	−0.24	−0.24	−1.35
99	+63.1	− 0.1	−6.59	−4.34	+1.85	+1.61	−2.58	+1.84
	−19.6	−26.8	−3.91	+0.32	+0.69	−1.84	−0.87	−1.49
—	+60.9	+61.4	−1.06	+2.13	+0.37	+1.82	+2.07	+2.35
—	+39.8	−46.9	−8.38	−4.44	+0.22	−0.20	−3.26	−0.90
9	−46.3	+30.5	−0.21	+2.58	+0.67	−2.45	—	—
12	−43.4	+19.3	−0.85	+1.58	+1.46	−1.23	—	—
15	−42.3	−30.4	−1.82	+1.70	+2.93	−0.06	—	—
22	−27.3	−34.6	−2.60	+0.99	+2.87	+0.68	—	—
61	+25.1	+43.4	−1.85	+0.74	−0.01	−0.67	—	—
64	+27.3	−20.2	−4.01	−1.29	+0.20	−0.16	—	—
68	+31.8	−27.7	−4.46	−0.24	+0.46	−0.29	—	—
69	+39.7	+46.8	−2.29	−0.05	+0.25	−0.70	—	—

Région 351.

$E = 1894.29$; $E' = 1913.32$; $T = 19.04$.

$k_x = +\ 1.13$; $p_x = +\ 0.0050$; $r_x = -\ 0.0134$;
$k'_x = +\ 1.90$; $p'_x = +\ 0.0070$; $r'_x = -\ 0.0178$.
$k_y = +\ 0.15$; $p_y = +\ 0.0081$; $r_y = +\ 0.0107$;
$k'_y = +\ 1.38$; $p'_y = +\ 0.0150$; $r'_y = +\ 0.0041$.

1	−62.4	+40.8	−4.57	−5.98	−6.93	−8.35	−4.77	−5.94
12	−45.3	+46.3	−0.11	−0.77	−3.35	−4.02	+0.08	−2.05
13	−45.7	+41.3	+1.30	+0.57	−5.27	−6.67	+1.53	−4.39
26	−43.5	−39.9	−1.04	−1.05	−0.22	−0.97	+0.83	+0.03
30	−38.9	−15.2	−1.20	−2.06	−1.89	−2.56	−0.11	−1.34
35	−34.2	− 4.5	−1.52	−2.14	−1.04	−1.44	−0.45	−0.27
36	−31.4	−37.3	−0.98	−1.32	−0.24	−0.73	+0.75	+0.08
47	−15.6	+42.7	−1.21	−1.97	−3.13	−4.66	−0.83	−2.52
50	−15.9	− 3.6	−3.70	−4.05	−4.34	−4.96	−2.40	−3.80
51	−15.5	−26.0	−0.05	+0.03	−2.37	−3.50	+1.81	−2.35
61	− 0.0	−37.5	−0.97	−0.90	−0.41	−1.37	+1.16	−0.55
66	+ 4.3	+37.9	+1.54	+0.75	−2.98	−4.82	+2.09	−2.73
70	+ 3.2	−39.6	−0.64	−0.89	−0.25	−1.32	+1.38	−0.49
77	+11.7	+55.7	+0.96	−0.26	+0.40	−1.97	+1.06	+0.53
97	+35.5	+22.0	+0.02	−1.71	−2.13	−3.99	+0.54	−2.30
101	+44.0	+24.8	0.00	−1.59	+0.68	−1.32	+0.60	+0.40
103	+43.7	−48.3	−1.50	−2.73	−2.11	−3.62	+0.42	−2.98
108	+52.5	+34.1	−0.89	−2.24	−0.98	−2.51	−0.27	−0.97
113	+59.0	−17.7	+4.58	+3.36	−2.81	−4.29	+6.12	−3.42
—	− 7.2	+40.7	−0.51	−1.58	−4.28	−5.63	−0.21	−3.66
—	+43.4	+10.3	−1.50	−4.80	−2.22	−3.71	−1.53	−2.40

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Jx	Jy
22	−41.0	+27.1	−0.30	−1.05	−0.96	−2.34	—	—
34	−32.3	+30.8	−0.83	−1.71	−0.83	−1.62	—	—
37	−31.9	−47.6	−1.14	−1.69	−0.24	−0.91	—	—
41	−28.3	−45.2	−2.07	−2.84	+0.30	−0.69	—	—
85	+24.9	+16.2	−0.70	−1.45	+0.22	−1.44	—	—
87	+20.3	−23.9	−1.45	−2.58	−0.23	−1.51	—	—
91	+25.5	+23.4	−1.28	−1.50	−0.05	−1.70	—	—
99	+37.1	−20.3	−1.70	−2.91	+0.66	−0.38	—	—

Région 352.

$E = 1894.29$; $E' = 1913.25$; $T = 18.96$.

$k_x = +1.75$; $p_x = +0.0109$; $r_x = +0.0288$;
$k'_x = +1.01$; $p'_x = +0.0255$; $r'_x = +0.0210$.
$k_y = +0.86$; $p_y = +0.0297$; $r_y = +0.0025$;
$k'_y = -4.48$; $p'_y = +0.0219$; $r'_y = -0.0521$.

9	−50.9	+ 6.6	−0.49	−0.02	7.66	+0.70	+0.36	−6.38
15	45.3	−33.7	−0.15	1.19	−0.39	+6.86	+0.23	−0.56
16	−49.1	35.6	0.74	+0.92	−5.84	+1.52	−0.31	−6.11
28	−36.2	−29.6	+0.88	+1.16	+0.71	+7.32	+1.01	+0.54
42	−20.2	+22.9	−3.71	−2.79	−2.65	+4.85	−1.67	−0.62
43	−21.9	+19.9	−2.43	−0.21	−1.52	+5.31	+0.15	+0.05
44	−21.7	+18.6	−4.12	−1.92	−3.80	+3.46	−1.57	−2.04
47	−17.4	+49.3	−4.59	−3.68	−5.06	+0.98	−1.84	−3.01
58	− 8.3	+15.8	−3.54	−2.14	−1.65	+4.19	−1.21	−0.33
59	− 5.9	−23.5	+0.07	+1.12	−2.07	+3.51	+1.28	−1.84
61	− 1.2	+62.4	−0.71	+0.10	−5.01	+0.72	+2.61	−2.37
62	− 2.5	+51.6	−3.65	−2.92	−1.90	+3.42	−0.66	+0.22
63	− 2.6	+44.2	−3.45	−1.86	−2.95	+2.53	−0.22	−0.94
78	+ 9.1	+ 1.6	−1.54	−0.79	−0.67	+4.35	+0.42	+0.30
81	+ 6.4	−19.3	−1.67	−0.61	−0.05	+5.19	−0.13	+0.42
85	+ 5.8	−31.7	−0.87	−0.55	+0.34	+4.92	−0.01	+0.15
88	+15.0	+ 2.9	−2.46	−2.42	−2.69	+2.78	−0.72	−1.32
114	+36.1	+29.9	−1.71	−1.99	−2.00	+1.86	+0.93	−0.21
125	+40.1	−28.7	−3.17	−2.94	−0.15	+2.98	−1.66	−0.14
—	−48.9	+ 6.6	−4.35	−3.01	−0.98	+7.52	−3.02	+0.41
—	− 8.1	+39.3	−1.43	−1.10	−1.57	+5.00	+0.94	+0.72
—	− 0.8	+48.2	+3.25	+4.95	−3.90	+2.39	+6.66	−1.34
—	− 0.5	+32.2	−3.91	−2.87	−3.31	+2.17	−1.21	−1.56
22	−43.5	−37.3	−0.56	+0.45	+0.49	+7.66	—	—
23	−40.7	−43.4	+0.17	+1.15	+0.19	+7.14	—	—
34	−28.3	+34.9	−2.62	−1.46	−1.45	+5.96	—	—
40	−22.1	+24.2	−1.89	−0.30	−2.35	+4.63	—	—
98	+22.2	+37.5	−3.23	−2.41	−1.76	+2.36	—	—
100	+21.6	+28.0	−2.76	−2.33	−1.57	+2.58	-	-
104	+20.6	−22.0	−1.17	−1.11	+0.17	+4.40	—	—
105	+21.2	−24.6	−1.30	−0.78	−0.60	+3.70	—	—

Région 353.

$E = 1895.24$; $E' = 1913.23$; $T = 17.99$.

$k_x = +0.35$; $p_x = +0.0279$; $r_x = -0.0222$;
$k'_x = +0.36$; $p'_x = +0.0338$; $r'_x = +0.0142$.
$k_y = -1.25$; $p_y = +0.0263$; $r_y = +0.0244$;
$k'_y = +3.01$; $p'_y = +0.0209$; $r'_y = -0.0063$.

12	−43.8	−29.2	−1.11	+0.16	−1.89	−4.96	−1.35	−2.84
26	−19.7	+52.0	+1.35	−0.51	−0.42	−4.39	−0.04	−0.11
35	−10.1	−31.4	−0.87	+0.86	+2.18	−1.90	+0.16	+0.37
40	− 1.5	− 2.0	+0.06	+0.41	+1.38	−3.06	+0.55	+0.02
44	+ 1.8	+11.1	−0.70	−1.25	0.00	−4.13	−0.61	−0.94
45	+ 9.9	+59.4	−2.33	−3.64	+1.81	−3.21	−2.56	+1.49
54	+20.7	−28.5	−0.28	+0.89	+1.16	−3.64	+1.41	−1.22
60	+48.1	−38.9	−3.34	−1.94	+4.01	−1.83	−0.64	+0.62
62	+55.9	+ 4.8	−3.33	−3.21	+1.45	−4.46	−1.21	−1.01
—	−48.5	+45.4	−0.01	−2.66	−4.33	−7.43	−2.66	−3.49
—	14.2	+13.1	- 1.73	1.75	+0.89	- 3.48	− 1.87	+0.02
—	13.7	39.1	−2.42	1.03	+2.56	- 1.72	−1.63	+0.49
-	2.3	−58.0	+0.15	+2.84	+1.86	2.14	+2.01	−0.60
	+17.0	+62.1	-0.48	- 2.51	− 1.28	- 6.69	− 0.87	- 1.79
—	+62.3	−58.6	−2.97	- 2.26	+1.79	−5.11	0.10	−2.72
15	33.9	+14.5	+1.52	+0.72	+0.22	2.94		—
22	−21.9	+32.4	+0.34	−0.44	+0.39	−3.38	—	—
24	−24.0	−30.5	+0.10	+1.07	+1.47	−2.51	—	—
34	−15.0	−24.4	−0.88	+0.51	+0.82	−2.46	—	—
47	+ 8.0	−34.6	−1.21	−0.20	+2.39	−2.64	—	—
55	+26.2	−33.8	−2.00	−0.92	+3.45	−1.84	—	—
56	+31.3	+30.3	−0.61	−1.81	+0.61	−4.29	—	—
57	+32.9	+20.1	−0.71	−1.59	+1.43	−3.53	—	—

Région 354.

$E = 1894.28$; $E' = 1912.30$; $T = 18.02$.

$k_x = -2.68$; $p_x = -0.0125$; $r_x = +0.0023$;
$k'_x = -1.45$; $p'_x = +0.0021$; $r'_x = +0.0354$.
$k_y = -0.56$; $p_y = +0.0069$; $r_y = +0.0381$;
$k'_y = -0.66$; $p'_y = +0.0115$; $r'_y = -0;0121$.

2	−61.0	−44.7	+2.13	+3.40	−3.30	+0.22	+0.17	−1.77
15	−45.8	−19.5	+0.74	+0.89	−2.67	−0.74	−1.38	−1.89
18	−40.2	+24.8	+2.16	+1.34	−0.99	+0.55	+0.36	−0.08
32	−28.3	+18.5	+2.79	+1.52	−4.45	−2.96	+0.58	−3.77
36	-28.4	- 43.7	+0.66	+0.94	− 5.32	3.83	- 1.94	5.21
37	−28.0	−43.4	+0.57	+0.78	−6.38	−4.70	−2.06	−6.18
54	−10.3	−24.3	+2.42	+2.79	+0.60	+1.80	+0.12	+0.49

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
60	— 2.9	+19.7	+1.50	+0.45	—0.21	—0.04	—0.70	—0.51
62	2.2	41.9	+2.96	+3.28	+0.34	+0.20	+0.28	—0.70
66	+ 1.9	—26.7	+2.40	+1.82	—0.20	—0.39	—0.47	—1.17
70	+ 9.3	+ 0.7	+2.55	+1.82	+1.51	+1.09	+0.08	+0.57
71	+ 9.0	— 0.6	+2.00	+0.95	—9.83	—10.63	—0.64	—10.94
74	+11.8	+34.8	+1.45	—0.82	—0.20	—0.34	—1.16	—0.71
77	+11.8	—23.4	+2.51	+2.12	+1.19	+0.51	—0.25	—0.13
83	+10.4	—60.8	+0.05	+0.49	+3.57	+2.97	—2.99	+1.96
89	+17.5	—58.1	+1.75	+2.22	+0.06	—1.38	—1.26	—2.03
95	+22.9	+ 5.7	+7.86	+5.90	+1.05	—0.29	+4.80	—0.47
97	+22.2	—42.8	+2.00	+1.94	+0.43	—0.97	—1.02	—1.56
99	+27.4	+25.0	+2.29	—0.31	+1.50	—0.26	—0.74	—0.11
100	+26.6	+15.4	—7.21	—9.11	—11.09	—13.06	—10.06	—12.88
114	+37.7	—44.6	+3.11	+3.15	+2.35	—0.29	+0.03	—0.48
115	+37.6	—44.6	+2.73	+3.02	+1.12	—1.56	—0.22	—1.73
127	+46.2	—46.7	+3.71	+3.81	+0.90	—1.01	+0.57	—1.69
136	+61.4	—40.4	+2.82	+1.83	—0.40	—3.66	—0.82	—3.81
137	+62.7	—56.6	+0.56	+1.36	+1.71	—0.89	—2.49	—1.53
21	—37.7	—31.7	+2.17	+2.76	—0.08	+2.14	—	—
22	—36.5	—38.4	+3.09	+2.99	—0.61	+1.31	—	—
40	—21.5	+37.1	+1.64	+0.20	—0.79	+0.19	—	—
41	23.8	+23.1	+2.33	+0.44	0.78	+0.55		
90	+24.4	+27.4	+2.88	+0.73	+1.35	0.19		
96	+23.7	31.8	+2.94	+2.31	1.56	+0.43		
98	+26.9	+33.6	+3.65	+0.12	+1.84	+0.61		
106	+34.0	—31.4	+2.60	+2.48	+1.65	+0.48	—	—

Région 355.

$E = 1895.29$; $E' = 1913.26$; $T = 17.96$.

$k_x = -1.05$; $p_x = +0.0214$; $r_x = -0.0030$;
$k'_x = +0.24$; $p'_x = +0.0258$; $r'_x = -0.0251$.
$k_y = -1.88$; $p_y = +0.0183$; $r_y = -0.0094$;
$k'_y = +0.72$; $p'_y = +0.0181$; $r'_y = -0.0088$.

8	50.5	41.1	2.78	1.32	+2.24	0.87	0.12	+0.39
13	—53.3	—21.9	+2.66	+1.40	—0.14	—2.75	+0.67	—2.91
18	45.6	4.2	2.25	+0.98	+2.10	0.16	0.19	—0.10
21	41.7	+63.1	+1.58	+1.62	0.12	3.64	0.67	1.57
45	—22.3	—38.2	+1.49	—0.18	+0.11	—2.28	+0.25	—2.56
49	17.0	31.1	0.41	0.29	1.25	1.19	1.18	0.14
59	—13.8	—35.6	+1.72	+0.29	+2.53	—0.27	+0.77	—0.22
65	— 5.2	—26.4	+0.40	—0.35	+1.61	—1.40	—0.13	—1.00
81	+ 7.9	—49.2	+0.30	—1.97	+2.09	—1.04	—0.36	—0.88
86	+18.0	+ 3.2	—2.51	—3.22	+1.72	—0.21	—2.89	+0.40
117	61.0	6.8	2.28	4.33	2.45	0.73	—2.17	+0.71
118	+63.2	—18.2	—1.03	—3.26	+3.18	—0.60	—0.80	+0.95
	51.4	+28.7	+1.44	—0.08	+1.98	0.97	1.34	—0.01
—	14.6	—50.1	—1.64	—2.67	+0.22	—1.99	—2.20	—2.51

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	a_2-b_2	Δx	Δy
29	—35.8	+35.5	+1.91	+1.18	+1.10	—1.79	—	—
37	32.3	36.7	+1.61	—0.45	+2.94	+0.55		
42	—22.3	+21.6	+1.54	+1.20	+1.70	—0.73	—	—
53	—19.8	—34.8	+1.47	—0.40	+3.08	+0.30	—	—
88	+17.9	—25.4	+1.37	—0.60	+1.86	—0.84	—	—
96	+35.3	+26.0	+0.60	—0.16	+1.75	—0.47	—	—
97	+32.2	+25.9	+0.29	—0.68	+0.89	—1.97	—	—
103	+37.9	—33.2	—0.71	—2.87	+1.98	—0.59	—	—

Région 356.

$E = 1894.15$; $E' = 1912.15$; $T = 18.00$.

$k_x = -0.06$; $p_x = +0.0012$; $r_x = -0.0030$;
$k'_x = +0.86$; $p'_x = -0.0041$; $r'_x = +0.0023$.
$k_y = +2.05$; $p_y = +0.0029$; $r_y = -0.0103$;
$k'_y = -0.13$; $p'_y = -0.0046$; $r'_y = -0.0347$.

1	63.6	+29.3	+0.80	0.92	2.50	+0.96	+0.42	1.26
3	—64.0	—43.9	—1.86	—1.68	—4.22	—0.28	—1.26	—2.69
4	—56.3	+ 2.6	+2.25	+1.29	3.75	—0.48	+2.25	—2.42
5	57.7	8.2	1.18	2.24	—1.66	+1.04	—1.22	0.63
6	—57.9	—15.6	—1.23	—1.99	—1.69	+1.24	—1.12	—0.56
14	—40.9	—57.2	—1.61	—1.16	—4.24	—0.62	—0.90	—2.34
18	—32.8	+31.8	+0.70	—0.63	—2.79	+0.17	+0.46	—1.12
29	—19.4	—30.4	+1.05	+0.67	—3.07	—0.46	+1.30	—1.21
35	—14.6	+10.2	—1.46	—2.00	—3.57	—0.23	—1.31	—1.28
40	— 5.5	+20.9	+0.28	—0.75	—1.39	+1.08	+0.16	+0.66
52	+ 8.3	+ 1.1	—1.11	—1.93	—2.35	—0.88	—1.13	—0.47
58	+10.9	+57.9	+0.44	—0.77	—1.60	+0.78	+0.20	+0.74
60	+12.4	+31.3	—1.08	—2.71	—3.58	—2.12	—1.52	—1.63
66	+17.8	—39.9	—2.25	—2.76	—3.77	—2.24	—2.11	—1.61
78	+25.9	— 5.9	+5.86	+4.68	—3.63	—2.59	+5.63	—1.56
82	+25.3	—42.3	+0.61	—0.42	—2.11	—1.06	+0.47	—0.02
85	+33.4	+ 7.4	+0.49	+0.04	—2.08	0.90	+0.61	+0.21
95	+40.3	—18.2	—1.42	—1.87	—2.20	—0.90	—1.30	+0.33
97	43.3	—53.8	7.94	8.10	—21.70	—20.38	7.66	—19.06
99	+47.9	+52.9	+1.46	+0.44	—2.23	—0.45	+1.26	+0.65
100	+48.6	+24.9	+0.37	—0.95	—2.14	—0.48	+0.03	+0.72
103	+51.9	51.1	0.42	1.00	—1.75	—0.42	+0.02	0.99
108	+58.4	+49.1	—1.57	—3.02	—2.79	—0.58	—2.00	+0.54
114	+59.7	—12.5	—1.84	—2.93	—1.35	—0.98	—2.06	+1.14
—	—46.8	—58.4	+1.00	+1.13	—2.69	+1.36	+1.55	—0.70
20	—27.4	+26.3	—0.25	1.02	—2.46	+0.89	—	—
26	—19.7	+26.6	+0.54	—1.16	—2.21	+0.35	—	—
30	—19.1	—34.3	—0.21	—1.17	—0.73	+1.29	—	—
31	—19.7	—39.2	+0.21	—0.40	—1.87	+0.89	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
75	+24.2	−31.2	−0.08	−0.68	−2.46	−1.26	—	—
81	+25.1	−37.8	−0.11	−0.82	−2.85	−1.41	—	—
84	+32.9	+29.1	+0.15	−0.44	−2.17	−0.55	—	
88	+35.1	+22.5	+0.09	−0.99	−1.89	−0.40	—	—

Région 357.

$E = 1894.29$: $E' = 1913.32$; $T = 19.04$.

$k_x = -3.36$; $p_x = +0.0015$; $r_x = +0.0124$;
$k'_x = -1.04$; $p'_x = +0.0030$; $r'_x = -0.0210$.
$k_y = +2.17$; $p_y = +0.0069$; $r_y = +0.0199$;
$k'_y = +1.29$; $p'_y = +0.0183$; $r'_y = -0.0237$.

4	−55.1	+18.6	+3.37	+1.68	−4.29	−0.48	+0.12	−0.52
9	−50.7	+33.8	+2.74	+0.89	−4.41	−0.97	−0.64	−0.63
10	−51.7	−48.6	+5.02	+0.20	−3.58	−0.12	+0.50	−0.83
11	−45.2	+59.9	+3.43	+2.28	−15.76	−13.63	+0.29	−12.29
16	−40.8	+37.0	+2.91	+1.75	−3.68	−1.26	−0.12	−0.35
19	−42.9	−0.4	+1.20	−1.85	−1.12	+1.97	−2.61	+2.06
22	−35.7	+2.2	+2.11	+0.24	−4.53	−1.24	−1.11	−1.19
25	−30.7	+17.3	+2.65	+1.08	−4.32	−2.26	0.48	−1.37
40	−15.3	+15.4	+3.16	+2.01	2.78	−1.07	+0.28	−0.03
41	−15.3	+15.3	+3.15	+1.72	−3.13	−1.52	+0.13	0.43
48	−6.8	+13.0	+4.76	+2.75	−3.51	−2.19	+1.48	−0.96
58	+4.9	−8.8	+3.75	+1.36	−2.47	−1.36	+0.40	−0.28
60	+2.3	−55.8	+2.80	−0.80	−2.94	−1.43	−0.95	−1.16
61	+8.5	+19.2	+2.17	+0.23	−6.00	−4.79	−1.06	−3.41
63	+9.5	+2.9	+2.14	+0.41	−4.23	−2.87	−0.91	−1.76
72	+10.2	−62.4	+4.18	+0.19	−1.11	−0.29	+0.28	+0.26
74	+19.6	−37.4	+4.69	+0.96	−2.93	−2.58	+0.83	−1.46
75	+24.5	+58.9	−0.61	−0.92	−5.25	−5.58	−3.16	−2.89
78	+25.1	+32.4	+1.85	+0.81	−3.56	−3.83	−0.95	−1.51
80	+27.5	+12.5	+2.05	+0.30	−2.10	−2.93	−1.01	−0.57
82	+28.5	−48.5	+2.78	−1.25	−2.48	−2.15	−1.16	−1.14
83	+33.5	+16.2	+1.22	−0.69	−3.34	−3.54	−1.93	−1.44
86	+35.8	−3.6	+1.63	−1.50	3.30	3.88	−2.03	1.83
90	+44.6	−19.3	+4.31	+1.67	−2.07	−3.23	+0.97	−1.07
91	+42.5	−43.4	+3.47	+0.30	−2.26	−2.45	−0.03	−1.09
—	−62.9	+36.4	+2.25	+1.81	−3.30	−0.28	−0.46	+0.28
21	−38.8	+28.8	+2.79	+1.30	−2.97	−1.51	—	—
24	−35.5	−32.5	+4.10	+0.49	−2.87	−0.01	—	—
27	−32.8	−24.5	+3.64	+0.66	−2.51	+0.33	—	—
31	−29.1	+28.3	+3.10	+2.13	−3.06	−0.76	—	—
73	+19.6	+25.0	+2.91	+1.39	−2.37	−2.43	—	—
76	+24.9	−35.5	+3.79	+0.60	−1.42	−1.34	—	—
77	+23.8	−40.3	+3.58	−0.31	−1.37	−1.26	—	—
79	+25.8	+29.2	+3.28	+1.76	−1.51	−1.98	—	—

Région 358.

$E = 1894.11$; $E' = 1913.12$; $T = 19.01$.

$k_x = -0.83$; $p_x = +0.0073$; $r_x = +0.0280$;
$k'_x = +0.18$; $p'_x = +0.0093$; $r'_x = +0.0048$.
$k_y = +0.42$; $p_y = +0.0160$; $r_y = +0.0206$;
$k'_y = +0.35$; $p'_y = +0.0072$; $r'_y = -0.0013$.

1	−61.7	+34.2	−0.66	−0.56	−2.56	−0.78	−0.88	−0.29
8	−56.7	−17.7	+8.80	+7.66	−6.19	−5.10	+7.14	−4.91
12	−49.0	+11.2	+0.09	−0.76	−2.52	−1.65	−0.89	−1.09
13	−47.7	−32.7	+3.54	+1.95	−2.46	−1.42	+1.48	−1.47
17	−38.0	−3.7	−0.06	−0.78	−3.11	−2.36	−1.12	−2.03
22	−32.3	−25.7	−0.27	−1.56	−3.20	−1.87	−1.93	−2.13
23	−34.9	−43.8	+4.65	+2.70	−3.72	−3.42	+2.34	−3.36
40	−0.3	−35.1	+0.72	−1.00	−0.66	−0.73	−1.04	−0.71
41	+4.7	+52.8	−1.17	−0.99	−1.47	−1.65	−0.50	−0.61
46	+1.7	−14.2	+1.04	−0.13	−0.20	−0.30	−0.09	−0.05
48	+4.9	−31.7	+0.88	−0.47	−2.44	−2.96	−0.59	−2.73
51	+6.7	+41.4	−0.29	−0.39	−1.02	−1.28	+0.97	−0.35
55	+8.6	−21.9	+1.29	+0.26	+1.56	+0.87	+0.16	+1.26
72	+25.2	−37.9	+1.67	−0.23	−0.06	−0.46	−0.02	−0.56
73	+31.3	+39.8	−1.61	−2.26	−1.29	−2.47	−1.35	−1.33
76	+30.9	+21.8	+0.26	0.19	2.44	−2.54	+0.32	−2.15
79	+37.0	+24.9	−2.16	2.56	−1.39	−2.17	1.97	1.46
82	+41.8	+36.8	3.85	−4.44	−2.30	−3.33	3.51	−2.41
86	+43.7	−48.9	0.00	−1.65	+0.23	0.91	−1.58	−0.94
88	+47.3	+52.8	−1.17	−1.19	+0.26	−0.77	−0.24	+0.28
90	+49.3	+22.5	−0.66	−0.94	−0.09	−0.88	−0.34	−0.32
93	+47.6	−36.1	−0.94	−3.12	−0.79	−1.79	−2.55	−1.78
99	+52.0	31.4	+0.40	−2.18	+0.83	−0.95	1.30	−0.54
18	−35.5	−29.8	+1.55	+0.01	−0.44	+0.23	—	—
19	−30.5	+18.8	+0.99	+0.39	−1.36	−0.70	—	—
24	−32.6	−45.5	+2.18	−0.06	−0.58	−0.06	—	
25	−21.6	+21.5	+0.49	+0.25	−1.33	−0.47	—	—
69	+21.5	−28.4	+1.41	+0.11	+0.40	−0.30	—	—
74	+30.7	+37.6	−0.55	0.63	−0.72	−0.94	—	—
75	+30.3	+26.5	−0.57	−1.29	+0.14	−0.06	—	—
78	+31.8	−28.0	+1.98	0.02	+0.72	−0.31	—	—

Région 359.

$E = 1894.11$; $E' = 1911.15$; $T = 17.05$.

$k_x = -1.27$; $p_x = +0.0048$; $r_x = +0.0063$;
$k'_x = -0.82$; $p'_x = -0.0109$; $r'_x = +0.0178$.
$k_y = -0.09$; $p_y = -0.0093$; $r_y = +0.0336$;
$k'_y = -2.89$; $p'_y = -0.0127$; $r'_y = +0.0314$.

8	−46.9	+61.4	+0.17	−1.33	−0.02	+2.85	−0.74	+0.77
25	−38.0	+20.3	−0.67	−1.10	−1.74	+0.51	−1.57	−1.09

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
30	−38.1	−56.9	−1.97	−1.40	−0.66	+2.46	−3.29	+1.27
35	−30.5	+17.8	+1.94	+1.10	−0.51	+2.40	+0.78	+0.25
38	−29.4	+54.2	+6.61	+5.12	−1.97	+1.07	+5.56	−1.58
50	−15.2	+41.7	+0.34	−1.30	−0.62	+1.99	−0.97	−0.77
57	−12.6	+ 6.1	−5.97	−7.34	−17.83	−15.65	−7.58	−17.89
71	+ 4.3	+47.1	+0.78	−1.07	+0.58	+2.97	−0.63	−0.37
84	+ 9.8	−54.2	−0.69	−0.16	−0.79	+1.59	−2.15	−0.81
88 / 89	+11.5	+ 9.0	+0.02	−0.76	−1.67	−0.20	−1.34	−2.89
96	+16.2	−42.6	−0.28	−0.31	+0.56	+3.54	−1.90	+0.50
97	+18.7	−46.2	+2.13	+2.08	−0.53	+2.34	+0.45	−0.68
117	+37.6	− 5.8	+3.50	+2.30	+0.95	+2.72	+1.67	−0.81
123	+ 41.3	33.3	+ 0.46	+ 0.81	− 0.82	+ 2.24	0.93	− 1.76
139	+62.1	− 1.8	+1.09	+0.86	−0.42	+2.11	−0.28	−2.64
34	−30.6	+22.3	+1.69	+0.33	−0.78	+2.37	—	—
43	−22.2	+22.0	+1.57	+0.19	−0.12	+2.56	—	—
45	−23.6	−34.4	+1.40	+0.91	−1.41	+1.43	—	—
47	−22.3	−50.0	+1.16	+1.49	−1.03	+1.59	—	—
100	+24.9	+22.7	+0.45	+0.56	+0.63	+3.70	—	—
104	+25.1	+28.5	+0.80	+0.48	+1.41	+4.05	—	—
108	+25.8	−28.0	+2.28	+2.02	+0.89	+3.62	—	—
109	+29.4	−33.5	+1.12	+1.56	+0.86	+3.36	—	—

Région 360.

$E = 1894.28$; $E' = 1913.24$; $T = 18.96$.

$k_x = +0.31$; $p_x = +0.0015$; $r_x = +0.0145$.
$k'_x = -0.82$; $p'_x = +0.0182$; $r'_x = +0.0361$.
$k_y = -3.11$; $p_y = +0.0225$; $r_y = -0.0003$;
$k'_y = -0.62$; $p'_y = +0.0200$; $r'_y = -0.0468$.

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
3	−60.3	−38.8	−0.25	+3.25	+2.97	+3.87	−0.33	−0.69
8	−51.3	+ 4.6	−2.06	−0.46	+1.86	+2.05	−1.90	−1.02
11	−48.0	+51.6	−1.50	−0.78	+1.98	+2.57	−0.56	+0.37
16	−46.8	−58.9	+0.15	+4.07	+1.03	+1.83	−0.09	−2.79
19	−43.4	− 2.1	+0.31	+1.06	+2.49	+2.25	−0.05	−0.56
20	42.2	28.8	1.03	+ 1.22	+ 0.65	- 0.27	1.30	− 3.01
25	−33.7	+22.7	−0.25	+0.67	+1.62	+0.48	+0.20	−1.13
31	−25.0	+11.5	−2.37	−1.02	+2.17	+1.06	−1.90	−0.59
37	- 21.6	52.9	+ 0.52	+ 3.73	+ 3.02	+ 1.65	+ 0.32	− 1.16
39	−17.1	+56.3	−3.59	−3.70	−0.06	−1.51	−2.64	−1.85
44	−10.9	+16.5	−0.85	+0.26	+2.39	+0.22	−0.24	−0.46
46	− 8.4	+40.5	+0.10	+0.21	+1.89	−0.26	+0.84	−0.38
49	− 6.5	− 7.6	−0.55	+1.19	+1.19	−0.65	−0.19	−1.90
50	− 6.1	−35.6	−0.50	+1.89	+2.37	−0.22	−0.52	−1.69
53	− 2.5	− 9.5	−0.98	+0.78	+2.46	+0.05	−0.62	−0.87
60	+ 4.0	11.5	2.33	1.22	+ 2.06	- 0.86	- 2.28	1.41
75	+14.9	+25.3	+0.60	+1.27	+2.85	−0.56	+1.46	+0.17
76	+10.7	+14.0	−0.93	+0.14	+2.54	0.00	−0.19	−0.04
80	+15.5	+30.2	+2.98	+2.68	−0.67	−3.91	+3.49	−3.15
89	+24.0	+40.9	−0.54	−1.75	+2.41	−1.80	−0.13	−0.12
107	+43.1	−31.4	−5.84	−4.29	−5.53	−10.32	−5.69	−9.44
—	+13.8	+ 0.1	−3.16	−1.72	−3.81	−6.73	−2.56	−6.81
—	+64.1	−46.0	+0.67	+3.47	+3.47	−1.55	+1.28	−0.37
29	−28.4	+24.6	−0.42	+0.37	+2.95	+1.59	—	—
30	−29.6	+19.8	−1.51	0.00	+2.96	+1.72	—	—
36	−21.8	−31.3	+0.66	+3.06	+3.16	+1.84	—	—
41	−19.6	−37.8	+0.52	+2.57	+3.95	+2.47	—	—
95	+25.2	+26.4	−0.08	−0.04	+2.48	−1.24	—	—
96	+28.4	−33.0	−0.61	+0.78	+3.90	+0.09	—	—
98	+ 31.4	+ 27.6	0.67	- 0.55	+ 1.83	1.49	—	—
102	+39.8	−18.6	−0.12	+0.76	+4.13	−0.76	—	—

Région 361.

$E = 1894.19$; $E' = 1911.15$; $T = 16.97$.

$k_x = +0.69$; $p_x = -0.0024$; $r_x = -0.0408$;
$k'_x = -2.30$; $p'_x = -0.0199$; $r'_x = -0.0267$.
$k_y = -0.25$; $p_y = -0.0019$; $r_y = +0.0412$;
$k'_y = +0.34$; $p'_y = +0.0035$; $r'_y = -0.0324$.

No.	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
4	−59.1	−46.4	−3.64	+0.48	−2.67	+1.84	−0.16	−0.14
14	−43.7	−40.5	−3.71	−1.43	−4.50	−1.73	−1.52	−2.91
15	−42.9	−56.8	−5.26	−2.45	−4.22	−1.04	−2.26	−2.44
20	−33.7	+12.3	−3.44	−0.31	−1.54	−0.06	−2.72	−0.59
22	28.3	+27.0	+0.33	+3.01	−1.35	+0.30	+0.27	−0.33
23	−27.1	− 1.0	−3.04	−1.53	−3.35	−2.19	−2.75	−2.60
24	−26.8	−27.6	−2.83	−0.71	−1.68	−0.45	−1.34	−0.93
29	−18.8	−43.8	−2.97	−1.52	−1.32	−0.83	−1.36	−0.98
54	+11.3	+54.1	−0.09	+2.46	+1.53	−1.13	−1.57	+0.24
63	+30.5	+ 6.8	−1.90	+1.39	+1.17	−2.06	−1.63	−0.53
66	+35.6	+38.2	−0.33	+2.20	+1.70	−2.35	−1.56	−0.41
69	+42.0	+47.3	+0.73	+3.41	+2.62	−1.77	−0.80	+0.32
70	+ 43.7	+ 11.4	0.19	+3.54	+ 4.45	+ 0.25	0.00	+ 2.21
81	+53.0	−46.5	−2.94	+1.38	+0.67	−3.55	−0.60	−1.66
84	+64.0	−19.7	−1.40	+1.91	+1.44	−4.08	−0.59	−1.57
-	24.8	47.4	3.60	- 1.44	− 2.71	- 0.67	- 1.45	1.57
13	−40.1	−27.7	−1.61	+1.07	−1.04	+1.43	—	—
21	−32.5	−34.8	−2.05	+0.83	−1.24	+0.79	—	—
25	−23.1	+38.0	+0.67	+2.72	−0.04	+0.78	—	—
28	−15.7	+23.3	−0.09	+2.31	−1.28	−1.24	—	—
57	+14.0	+11.5	+0.15	+3.64	+0.23	−1.29	—	—
64	+34.9	28.5	2.19	+ 2.01	+ 1.27	2.04	—	
73	+42.9	−20.3	−1.45	+2.41	+2.00	−1.81	—	—
76	+49.8	+39.0	+1.13	+3.99	+3.33	−1.31	—	—

Région 362.

$E = 1894.28$; $E' = 1914.25$; $T = 19.97$.

$k_x = -1.75$; $p_x = +0.0005$; $r_x = -0.0338$;
$k'_x = -0.92$; $p'_x = +0.0094$; $r'_x = -0.0075$.
$k_y = 1.21$; $p_y = 0.0092$; $r_y = 0.0344$;
$k'_y = +0.42$; $p'_y = +0.0067$; $r'_y = -0.0177$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$f x$	$f y$
13	−52.3	− 6.9	+0.46	+0.29	−0.57	+0.35	−1.08	−0.12
14	50.5	18.3	+ 1.81	− 1.52	+ 0.43	− 0.93	+ 0.46	− 0.56
20	47.2	+ 6.4	+0.05	0.16	1.57	0.11	1.75	0.79
25	−40.6	+17.8	−0.05	−0.30	−0.14	+0.66	−2.07	+0.34
30	−38.2	+14.2	+2.64	+2.73	−0.59	+0.17	+0.86	−0.17
38	−25.9	−20.2	+0.08	+0.51	−1.28	−0.88	−0.75	−1.42
41	−26.6	−38.2	+1.58	+2.81	−0.92	−1.24	+1.52	−1.55
42	− 20.4	35.2	0.36	0.05	− 0.17	0.75	0.91	0.79
48	15.3	+ 26.8	+ 1.47	+ 0.52	1.44	1.72	0.97	1.63
49	−15.4	−23.4	−1.97	−2.07	−1.81	−2.51	−2.94	−2.61
60	− 9.7	− 7.5	+1.84	+1.68	+1.34	0.00	+0.53	+0.29
62	8.1	− 37.8	+ 0.85	− 1.79	− 0.49	0.51	+ 0.72	0.63
72	+ 8.6	+63.6	+2.95	+0.08	−0.55	−4.08	− 1.09	−2.27
74	+ 6.0	+57.9	+2.10	−0.71	−0.12	−2.63	−1.80	−1.36
88	+20.1	+ 3.2	+0.77	−0.26	−0.09	−2.99	−1.04	−2.07
98	+ 33.1	+ 18.5	+ 1.61	+ 0.15	+ 0.64	2.71	0.67	− 1.56
100	+31.9	−23.8	+2.06	+1.05	+1.07	−2.45	+0.87	−1.54
108	+40.3	+63.5	−4.81	−7.80	−20.37	−26.10	−8.75	−23.46
119	+57.2	+29.1	−0.28	−1.57	+1.13	−3.71	−2.57	−1.93
122	+59.3	−34.8	+3.02	+2.87	+2.80	−2.32	+2.62	−0.92
—	−18.6	+54.3	+4.51	+3.28	−0.22	+0.30	+1.34	+0.23
—	+15.7	+10.1	+2.65	+1.62	+1.05	−1.25	+0.67	−0.54
—	+23.9	−21.5	−0.79	−1.72	−0.68	−3.81	−2.03	−3.01
	+ 44.0	− 61.6	3.25	2.18	+ 1.49	2.77	2.56	1.89
24	40.0	+ 30.0	+ 2.60	+ 1.45	− 0.27	+ 0.05		
29	−35.2	+21.3	+2.19	+0.93	−1.19	−0.76	—	—
35	30.0	32.7	+ 0.96	+ 1.14	+ 1.14	− 1.25	-	
39	−26.6	−22.5	+1.18	+1.36	+0.65	+0.14	—	—
90	+28.3	+ 26.4	+3.15	+1.18	+1.95	−0.69	—	—
94	+27.7	−31.1	+0.17	−0.09	+2.43	−0.77	—	—
102	+36.4	+34.2	+2.84	+1.06	+2.96	−0.85	—	—
106	+37.3	−32.6	+0.67	+0.29	+2.00	−1.65	—	-

Région 363.

$E = 1894.15$; $E' = 1911.15$; $T = 17.01$.

$k_x = +0.15$; $p_x = +0.0104$; $r_x = -0.0078$;
$k'_x = +1.26$; $p'_x = +0.0222$; $r'_x = -0.0045$.
$k_y = 0.69$; $p_y = 0.0025$; $r_y = 0.0103$;
$k'_y = -0.22$; $p'_y = -0.0038$; $r'_y = +0.0232$.

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	$f x$	$f y$
1	−60.8	+25.1	+0.32	−0.31	+1.24	−1.41	−0.43	−0.23
4	56.8	+ 51.1	- 0.34	- 0.34	+ 1.55	0.43	0.87	+ 0.31
8	50.4	+ 48.9	1.28	2.39	+ 0.69	1.41	2.25	0.64
14	−50.9	−12.7	−0.74	−1.41	−0.05	−1.65	−1.12	−0.93
25	−44.3	−50.9	−2.13	−1.75	−2.88	−4.21	−1.64	−3.55
45	−11.6	+28.5	−4.09	−5.48	−7.65	−8.30	−4.44	−8.44
57	+ 9.1	+13.5	+0.86	−0.27	+0.98	+0.22	+1.06	+0.04
63	+ 8.8	- 56.8	1.40	2.06	0.60	0.79	0.53	− 1.02
65	+ 6.1	− 62.4	- 2.01	2.37	1.40	1.23	1.00	1.61
68	+12.7	−29.3	−0.37	−1.63	−1.83	−2.56	+0.09	−2.64
78	+22.1	+ 2.4	−1.21	−2.32	−1.15	−0.96	−0.71	−1.66
83	+28.6	−14.6	− 0.51	− 1.83	+ 0.36	+ 0.27	+ 0.09	− 0.27
85	+29.0	−38.6	+0.26	−0.44	+0.03	0.00	+1.32	−0.50
98	+36.1	−34.7	−1.98	−3.00	−1.17	−0.79	−0.98	−1.56
102	+41.1	−13.9	+0.38	−0.58	−1.54	−1.24	+1.36	−2.07
104	+ 40.5	− 56.9	− 8.81	− 9.83	− 19.42	− 18.53	7.60	− 19.51
116	+62.0	+52.3	+0.10	−1.39	+0.11	+1.69	+0.74	−0.12
—	−60.8	+53.1	+2.44	+0.41	+0.35	−1.38	+0.81	−0.74
—	+51.1	−43.5	−0.37	−1.91	−2.13	−0.41	+0.66	−1.91
17	−45.0	+27.2	+0.27	+0.05	+0.89	−0.61	—	—
32	−30.4	−31.6	+0.18	−0.46	+0.95	−0.71	—	—
33	−26.3	+27.1	−0.02	−1.30	+1.33	−0.31	-	—
41	− 19.4	− 27.6	+ 0.18	0.65	+ 0.83	0.34	--	—
79	+23.8	−35.9	−1.05	−1.99	+0.76	+1.38	—	—
82	- 25.8	+ 33.3	+ 0.26	− 0.97	+ 0.51	+ 0.72	-	
86	+26.0	−39.7	−0.97	−2.54	−0.12	+0.02	—	—
90	+32.2	+33.7	− 0.03	− 1.96	+ 0.48	+ 1.22	-	—

Région 364.

$E = 1894.15$; $E' = 1911.15$; $T = 17.01$.

$k_x = +1.32$; $p_x = -0.0053$; $r_x = -0.0057$;
$k'_x = +1.72$; $p'_x = +0.0034$; $r'_x = +0.0620$.
$k_y = -1.84$; $p_y = +0.0107$; $r_y = +0.0453$;
$k'_y = +0.89$; $p'_y = +0.0081$; $r'_y = -0.0305$.

17	−43.0	−45.8	−2.02	+0.90	+0.41	+0.79	−0.29	+0.01
21	−38.0	−29.6	+1.49	+4.20	−2.49	−2.81	+3.56	−3.12
24	−38.6	−34.5	−0.25	+2.22	+0.42	+0.90	+1.57	+0.14

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
29	−29.3	−19.0	−2.02	−1.09	+0.66	−0.28	−0.54	−0.24
62	0.1	+ 13.2	−1.65	−2.97	+0.85	−1.48	−0.42	0.66
73	+ 11.3	+39.8	0.23	−4.01	+0.78	2.04	+0.51	−0.81
79	+ 22.2	+ 49.0	−1.12	5.38	+ 0.94	2.98	−0.37	−1.20
82	+20.4	−28.4	−2.18	−0.88	+2.81	−1.27	−0.83	−0.12
87	+25.4	+19.0	−2.09	−3.80	+2.09	−2.48	−0.91	−0.68
88	+25.8	+15.7	−0.81	−1.99	+2.80	−1.54	+0.53	+0.11
100	+35.7	−27.1	−2.77	−1.53	+1.65	−2.95	−1.43	−1.64
105	+43.5	+45.9	−0.38	−4.13	+2.01	−3.27	+0.52	−0.99
119	+53.4	+47.6	−1.67	−4.90	+2.22	−3.93	−0.47	−1.27
122	+59.0	+26.1	−0.26	−2.53	+2.02	−4.01	+0.80	−1.66
126	+58.5	− 2.9	−3.12	−3.43	+2.64	−3.78	−1.89	−1.50
127	+56.6	−51.7	−3.26	+0.11	−0.76	−7.60	−1.57	−5.55
—	− 26.7	+22.4	+ 1.54	0.00	0.31	0.76	+ 2.94	0.60
—	−61.7	−19.0	−1.96	−1.30	−0.76	−0.34	−0.58	−0.74
25	−33.3	+42.2	−0.93	−3.79	+0.44	−0.15	—	—
32	−28.3	−33.6	−1.24	+0.56	+0.95	+0.44	—	—
37	−22.1	−32.5	−2.18	+0.29	+0.38	−0.45	—	—
38	−18.0	+ 31.5	−1.43	− 4.08	+ 0.90	0.34		
77	+19.9	+32.6	−1.25	−4.03	+2.08	−2.01	—	—
84	+23.2	−36.7	−1.72	−0.02	+3.69	−0.98	—	—
86	+26.6	+32.0	−0.91	−3.56	+2.24	−2.02	—	—
96	+35.0	−35.2	−0.89	+0.81	+4.18	−1.67	—	—

Région 365.

$E = 1894.11$; $E' = 1911.15$; $T = 17.05$.

$k_x = +\ 1.47$; $p_x = -\ 0.0163$; $r_x = -\ 0.0294$;
$k'_x = -\ 1.21$; $p'_x = -\ 0.0062$; $r'_x = -\ 0.0009$.
$k_y = +\ 1.22$; $p_y = -\ 0.0168$; $r_y = -\ 0.0064$;
$k'_y = +\ 0.16$; $p'_y = -\ 0.0162$; $r'_y = -\ 0.0325$.

36	−25.3	+36.3	−0.77	+1.52	−1.33	+0.62	+0.24	−0.75
45	−22.9	−44.5	−2.62	+0.90	−4.81	−2.30	+0.20	−2.57
52	−13.7	− 1.7	−3.61	−0.85	−2.40	−1.19	−1.92	−1.35
68	+ 2.0	+25.0	+1.79	+3.71	−1.20	−0.73	+2.48	−0.65
88	+18.0	−55.2	−5.38	−1.46	−4.54	−3.60	−2.65	−2.11
101	+40.3	− 2.2	+1.15	+3.53	−0.73	−0.95	+2.04	+0.67
112	+ 63.1	−42.8	−3.05	+ 0.90	3.59	4.01	− 1.00	1.18
—	−36.7	+63.6	+0.70	+1.06	−2.41	−0.68	+0.46	−2.61
—	33.2	+38.7	−0.42	−0.42	−3.99	−2.20	−0.50	−3.69
—	+ 7.0	+58.0	−0.01	+0.86	−5.05	−5.29	−0.40	−5.30
29	−33.0	−45.0	−0.44	+1.12	−0.31	+1.70	—	—
37	−29.6	+29.1	−0.56	+1.44	−0.91	+0.85		
40	−28.5	−33.1	−2.94	+1.17	−0.99	+0.18	—	—
41	−26.8	−42.1	−3.89	+0.37	−1.93	+0.46	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
95	+29.5	+29.7	−0.38	+1.06	−0.59	−0.25	—	—
99	+36.2	+35.5	−0.35	+ 1.35	0.74	0.77	—	—
100	+37.6	−36.7	1.49	+ 1.40	2.55	−2.21	—	—
105	+41.2	−22.4	−1.11	+ 1.92	1.81	2.00	—	—

Région 366.

$E = 1894.11$; $E' = 1911.15$; $T = 17.05$.

$k_x = -\ 0.17$; $p_x = -\ 0.0173$; $r_x = +\ 0.0194$;
$k'_x = -\ 0.75$; $p'_x = 0.0146$; $r'_x = 0.0059$.
$k_y = +\ 3.11$; $p_y = -\ 0.0006$; $r_y = -\ 0.0297$;
$k'_y = +\ 0.87$; $p'_y = -\ 0.0103$; $r'_y = -\ 0.0189$.

17	−46.7	+ 3.7	−1.70	−0.13	−4.29	−1.24	−0.60	−1.92
19	−49.5	− 1.9	−2.33	−0.73	−3.82	−1.85	−1.21	−2.04
21	− 42.5	+31.1	0.56	+ 1.42	5.54	− 2.47	+0.86	− 3.21
34	−36.1	−56.8	−1.57	−1.56	−3.24	−0.88	−1.83	−0.64
35	−32.6	+62.7	−2.23	−0.16	−2.19	−0.06	−0.71	−0.27
39	−26.3	+45.5	−0.75	+1.15	−2.06	+0.91	+0.46	+0.52
41	−26.3	+21.5	+0.76	+2.33	−3.42	−0.79	+1.64	−0.87
50	−22.8	−41.7	−0.50	−0.86	−3.73	−1.44	−1.06	−0.92
53	−19.1	+25.4	−1.96	−0.57	−4.22	−1.97	−1 25	−1.71
55	−15.1	+ 3.1	−8.48	−7.38	−21.41	−19.54	−8.13	−18.87
62	−13.8	+46.1	+0.48	+2.17	−4.79	−2.07	+1.39	−2.02
77	− 4.3	+16.3	+2.47	+3.53	−5.81	−3.47	+2.71	−2.84
83	+ 1.3	−31.5	−2.77	−2.48	−4.42	−2.62	−3.31	−1.33
100	+15.5	−25.0	−0.46	−0.19	−3.81	−1.59	−1.20	−0.19
115	+25.2	−13.4	−0.41	−0.67	−6.17	−3.83	−1.49	−2.32
125	+40.3	+ 9.1	−1.82	−0.61	−5.30	−2.00	−2.25	−0.73
127	+50.0	+58.1	−0.17	+1.66	−4.17	−0.58	−0.12	+0.51
132	+48.9	−29.9	−2.10	−2.13	−3.20	−1.43	−3.53	+1.01
142	+62.5	+23.2	−2.21	−0.80	−6.12	−2.53	−2.80	−0.94
144	+61.7	−12.7	−0.90	−1.73	−4.04	−0.67	−2.84	+1.20
33	−39.7	−38.6	+0.45	−0.09	−2.24	−0.46	—	—
36	−31.5	+24.3	−1.33	+0.03	−1.93	+0.12	—	—
42	−29.3	+20.5	−0.75	+0.86	−2.81	−0.67	—	—
44	−27.6	−33.8	+0.62	+0.17	−1.68	−0.34	—	—
107	+23.4	+17.0	+0.61	+1.53	−3.89	−1.42	—	—
110	+ 23.9	33.8	+ 0.82	+0.64	3.95	1.61	—	
117	+25.5	−23.8	+1.00	+1.25	−4.12	−2.08	—	—
121	+32.0	+38.3	+0.11	+1.10	−3.60	−0.38	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy

Région 367.

$E = 1894.11$; $E' = 1911.15$; $T = 17.05$.

$k_x = -3.01$; $p_x = +0.0028$; $r_x = -0.0069$;
$k'_x = -1.31$; $p'_x = -0.0002$; $r'_x = -0.0019$.
$k_y = -0.40$; $p_y = +0.0164$; $r_y = -0.0022$;
$k'_y = +0.13$; $p'_y = +0.0101$; $r'_y = -0.0100$.

11	−45.5	−46.4	+4.39	+2.35	−0.99	−1.04	+1.35	−2.04
21	−33.3	+31.7	+3.02	+1.21	−0.10	+0.33	−0.22	+0.20
26	−32.8	−57.6	+1.36	−0.31	−3.08	−2.20	−1.42	−3.73
40	−18.0	+32.8	+2.20	+0.85	−1.09	−1.02	−0.80	−0.86
62	+ 2.5	+ 7.9	+2.34	+0.49	−3.91	−4.52	−0.77	−4.22
69	+ 5.1	+56.6	+2.14	+0.32	−1.58	−2.03	−1.17	−1.16
73	+ 7.9	− 8.4	+3.06	+1.06	+0.47	−0.25	−0.05	−0.08
82	+14.2	−44.8	+1.65	−0.07	−2.01	−2.79	−1.15	−3.04
85	+22.5	+32.1	+3.13	+1.53	−0.10	−0.42	+0.06	+0.17
86	+21.3	−14.4	+1.60	−0.16	−0.34	−1.63	−1.34	−1.18
92	+33.3	+62.7	+5.36	+3.44	−0.80	−1.12	+2.00	−0.06
105	+54.3	+21.9	+3.67	+2.51	−0.01	+0.54	+0.90	+0.75
106	+54.7	−30.9	+2.21	+1.23	−0.95	−1.93	−0.23	−1.65
108	+57.1	+ 6.3	+3.38	+2.07	+0.85	+1.23	+0.61	+1.33

23	−30.7	+23.3	+3.61	+1.46	+0.11	+0.05	—	—
28	−28.5	+43.1	+3.53	+1.64	−0.21	+0.11	—	—
33	−28.6	−26.8	+2.71	+1.25	+0.47	−0.19	—	—
38	−22.2	−26.5	+2.60	+0.88	+1.25	+0.48	—	—
83	+15.6	+38.4	+2.51	+0.60	−0.71	−1.25	—	—
87	+24.5	−28.6	+3.24	+1.75	+0.82	+0.42	—	—
90	+28.7	+23.6	+3.33	+1.77	+0.33	−0.57	—	—
95	+33.4	−18.5	+2.79	+1.15	+0.68	−0.29	—	—

Région 368.

$E = 1894.28$; $E' = 1912.30$; $T = 18.02$.

$k_x = +0.98$; $p_x = -0.0120$; $r_x = +0.0030$;
$k'_x = +0.38$; $p'_x = -0.0071$; $r'_x = -0.0122$.
$k_y = +1.01$; $p_y = -0.0012$; $r_y = -0.0175$;
$k'_y = -1.75$; $p'_y = -0.0121$; $r'_y = +0.0111$.

2	−60.9	+11.7	−0.93	+0.25	+2.03	+3.72	+0.87	+2.23
13	−50.3	−46.5	−1.33	−1.23	−1.28	−0.23	+0.12	−0.98
21	−41.6	−20.0	−0.74	−0.57	−1.36	−0.03	+0.51	−1.07
23	−35.1	+ 7.5	3.03	− 2.30	− 4.83	2.27	1.68	− 4.08
31	−30.4	−11.0	−1.97	−1.31	−1.72	−0.36	−0.62	−1.43
39	−27.7	−41.0	−1.76	−1.82	−1.27	+0.28	−0.65	−0.67
40	−27.4	−44.4	−0.39	−0.53	−0.51	+1.20	+0.68	+0.18
41	−21.3	+38.3	−1.18	−0.02	−1.53	+1.55	+0.10	−0.68

42	−20.3	+37.7	−3.12	−1.76	−3.80	−1.17	−1.74	−3.17
44	−24.9	+29.2	−3.72	−2.84	−2.02	+0.30	−2.49	−1.50
64	− 6.9	+55.6	−1.91	−0.71	−2.17	+0.46	−0.82	−1.61
70	− 9.3	−14.4	−0.77	+0.27	−1.48	+0.66	+0.59	−0.71
82	+ 0.7	−12.9	−1.61	−1.34	−2.66	+0.15	−0.74	−1.53
92	+ 6.0	−34.5	−0.18	+0.28	−2.37	+0.20	+0.83	−1.20
97	+11.7	− 6.0	−0.75	−0.11	−6.70	−3.72	+0.16	−5.50
98	+11.7	− 6.0	−0.84	−0.47	−6.70	−4.90	−0.06	−6.09
104	+19.6	−39.0	+0.50	+0.43	1.22	+1.46	+1.13	+0.07
112	+31.7	−39.0	−1.93	−1.79	−2.70	+0.91	−1.30	−0.90
115	+33.2	−57.4	+0.66	+0.99	−2.77	+0.88	+1.45	−0.83
118	+36.8	−21.5	−2.12	−2.23	−0.95	+2.08	−1.74	+0.45
140	+57.1	−18.3	−0.78	+0.35	−2.89	+1.09	0.00	−0.96
—	−37.0	+ 9.1	−0.99	−0.79	−1.57	+0.05	+0.10	−1.31
—	+56.8	−31.4	−4.23	−2.73	−4.09	−1.93	−3.19	−2.99

29	−33.5	+23.4	−1.73	−0.55	−0.34	+1.52	—	—
32	−33.0	−27.4	−0.98	−0.47	−0.13	+1.01	—	—
34	−28.8	+26.6	−1.80	−0.72	−0.65	+2.23	—	—
38	−26.3	−28.1	−0.84	−0.71	−0.81	+0.81	—	—
109	+32.8	+26.0	0.60	+0.24	1.14	+2.88	—	—
117	+35.9	+40.1	0.05	−0.97	1.89	+1.83		
125	+43.6	−35.1	−0.50	−0.40	−1.28	+2.45	—	—
126	+40.6	−45.1	−0.89	−1.42	2.42	+1.36	—	—

Région 369.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.31$; $T = 19.00$.

$k_x = -1.61$; $p_x = +0.0065$; $r_x = +0.0077$;
$k'_x = -2.17$; $p'_x = +0.0093$; $r'_x = +0.0082$.
$k_y = +0.53$; $p_y = +0.0062$; $r_y = -0.0146$;
$k'_y = -1.60$; $p'_y = +0.0016$; $r'_y = -0.0339$.

5	−55.4	+29.1	−1.28	−1.75	−1.56	+1.64	−3.61	−1.72
7	−55.1	−34.8	+4.52	+4.70	−0.45	+2.60	+2.00	−0.93
19	−41.1	+35.3	+1.00	+0.69	−0.92	+1.10	−1.09	−1.30
39	−17.1	−62.4	+5.15	+5.07	−0.66	+1.12	+2.59	−0.96
42	− 7.8	+33.0	+0.18	+0.28	−1.67	+0.78	−1.46	−1.04
57	+ 5.2	+47.0	−0.43	−0.22	+0.29	+1.82	−1.80	+0.83
67	+10.1	−28.6	+0.05	+1.02	−1.38	+0.53	−1.50	−0.83
87	+32.6	+ 2.1	+0.74	+0.85	2.03	1.11	−0.82	1.30
89	+34.5	−28.9	+2.69	+3.52	−6.27	−5.19	+1.25	−5.54
99	+48.1	+30.4	−1.18	−0.65	−2.87	−1.18	−2.18	−1.27
104	+47.5	−34.2	+2.30	+2.03	−1.98	−0.83	+0.38	−0.92
107	+57.7	−24.5	−1.12	−1.06	−3.36	−2.12	−2.71	−1.97
—	−31.2	+46.9	+0.28	+1.08	−2.62	−0.13	−1.08	−2.48
—	−49.6	− 1.9	+2.22	+2.85	2.49	+0.43	+0.24	2.77

27	−31.1	+36.4	+2.12	+2.39	−0.46	+2.33	—	—
28	−32.9	+26.5	+2.03	+2.99	−0.45	+2.65	—	—
34	−27.5	−30.4	+1.63	+2.15	+0.39	+2.75	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
35	- 20.7	24.8	+ 1.32	+ 2.23	0.02	+ 2.48	·	—
78	+20.1	—39.0	+2.23	+2.75	—0.77	+0.80	—	—
80	+ 26.5	+ 30.8	+0.43	+1.22	0.38	+1.05	--	---
86	+ 31.8	+ 29.8	+ 0.93	+ 1.22	1.52	+ 0.38	–	
88	+32.5	—15.2	+2.06	+2.51	—1.12	+0.42	—	—

Région 370.

$E = 1894.15$; $E' = 1911.15$; $T = 17.01$.

$k_x = -0.05$; $p_x = +0.0063$; $r_x = -0.0129$;
$k'_x = -0.72$; $p'_x = +0.0115$; $r'_x = +0.0151$.
$k_y = -0.34$; $p_y = +0.0016$; $r_y = +0.0128$;
$k'_y = -0.04$; $p'_y = -0.0013$; $r'_y = -0.0309$.

12	—46.2	+52.2	—0.36	—0.42	—1.27	+0.64	—1.12	—0.92
20	—40.4	+15.6	—0.74	—0.39	—1.94	—0.94	—1.28	—1.99
25	32.8	+ 45.9	- 0.90	1.22	1.58	0.05	1.69	1.29
47	5.1	2.3	+ 0.20	+ 0.90	0.36	0.54	+ 0.12	0.68
53	+ 0.3	+28.9	—0.70	—1.24	—0.55	—1.08	—1.32	—0.99
61	· 6.8	37.4	1.68	0.12	2.27	- 2.11	1.26	2.32
70	+ 14.7	31.0	0.74	+ 0.64	1.67	2.56	—0.34	- 2.18
77	+23.0	+ 2.5	+0.32	+1.17	+0.32	—0.76	+0.56	—0.20
81	+28.0	+62.3	+0.37	—1.10	—1.72	—3.27	—0.43	—2.42
87	+33.8	+58.3	—0.82	—1.88	—4.92	—7.92	—1.37	—6.30
104	+46.4	—56.3	—2.16	+0.09	—2.20	—3.35	—1.07	—2.55
	15.5	51.1	1.42	+ 0.98	1.33	1.25	0.79	1.62
19	—40.2	+33.3	+0.53	+0.65	—0.39	+0.92	—	—
27	—32.3	—42.9	+0.06	+2.24	—0.06	+1.50	—	—
28	—29.9	+31.7	+0.56	+0.32	+0.11	+0.91	—	—
36	23.4	21.8	0.14	+ 1.11	+ 0.10	- 0.71		
64	+11.4	+34.8	+0.51	+0.26	+0.24	—0.07	—	—
75	+19.3	—32.8	—0.75	+0.57	+0.16	—1.02		
91	+ 36.3	+ 20.5	+ 0.31	+ 0.09	+ 0.93	0.76		
96	+ 36.6	30.7	0.61	+ 0.89	+ 1.38	1.21		

Région 371.

$E = 1894.15$; $E' = 1911.15$; $T = 17.01$.

$k_x = -0.44$; $p_x = -0.0093$; $r_x = +0.0126$;
$k'_x = -1.92$; $p'_x = -0.0065$; $r'_x = +0.0340$.
$k_y = +0.85$; $p_y = +0.0012$; $r_y = -0.0050$;
$k'_y = -0.27$; $p'_y = +0.0006$; $r'_y = +0.0026$.

3	61.7	· 46.1	+ 1.32	+ 0.70	1.42	1.25	+ 1.39	1.07
14	51.7	+ 47.5	0.39	+ 0.57	2.35	1.41	+ 0.43	1.61
18	- 51.6	51.8	0.02	+ 2.41	5.71	3.76	- 0.78	4.55
19	46.7	+ 25.8	+ 0.70	+ 2.42	2.38	0.93	+ 1.35	- 1.39
22	48.2	3.2	1.00	- 1.17	1.75	— 1.25	0.79	— 1.26
24	—40.5	+54.2	—0.24	+0.76	—6.64	—4.97	+0.66	—5.51
34	33.2	+ 22.1	+ 1.17	+ 2.47	- 0.62	+ 0.53	+ 1.42	+ 0.22

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
35	—31.2	—28.0	+1.08	+3.22	—0.49	+0.71	+0.56	+0.33
39	21.1	+ 20.9	1.58	+ 0.19	- 1.19	0.05	- 1.22	0.34
43	—15.7	+38.4	—1.52	—0.44	—1.05	+0.63	—1.14	+0.09
45	19.9	+ 2.5	+1.69	+3.09	- 1.27	0.01	+ 1.43	- 0.37
64	+ 4.6	+ 41.2	+ 0.57	+ 1.12	2.59	— 0.25	+ 0.59	1.09
69	+ 0.4	—38.7	+0.80	+2.91	—1.28	+0.15	—0.23	—0.31
71	+ 3.0	—54.3	+0.06	+3.47	—1.19	+0.92	—0.70	+0.11
89	+16.7	+22.3	+2.30	+3.31	—1.19	+0.79	+2.01	+0.13
91	+23.5	+39.8	+1.22	+2.49	—2.46	—0.74	+1.41	—1.24
100	+27.8	—58.0	+0.36	+3.46	—1.82	—0.74	—0.84	—1.00
107	+33.5	—62.0	—0.70	+2.77	—6.70	—5.19	—1.85	—5.67
113	+43.7	+ 2.8	+1.40	+3.16	—2.73	—0.83	+0.82	—1.43
122	+53.3	+61.3	—3.91	—3.06	—2.62	+0.14	—3.66	—0.83
129	+58.0	—12.2	+2.16	+4.10	—1.05	+0.74	+1.21	+0.19
—	+ 4.1	+28.1	—3.06	—2.24	—2.83	—2.08	—3.21	—2.13
25	—44.9	+33.6	—0.76	+0.22	—0.27	+0.64	—	—
27	41.4	33.6	+ 0.35	+ 2.49	0.00	+ 0.21		
28	39.5	· 19.7	- 0.41	+ 1.09	1.49	0.48	·	
37	25.2	36.6	+ 0.58	+ 3.46	- 0.86	+ 0.35		
94	+ 24.4	43.6	+ 1.59	+ 3.50	1.14	+ 0.09	—	·
97	+ 29.3	+ 28.8	+ 0.87	+ 1.86	0.42	+ 0.50		-
98	+29.8	+24.6	—0.33	+0.71	—1.22	+0.31	—	—
109	+35.8	—28.0	+0.98	+3.00	—1.19	+0.51	—	—

Région 372.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.31$; $T = 19.01$.

$k_x = -1.61$; $p_x = +0.0050$; $r_x = -0.0016$;
$k'_x = -1.02$; $p'_x = +0.0176$; $r'_x = +0.0294$.
$k_y = -0.46$; $p_y = -0.0132$; $r_y = +0.0202$;
$k'_y = +0.24$; $p'_y = +0.0074$; $r'_y = -0.0087$.

3	53.6	42.9	+ 0.57	+ 0.81	+ 0.65	0.05	1.82	+ 0.05
5	47.6	+ 31.8	- 0.93	0.77	- 1.89	- 1.65	1.33	1.27
7	—45.9	—29.6	+1.78	+3.19	—3.08	—3.06	+0.24	—3.22
27	—26.9	—22.0	+0.53	+0.70	+0.35	—0.07	—1.30	—0.04
29	—23.2	+31.1	+3.52	+1.40	—5.68	—6.88	+1.31	—5.93
31	—15.4	—27.8	+0.71	+0.99	—2.83	—3.19	—1.03	—3.32
37	—10.3	+25.6	+1.85	+0.13	—1.09	—1.54	—0.08	—1.10
45	—11.4	—61.9	—1.72	—0.26	—3.29	—3.75	—3.29	—4.20
49	— 9.4	—13.3	+0.39	—0.11	—1.51	—2.26	—1.47	—2.08
52	— 5.5	—57.0	+4.14	+5.41	—7.66	—8.20	+2.60	—8.59
55	— 0.9	—48.4	+1.53	+1.39	—0.43	—2.17	—0.53	—1.90
57	+ 0.0	+35.2	—0.65	—1.59	—2.48	—2.35	—1.95	—2.16
68	+ 13.7	+ 43.4	+ 2.43	+ 0.10	1.29	3.07	+ 0.71	1.92
73	+ 19.9	+ 33.3	- 0.77	3.20	1.91	4.41	- 2.61	3.04
82	- 22.4	5.2	+ 3.07	+ 1.26	+ 0.95	- 0.83	+ 1.03	0.23
91	+ 31.4	25.6	+ 1.98	+ 1.34	+ 0.42	1.58	+ 0.34	- 1.13
99	+ 45.5	37.5	- 1.15	+ 1.13	— 1.23	— 3.56	0.18	— 3.15
102	+52.1	+28.2	—1.10	—3.66	+0.74	—2.23	—2.71	—0.86
110	+ 60.0	+ 6.9	0.06	- 2.11	- 1.91	— 4.73	— 1.62	— 3.71

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
16	−37.8	+21.2	+1.65	+0.91	−1.18	−0.29	—	—
22	−33.7	−23.2	+1.13	+2.03	+0.06	+0.10	—	—
28	−28.0	−39.1	+1.70	+2.58	+0.86	+0.83		
36	−14.9	+29.5	+2.52	+0.90	−0.06	−0.53	—	—
83	+23.6	−20.5	+1.35	+0.69	+1.09	−0.67	—	—
85	+27.8	+27.8	+0.69	−0.50	+1.06	−0.13	—	—
86	+29.3	+18.4	+1.73	−0.17	+0.83	−0.77	—	—
92	+33.7	−40.4	+2.09	+2.47	+1.36	−0.28	—	—

Région 373.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.31$; $T = 19.01$.

$k_x = -1.45$; $p_x = +0.0075$; $r_x = +0.0098$;
$k'_x = +1.70$; $p'_x = +0.0101$; $r'_x = -0.0095$.
$k_y = +0.20$; $p_y = +0.0081$; $r_y = +0.0412$;
$k'_y = +1.62$; $p'_y = +0.0050$; $r'_y = -0.0101$.

1	−60.7	+58.1	+2.96	+0.06	−2.55	−2.16	+1.11	−0.12
9	−51.0	−13.0	+0.43	−3.49	−1.82	−0.55	−1.86	+0.42
12	−49.2	+22.9	+0.71	−2.03	−4.94	−4.14	−0.97	−2.71
18	−41.3	+29.1	+1.41	−1.31	−3.67	−2.95	−0.18	−1.56
52	−9.9	+3.4	+0.74	−1.59	−2.38	−2.64	−0.38	−1.41
54	−8.4	−30.2	+0.74	−2.78	−2.04	−3.08	−0.97	−1.71
90	+17.3	+0.4	−0.02	−3.05	−1.15	−3.31	−1.26	−1.59
97	+25.8	−12.6	+3.90	+0.26	−0.44	−3.56	+2.43	−1.57
105	+38.3	+45.6	−0.30	−3.24	−0.87	−4.77	−1.29	−2.20
106	+36.6	+45.7	+1.24	−0.58	−4.91	−8.00	+0.78	−5.81
111	+40.4	+55.3	+4.20	+1.04	+0.96	−3.64	+3.10	−0.69
115	+44.9	−15.5	−1.64	−5.16	+0.12	−3.36	−2.88	−1.51
116	+47.5	+35.4	+0.68	−2.68	−2.33	−7.06	−0.45	−4.29
117	+46.4	+10.9	−12.91	−14.38	−8.45	−11.33	−13.10	−9.63
—	−32.5	+62.5	+0.86	−0.36	−2.34	−1.13	+0.10	+0.09
19	−43.6	+19.1	+0.56	−1.60	−2.20	−1.22	-	
34	−24.6	−30.6	+2.28	−1.45	−0.67	−1.43	—	-
39	−19.4	+29.1	+1.72	−1.30	−1.02	−1.27	—	-
41	−19.0	−26.1	+2.11	−1.46	−1.24	−1.46	-	
87	+19.6	+20.5	+0.98	−1.96	+0.20	−2.60	—	—
94	+28.6	+36.4	+1.61	−0.80	+0.75	−1.78	—	—
98	+28.7	−21.3	+1.29	−2.52	+1.67	−1.32	—	—
104	+32.5	−37.2	+1.11	−2.65	+1.09	−1.89	—	—

Région 374.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.31$; $T = 19.01$.

$k_x = -0.52$; $p_x = -0.0099$; $r_x = +0.0063$;
$k'_x = -0.19$; $p'_x = +0.0075$; $r'_x = -0.0345$.
$k_y = -2.13$; $p_y = +0.0060$; $r_y = +0.0196$;
$k'_y = +0.46$; $p'_y = +0.0090$; $r'_y = +0.0109$.

7	−55.2	−30.9	−0.88	−2.96	+1.26	−2.12	−1.76	−0.66
8	−54.0	+21.9	+0.94	+1.67	+1.11	−1.67	+0.70	−0.12
10	−51.7	+6.2	−0.30	+0.17	+1.87	+0.15	−0.44	+1.01
26	−27.0	+2.1	−0.90	−0.33	+0.13	−2.01	−0.96	−1.35
31	−21.2	−2.0	−1.47	−1.75	−2.42	−5.31	−1.91	−4.39
32								
38	−10.0	+62.6	+1.47	+3.91	−1.24	−4.67	+1.46	−3.16
57	+4.1	+47.4	+1.52	+3.39	+1.80	−1.70	+1.42	−0.49
70	+18.8	+16.8	−2.69	−2.71	−0.28	−3.23	−3.31	−2.75
—	−32.9	−57.8	+1.98	−1.68	+2.05	−0.18	+0.65	+0.16
24	−30.1	+16.6	+0.35	+1.75	+1.74	−0.88	—	
34	−21.3	−20.3	+0.31	−0.72	+1.99	−0.17	—	—
37	−19.3	−39.8	+1.28	−0.89	+2.06	−0.19	—	-
40	−13.5	+35.9	−0.65	+1.00	+1.12	−1.47	—	-
80	+20.6	−41.9	+0.76	−1.68	+2.79	−0.04	—	—
86	+31.4	+28.8	+0.52	+0.68	+3.03	+0.27	—	—
87	+33.5	+26.4	+1.39	+0.89	+2.40	−0.52	-	
90	+36.4	−24.4	+0.69	−0.42	+2.75	−0.14	—	

Région 375.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.30$; $T = 19.01$.

$k_x = -0.98$; $p_x = +0.0041$; $r_x = +0.0091$;
$k'_x = -0.40$; $p'_x = +0.0022$; $r'_x = -0.0162$.
$k_y = -0.17$; $p_y = +0.0089$; $r_y = -0.0128$;
$k'_y = -1.11$; $p'_y = +0.0066$; $r'_y = -0.0140$.

21	−48.4	−18.4	+1.25	+0.37	−1.60	−1.10	+0.03	−2.78
36	−37.8	+4.2	+1.53	+1.22	+0.81	+1.27	+0.55	−0.06
42	−36.6	−37.5	+3.36	+1.65	+0.22	+1.15	+1.83	−0.73
48	−32.1	+4.4	+5.77	+5.68	−4.09	−3.10	+4.92	−4.63
59	−29.6	−20.1	+2.69	+1.59	−0.91	−0.46	+1.43	−1.87
73	−16.3	+14.5	−1.07	−1.03	−2.25	−0.39	−1.84	−2.06
87	−9.9	−57.4	+3.82	+2.04	−1.32	−1.77	+2.41	−2.76
91	−2.5	+8.8	+0.39	+0.66	−1.50	+0.51	−0.20	−1.10
98	+0.6	+0.9	−2.43	−2.56	−2.24	−0.76	−3.18	−2.12
107	+13.8	+44.2	−1.19	+0.04	−2.73	−1.76	−1.38	−2.36
110	+10.9	+15.8	−0.85	+0.65	−1.06	+0.17	+0.03	−0.82
127	+23.5	−48.9	+1.82	−0.79	−1.18	+0.16	+0.07	−1.21
129	+27.3	+7.7	+0.68	+0.46	−2.98	−1.23	−0.06	−2.32
155	+56.7	+25.7	−1.18	−0.20	−0.48	+0.62	−1.30	+0.39
—	−49.1	−31.5	−2.40	−3.69	−3.13	−4.06	−3.78	−5.14
41	−37.3	−29.2	+1.65	+0.19	+0.67	+1.56	—	—
45	−31.3	+21.9	+0.26	+0.42	+0.40	+1.77	—	—
55	−27.1	+37.8	+1.19	+1.18	+0.49	+1.56	—	—
60	−25.5	−30.8	+1.30	+0.09	+0.66	+1.24	—	—
132	+29.1	−31.1	+1.20	−0.33	+0.40	+1.17	—	—
138	+38.6	+24.1	+1.06	+1.37	−0.90	−0.34	-	
141	+35.4	−27.6	+0.82	−0.26	−0.03	+1.22	—	—
144	+42.2	+20.2	+0.36	+0.28	−0.54	+0.44	—	—

N:o	x en mm	y en mm	Diff. en x Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en x Unité 0.01 mm a_2-b_2	Diff. en y Unité 0.01 mm b_1-a_1	Diff. en y Unité 0.01 mm a_2-b_2	Δx	Δy
6	56.3	24.6	2.20	3.90	+0.57	0.44	2.18	1.75
24	−42.5	−16.6	+0.23	−1.65	+0.25	−1.62	+0.28	−2.22
27	38.2	60.9	2.47	5.17	0.59	2.99	2.21	2.66
31	−36.4	−26.7	−2.83	−4.11	−0.22	−2.38	−2.54	−2.81
38	−29.9	+47.7	+2.40	−0.03	0.00	−1.97	+2.73	−1.82
58	−10.9	+44.5	−3.52	−5.50	−0.74	−1.99	−2.91	−1.92
77	− 4.3	−32.3	−2.80	−4.27	+1.53	−0.84	−2.50	−0.70
91	+ 3.3	−53.7	−1.10	−2.14	−0.80	−2.57	−0.72	−2.78
114	+22.6	−21.3	−2.37	−4.30	+0.21	−1.93	−2.10	−1.40
128	+34.7	+ 0.1	−3.51	−5.50	−5.27	−7.71	−3.05	−6.67
129	+32.0	− 3.3	+4.11	+1.99	−1.94	−3.89	+4.46	−3.16
132	+36.5	+47.1	0.81	1.59	0.88	−1.39	1.43	0.04
138	+42.5	17.7	1.82	0.30	0.61	2.90	+2.10	−1.95
152	50.7	22.0	2.51	4.19	1.55	3.44	2.00	2.59
153	+51.1	−43.5	+1.37	−0.27	−2.72	−5.23	+1.73	−4.23
—	+30.1	+40.2	−2.28	−4.90	−3.78	−5.23	−1.84	−4.45
	47.6	−53.0	−2.48	−5.07	+0.32	−2.79	−2.68	−1.62

39	−27.1	+39.0	−1.05	−3.19	+1.69	+0.33	—	—
42	−28.6	−32.3	+0.13	−1.64	+2.66	+0.54	—	—
47	−23.6	+23.0	+0.01	−2.30	+1.75	+0.06	—	—
49	−23.1	−20.2	−0 04	−1.59	+1.83	+0.12	—	—
109	+24.2	+28.2	−0.30	−2.40	+1.21	−0.54	—	—
116	+21.1	−35.1	−0.33	−1 84	+1.79	−0.52	—	—
122	+28.5	−27.3	−0.57	−2.73	+1.93	−0.64	—	—
126	+33.2	+40.8	−0.41	−2.88	+0.48	−1.34	—	—

Région 377.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.30$; $T = 19.01$.

$k_x = -0.40$; $p_x = +0.0084$; $r_x = -0.0388$;
$k'_x = -0.24$; $p'_x = +0.0126$; $r'_x = -0.0059$.
$k_y = -0.70$; $p_y = +0.0056$; $r_y = +0.0115$;
$k'_y = +1.27$; $p'_y = +0.0075$; $r'_y = -0.0268$.

24	−38.9	−59.6	−3.56	−0.63	−0.23	−0.55	−1.49	−0.79
37	−18.9	−14.5	+0.18	+0.69	−4.18	−5.85	+0.24	−4.97
38	−17.2	−14.7	−1.94	−1.10	−1.18	−2.11	−1.69	−1.58
43	−15.0	− 5.0	+2.70	+2.74	−0.51	−1.64	+2.35	−0.94
52	− 8.2	−24.9	−1.55	−1.02	−2.60	−3.91	−1.13	−3.20
53	− 9.6	−49.5	−15.24	−12.02	−5.70	−7.50	−12.94	−6.71
95	+34.7	+51.5	−0.95	−3.46	−0.27	−4.01	−3.31	−1.25
109	+47.2	+21.9	+0.39	−0.82	−0.44	−4.69	−0.53	−1.78

18	−36.3	+17.5	+1.93	+1.47	+0.51	+0.01	—	—
22	−36.2	−39.5	−0.83	+0.33	−0.07	−0.57	—	—
32	−27.0	−23.8	−0.15	+0.81	+0.97	+0.05	—	—
36	−18.1	+35.6	+1.24	−0.23	+0.11	−1.35	—	—
89	+21.0	+20.3	+0.35	0.00	+1.04	−2.00	—	—
91	23.2	−17.5	0.37	0.51	1.38	1.16		—
103	+36.8	−25.3	−1.14	−0.26	+1.08	−2.52	—	—
106	42.4	29.8	2.01	0.21	0.68	2.76		

Région 378.

$E = 1893.30$; $E' = 1912.30$; $T = 19.01$.

$k_x = -0.22$; $p_x = +0.0301$; $r_x = -0.0161$;
$k'_x = -2.51$; $p'_x = +0.0302$; $r'_x = 0.0000$.
$k_y = -1.54$; $p_y = -0.0059$; $r_y = 0.0005$;
$k'_y = +1.84$; $p'_y = -0.0073$; $r'_y = +0.0156$.

1	−63.5	+ 3.2	+2.54	+4.00	−0.10	−4.21	−0.03	−1.54
10	52.1	61.4	2.51	1.89	1.29	5.31	5.63	3.16
16	−49.6	−12.2	+1.94	+4.27	+1.39	−2.22	+0.34	+0.19
28	−35.3	−43.1	−3.85	−0.82	−1.49	−5.03	−4.42	−2.56
33	−30.0	+11.2	−1.06	+1.58	+0.91	−2.49	−2.10	−0.49
75	+15.0	− 1.2	−2.98	−0.52	+0.24	−2.60	−2.65	−1.13
105	+36.2	+21.5	+0.81	+2.59	+2.33	−0.79	+1.25	+0.50
110	+43.2	+21.7	+0.29	+1.93	+1.44	−0.96	+0.87	−0.08
132	+58.8	+35.2	−2.11	−0.91	−0.93	−3.99	−1.38	−2.99

31	−32.7	−23.0	+1.55	+4.24	+1.40	−2.25	—	—
32	−28.0	+18.9	+1.11	+3.08	+2.98	−1.52	—	—
—	−24.0	+28.9	+0.05	+1.72	+1.56	−2.09	—	—
40	−20.4	−33.7	+1.17	+4.16	+0.23	−3.22	—	—
86	+17.6	−28.1	−1.23	+1.36	+1.24	−2.03	—	—
90	+24.8	−22.9	−2.04	+0.59	+2.67	−0.83	—	—
93	+27.3	+35.1	+0.65	+2.58	+1.85	−1.11	—	—
95	+26.5	+24.2	+0.72	+2.59	+0.41	−1.84	—	—

II.

Calcul des mouvements propres annuels. Réduction au mouvement propre absolu.

Les mouvements propres annuels ont été calculés en partant des quantités Δx et Δy, d'après les méthodes déjà employées dans le volume précédent de ce travail. Les moyennes des résultats de régions différentes ont aussi été formées de la même manière que précédemment. Pour ce qui est de ces calculs, je me bornerai donc à renvoyer aux pages 95—100 du vol. I:er. Il en est autrement de la détermination des corrections systématiques des mouvements propres, c'est-à-dire de la réduction au mouvement propre absolu; — cette détermination a eu lieu d'une manière quelque peu différente de celle du vol. I:er. Il faut donc en donner ici un exposé.

Dans le vol. I:er, les corrections systématiques furent déterminées au moyen d'une comparaison des valeurs que j'avais trouvées pour les mouvements propres avec celles données dans le *Preliminary General Catalogue* de Boss, pour toutes les étoiles communes. De plus, à titre de contrôle, je fis une comparaison avec les mouvements propres de Porter (*Cincinnati Publications*, n:os 13 et 14). Cette dernière comparaison a été abandonnée dans le présent volume, vu le nombre trop insignifiant des étoiles communes. En revanche, j'y ai fait usage du catalogue revisé de Groombridge *, qui contient un grand nombre des étoiles dont j'ai déterminé les mouvements propres. Dans le premier volume de ce travail, je n'avais point tiré parti de ce catalogue; mais ici j'ai étendu la comparaison aussi aux étoiles dudit vol. I:er.

La partie de la zone de Helsingfors dont nous traitons ici a 29 étoiles communes avec le catalogue de Boss. Elles sont notées dans le tableau suivant, dont la première colonne donne les numéros du catalogue de Boss. Viennent ensuite la classe de grandeur d'après Boss, les coordonnées équatoriales approximatives pour 1900.0, les composantes μ_α et μ_δ des mouvements propres d'après Boss et d'après les valeurs que j'ai déterminées — puis les différences Boss—Hels. en unités de la dernière décimale, et enfin les poids de ces différences; ces derniers ont été calculés de la manière indiquée p. 163 du premier volume de ce travail.

* Dyson and Thackeray: *New Reduction of Groombridge's Circumpolar Catalogue*, 1905.

Tableau II.

Comparaison entre Boss et Helsingfors.

N:o	Gr.	α	δ	Boss		Helsingfors		Boss—Hels.		Poids	
				μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ
		h m s	′	s	″						
1498	6.3	5 56 5	42 54.9	+0.0113	−0.141	+0.0115	−0.183	− 2	+42	0.4	0.4
1506	6.0	57 52	42 59.4	−0.0025	−0.145	−0.0022	−0.172	− 3	+27	1.0	0.6
1571	6.9	6 10 8	46 27.4	−0.0044	+0.013	−0.0054	−0.013	+10	+26	0.8	0.8
1576	6.7	49	46 24.0	+0.0009	−0.133	+0.0006	−0.142	+ 3	+ 9	0.8	0.9
1632	6.2	22 35	46 44.9	+0.0005	+0.005	−0.0020	+0.000	+25	+ 5	0.7	0.8
1687	5.9	31 44	39 28.8	−0.0021	−0.116	−0.0001	−0.118	−20	+ 2	0.9	1.0
1688	5.3	51	39 59.3	−0.0013	−0.032	+0.0007	−0.004	−20	−28	1.0	1.1
1694	5.0	32 11	42 34.6	+0.0005	−0.061	−0.0001	−0.084	+ 6	+23	1.6	1.8
1707	5.2	35 48	44 37.2	−0.0036	−0.039	−0.0029	−0.044	− 7	+ 5	1.2	1.4
1724	5.6	39 32	43 40.6	+0.0007	+0.158	+0.0022	+0.158	−15	0	1.3	1.5
1748	5.2	43 42	41 54.0	−0.0016	−0.135	−0.0030	−0.146	+14	+11	1.4	1.6
1762	6.3	46 9	38 59.3	+0.0005	+0.005	−0.0036	+0.033	+41	−28	0.2	0.2
1779	6.0	49 8	46 24.1	+0.0024	+0.006	+0.0002	−0.025	+22	+31	0.7	0.8
1786	5.0	50 19	45 13.5	−0.0024	−0.002	−0.0027	−0.036	+ 3	+34	1.7	2.3
1841	5.1	7 4 47	39 29.0	+0.0041	−0.003	+0.0025	−0.034	+16	+31	0.5	0.8
1880	6.0	11 5	41 3.7	−0.0010	0.000	−0.0007	−0.047	− 3	+47	1.5	1.3
1897	5.8	14 3	45 24.8	−0.0034	+0.005	−0.0035	−0.017	+ 1	+22	1.1	1.5
1919	5.5	17 13	40 51.9	+0.0001	−0.024	+0.0006	−0.019	− 5	− 5	1.2	1.3
1986	5.9	29 16	46 24.1	−0.0009	−0.046	−0.0010	−0.010	+ 1	−36	0.7	0.7
2142	6.5	8 0 14	43 32.9	+0.0004	−0.031	−0.0021	−0.053	+24	+22	1.1	1.5
2148	6.7	2 31	42 43.4	+0.0011	−0.072	+0.0001	−0.082	+10	+10	1.1	1.2
2208	4.4	16 0	43 30.6	−0.0008	−0.107	−0.0032	−0.092	+24	−15	1.7	1.9
2220	6.3	17 57	42 19.6	+0.0007	−0.007	−0.0012	+0.003	+19	−10	1.3	1.7
2236	6.7	20 39	45 59.5	−0.0031	−0.361	−0.0015	−0.367	−16	+ 6	1.0	1.1
2306	5.6	34 7	46 11.1	+0.0028	+0.077	+0.0006	+0.077	+22	0	0.9	1.3
2333	8.5	38 35	42 3.1	−0.0241	−0.649	−0.0249	−0.671	+ 8	+22	1.0	1.1
2368	5.3	45 14	44 5.9	+0.0001	+0.037	−0.0010	+0.029	+11	+ 8	1.5	2.0
2392	6.1	50 4	46 0.9	−0.0105	−0.046	−0.0109	−0.066	+ 4	+20	1.1	1.2
2413	4.0	54 9	42 10.8	−0.0388	−0.261	−0.0374	−0.259	−14	− 2	2.2	2.4

La dernière étoile de ce tableau, celle qui porte le N:o 2413, est identique à la première du tableau correspondant du vol. I:er de ce travail. Les valeurs de μ_α et μ_δ de Helsingfors pour cette étoile s'écartent de celles qui ont été publiées antérieurement; la raison en est que deux nouvelles déterminations du mouvement propre (dans les régions 372 et 376) ont été ajoutées ici.

Dans le catalogue de GROOMBRIDGE, on trouve un nombre total de 75 étoiles dont les mouvements propres ont été déterminés aussi dans le présent volume de mon travail. Les résultats de la comparaison avec ledit catalogue entrent dans le tableau ci-dessous, construit de la même manière que le tableau II. Cette comparaison s'est d'ailleurs, comme il a été dit plus haut, étendue à la partie de la zone de Helsingfors traitée dans le vol. I:er de ce travail, lequel contient 71 étoiles de GROOMBRIDGE. Les étoiles qui se retrouvent aussi dans le catalogue de Boss, sont marquées d'un astérisque. Pour ce qui concerne le calcul des poids des différences Groombr.—Hels., je renvoie à ce qui en est dit plus bas.

Tableau III.

Comparaison entre Groombridge et Helsingfors.

N:o	Gr.	α	δ	Groombr.		Helsingfors		Gr.—Hels.		Poids	
				μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ
		h m s	° ′	s	″	s	″				
1065	6.5	5 55 40	43 22.7	+0.0015	−0.014	+0.0018	−0.034	− 3	+20	0.5	0.7
*1067	6.1	56 5	42 54.9	+0.0093	−0.152	+0.0115	−0.183	−22	+31	0.3	0.4
1068	7.2	57 10	45 35.4	−0.0011	−0.068	+0.0011	−0.067	−22	− 1	0.6	0.8
1069	6.7	12	44 16.0	+0.0077	−0.150	+0.0097	−0.139	−20	−11	0.6	1.0
*1071	5.8	52	42 59.4	−0.0022	−0.147	−0.0022	−0.172	0	+25	0.7	0.6
1081	7.3	6 0 56	45 34.0	−0.0019	−0.021	−0.0010	−0.023	− 9	+ 2	0.8	1.4
1083	6.4	1 19	41 4.1	−0.0034	−0.055	+0.0007	−0.061	−41	+ 6	0.8	1.2
1086	7.2	2 42	46 46.5	+0.0031	−0.020	+0.0028	−0.055	+ 3	+35	0.5	0.7
1116	7.5	7 22	39 42.0	−0.0011	−0.055	−0.0014	−0.081	+ 3	+26	0.5	0.7
*1125	6.5	10 8	46 27.4	−0.0048	0.000	−0.0054	−0.013	+ 6	+13	0.6	0.8
1139	7.4	14 22	45 39.3	+0.0013	+0.010	+0.0006	−0.040	+ 7	+40	0.9	1.7
1140	6.7	9	42 23.1	−0.0010	−0.042	+0.0006	−0.032	−16	−10	0.8	1.6
1148	6.9	16 37	40 34.2	+0.0001	−0.006	+0.0042	−0.024	−41	+18	0.9	1.6
1152	7.2	17 33	43 36.0	−0.0001	−0.024	−0.0008	−0.024	+ 7	0	0.8	1.5
1154	8.3	52	40 54.3	−0.0096	−0.036	−0.0054	−0.038	−42	+ 2	0.8	1.2
1165	7.8	21 54	40 10.9	−0.0022	−0.025	+0.0001	−0.015	−23	−10	0.8	1.2
*1166	6.0	22 35	46 44.9	−0.0001	+0.015	−0.0020	+0.000	+19	+15	0.6	0.7
1167	8.0	23 13	44 0.2	−0.0033	−0.018	−0.0023	−0.028	−10	+10	0.9	1.4
1175	8.5	25 45	46 38.8	−0.0004	−0.036	−0.0030	−0.028	+26	− 8	0.6	0.8
*1196	5.7	31 44	39 28.8	−0.0053	−0.115	−0.0001	−0.118	−52	+ 3	0.6	0.9
*1198	5.3	51	39 59.3	−0.0018	−0.027	+0.0007	−0.004	−25	−23	0.7	1.0
*1199	5.2	32 11	42 34.6	+0.0005	−0.054	−0.0001	−0.084	+ 6	+30	0.9	1.6
1201	6.6	43	44 6.1	+0.0016	−0.013	+0.0005	−0.002	+11	−11	0.8	1.2
*1206	5.2	35 48	44 37.2	−0.0051	−0.030	−0.0029	−0.044	−22	+14	0.7	1.2
1209	7.0	41	38 59.4	−0.0027	−0.089	+0.0032	−0.161	−59	+72	0.2	0.2
1211	8.7	36 21	44 31.1	+0.0092	−0.051	+0.0072	−0.072	+20	+21	0.7	1.2
1214	6.9	37 17	40 43.6	−0.0032	−0.160	−0.0007	−0.172	−25	+12	0.8	1.4
1216	7.8	38 12	44 20.6	+0.0158	−0.211	+0.0156	−0.212	+ 2	+ 1	0.7	1.1
*1218	5.3	39 32	43 40.6	−0.0007	+0.166	+0.0022	+0.158	−29	+ 8	0.8	1.3
*1224	5.1	43 42	41 54.0	−0.0017	−0.123	−0.0030	−0.146	+13	+23	0.9	1.5
1225	8.3	58	44 10.5	+0.0016	−0.039	+0.0036	−0.048	−20	+ 9	0.8	1.2
*1229	6.0	46 9	38 59.3	+0.0026	+0.033	−0.0036	+0.033	+62	0	0.2	0.2
1233	7.9	47 10	41 0.9	+0.0065	−0.057	+0.0063	−0.092	+ 2	+35	0.8	1.4
1237	6.2	48 2	44 2.1	+0.0009	−0.030	±0.0000	−0.033	+ 9	+ 3	0.8	1.1
*1243	4.3	50 19	45 13.5	−0.0019	−0.011	−0.0027	−0.036	+ 8	+25	0.9	1.8
1246	6.9	50	41 50.3	+0.0020	−0.058	+0.0044	−0.054	−24	− 4	0.6	1.0
1253	7.9	53 25	42 13.7	−0.0101	−0.010	−0.0039	−0.034	−62	+24	0.8	1.4
1265	7.0	7 0 55	44 11.7	−0.0001	−0.022	−0.0005	−0.026	+ 4	+ 4	0.8	1.2
1270	7.3	4 15	40 12.5	−0.0048	−0.084	−0.0046	−0.119	− 2	+33	0.7	1.1
*1273	5.0	47	39 29.0	+0.0040	+0.013	+0.0025	−0.034	+15	+47	0.4	0.7
1275	8.1	5 19	44 9.3	+0.0004	−0.024	+0.0007	−0.010	− 3	−14	0.9	1.8
1282	6.7	8 21	45 34.9	−0.0016	−0.011	−0.0012	−0.022	− 4	+11	0.8	1.3
1287	7.8	10 47	45 18.5	−0.0008	−0.067	−0.0007	−0.073	− 1	+ 6	0.8	1.7
*1289	5.8	11 5	41 3.7	−0.0010	−0.004	−0.0007	−0.047	− 3	+43	0.8	1.2
*1295	6.0	14 3	45 24.8	−0.0040	+0.004	−0.0035	−0.017	− 5	+21	0.8	1.4
1306	8.3	17 17	43 25.0	+0.0011	−0.032	−0.0005	−0.041	+16	+ 9	0.8	1.2
*1307	5.3	13	40 51.9	+0.0007	−0.005	+0.0006	−0.019	+ 1	+14	0.8	1.2

N:o	Gr.	α	δ	Groombr.		Helsingfors		Gr.—Hels.		Poids	
				μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ
		h m s	° ′	s	″	s	″				
1312	7.9	7 19 36	44 40.6	−0.0031	−0.040	0.0009	−0.029	−22	−11	0.9	1.8
1313	6.7	53	43 27.4	+0.0001	−0.012	0.0006	−0.032	+ 7	+20	0.8	1.4
1326	6.5	25 8	39 6.4	−0.0040	−0.005	−0.0031	−0.024	− 9	+19	0.4	0.5
1332	6.3	28 54	43 15.1	−0.0034	−0.051	-0.0017	−0.083	−17	+32	0.8	1.4
1338	6.6	30 27	40 14.9	−0.0020	−0.022	−0.0027	−0.067	+ 7	+45	0.8	1.5
1362	7.2	36 44	44 1.9	−0.0082	−0.009	-0.0071	−0.034	−11	+25	0.8	1.2
1384	6.4	51 15	44 14.7	+0.0040	+0.017	+0.0054	−0.005	−14	+22	0.8	1.4
1402	7.2	57 57	40 1.4	−0.0028	+0.001	0.0007	−0.039	−19	+40	0.6	0.9
*1405	6.3	8 0 14	43 32.9	−0.0019	−0.019	0.0021	−0.053	+ 2	+34	0.7	1.4
*1411	6.4	2 31	42 43.4	+0.0017	−0.065	+0.0001	−0.082	+16	+17	0.8	1.2
1416	6.5	4 44	39 1.7	−0.0057	−0.055	0.0088	−0.141	+31	+86	0.2	0.2
*1430	4.4	16 0	43 30.6	−0.0021	−0.081	−0.0032	−0.092	+11	+11	0.8	1.6
*1433	6.2	17 57	42 19.6	−0.0005	+0.006	−0.0012	+0.003	+ 7	+ 3	0.9	1.6
1434	8.5	58	42 18.4	−0.0056	−0.044	-0.0059	−0.062	+ 3	+18	0.9	1.6
*1437	6.5	20 39	45 59.5	−0.0061	−0.361	-0.0015	−0.367	−46	+ 6	0.7	1.1
1448	6.8	24 33	40 33.6	−0.0019	−0.034	−0.0008	−0.029	−11	− 5	0.8	1.6
1453	8.7	29 23	43 24.6	−0.0038	−0.033	0.0009	−0.018	−29	−15	0.9	1.8
*1465	5.5	34 7	46 11.1	+0.0003	+0.077	+0.0006	+0.077	− 3	0	0.6	1.2
1467	7.6	16	40 22.3	−0.0012	+0.009	0.0007	−0.015	−19	+24	0.9	1.6
1468	7.2	56	45 13.1	−0.0010	−0.020	−0.0011	−0.034	+ 1	+14	0.8	1.4
*1474	5.3	45 14	44 5.9	−0.0009	+0.048	−0.0010	+0.029	+ 1	+19	0.9	1.7
1476	6.1	33	42 22.7	−0.0055	−0.085	0.0040	−0.076	−15	− 9	0.8	1.6
1482	7.5	47 59	40 31.0	+0.0037	−0.160	+0.0035	−0.181	+ 2	+21	0.9	1.7
*1486	5.9	50 4	46 0.9	−0.0122	−0.043	0.0109	−0.066	−13	+23	0.8	1.2
1487	6.0	1	40 35.1	−0.0072	−0.050	-0.0060	−0.062	−12	+12	0.9	1.9
*1495	4.0	54 9	42 10.8	−0.0417	−0.250	0.0374	−0.259	−43	+ 9	0.9	1.9
1498	6.2	55 14	40 6.4	−0.0044	−0.081	0.0033	−0.090	−11	+ 9	0.9	1.9
1509	7.9	58 14	43 51.3	−0.0104	−0.053	-0.0092	−0.063	−12	+10	0.9	1.5
*1524	5.4	9 7 16	43 37.8	−0.0030	−0.031	-0.0027	−0.029	− 3	− 2	1.1	1.7
1527	6.8	8 40	39 1.3	−0.0113	+0.074	0.0083	+0.053	−30	+21	0.5	0.3
*1546	5.5	22 7	46 2.4	+0.0004	−0.140	−0.0006	−0.128	+10	−12	0.9	1.0
*1547	8.4	9	46 1.1	−0.0039	−0.048	+0.0001	−0.040	−40	− 8	0.9	1.0
*1560	4.9	28 50	40 3.9	−0.0029	+0.016	-0.0006	+0.004	−23	+12	1.0	1.3
*1565	5.2	32 7	40 41.3	−0.0015	−0.001	0.0004	−0.006	−11	+ 5	1.1	1.7
*1569	7.0	35 11	39 24.5	+0.0050	−0.144	+0.0083	−0.155	−33	+11	0.6	1.1
*1574	5.5	49	40 12.8	−0.0069	−0.038	−0.0037	−0.088	−32	+50	1.1	1.7
*1578	6.8	40 19	45 34.8	+0.0050	−0.137	+0.0062	−0.142	−12	+ 5	1.1	2.0
*1580	5.1	42 8	46 29.2	+0.0187	−0.092	+0.0236	−0.108	−49	+16	0.7	0.9
*1582	6.8	44 6	40 5.9	+0.0006	−0.014	0.0008	+0.008	− 2	−22	1.1	1.5
*1592	5.2	51 34	41 31.9	−0.0089	−0.037	0.0125	−0.041	+36	+ 4	1.1	1.6
1608	7.2	59 55	40 4.1	−0.0080	−0.004	-0.0075	−0.030	− 5	+26	1.0	1.3
*1617	6.5	10 4 57	41 9.2	−0.0020	−0.005	0.0009	−0.012	−11	+ 7	1.0	1.5
1621	7.8	5 29	42 13.5	+0.0006	−0.046	+0.0031	−0.037	−25	− 9	1.2	2.2
*1629	3.4	11 4	43 24.8	−0.0157	−0.046	0.0148	−0.070	− 9	+24	1.1	1.7
1630	6.9	18	41 58.0	−0.0088	−0.025	−0.0064	−0.035	−24	+10	1.0	1.3
1635	6.6	12 31	43 33.0	−0.0109	−0.073	−0.0114	−0.087	+ 5	+14	1.1	1.7
*1636	6.7	47	44 33.4	+0.0074	−0.294	+0.0073	−0.319	+ 1	+25	1.1	1.7
*1639	6.7	15 5	42 21.1	+0.0000	+0.010	+0.0004	−0.002	− 4	+12	1.2	2.2
*1641	5.9	16 14	41 44.3	−0.0118	−0.147	-0.0093	−0.158	−25	+11	1.1	1.7
*1642	3.3	23	42 0.1	−0.0089	+0.029	0.0052	+0.024	−37	+ 5	1.2	1.4
*1644	5.7	21 33	42 6.7	−0.0039	−0.087	−0.0041	−0.095	+ 2	+ 8	1.0	1.4

N:o	Gr.	α	δ	Groombr.		Helsingfors		Gr.—Hels.		Poids	
				μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ
		h m s	° ′	s	″	s	″				
*1652	5.9	10 24 16	39 26.2	−0.0019	−0.001	+0.0033	+0.010	−52	−11	0.6	0.9
*1658	4.7	27 24	40 56.4	−0.0140	+0.007	−0.0124	−0.006	−16	+13	1.0	1.3
1661	7.0	29 16	42 25.6	+0.0003	+0.003	+0.0046	−0.010	−43	+13	1.1	1.8
1675	7.7	34 45	42 40.4	−0.0010	+0.023	−0.0008	+0.022	−2	+1	1.0	1.6
*1678	5.2	37 41	46 43.8	−0.0281	−0.087	−0.0250	−0.060	−31	−27	0.8	1.0
*1679	8.0	38 9	46 43.9	−0.0259	−0.071	−0.0244	−0.057	−15	−14	0.8	1.0
1690	8.0	43 9	44 27.4	−0.0022	−0.037	−0.0026	−0.061	+4	+24	1.1	1.7
1692	8.0	42	41 55.1	−0.0063	+0.009	−0.0041	−0.021	−22	+30	1.1	1.5
*1703	4.8	48 14	43 43.4	+0.0055	−0.027	+0.0032	+0.006	+23	−33	1.1	1.7
1705	7.7	53	41 52.2	−0.0095	+0.056	−0.0072	+0.049	−23	+7	1.0	1.3
1707	8.4	49 41	41 59.5	−0.0047	+0.024	−0.0016	+0.032	−31	−8	1.0	1.3
*1711	6.1	50 32	42 32.7	+0.0011	−0.088	+0.0017	−0.089	−6	+1	1.2	2.1
1715	7.4	51 27	41 53.2	−0.0094	−0.064	−0.0075	−0.073	−19	+9	1.0	1.3
*1718	5.1	53 52	40 57.9	−0.0301	+0.054	−0.0282	+0.067	−19	−13	1.0	1.3
*1722	5.7	54 30	46 3.7	+0.0003	+0.014	+0.0003	−0.041	0	+55	1.0	1.7
*1723	6.1	41	43 27.1	−0.0098	−0.132	−0.0092	−0.133	−6	+1	1.1	1.9
*1725	5.0	55 14	39 45.0	−0.0060	−0.020	−0.0050	−0.010	−10	−10	0.7	1.4
1730	7.7	58 0	44 52.2	−0.0171	−0.077	−0.0137	−0.092	−34	+15	0.8	1.0
1734	7.5	11 0 6	44 50.5	+0.0022	−0.005	+0.0017	−0.003	+5	−2	0.9	1.3
*1741	3.2	4 3	45 2.5	−0.0055	−0.034	−0.0047	−0.040	−8	+6	0.7	0.8
1742	6.0	3	43 45.0	−0.0062	−0.015	−0.0057	−0.056	−5	+41	1.1	1.6
1744	8.4	6 4	43 22.1	−0.0136	−0.233	−0.0092	−0.254	−44	+21	1.1	1.5
1745	7.3	15	43 22.9	−0.0128	−0.249	−0.0095	−0.263	−33	+14	1.1	1.6
1751	7.5	9 32	45 36.5	−0.0047	−0.086	−0.0047	−0.055	0	−31	1.0	1.6
1753	8.1	10 4	42 53.1	−0.0030	−0.004	−0.0006	−0.003	−24	−1	1.2	1.9
1756	8.0	18	42 59.7	−0.0092	+0.003	−0.0097	−0.005	+5	+8	1.3	1.9
1763	7.0	12 57	42 51.8	+0.0056	−0.015	+0.0089	−0.033	−33	+18	1.0	1.3
1768	7.1	16 8	40 58.8	+0.0037	−0.059	+0.0040	−0.074	−3	+15	0.9	1.3
1772	6.5	17 15	40 43.4	−0.0084	+0.006	−0.0050	−0.014	−34	+20	1.1	1.6
*1773	5.1	21	44 1.9	−0.0024	−0.012	−0.0002	−0.039	−22	+27	1.0	1.2
1775	7.8	20 5	43 10.7	−0.0059	+0.146	−0.0053	+0.103	−6	+43	1.1	1.9
1784	7.3	23 26	43 20.7	−0.0047	−0.071	−0.0026	−0.067	−21	−4	1.0	1.4
*1786	5.3	41	39 53.3	−0.0027	+0.015	−0.0012	−0.033	−15	+48	0.7	0.9
*1793	5.9	25 7	43 43.3	−0.0023	+0.079	−0.0047	+0.072	+24	+7	1.0	1.7
1794	6.9	6	44 7.7	−0.0264	+0.073	−0.0246	+0.068	−18	+5	1.1	1.6
1795	7.0	25	41 50.5	+0.0067	−0.068	+0.0094	−0.093	−27	+25	1.1	1.9
1798	7.4	26 31	41 59.3	−0.0054	+0.094	−0.0029	+0.077	−25	+17	1.2	1.4
1805	8.6	31 38	42 35.5	+0.0022	−0.071	+0.0056	−0.056	−34	−15	1.0	1.4
*1810	5.6	33 1	44 10.8	−0.0128	−0.021	−0.0121	−0.047	−7	+26	1.0	1.3
*1812	6.7	29	45 39.7	−0.0570	+0.015	−0.0557	+0.014	−13	+1	1.1	1.6
1813	7.0	34 29	45 42.7	+0.0021	+0.002	+0.0021	−0.004	0	+6	1.1	1.9
*1821	6.8	38 20	42 16.7	+0.0010	−0.010	+0.0011	−0.014	−1	+4	1.0	1.3
1832	6.7	48 39	41 28.3	−0.0012	−0.059	−0.0030	−0.088	+18	+29	1.1	1.6
*1833	6.5	49 54	47 2.0	+0.0028	−0.021	+0.0084	−0.006	−56	−15	0.3	0.2
*1834	6.9	59	47 1.6	+0.0029	−0.021	+0.0091	−0.023	−62	+2	0.3	0.2
1836	7.0	50 53	41 12.3	−0.0034	−0.008	−0.0009	−0.049	−25	+41	1.1	1.5
1841	6.7	52 6	40 54.1	−0.0158	−0.055	−0.0105	−0.077	−53	+22	1.1	1.3
*1847	5.2	57 2	43 36.0	−0.0308	+0.079	−0.0318	+0.098	+10	−19	0.5	0.6

Les poids des différences Groombr.—Hels. ont été déterminés de la manière suivante. Le catalogue de GROOMBRIDGE n'indiquant pas les erreurs probables des mouvements propres, mon premier soin fut de chercher à les calculer. A cet effet je formai les différences Boss—Groombr. pour les étoiles communes à ces deux catalogues entre 6^h et 12^h d'ascension droite. Dans cette comparaison, il faut tenir compte des différences systématiques entre les valeurs des mouvements propres de Boss et celles du catalogue de GROOMBRIDGE. Les valeurs de Boss sont déterminées en employant les constantes de précession de NEWCOMB; dans le calcul des valeurs du catalogue de GROOMBRIDGE, on a fait usage des constantes de STRUVE-PETERS. Par suite, les valeurs du catalogue de GROOMBRIDGE doivent subir les corrections suivantes, afin d'être réduites au système de Boss:

$$\text{en } \alpha\text{: } + 0^s.00035 + 0^s.00035 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta,$$
$$\text{en } \delta\text{: } + 0''.0053 \cos \alpha.$$

Après application de ces corrections, on obtient comme erreurs probables des différences Boss—Groombr.:

$$\text{en } \alpha \cos \delta\text{: } \pm 0''.00970; \text{ en } \delta\text{: } \pm 0''.00633.$$

D'autre part, d'après les données indiquées pour chaque étoile dans le catalogue de Boss, on a, pour les mouvements propres de Boss, les erreurs probables suivantes:

$$\text{en } \alpha \cos \delta\text{: } \pm 0''.00444; \text{ en } \delta\text{: } \pm 0''.00366.$$

Ces valeurs donnent comme erreurs probables des mouvements propres du catalogue de GROOMBRIDGE:

$$\text{en } \alpha \cos \delta\text{: } \pm 0''.00862; \text{ en } \delta\text{: } \pm 0''.00517.$$

Par la comparaison des mouvements propres de Boss et de ceux que j'ai déterminés ici, j'ai obtenu, pour les mouvements propres de Helsingfors, les erreurs probables suivantes pour le poids *1*:

$$\text{en } \alpha \cos \delta\text{: } \pm 0''.0106; \text{ en } \delta\text{: } \pm 0''.0137.$$

Ces nombres sont valables pour la partie de la zone de Helsingfors dont nous traitons ici. Pour la partie entre 9^h et 12^h on obtient

$$\text{en } \alpha \cos \delta\text{: } \pm 0''.0133; \text{ en } \delta\text{: } \pm 0''.0150.\ ^*$$

A l'aide de ces valeurs on obtient les poids des mouvements propres du catalogue de GROOMBRIDGE. Désignons ceux-ci par P_g, et par r_g les erreurs probables correspondantes; si nous appelons r_h les erreurs probables des mouvements propres de Helsingfors pour le poids *1*, nous trouvons P_g an moyen de l'équation

$$P_g = \frac{r_h^2}{r_g^2}.$$

* La valeur obtenue pour δ s'écarte un peu de celle qui a été publiée antérieurement dans le volume I:er de ce travail. L'écart provient de ce que l'étoile N:o 2413 du catalogue de Boss, laquelle appartient au domaine entre 6^h et 9^h, a été exclue cette fois dans le calcul de l'erreur probable pour le domaine entre 9^h et 12^h.

Il m'a semblé le plus juste de calculer séparément les quantités P_g pour chacune des deux parties de la zone, vu que les erreurs probables de mes mouvements propres ne coïncident pas complètement pour les deux parties. Les valeurs suivantes ont été obtenues pour P_g:

	en $\alpha \cos \delta$:	en δ:
Entre 6^h et 9^h:	1.5	7.0
„ 9^h et 12^h:	2.4	8.4.

Ayant calculé ainsi les poids des mouvements propres du catalogue de Groombridge, on tire les poids P_Δ des différences Groomb.—Hels. de l'équation

$$P_\Delta = \frac{P_h \cdot P_g}{P_h + P_g}$$

Ce sont ces poids qui entrent dans le tableau III.

Pour déterminer les corrections systématiques des mouvements propres de Helsingfors, il s'agit d'abord de former les moyennes des différences Boss—Hels. et Groombr.—Hels. pour les étoiles communes à Boss et à Groombridge. On peut calculer immédiatement ces moyennes, les poids des différences étant connus.

Le tableau suivant contient toutes les différences définitives employées pour fixer les corrections systématiques. La première colonne donne l'ascension droite de l'étoile. Les deux suivantes indiquent les différences en μ_α et en μ_δ, exprimées en $0^s.0001$ et $0''.001$ comme unités, et réduites au système de Boss partout où cette réduction a été nécessaire. Viennent ensuite les poids en μ_α et en μ_δ. Enfin, la dernière colonne indique par la mention *B*, *G* ou *BG* que la comparaison a eu lieu avec le catalogue de Boss, avec celui de Groombridge ou avec tous deux respectivement.

Tableau IV.

Différences définitives Boss (Groombridge)—Helsingfors.

α	Diff. μ_α	Diff. μ_δ	Poids μ_α	Poids μ_δ		α	Diff. μ_α	Diff. μ_δ	Poids μ_α	Poids μ_δ	
h m s						h m s					
5 55 40	+ 3.8	+20.1	0.5	0.7	G	6 17 52	−35.4	+ 1.6	0.8	1.2	G
56 5	− 3.6	+39.4	0.4	0.4	BG	21 54	−16.5	−10.5	0.8	1.2	G
57 10	−14.9	− 0.9	0.6	0.8	G	22 35	+25.4	+ 8.0	0.8	0.8	BG
12	−13.1	−10.9	0.6	1.0	G	23 13	− 3.1	+ 9.5	0.9	1.4	G
52	− 1.3	+26.4	1.1	0.6	BG	25 45	+33.2	− 8.6	0.6	0.8	G
6 0 56	− 1.9	+ 2.0	0.8	1.4	G	31 44	−22.8	+ 2.1	0.9	1.0	BG
1 19	−34.4	+ 6.0	0.8	1.2	G	51	−19.6	−26.3	1.1	1.1	BG
2 42	+10.3	+34.9	0.5	0.7	G	32 11	+ 7.2	+24.8	1.6	1.8	BG
7 22	+ 9.4	+25.8	0.5	0.7	G	43	+17.9	−11.8	0.8	1.2	G
10 8	+10.6	+21.5	0.8	0.9	BG	35 48	− 8.2	+ 7.7	1.2	1.4	BG
49	+ 3.0	+ 9.0	0.8	0.9	B	41	−52.7	+71.2	0.2	0.2	G
14 22	+14.1	+39.7	0.9	1.7	G	36 21	+26.9	+20.2	0.7	1.2	G
9	− 9.3	−10.3	0.8	1.6	G	37 17	−18.5	+11.1	0.8	1.4	G
16 37	−34.5	+17.6	0.9	1.6	G	38 12	+ 8.9	+ 0.1	0.7	1.1	G
17 33	+13.9	− 0.4	0.8	1.5	G	39 32	−15.8	+ 1.2	1.4	1.5	BG

α	Diff. μ_α	Diff. μ_δ	Poids μ_α	Poids μ_δ		α	Diff. μ_α	Diff. μ_δ	Poids μ_α	Poids μ_δ	
h m s						h m s					
6 43 42	+15.4	+15.1	1.5	1.7	BG	9 22 9	−19.0	−12.6	1.2	1.1	BG
58	−13.1	+ 8.0	0.8	1.2	G	28 50	−20.0	+ 1.2	1.3	1.5	BG
46 9	+49.5	−17.4	0.2	0.2	BG	32 7	−11.9	− 0.6	1.9	2.1	BG
47 10	+ 8.5	+33.9	0.8	1.4	G	35 11	−19.3	+ 7.6	0.7	1.2	BG
48 2	+15.8	+ 1.9	0.8	1.1	G	49	−17.2	+41.3	1.8	2.0	BG
49 8	+22.0	+31.0	0.7	0.8	B	40 19	− 6.0	− 0.6	1.9	2.5	BG
50 19	+ 4.5	+31.7	1.7	2.3	BG	42 8	−24.9	+ 9.5	1.0	1.0	BG
50	−17.4	− 5.2	0.6	1.0	G	44 6	+ 3.8	−19.1	1.8	1.8	BG
53 25	−55.4	+22.8	0.8	1.4	G	51 34	+24.7	+ 3.1	1.9	1.9	BG
7 0 55	+10.8	+ 2.6	0.8	1.2	G	59 55	0.0	+21.4	1.0	1.3	G
4 15	+ 4.4	+31.5	0.7	1.1	G	10 4 57	− 3.3	+ 1.1	1.4	1.6	BG
47	+16.6	+33.4	0.5	0.8	BG	5 29	−20.0	−13.7	1.2	2.2	G
5 19	+ 3.8	−15.5	0.9	1.8	G	11 4	− 1.1	+24.6	2.0	2.1	BG
8 21	+ 2.9	+ 9.4	0.8	1.3	G	18	−19.0	+ 5.3	1.0	1.3	G
10 47	+ 5.9	+ 4.4	0.8	1.7	G	12 31	+10.0	+ 9.3	1.1	1.7	G
11 5	− 2.4	+45.9	1.5	1.3	BG	47	−13.4	+16.8	1.8	1.9	BG
14 3	+ 1.3	+20.8	1.3	1.6	BG	15 5	− 5.8	+ 4.6	1.9	2.6	BG
17 17	+22.7	+ 7.2	0.8	1.2	G	16 14	−16.9	+ 7.3	1.8	1.9	BG
13	− 2.2	+ 2.0	1.3	1.4	BG	23	−21.5	− 3.6	2.3	1.7	BG
19 36	−15.2	−12.8	0.9	1.8	G	21 33	− 1.3	+ 5.3	1.5	1.6	BG
53	+13.6	+18.2	0.8	1.4	G	24 16	−42.9	−14.7	0.8	1.0	BG
25 8	− 2.8	+17.1	0.4	0.5	G	27 21	− 5.7	+ 4.5	1.3	1.4	BG
28 54	−16.4	+30.0	0.8	1.4	G	29 16	−38.3	+ 8.1	1.1	1.8	G
29 16	+ 1.0	−36.0	0.7	0.7	B	34 45	+ 2.7	− 3.9	1.0	1.6	G
30 27	+13.3	+43.0	0.8	1.5	G	37 41	−22.0	−19.4	1.0	1.1	BG
36 44	− 4.4	+22.8	0.8	1.2	G	38 9	−20.4	−16.1	1.0	1.0	BG
51 15	− 7.5	+19.5	0.8	1.4	G	43 9	+ 8.6	+19.0	1.1	1.7	G
57 57	−12.9	+37.6	0.6	0.9	G	42	−17.5	+25.0	1.1	1.5	G
8 0 14	+20.1	+25.0	1.1	1.6	BG	48 14	+11.9	−40.5	2.0	2.1	BG
2 31	+13.8	+12.2	1.2	1.4	BG	53	−18.5	+ 2.0	1.0	1.3	G
4 44	+37.6	+83.3	0.2	0.2	G	49 41	−26.5	−13.1	1.0	1.3	G
16 0	+23.8	−11.2	1.7	1.9	BG	50 32	− 4.5	− 8.0	1.7	2.4	BG
17 57	+17.2	− 6.0	1.5	1.8	BG	51 27	−14.6	+ 3.9	1.0	1.3	G
58	+ 9.2	+15.0	0.9	1.6	G	53 52	+ 0.5	−17.2	1.5	1.4	BG
20 39	−23.7	+ 4.6	1.1	1.2	BG	54 30	+ 6.6	+48.2	1.3	1.8	BG
24 33	− 5.1	− 8.1	0.8	1.6	G	41	− 5.5	− 7.1	1.7	2.2	BG
29 23	−22.8	−18.2	0.9	1.8	G	55 14	− 6.8	−18.8	0.9	1.6	BG
34 7	+16.4	− 1.0	1.0	1.3	BG	58 0	−29.6	+ 9.9	0.8	1.0	G
16	−13.2	+20.7	0.9	1.6	G	11 0 6	+ 9.4	− 7.1	0.9	1.3	G
56	+ 7.3	+10.7	0.8	1.4	G	4 3	− 7.9	+ 1.9	1.0	0.9	BG
38 35	+ 8.0	+22.0	1.0	1.1	B	3	− 0.7	+35.9	1.1	1.6	G
45 14	+10.2	+10.4	1.6	2.1	BG	6 4	−39.7	+15.8	1.1	1.5	G
33	− 9.1	−12.5	0.8	1.6	G	15	−28.7	+ 8.8	1.1	1.6	G
47 59	+ 7.7	+17.5	0.9	1.7	G	9 32	+ 4.3	−36.2	1.0	1.6	G
50 4	+ 1.1	+19.7	1.2	1.4	BG	10 4	−19.8	− 6.2	1.2	1.9	G
1	− 6.3	+ 8.4	0.9	1.9	G	18	+ 9.2	+ 2.8	1.3	1.9	G
54 9	−15.2	− 0.9	2.2	2.5	BG	12 57	−28.8	+12.8	1.0	1.3	G
55 14	− 5.4	+ 5.3	0.9	1.9	G	16 8	+ 1.1	+ 9.8	0.9	1.3	G
58 14	− 6.1	+ 6.3	0.9	1.5	G	17 15	−29.9	+14.8	1.1	1.6	G
9 7 16	+ 3.8	−15.4	1.9	2.0	BG	21	−23.8	+17.8	1.6	1.3	BG
8 40	−24.6	+17.1	0.5	0.3	G	20 5	− 1.9	+37.8	1.1	1.9	G
22 7	+ 4.7	− 9.6	1.3	1.2	BG	23 26	−17.0	− 9.2	1.0	1.4	G

α	Diff.		Poids			α	Diff.		Poids		
	μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ			μ_α	μ_δ	μ_α	μ_δ	
h m s						h m s					
11 23 41	−28.8	+42.2	0.9	1.0	BG	11 38 20	+ 8.2	− 5.0	1.4	1.5	BG
25 7	+ 2.1	− 0.3	1.7	2.1	BG	48 39	+21.7	+23.7	1.1	1.6	G
6	−14.0	− 0.2	1.1	1.6	G	49 54	−73.6	− 5.4	0.4	0.2	BG
25	−23.0	+19.8	1.1	1.9	G	59	−71.4	+ 0.8	0.4	0.2	BG
26 31	−21.0	+11.8	1.2	1.4	G	50 53	−21.4	+35.7	1.1	1.5	G
31 38	−30.1	−20.3	1.0	1.4	G	52 6	−49.4	+16.7	1.1	1.3	G
33 1	−11.8	+ 0.5	1.6	1.5	BG	57 2	+25.5	−32.8	0.7	0.7	BG
29	− 0.8	+ 2.0	1.7	1.9	BG	25	+11.0	−34.0	0.6	0.6	B
34 29	+ 3.9	+ 0.7	1.1	1.9	G						

Les différences ci-dessus ont été réparties en groupes d'après les ascensions droites, de façon que tous les groupes ont reçu à peu près le même poids, après quoi on a formé les moyennes pour les divers groupes. Je n'ai pas cru opportun d'ajouter aussi un groupement des différences par déclinaisons: en effet, l'étendue en déclinaison de la zone est peu considérable, et les données dont nous disposons sont trop restreintes pour permettre un groupement double, qui ne me semble devoir mener qu' à des résultats illusoires. La répartition par ascensions droites donne pour les différences les valeurs suivantes:

α	Diff. en α	Poids	α	Diff. en δ	Poids
h m			h m		
6 1.9	− 3.5	7.4	6 1.9	+12.3	9.3
19.1	− 2.6	7.3	18.0	+ 8.0	11.0
33.8	− 4.5	7.3	34.4	+ 6.1	10.1
43.8	+ 6.0	6.9	44.0	+12.0	9.0
58.6	− 3.1	6.8	59.0	+13.6	10.9
7 15.3	+ 2.1	7.4	7 15.7	+11.0	10.4
45.0	+ 3.2	7.2	44.4	+22.2	10.6
8 19.7	+ 4.4	7.1	8 20.7	− 3.1	10.1
40.5	+ 4.9	7.0	40.7	+ 9.5	10.8
56.8	− 5.1	8.0	53.6	+ 6.6	9.2
9 26.5	−13.2	6.9	9 23.5	− 4.4	9.4
42.9	− 1.6	8.4	42.6	+ 6.8	9.2
10 7.1	− 5.0	7.7	10 7.8	+ 7.2	10.2
15.2	−14.7	7.8	16.2	+ 6.2	9.7
29.9	−16.3	7.7	33.8	− 0.5	9.6
47.7	− 4.9	7.9	48.8	− 7.7	9.9
55.1	− 4.4	8.1	56.5	+ 1.9	10.2
11 7.9	−13.7	8.8	11 8.4	+ 4.2	11.4
20.2	−15.8	7.7	20.6	+15.1	10.6
29.4	−11.7	8.3	29.2	+ 2.8	9.7
47.2	− 9.1	7.9	46.2	+ 6.6	9.5

Les nombres ci-dessus montrent qu'en une certaine mesure les différences dépendent de l'ascension droite. Ces nombres ont été ajustés par la formation des moyennes de trois différences consécutives; on a obtenu ainsi les valeurs suivantes:

α	Diff. en α	Poids	α	Diff. en δ:	Poids
h m			h m		
6 18.2	— 3.5	22.0	6 18.2	+ 8.7	30.4
32.0	— 0.5	21.5	31.0	+ 8.5	30.1
45.1	— 0.6	21.0	45.9	+ 10.6	30.0
59.6	+ 1.7	21.1	7 0.3	+ 12.2	30.3
7 20.0	+ 0.8	21.4	19.5	+ 15.6	31.9
46.3	+ 3.2	21.7	46.6	+ 10.2	31.1
8 14.8	+ 4.2	21.3	8 15.4	+ 9.7	31.5
39.7	+ 1.1	22.1	38.0	+ 4.4	30.1
9 0.9	— 4.5	21.9	58.4	+ 4.2	29.4
22.2	— 6.2	23.3	9 19.9	+ 2.9	27.8
46.1	— 6.2	23.0	45.3	+ 3.3	28.8
10 1.2	— 7.0	23.9	10 2.6	+ 6.7	29.1
17.4	— 12.0	23.2	19.0	+ 4.4	29.5
31.0	— 11.9	23.4	33.0	— 0.7	29.2
44.4	— 8.4	23.7	46.6	— 2.1	29.7
57.3	— 7.9	24.8	58.4	— 0.3	31.5
11 7.6	— 11.3	24.6	11 8.7	+ 7.0	32.2
18.9	— 13.7	24.8	18.9	+ 7.4	31.7
32.3	— 12.2	23.9	31.6	+ 8.4	29.8

Enfin, les chiffres qui précèdent ont été soumis à un ajustement graphique, et les corrections $\Delta\mu_\alpha$ et $\Delta\mu_\delta$, employées dans le catalogue général pour la réduction au mouvement propre absolu, ont été déterminées au moyen du tracé des courbes. Le tableau suivant donne les quantités $\Delta\mu_\alpha$ et $\Delta\mu_\delta$ de dizaine en dizaine de minutes d'ascension droite.

Tableau V.

Réduction au mouvement propre absolu.

α	$\Delta\mu_\alpha$	$\Delta\mu_\delta$	α	$\Delta\mu_\alpha$	$\Delta\mu_\delta$	α	$\Delta\mu_\alpha$	$\Delta\mu_\delta$
h m			h m			h m		
6 0	−4	+ 8	8 0	+3	+10	10 0	− 9	+ 2
10	−3	+ 8	10	+3	+ 9	10	−10	+ 2
20	−2	+ 8	20	+3	+ 8	20	−10	+ 3
30	−1	+ 9	30	+2	+ 7	30	−10	+ 3
40	0	+10	40	0	+ 6	40	−10	+ 3
50	0	+11	50	−1	+ 5	50	−11	+ 4
7 0	+1	+12	9 0	−3	+ 4	11 0	−11	+ 5
10	+2	+14	10	−4	+ 3	10	−11	+ 6
20	+2	+14	20	−6	+ 3	20	−11	+ 8
30	+2	+14	30	−7	+ 2	30	−11	+ 9
40	+3	+13	40	−8	+ 2	40	−11	+10
50	+3	+12	50	−8	+ 2	50	−11	+10

Pour les corrections systématiques dans la partie de la zone comprise entre 9^h et 12^h, les courbes donnent des valeurs s'écartant quelque peu de celles qui ont été déterminées dans le volume I:er de ce travail. Les écarts, cependant, n'atteignent guère en général que quelques unités de la dernière décimale des mouvements propres. Les valeurs relatives des composantes μ_α et μ_δ des mouvements propres ayant été publiées, l'introduction des nouvelles corrections ne rencontre aucun obstacle partout où elle semble nécessaire.

III.

Catalogue général des mouvements propres.

Les données du catalogue ci-dessous sont analogues à celles qui ont été données dans le vol. I:er de ce travail. Les différentes colonnes contiennent donc:

1:o) le numéro courant du catalogue;

2:o) la grandeur d'après le *Cat. phot.*, Z. Hels.; si une étoile appartient à deux ou plusieurs régions, on a pris la moyenne des différentes déterminations;

3:o) et 4:o) l'ascension droite et la déclinaison pour 1900.0 d'après le *Cat. phot.*, Z. Hels. (si l'étoile n'est pas mesurée pour le *Cat. phot.*, on ne donne que les coordonnées approximatives); pour les étoiles figurant dans plus d'une région on a formé les moyennes des valeurs différentes en tenant compte des poids;

5:o) l'époque de α et δ; E de δ au-dessous de E de α, si elles différent l'une de l'autre;

6:o) et 7:o) les valeurs relatives de μ_α et μ_δ pour les diverses régions. Pour les étoiles appartenant à plus d'une région, on indique les valeurs particulières en caractères ordinaires, les moyennes en caractères *italiques*;

8:o) le numéro de la région et le numéro de l'étoile dans la région;

9:o) les poids de μ_α et μ_δ resp. la somme de ces poids;

10:o) le mouvement propre absolu μ (abs.), c.-à.-d. le mouvement propre total calculé en tenant compte de la réduction au mouvement propre absolu;

11:o) l'angle de position P, calculé selon l'équation

$$\operatorname{tg} P = \frac{(\mu_\alpha + \Delta\mu_\alpha)\cos\delta}{\mu_\delta + \Delta\mu_\delta}$$

Au-dessous des colonnes sont notées les quantités $\Delta\mu_\alpha$ et $\Delta\mu_\delta$.

Tableau VI.

Catalogue général des étoiles à mouvement propre.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ'_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1	10.2	5 53 45.28	46 26 57.3	4.93	*−0.0057*	*−0.163*	256 6	*0.2 0.2*	*0.167*	*201.8*
2	9.7	54 10.95	42 20 10.4	4.96	*−0.0026*	*−0.006*	254 6	*0.2 0.3*	*0.033*	*274*
3	9.4	32.91	41 11 25.6	4.96	*−0.0011*	*+0.012*	254 9	*0.2 0.2*	*0.026*	*321*
4	9.3	42.29	41 59 5.2	4.96	*−0.0046*	*−0.034*	254 18	*0.3 0.7*	*0.061*	*244.7*
5	8.0	45.49	45 41 16.2	4.93	*+0.0002*	*−0.071*	256 19	*0.5 0.7*	*0.063*	*181.8*
6	10.4	47.14	46 9 2.1	4.93	*+0.0171*	*−0.094*	256 29	*0.6 0.8*	*0.194*	*116.3*
7	8.0	59.56	46 38 27.4	4.93	*+0.0040*	*+0.011*	256 26	*0.5 0.5*	*0.042*	*63*
8	9.1	55 0.37	40 43 18.3	5.18	*+0.0039*	*−0.001*	253 7	*0.3 0.3*	*0.042*	*80*
9	9.7	17.85	41 41 34.2	4.96	*−0.0001*	*−0.055*	254 29	*0.7 0.9*	*0.047*	*186*
10	9.5	23.21	46 15 59.4	4.93	*+0.0033*	*+0.014*	256 39	*0.8 0.9*	*0.038*	*55*
11	7.8	27.83	42 52 48.7	4.96	*+0.0007*	*−0.023*	254 33	*0.4 0.3*	*0.016*	*165*
12	8.8	36.84	46 45 23.6	4.93	*+0.0003*	*−0.091*	256 36	*0.6 0.6*	*0.083*	*180.7*
13	7.5	39.93	43 22 39.7	4.96	*+0.0018*	*−0.034*	255 47	*0.7 0.8*	*0.031*	*148*
14	8.5	44.30	41 22 3.3	4.96	*−0.0087*	*−0.007*	254 42	*0.6 0.7*	*0.102*	*270.6*
15	9.7	48.50	44 47 57.9	4.96	*+0.0040*	*−0.074*	255 38	*0.6 0.6*	*0.076*	*150.1*
16	10.8	53.44	39 42 0.6	5.18	*+0.0008*	*−0.012*	253 28	*0.7 0.8*	*0.006*	*129*
17	6.9	56 5.40	42 54 54.6	4.96	*+0.0115*	*−0.183*	254 43	*0.4 0.4*	*0.213*	*145.1*
18	9.9	11.90	40 34 39.4	5.18	*−0.0002*	*−0.085*	253 35	*0.7 0.7*	*0.077*	*184.5*
19	7.5	18.04	43 47 24.4	4.96	*+0.0003*	*+0.001*	255 58	*1.1 1.1*	*0.009*	*354*
20	10.3	24.05	39 53 37.7	5.18	*+0.0035*	*−0.052*	253 39	*0.8 0.8*	*0.057*	*140.7*
21	10.6	25.79	45 51 13.9	4.93	*+0.0024*	*−0.089*	256 69	*0.9 0.9*	*0.084*	*165.5*
22	11.2	29.77	44 15 8.8	4.96	*+0.0063*	*−0.101*	255 68	*1.1 1.1*	*0.112*	*145.9*
23	10.7	38.86	39 34 53.3	5.18	*−0.0024*	*−0.045*	253 54	*0.8 0.8*	*0.049*	*221*
24	10.7	41.02	42 18 1.9	4.96	*+0.0015*	*−0.052*	254 63	*1.0 1.0*	*0.047*	*160*
25	9.7	45.12	39 39 19.4	5.18	*−0.0010*	*−0.004*	253 53	*0.8 0.8*	*0.016*	*285*
26	9.4	45.90	39 45 17.3	5.18	*+0.0020*	*−0.089*	253 50	*0.8 0.8*	*0.083*	*167.5*
27	8.6	50.93	46 54 9.2	4.93	*−0.0023*	*−0.062*	256 72	*0.6 0.4*	*0.061*	*207.4*
28	8.9	54.52	44 17 2.9	4.96	*+0.0082*	*−0.133*	255 86	*1.1 1.1*	*0.151*	*146.1*
29	8.2	57 3.83	41 11 27.6	4.96	*−0.0001*	*−0.006*	254 91	*0.8 0.7*	*0.005*	*292*
30	7.1	9.96	45 35 23.9	4.93	*+0.0011*	*−0.067*	256 99	*0.9 0.9*	*0.059*	*173.2*
31	7.2	11.51	44 16 1.9	4.96	*+0.0097*	*−0.139*	255 85	*1.1 1.1*	*0.165*	*142.6*
32	8.4	13.36	45 45 9.5	4.93	*−0.0038*	*−0.172*	256 96	*0.9 0.9*	*0.170*	*195.0*
33	11	16.7	42 57 5	4.96	*+0.0044*	*−0.054*	254 —	*0.6 0.4*	*0.064*	*135.6*
34	9.7	25.38	43 22 38.5	4.96	*+0.0003*	*−0.005*	255 109	*1.1 1.1*	*0.003*	*342*
35	10.8	27.58	45 33 12.0	4.93	*+0.0012*	*−0.067*	256 100	*0.9 0.9*	*0.060*	*171.3*
36	9.9	31.22	39 0 48.4	5.18	*−0.0034*	*+0.027*	253 77	*0.4 0.3*	*0.056*	*308.5*
37	10.3	33.79	46 26 35.2	4.93	*+0.0053*	*+0.003*	256 93	*0.9 0.9*	*0.051*	*77.6*
38	9.7	36.17	41 50 47.6	4.96	*+0.0025*	*−0.047*	254 103	*1.0 1.0*	*0.046*	*148*
39	8.5	40.19	41 1 26.0	5.18	*+0.0057*	*−0.036*	253 62	*0.4 0.2*	*0.066*	*115.0*
40	9.2	43.70	41 29 48.2	4.96	*−0.0001*	*+0.052*	254 107	*1.0 1.0*	*0.060*	*355.2*
41	10.4	44.08	44 13 22.4	4.96	*−0.0007*	*−0.062*	255 117	*1.1 1.1*	*0.055*	*191.5*
42	6.0	52.00	42 59 22.8	4.96	−0.0041	−0.168	254 114	0.6 0.3		
					−0.0002	−0.177	255 127	0.6 0.3		
					−0.0022	*−0.172*		*1.2 0.6*	*0.166*	*189.7*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0004$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
43	9.1	5 57 56.00	45 54 21.7	4.93	*+0.0003*	*−0.089*	256 112	*0.9 0.9*	*0.081*	*180.0*
44	9.8	58 15.33	44 9 10.6	4.96	*−0.0040*	*+0.041*	255 134	*1.1 1.1*	*0.067*	*316.8*
45	9.7	24.12	46 56 15.3	4.93	*−0.0003*	*−0.012*	256 120	*0.7 0.4*	*0.008*	*240*
46	11	33.5	43 34 3	4.96	*−0.0053*	*+0.008*	255 —	*1.1 1.1*	*0.063*	*284.7*
47	10.2	55.41	41 1 54.8	4.96	*+0.0001*	*+0.049*	254 147	*0.7 0.4*	*0.057*	*357.0*
48	8.7	59 27.26	43 3 19.1	5.00	+0.0058	−0.093	254 148	0.5 0.2		
				5.07	+0.0067	−0.115	255 159	0.9 0.6		
					−0.0014	−0.120	258 4	0.2 0.5		
					+0.0054	*−0.114*		*1.6 1.3*	*0.119*	*152.6*
49	9.0	38.47	45 52 59.9	4.93	−0.0019	−0.088	256 182	0.9 0.9		
					−0.0049	−0.085	259 6	0.2 0.2		
					−0.0024	*−0.087*		*1.1 1.1*	*0.085*	*200.8*
50	8.3	40.75	39 6 28.5	5.18	*−0.0040*	*−0.175*	253 122	*0.8 0.6*	*0.175*	*197.0*
51	11	48.8	39 34 11	5.18	*−0.0053*	*−0.136*	253 —	*0.8 0.8*	*0.144*	*207.3*
52	11.2	49.15	46 24 39.7	4.93	*+0.0005*	*−0.076*	256 179	*0.9 0.9*	*0.068*	*179.2*
53	9.3	52.57	43 39 54.8	5.02	+0.0027	−0.051	255 171	1.1 1.1		
				5.04	−0.0028	−0.036	258 11	0.3 0.4		
					+0.0015	*−0.047*		*1.4 1.5*	*0.041*	*162*
54	9.2	55.66	41 40 0.7	4.55	+0.0041	−0.084	254 180	1.0 1.0		
				4.45	+0.0010	−0.077	257 10	0.3 0.4		
					+0.0034	*−0.082*		*1.3 1.4*	*0.081*	*156.0*
55	10.7	55.68	41 46 15.8	4.96	*+0.0007*	*−0.083*	254 177	*1.0 1.0*	*0.075*	*176.9*
56	8.2	56.45	41 46 21.5	4.55	+0.0025	−0.101	254 176	1.0 1.0		
					+0.0011	−0.073	257 9	0.3 0.3		
					+0.0022	*−0.095*		*1.3 1.3*	*0.089*	*167.1*
57	9.8	6 0 10.27	45 35 36.3	4.93	+0.0021	−0.049	256 195	0.9 0.9		
					+0.0015	−0.081	259 17	0.5 0.6		
					+0.0019	*−0.062*		*1.4 1.5*	*0.056*	*163.5*
58	10.5	18.34	39 45 36.3	5.18	*−0.0000*	*−0.009*	253 130	*0.8 0.8*	*0.004*	*256*
59	9.1	21.24	41 45 7.4	4.45	+0.0006	−0.061	254 190	1.0 1.0		
				4.37	−0.0036	−0.043	257 16	0.4 0.5		
					−0.0006	*−0.055*		*1.4 1.5*	*0.048*	*192*
60	8.8	31.19	46 40 30.8	4.93	*+0.0035*	*−0.094*	256 204	*0.9 0.9*	*0.092*	*159.6*
61	6.2	40.20	42 40 34.2	5.06	+0.0004	−0.004	254 199	1.0 1.0		
				5.07	−0.0034	−0.041	258 36	0.7 0.8		
					−0.0012	*−0.020*		*1.7 1.8*	*0.021*	*235*
62	10.2	41.46	41 36 20.0	4.23	+0.0048	−0.051	254 206	1.0 1.0		
				4.17	+0.0007	−0.063	257 23	0.7 0.8		
					+0.0031	*−0.056*		*1.7 1.8*	*0.057*	*157.1*
63	9.4	46.42	45 37 27.3	4.93	−0.0028	+0.005	256 212	0.9 0.9		
					−0.0031	−0.014	259 36	0.7 0.8		
					−0.0029	*−0.004*		*1.6 1.7*	*0.034*	*277*
64	7.0	55.54	45 33 57.1	4.93	−0.0011	−0.016	256 213	0.9 0.9		
					−0.0010	−0.030	259 37	0.9 0.9		
					−0.0010	*−0.023*		*1.8 1.8*	*0.021*	*223*
65	8.3	1 8.10	39 13 23.3	5.18	*−0.0043*	*−0.100*	253 158	*0.8 0.8*	*0.107*	*210.4*
66	7.2	19.45	41 4 8.8	3.97	+0.0030	−0.034	254 249	0.8 0.5		
				3.77	−0.0011	−0.074	257 35	1.0 1.0		
					+0.0007	*−0.061*		*1.8 1.5*	*0.053*	*175.7*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0004$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
67	8.6	6 1 19.54	45 39 22.1	4.93	+0.0005	−0.073	256 236	0.9 0.9		
					−0.0016	−0.081	259 49	0.9 0.9		
					−0.0006	*−0.077*		*1.8 1.8*	*0.070*	*188.2*
68	8.8	20.19	42 33 44.6	5.07	+0.0011	+0.003	254 221	1.0 1.0		
					−0.0007	−0.018	258 53	0.8 0.8		
					+0.0003	*−0.006*		*1.8 1.8*	*0.002*	*0*
69	11.7	28.26	41 47 20.3	4.96	*+0.0063*	*−0.047*	254 246	*1.0 1.0*	*0.077*	*120.6*
70	9.4	33.52	44 20 14.7	4.95	+0.0003	−0.019	255 221	1.1 1.1		
					−0.0000	−0.020	259 53	0.9 0.9		
					+0.0002	*−0.019*		*2.0 2.0*	*0.011*	*190*
71	10.6	47.52	40 31 1.2	4.18	+0.0012	−0.116	253 178	0.8 0.8		
					−0.0029	−0.148	257 44	1.0 1.0		
					-0.0011	*−0.134*		*1.8 1.8*	*0.127*	*187.2*
72	8.7	2 28.45	42 58 37.8	5.06	−0.0032	−0.037	254 263	0.6 0.4		
				5.10	−0.0007	−0.076	255 260	0.5 0.2		
					−0.0078	−0.042	258 93	0.8 0.8		
					−0.0045	*−0.045*		*1.9 1.4*	*0.064*	*234.6*
73	11	28.7	41 51 9	4.96	*−0.0015*	*−0.084*	254 —	*1.0 1.0*	*0.079*	*195.4*
74	8.8	28.84	45 34 31.6	4.93	−0.0005	−0.045	256 270	0.9 0.9		
					+0.0002	−0.070	259 65	0.9 0.9		
					−0.0002	*−0.058*		*1.8 1.8*	*0.050*	*186.8*
75	10.4	31.37	42 13 43.1	5.06	+0.0057	−0.045	254 269	1.0 1.0		
					+0.0029	−0.035	258 101	0.7 0.7		
					+0.0045	*−0.041*		*1.7 1.7*	*0.057*	*125.7*
76	10.3	31.86	41 29 33.1	4.07	+0.0010	−0.079	254 275	1.0 1.0		
					+0.0008	−0.090	257 54	1.0 1.0		
					+0.0009	*−0.084*		*2.0 2.0*	*0.076*	*175.5*
77	8.0	12.29	46 46 30.5	4.93	*+0.0028*	*−0.055*	256 265	*0.8 0.8*	*0.053*	*152.0*
78	10.2	3 18.62	41 48 21.4	4.07	−0.0026	−0.019	254 307	1.0 1.0		
				4.12	−0.0021	−0.008	257 73	1.0 0.9		
					-0.0024	*−0.014*		*2.0 1.9*	*0.031*	*259*
79	9.7	21.11	46 24 51.0	4.93	*−0.0021*	*−0.059*	256 290	*0.9 0.9*	*0.057*	*207.0*
80	11	32.2	41 56 9	4.96	*−0.0082*	*−0.314*	254 —	*1.0 1.0*	*0.321*	*197.4*
81	9.4	38.02	45 34 13.1	4.93	+0.0000	+0.001	256 297	0.9 0.9		
					+0.0024	−0.044	259 95	0.9 0.9		
					+0.0012	*−0.022*		*1.8 1.8*	*0.016*	*150*
82	10.6	1 0.99	40 21 53.0	4.13	−0.0001	−0.007	253 235	0.8 0.8		
				4.18	+0.0014	−0.027	257 102	1.0 1.0		
					+0.0007	*−0.018*		*1.8 1.8*	*0.011*	*158*
83	7.9	16.55	43 49 11.6	5.06	+0.0041	−0.026	255 304	1.1 1.1		
				5.04	−0.0000	−0.071	258 145	0.8 0.7		
					−0.0016	−0.057	262 6	0.2 0.5		
					+0.0020	*−0.046*		*2.1 2.3*	*0.042*	*156*
84	7.1	17.43	4 11 1.3	5.09	−0.0008	+0.028	255 306	0.6 0.6		
					−0.0035	+0.006	258 148	0.8 0.8		
					−0.0027	+0.061	262 10	0.2 0.2		
					−0.0024	*+0.021*		*1.6 1.6*	*0.042*	*314*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0004$; $\Delta\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
85	10.3	6 4 31.44	44 59 43.9	4.94	−0.0025	−0.027	255 297	0.2 0.2		
					−0.0073	+0.048	256 327	0.2 0.2		
					−0.0031	−0.046	259 131	0.9 0.9		
					−0.0003	−0.035	262 13	0.2 0.2		
					−0.0032	*−0.029*		*1.5 1.5*	*0.043*	*241*
86	10.6	34.05	39 44 21.6	5.18	+0.0017	−0.086	253 251	0.6 0.8		
					+0.0026	−0.101	260 7	0.2 0.4		
					+0.0019	*−0.091*		*0.8 1.2*	*0.085*	*167.1*
87	9.5	36.93	41 33 48.1	4.07	−0.0035	−0.021	254 349	0.7 0.9		
				4.22	−0.0012	−0.009	257 115	1.0 1.0		
					−0.0033	−0.026	261 17	0.3 0.5		
					−0.0023	*−0.017*		*2.0 2.4*	*0.031*	*253*
88	9.3	37.56	43 23 44.3	5.08	+0.0042	−0.066	255 318	0.7 0.8		
				5.06	+0.0024	−0.084	258 164	0.8 0.8		
					−0.0008	−0.076	262 22	0.4 0.5		
					+0.0024	*−0.075*		*1.9 2.1*	*0.071*	*161.8*
89	9.7	39.20	45 18 45.1	4.93	+0.0055	+0.121	256 323	0.5 0.5		
					+0.0092	+0.086	259 128	0.9 0.9		
					+0.0111	+0.124	263 19	0.3 0.4		
					+0.0084	*+0.104*		*1.7 1.8*	*0.141*	*37.2*
90	10.4	47.61	43 15 31.6	5.09	−0.0040	−0.051	255 320	0.5 0.5		
				5.08	−0.0076	−0.045	258 165	0.8 0.8		
					−0.0091	−0.020	262 23	0.4 0.4		
					−0.0069	*−0.041*		*1.7 1.7*	*0.086*	*247.3*
91	9.3	5 18.58	43 18 27.7	5.08	+0.0050	+0.007	255 335	0.4 0.5		
				5.07	+0.0032	+0.005	258 178	0.8 0.8		
					+0.0010	+0.028	262 40	0.6 0.6		
					+0.0029	*+0.013*		*1.8 1.9*	*0.034*	*52*
92	9.6	19.34	42 18 9.4	5.06	+0.0043	−0.014	254 356	0.3 0.7		
				5.04	+0.0058	−0.063	258 186	0.8 0.8		
					+0.0012	−0.040	261 35	0.8 1.0		
					+0.0036	*−0.040*		*1.9 2.5*	*0.049*	*131*
93	9.0	28.46	41 46 29.7	4.11	−0.0015	+0.005	254 367	0.3 0.6		
				4.28	−0.0001	−0.006	257 135	1.0 1.0		
					−0.0032	−0.007	261 37	0.8 1.0		
					−0.0015	*−0.004*		*2.1 2.6*	*0.020*	*281*
94	9.3	38.94	46 15 24.6	4.93	+0.0021	−0.003	256 344	0.3 0.6		
					+0.0045	+0.030	263 40	0.8 0.9		
					+0.0038	*+0.017*		*1.1 1.5*	*0.044*	*55*
95	9.8	54.11	46 11 34.5	4.93	−0.0023	−0.058	256 358	0.3 0.5		
					+0.0008	−0.063	263 53	0.9 0.9		
					+0.0000	*−0.061*		*1.2 1.4*	*0.053*	*184.3*
96	9.1	6 0.66	43 50 45.0	5.07	−0.0016	−0.080	258 197	0.8 0.6		
				5.06	−0.0016	−0.112	262 63	1.1 1.1		
					−0.0016	*−0.101*		*1.9 1.7*	*0.096*	*193.8*
97	10.1	3.73	41 19 50.9	3.97	−0.0092	+0.004	257 154	1.0 1.0		
					−0.0164	+0.002	261 70	0.8 0.8		
					−0.0124	*+0.003*		*1.8 1.8*	*0.144*	*274.4*
98	10.0	7.50	44 20 12.6	4.95	−0.0010	−0.062	259 180	0.9 0.9		
					+0.0001	−0.031	262 60	1.1 1.1		
					−0.0004	*−0.045*		*2.0 2.0*	*0.038*	*192*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0004$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
99	9.6	6 6 31.84	39 36 16.0	5.18	*+0.0009*	*+0.004*	260 70	*0.8 0.8*	*0.013*	*23*
100	9.6	33.02	42 36 16.8	5.08	−0.0005	−0.062	258 220	0.8 0.8		
					+0.0013	−0.029	261 77	0.9 0.9		
					+0.0005	*−0.045*		*1.7 1.7*	*0.037*	*178*
101	10.2	46.19	39 48 16.8	5.18	*−0.0031*	*+0.049*	260 66	*0.8 0.8*	*0.070*	*324.3*
102	8.8	7 2.08	43 22 50.6	5.07	−0.0131	+0.025	258 225	0.8 0.8		
					−0.0091	+0.019	262 88	1.1 1.1		
					−0.0108	*+0.022*		*1.9 1.9*	*0.126*	*283.8*
103	10.2	13.41	46 17 8.4	4.93	*−0.0022*	*+0.029*	263 100	*0.9 0.9*	*0.046*	*324*
104	7.5	22.33	39 42 2.7	5.18	*−0.0014*	*−0.081*	260 79	*0.8 0.8*	*0.076*	*196.1*
105	9.5	24.96	46 17 30.7	4.93	*+0.0033*	*+0.009*	263 99	*0.9 0.9*	*0.034*	*60*
106	9.2	25.28	40 17 1.7	4.18	−0.0032	−0.069	257 198	1.0 0.9		
				4.23	−0.0042	−0.051	260 93	0.8 0.8		
					−0.0036	*−0.061*		*1.8 1.7*	*0.071*	*221.6*
107	8.8	27.21	45 59 14.7	4.93	*+0.0023*	*−0.048*	259 202	*0.5 0.3*	*0.045*	*153*
108	10.7	27.44	46 14 2.5	4.93	*+0.0008*	*+0.003*	263 101	*0.9 0.9*	*0.012*	*24*
109	10.6	28.71	42 35 27.3	5.07	+0.0043	−0.050	258 242	0.8 0.8		
					+0.0011	+0.018	261 109	1.0 1.0		
					+0.0025	*−0.012*		*1.8 1.8*	*0.024*	*99*
110	10.2	35.77	43 24 58.3	5.07	+0.0011	−0.028	258 236	0.8 0.8		
					+0.0071	−0.052	262 103	1.1 1.1		
					+0.0046	*−0.042*		*1.9 1.9*	*0.057*	*126.5*
111	10.7	39.18	41 22 15.1	4.07	−0.0022	−0.053	257 202	1.0 1.0		
					−0.0058	−0.033	261 117	1.0 1.0		
					−0.0040	*−0.043*		*2.0 2.0*	*0.060*	*234.5*
112	7.6	46.85	42 9 11.8	5.05	−0.0018	−0.120	258 252	0.6 0.5		
					−0.0018	−0.074	261 134	1.0 1.0		
					−0.0018	*−0.089*		*1.6 1.5*	*0.084*	*196.5*
113	8.8	50.50	43 17 0.3	5.07	−0.0032	+0.018	258 244	0.8 0.8		
					−0.0013	−0.018	262 115	1.1 1.1		
					−0.0021	*−0.003*		*1.9 1.9*	*0.027*	*280*
114	8.2	8 9.47	42 10 22.6	5.05	−0.0005	−0.117	258 259	0.6 0.5		
				5.04	+0.0003	−0.034	261 132	1.0 1.0		
					−0.0000	*−0.062*		*1.6 1.5*	*0.054*	*184.2*
115	7.7	11.53	45 38 23.5	4.93	+0.0019	−0.032	259 212	0.9 0.9		
					+0.0027	−0.011	263 135	0.9 0.9		
					+0.0023	*−0.022*		*1.8 1.8*	*0.024*	*125*
116	10.0	21.04	45 31 44.2	4.93	+0.0039	−0.080	259 223	0.9 0.9		
					+0.0004	−0.056	263 137	0.9 0.9		
					+0.0022	*−0.068*		*1.8 1.8*	*0.063*	*163.3*
117	9.0	32.31	39 57 45.1	4.85	+0.0004	−0 125	257 223	0.2 0.2		
					+0.0019	−0.063	260 125	0.8 0.8		
					+0.0016	*−0.075*		*1.0 1.0*	*0.069*	*167.4*
118	9.9	34.32	40 14 54.8	4.36	+0.0010	−0.064	257 222	0.7 0.7		
					+0.0023	−0.047	260 122	0.8 0.8		
					+0.0017	*−0.055*		*1.5 1.5*	*0.050*	*161.2*
119	8.8	36.66	42 29 21.0	5.07	+0.0016	−0.092	258 269	0.8 0.8		
					+0.0031	−0.061	261 143	1.0 1.0		
					+0.0024	*−0.075*		*1.8 1.8*	*0.071*	*161.1*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0004$; 102—119: $-0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
120	10.2	6 8 37.13	42 26 32.1	5.07	−0.0019	−0.020	258 270	0.8 0.8		
					−0.0015	−0.005	261 144	1.0 1.0		
					−0.0017	*−0.012*		*1.8 1.8*	*0.023*	*260*
121	9.6	42.19	39 56 11.8	5.18	*−0.0006*	*−0.009*	260 133	*0.8 0.8*	*0.011*	*265*
122	8.6	45.34	39 45 7.6	5.18	*+0.0009*	*−0.054*	260 136	*0.8 0.8*	*0.047*	*171*
123	9.5	51.60	41 5 1.4	4.02	+0.0005	+0.010	257 216	1.0 1.0		
				3.91	−0.0014	−0.022	261 168	0.9 0.7		
					−0.0004	*−0.003*		*1.9 1.7*	*0.010*	*299*
124	10.0	9 11.96	45 34 41.6	4.93	−0.0004	−0.025	259 233	0.8 0.8		
					+0.0003	−0.006	263 167	0.9 0.9		
					+0.0033	−0.010	266 2	0.2 0.3		
					+0.0003	*−0.014*		*1.9 2.0*	*0.006*	*214*
125	8.8	14.96	40 57 23.5	4.29	−0.0002	−0.037	257 228	0.9 1.0		
				3.86	−0.0018	−0.068	260 146	0.6 0.4		
					−0.0028	−0.084	261 192	0.6 0.2		
					−0.0022	−0.026	264 6	0.1 0.3		
					−0.0014	*−0.047*		*2.2 1.9*	*0.044*	*208*
126	9.8	24.73	42 19 39.4	5.05	−0.0019	−0.053	258 279	0.4 0.5		
				5.06	+0.0010	−0.048	261 176	1.0 1.0		
					+0.0054	+0.016	265 8	0.2 0.2		
					+0.0008	*−0.042*		*1.6 1.7*	*0.035*	*170*
127	8.6	33.44	44 44 51.1	4.94	−0.0247	−0.325	259 250	0.8 0.9		
					−0.0230	−0.344	262 160	1.1 1.1		
					−0.0221	−0.328	266 15	0.4 0.6		
					−0.0234	*−0.334*		*2.3 2.6*	*0.413*	*217.9*
128	9.1	48.26	45 19 27.1	4.93	+0.0054	−0.081	259 256	0.8 0.9		
					+0.0063	−0.084	263 186	0.9 0.9		
					+0.0050	−0.075	266 22	0.4 0.7		
					+0.0057	*−0.080*		*2.1 2.5*	*0.092*	*141.6*
129	7.2	49.09	46 3 46.3	4.93	*−0.0005*	*−0.067*	263 178	*0.9 0.9*	*0.060*	*188.7*
130	6.6	10 7.52	46 27 26.6	4.93	*−0.0054*	*−0.013*	263 193	*0.9 0.9*	*0.058*	*265.1*
131	10.2	8.01	42 22 52.6	5.06	−0.0020	−0.077	258 296	0.3 0.4		
				5.08	+0.0001	−0.025	261 222	1.0 1.0		
					+0.0074	−0.001	265 27	0.4 0.5		
					+0.0014	*−0.030*		*1.7 1.9*	*0.026*	*149*
132	9.5	8.75	43 11 49.8	5.08	−0.0022	+0.023	258 291	0.4 0.6		
				5.10	−0.0014	−0.030	262 187	1.1 1.1		
					−0.0015	+0.016	265 21	0.6 0.7		
					−0.0016	*−0.003*		*2.1 2.4*	*0.021*	*284*
133	11.1	10.36	39 29 12.1	5.18	*+0.0039*	*−0.072*	260 186	*0.8 0.8*	*0.078*	*145.5*
134	9.6	27.47	46 30 58.0	4.93	*+0.0038*	*+0.017*	263 191	*0.9 0.9*	*0.044*	*55*
135	8.9	28.14	42 27 45.1	5.06	−0.0055	−0.048	258 303	0.2 0.3		
				5.08	−0.0027	−0.007	261 247	1.0 1.0		
					−0.0029	−0.009	265 24	0.5 0.7		
					−0.0031	*−0.014*		*1.7 2.0*	*0.037*	*261*
136	10.6	30.41	39 25 30.0	5.18	*−0.0000*	*+0.021*	260 304	*0.8 0.8*	*0.029*	*354*
137	9.0	33.67	41 30 40.2	4.12	−0.0018	+0.026	257 248	0.2 0.3		
				4.03	−0.0001	−0.008	261 254	1.0 1.0		
					+0.0012	+0.004	264 18	0.7 0.8		
					+0.0002	*+0.001*		*1.9 2.1*	*0.009*	*0*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
138	9.9	6 10 47.18	45 34 7.3	4.93	−0.0016	−0.048	259 266	0.2 0.3		
					+0.0002	−0.018	263 221	0.9 0.9		
					+0.0012	−0.048	266 33	0.7 0.8		
					+0.0004	*−0.034*		*1.8 2.0*	*0.026*	*178*
139	7.4	49.45	46 23 58.7	4.93	+0.0006	−0.142	263 213	0.9 0.9	*0.134*	*178.7*
140	8.1	55.98	39 9 24.8	5.18	*−0.0011*	*−0.009*	260 220	*0.8 0.7*	*0.010*	*96*
141	9.4	11 0.91	40 53 31.7	4.13	+0.0026	−0.025	260 205	0.7 0.5		
				4.00	+0.0024	+0.011	264 27	1.0 1.0		
					+0.0025	*−0.001*		*1.7 1.5*	*0.026*	*74*
142	8.5	3.81	39 7 42.5	5.18	*+0.0033*	*−0.034*	260 219	*0.7 0.6*	*0.045*	*125*
143	10.5	8.66	41 56 26.3	4.96	*−0.0013*	*−0.014*	261 270	*1.0 1.0*	*0.018*	*251*
144	10.8	10.81	45 7 0.8	4.93	+0.0063	0.113	263 236	0.8 0.7		
					+0.0030	−0.044	266 35	0.9 0.9		
					+0.0046	*−0.074*		*1.7 1.6*	*0.080*	*145.7*
145	8.6	38.40	46 44 34.3	4.93	*−0.0001*	*−0.090*	263 243	*0.9 0.9*	*0.082*	*182.8*
146	10.9	44.92	46 29 7.2	4.93	*+0.0004*	*−0.037*	263 249	*0.9 0.9*	*0.029*	*178*
147	10.0	12 14.64	43 17 47.7	5.06	−0.0030	−0.027	262 239	1.1 1.1		
				5.05	−0.0101	−0.043	265 64	0.6 0.6		
					−0.0055	*−0.033*		*1.7 1.7*	*0.068*	*248.4*
148	8.7	21.13	46 10 41.5	4.93	*−0.0007*	*+0.020*	263 274	*0.9 0.9*	*0.030*	*339*
149	9.2	23.77	44 41 6.2	4.95	+0.0023	−0.048	262 246	1.1 1.1		
					+0.0028	−0.041	266 65	0.9 0.9		
					+0.0025	*−0.045*		*2.0 2.0*	*0.044*	*148*
150	10.1	24.57	46 48 26.9	4.93	*−0.0025*	*+0.018*	263 264	*0.8 0.7*	*0.039*	*312*
151	7.8	30.83	41 7 58.6	3.91	+0.0033	−0.066	261 314	0.7 0.7		
					+0.0028	−0.062	264 66	1.0 1.0		
					+0.0030	*−0.064*		*1.7 1.7*	*0.063*	*152.6*
152	8.0	37.61	39 51 33.5	5.18	*−0.0015*	*−0.084*	260 266	*0.8 0.8*	*0.079*	*194.7*
153	10.0	40.50	42 27 43.1	5.07	−0.0010	−0.027	261 301	1.0 1.0		
					−0.0027	−0.062	265 83	0.8 0.8		
					−0.0018	*−0.043*		*1.8 1.8*	*0.041*	*212*
154	9.4	42.69	45 48 45.8	4.93	+0.0001	−0.009	263 295	0.9 0.9		
					+0.0030	−0.026	266 72	0.8 0.7		
					+0.0015	*−0.016*		*1.7 1.6*	*0.015*	*122*
155	10.5	42.93	45 2 15.5	4.93	+0.0017	−0.040	262 242	0.4 0.2		
					−0.0028	−0.027	263 299	0.5 0.3		
					+0.0015	−0.030	266 78	0.9 0.9		
					+0.0004	*−0.031*		*1.8 1.4*	*0.023*	*178*
156	10.6	44.69	45 29 16.0	4.93	+0.0013	−0.041	263 297	0.9 0.9		
					+0.0004	−0.031	266 75	0.9 0.9		
					+0.0008	*−0.036*		*1.8 1.8*	*0.028*	*170*
157	11	50.6	41 29 21	4.07	−0.0053	−0.016	26 —	1.0 1.0		
					−0.0051	−0.028	264 —	1.0 1.0		
					−0.0052	*−0.022*		*2.0 2.0*	*0.063*	*257.1*
158	7.9	13 5.04	42 50 27.2	5.09	+0.0045	+0.019	261 319	0.7 0.7		
					+0.0008	−0.019	265 95	0.8 0.8		
					+0.0025	*−0.001*		*1.5 1.5*	*0.026*	*74*
159	9.0	27.46	44 35 21.3	4.95	+0.0039	−0.084	262 279	1.1 1.1		
					+0.0039	−0.090	266 92	0.9 0.9		
					+0.0039	*−0.087*		*2.0 2.0*	*0.088*	*154.3*
160	10.3	43.06	46 24 43.0	4.93	*+0.0002*	*−0.030*	263 330	*0.9 0.9*	*0.022*	*183*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
161	9.9	6 13 48.82	42 2 1.3	4.63	+0.0013	−0.032	261 349	1.0 1.0		
				4.77	+0.0028	−0.067	264 93	0.5 0.2		
					+0.0025	−0.062	265 125	0.6 0.3		
					+0.0020	*−0.043*		*2.1 1.5*	*0.040*	*150*
162	8.4	50.96	39 23 11.9	5.18	*+0.0000*	*−0.018*	260 286	*0.6 0.6*	*0.010*	*197*
163	11.0	58.01	46 33 2.3	4.93	*−0.0056*	*−0.019*	263 342	*0.9 0.9*	*0.061*	*259.6*
164	9.2	14 8.62	42 42 22.4	5.08	+0.0045	+0.002	261 362	0.7 0.7		
					+0.0019	−0.050	265 136	0.8 0.8		
					+0.0027	−0.069	268 3	0.2 0.2		
					+0.0031	*−0.031*		*1.7 1.7*	*0.039*	*127*
165	6.1	9.15	42 23 3.4	5.06	+0.0025	−0.020	261 363	0.9 1.0		
					−0.0008	−0.032	265 137	0.8 0.8		
					−0.0021	−0.072	268 4	0.2 0.3		
					+0.0006	*−0.032*		*1.9 2.1*	*0.024*	*171*
166	8.6	18.38	46 50 2.8	4.93	−0.0004	−0.072	263 340	0.5 0.4		
					−0.0004	−0.068	270 9	0.2 0.2		
					−0.0004	*−0.071*		*0.7 0.6*	*0.064*	*187.2*
167	8.2	21.81	45 39 19.4	4.93	−0.0018	−0.046	263 366	0.8 0.9		
					+0.0032	−0.035	266 106	0.9 0.9		
					−0.0008	−0.039	270 16	0.3 0.5		
					+0.0006	*−0.040*		*2.0 2.3*	*0.032*	*175*
168	9.6	41.46	42 2 22.5	4.66	−0.0032	−0.075	261 379	0.8 1.0		
				4.86	−0.0055	−0.067	264 125	0.5 0.2		
					−0.0061	−0.137	265 154	0.6 0.4		
					−0.0081	−0.087	268 16	0.3 0.7		
					−0.0052	*−0.089*		*2.2 2.3*	*0.101*	*217.0*
169	7.9	15 21.55	40 33 22.4	3.94	−0.0010	−0.030	260 323	0.2 0.3		
				4.15	+0.0021	−0.016	264 145	1.0 1.0		
					+0.0012	−0.031	267 27	0.5 0.7		
					+0.0015	*−0.023*		*1.7 2.0*	*0.021*	*137*
170	10.9	27.55	40 5 53.7	4.96	*+0.0007*	*−0.017*	267 32	*0.8 1.0*	*0.010*	*151*
171	10.6	28.74	39 10 37.0	4.96	*+0.0014*	*+0.083*	267 35	*0.4 0.4*	*0.092*	*8.1*
172	8.4	29.92	40 5 19.4	4.09	+0.0004	+0.031	260 327	0.2 0.2		
				4.37	+0.0028	+0.059	264 157	1.0 0.7		
					+0.0020	+0.008	267 31	0.8 1.0		
					+0.0022	*+0.029*		*2.0 1.9*	*0.044*	*32*
173	10.8	35.91	40 49 48.4	3.69	+0.0003	+0.021	264 155	1.0 1.0		
					+0.0023	+0.020	267 40	0.4 0.4		
					+0.0009	*+0.021*		*1.4 1.4*	*0.030*	*14*
174	9.5	38.08	42 22 3.5	5.07	+0.0015	−0.038	261 391	0.2 0.3		
				5.06	−0.0015	−0.040	265 176	0.8 0.8		
					−0.0001	−0.079	268 29	0.8 1.0		
					−0.0005	*−0.058*		*1.8 2.1*	*0.051*	*190.2*
175	9.6	40.08	39 6 9.7	4.96	*+0.0008*	*+0.023*	267 36	*0.3 0.3*	*0.032*	*11*
176	10.8	48.75	43 38 52.6	5.06	+0.0053	−0.172	262 340	0.3 0.4		
					+0.0048	−0.175	265 167	0.8 0.8		
					+0.0103	−0.161	269 22	1.0 1.1		
					+0.0075	*−0.168*		*2.1 2.3*	*0.178*	*154.0*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
177	10.6	6 15 50.19	42 1 21.8	5.05	−0.0004	−0.072	264 —	0.6 0.3		
				5.01	−0.0002	+0.010	265 179	0.6 0.3		
					+0.0001	−0.066	268 32	1.0 1.0		
					−0.0001	*−0.053*		*2.2 1.6*	*0.045*	*185*
178	8.0	57.84	43 44 44.3	5.07	+0.0016	−0.041	265 181	0.8 0.8		
					+0.0039	−0.030	269 29	1.1 1.1		
					+0.0029	*−0.035*		*1.9 1.9*	*0.039*	*134*
179	10.0	16 15.00	40 58 29.0	3.77	−0.0029	−0.026	264 164	1.0 1.0		
					−0.0065	−0.045	267 45	0.3 0.3		
					−0.0045	−0.049	268 47	0.2 0.2		
					−0.0038	*−0.033*		*1.5 1.5*	*0.052*	*241.5*
180	9.6	25.96	42 32 4.0	5.07	+0.0001	−0.034	265 202	0.8 0.8		
					+0.0030	−0.060	268 50	1.0 1.0		
					+0.0017	*−0.048*		*1.8 1.8*	*0.043*	*159*
181	10.8	26.29	46 11 12.9	4.93	*+0.0002*	*−0.056*	270 51	*0.9 0.9*	*0.048*	*181*
182	7.7	37.39	40 34 14.3	4.07	+0.0052	0.024	264 178	1.0 1.0		
					+0.0031	−0.023	267 62	1.0 1.0		
					+0.0042	*−0.024*		*2.0 2.0*	*0.048*	*110*
183	9.2	48.23	40 16 37.9	4.07	+0.0036	+0.014	264 191	1.0 1.0		
					+0.0014	−0.009	267 64	1.0 1.0		
					+0.0025	*+0.002*		*2.0 2.0*	*0.027*	*68*
184	10.0	54.90	45 55 42.9	4.93	+0.0047	−0.008	266 161	0.7 0.5		
					−0.0003	+0.001	270 60	0.9 0.9		
					+0.0019	*−0.002*		*1.6 1.4*	*0.018*	*71*
185	10.8	59.91	45 56 28.0	4.93	−0.0018	−0.103	266 —	0.6 0.4		
					+0.0008	−0.012	270 59	0.9 0.9		
					−0.0002	*−0.040*		*1.5 1.3*	*0.033*	*191*
186	7.5	17 4.83	43 16 54.3	5.07	−0.0011	−0.053	265 210	0.8 0.8		
				5.08	+0.0028	−0.027	269 50	1.1 1.0		
					+0.0012	*−0.039*		*1.9 1.8*	*0.033*	*162*
187	8.9	10.20	39 9 37.1	4.96	*−0.0002*	*−0.012*	267 86	*0.7 0.7*	*0.006*	*231*
188	10.7	27.60	41 30 0.6	4.07	+0.0060	−0.037	264 196	1.0 1.0		
					+0.0030	−0.042	268 87	1.0 1.0		
					+0.0045	*−0.040*		*2.0 2.0*	*0.058*	*123.7*
189	11	31.8	41 57 13	5.18	*−0.0012*	*+0.027*	265 —	*0.3 0.2*	*0.038*	*335*
190	6.4	32.75	43 36 1.8	5.07	−0.0029	−0.033	265 217	0.8 0.8		
					+0.0007	−0.018	269 61	1.1 1.1		
					−0.0008	*−0.024*		*1.9 1.9*	*0.019*	*215*
191	10.4	42.99	45 10 26.6	4.93	+0.0023	−0.038	266 170	0.9 0.9		
					+0.0032	−0.041	270 82	0.8 0.7		
					+0.0027	*−0.039*		*1.7 1.6*	*0.040*	*140*
192	9.9	44.74	41 55 17.2	4.23	+0.0013	−0.022	264 204	0.7 0.4		
				4.45	+0.0035	−0.035	268 82	1.0 1.0		
					+0.0026	*−0.031*		*1.7 1.4*	*0.035*	*131*
193	11	48.5	41 59 29	4.96	*−0.0007*	*+0.002*	268 —	*1.0 1.0*	*0.015*	*312*
194	8.3	52.40	40 54 18.7	3.91	−0.0051	−0.029	264 212	1.0 1.0		
				3.77	−0.0058	−0.056	267 94	0.7 0.5		
					−0.0054	*−0.038*		*1.7 1.5*	*0.071*	*244.9*
195	10.0	18 32.14	40 6 54.1	4.37	−0.0044	−0.109	264 233	0.5 0.4		
				4.45	−0.0022	−0.119	267 119	1.0 1.0		
					−0.0029	*−0.116*		*1.5 1.4*	*0.114*	*198.9*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0003$; 186—195: $-0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
196	8.6	6 18 32.87	40 24 22.5	4.12	+0.0010	−0.074	264 232	0.9 0.9		
					+0.0003	−0.109	267 117	1.0 1.0		
					+0.0006	*−0.092*		*1.9 1.9*	*0.084*	*177.3*
197	9.8	34.01	41 23 2.2	4.07	+0.0014	−0.062	264 228	1.0 1.0		
					+0.0002	−0.070	268 120	1.0 1.0		
					+0.0008	*−0.066*		*2.0 2.0*	*0.058*	*175.1*
198	8.3	38.47	39 40 46.0	4.96	*+0.0026*	*−0.069*	267 124	*1.0 1.0*	*0.067*	*156.1*
199	16.8	50.01	41 58 5.3	4.96	*−0.0014*	*−0.029*	268 127	*1.0 1.0*	*0.028*	*222*
200	8.4	19 4.84	43 26 29.0	5.08	−0.0035	−0.012	265 259	0.7 0.8		
					+0.0009	+0.007	269 96	1.1 1.1		
					−0.0005	−0.025	272 3	0.2 0.2		
					−0.0008	*−0.003*		*2.0 2.1*	*0.012*	*294*
201	9.3	58.79	40 37 25.2	4.82	+0.0059	−0.149	264 251	0.4 0.7		
				4.78	+0.0090	−0.174	267 161	1.0 1.0		
					+0.0054	−0.144	271 7	0.3 0.5		
					+0.0076	*−0.159*		*1.7 2.2*	*0.173*	*150.6*
202	10.3	20 1.20	40 44 25.0	4.88	+0.0019	+0.022	264 250	0.4 0.7		
				4.78	+0.0003	+0.010	267 180	1.0 1.0		
					+0.0030	+0.030	271 6	0.4 0.5		
					+0.0013	*+0.018*		*1.8 2.2*	*0.029*	*27*
203	9.1	5.07	44 55 21.3	5.34	+0.0059	+0.034	266 201	0.6 0.9		
				5.38	+0.0093	+0.030	269 120	1.0 0.8		
					+0.0054	+0.040	273 11	0.7 0.9		
					+0.0072	*+0.035*		*2.3 2.6*	*0.086*	*59.8*
204	11.1	23.02	42 33 42.2	4.96	+0.0020	−0.088	268 152	1.0 1.0		
					+0.0003	−0.046	272 -	0.6 0.6		
					+0.0014	*−0.072*		*1.6 1.6*	*0.066*	*167.7*
205	8.9	33.89	44 25 5.1	5.43	−0.0039	+0.004	266 207	0.2 0.4		
				5.38	−0.0007	−0.014	269 128	1.1 1.1		
					−0.0032	−0.000	273 17	0.7 0.7		
					−0.0019	*−0.006*		*2.0 2.2*	*0.022*	*275*
206	9.4	34.20	45 30 56.8	5.39	+0.0018	+0.047	266 204	0.3 0.5		
				5.38	+0.0001	+0.035	270 151	0.9 0.9		
					−0.0015	+0.059	273 14	0.7 0.8		
					−0.0002	*+0.046*		*1.9 2.2*	*0.054*	*355.8*
207	10.5	39.20	46 29 10.0	4.93	*−0.0004*	*−0.014*	270 146	*0.9 0.9*	*0.008*	*225*
208	7.9	44.02	39 53 53.0	4.96	*−0.0050*	*−0.139*	267 200	*1.0 1.0*	*0.144*	*204.2*
209	9.4	51.38	42 55 58.5	5.08	−0.0002	−0.083	268 165	0.8 0.5		
				5.11	−0.0033	−0.091	272 25	0.8 0.8		
					−0.0018	*−0.088*		*1.6 1.3*	*0.083*	*195.4*
210	9.0	51.62	45 14 51.1	5.48	−0.0028	−0.026	266 209	0.2 0.4		
				5.43	−0.0023	−0.054	270 153	0.9 0.9		
					−0.0057	−0.023	273 21	0.9 0.9		
					−0.0039	*−0.036*		*2.0 2.2*	*0.051*	*236.9*
211	10.0	55.78	44 55 39.1	5.54	−0.0051	−0.001	266 212	0.2 0.3		
				5.60	−0.0035	−0.019	269 126	0.9 0.6		
					−0.0055	−0.013	273 25	0.9 0.9		
					−0.0046	*−0.013*		*2.0 1.8*	*0.050*	*264.3*
212	11.0	57.22	42 42 20.4	5.06	+0.0021	+0.002	268 172	1.0 1.0		
				5.07	+0.0056	+0.060	272 27	0.7 0.8		
					+0.0035	*+0.028*		*1.7 1.8*	*0.052*	*45.8*

$\Delta\,\mu_\alpha = -\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
213	8.8	6 21 15.92	43 7 45.5	5.07	0.0015	0.002	269 150	1.1 0.9		
				5.08	+0.0002	−0.032	272 41	0.8 0.8		
					+0.0010	*−0,016*		*1.9 1.7*	*0.012*	*132*
214	9.6	21.84	45 5 44.8	5.56	+0.0028	−0.002	270 163	0.8 0.6		
				5.64	−0.0003	−0.001	273 28	0.9 0.9		
					+0.0012	*−0.001*		*1.7 1.5*	*0.013*	*58*
215	9.8	31.01	44 10 38.4	5.44	−0.0022	+0.006	269 155	1.1 1.1		
				5.40	−0.0042	−0.000	273 31	0.6 0.5		
					−0.0029	*+0.004*		*1.7 1.6*	*0.035*	*290*
216	10.5	32.80	40 55 8.8	5.64	0.0048	0.062	267 214	0.7 0.6		
				5.68	−0.0072	−0.042	271 27	0.7 0.7		
					−0.0060	*−0.051*		*1.4 1.3*	*0.082*	*238.4*
217	9.4	45.90	45 57 19.5	5.33	+0.0004	−0.091	270 169	0.9 0.9		
				5.21	−0.0034	−0.068	273 32	0.5 0.3		
					−0.0010	*−0.085*		*1.4 1.2*	*0.078*	*188.9*
218	7.8	51.31	39° 1 34.2	4.96	*−0.0038*	*−0.104*	267 249	*0.7 0.3*	*0.106*	*205.6*
219	7.6	54.50	40 10 55.0	5.47	0.0001	0.011	267 241	1.0 1.0		
				5.43	+0.0008	−0.016	271 31	0.6 0.5		
					+0.0001	*−0.015*		*1.6 1.5*	*0.007*	*188*
220	11	59.3	45 53 12	4.93	*+0.0089*	*−0.054*	270 —	*0.9 0.9*	*0.103*	*116.6*
221	11.0	22 4.90	40 17 36.8	4.96	*−0.0012*	*+0.013*	267 240	*1.0 1.0*	*0.026*	*324*
222	11.3	13.25	39 31 31.8	4.96	*+0.0001*	*−0.057*	267 257	*1.0 1.0*	*0.049*	*181*
223	7.3	19.75	39 42 49.5	4.96	*+0.0000*	*−0.110*	267 254	*1.0 1.0*	*0.102*	*181.1*
224	9.2	33.26	45 38 21.9	5.53	−0.0027	−0.088	270 190	0.9 0.9		
					−0.0051	−0.065	273 44	0.9 0.9		
					−0.0039	*−0.076*		*1.8 1.8*	*0.080*	*211.7*
225	6.8	34.81	46 44 56.8	4.93	*−0.0020*	*+0.000*	270 186	*0.9 0.8*	*0.023*	*290*
226	10.7	37.23	39 8 13.8	4.96	*+0.0018*	*−0.028*	267 272	*0.7 0.7*	*0.028*	*136*
227	10.3	41.97	40 8 6.3	5.47	−0.0015	+0.006	267 267	1.0 1.0		
				5.43	+0.0028	+0.016	271 40	0.6 0.5		
					+0.0001	*+0.009*		*1.6 1.5*	*0.017*	*357*
228	9.6	58.14	43 57 18.9	5.21	−0.0006	+0.026	269 185	1.1 1.1		
				5.16	−0.0004	+0.022	272 72	0.6 0.3		
					−0.0028	+0.064	273 59	0.3 0.2		
					−0.0009	*+0,030*		*2.0 1.6*	*0.040*	*342*
229	10.6	23 7.62	41 6 15.2	5.68	+0.0037	+0.020	268 240	0.6 0.4		
				5.78	+0.0018	+0.054	271 45	0.7 0.7		
					+0.0027	*+0.042*		*1.3 1.1*	*0.058*	*28.8*
230	9.4	9.08	40 19 1.4	5.54	+0.0038	−0.029	267 279	1.0 1.0		
					+0.0068	−0.025	271 48	0.7 0.7		
					+0.0050	*−0.027*		*1.7 1.7*	*0.059*	*107.8*
231	10.8	10.11	42 50 11.8	5.09	+0.0083	−0.013	268 230	0.7 0.6		
				5.10	+0.0069	−0.038	272 77	0.8 0.8		
					+0.0076	*−0.027*		*1.5 1.4*	*0.083*	*102.5*
232	8.0	13.19	11 0 13.9	5.34	−0.0017	−0.019	269 184	1.1 1.1		
				5.22	−0.0025	−0.040	272 71	0.5 0.3		
					−0.0031	−0.048	273 67	0.6 0.3		
					−0.0023	*−0.028*		*2.2 1.7*	*0.033*	*235*
233	9.3	14.82	46 15 32.9	4.93	*+0.0016*	*+0.044*	270 197	*0.9 0.9*	*0.055*	*14.8*
234	10.5	24.17	46 12 37.6	4.93	*−0.0067*	*−0.139*	270 211	*0.9 0.9*	*0.149*	*209.0*
235	10.3	24 3.28	44 56 33.5	6.13	*+0 0001*	*−0.041*	273 81	*0.9 0.9*	*0.032*	*182*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.008$; 229—235: $+0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
236	10.4	6 24 18.12	46 30 27.3	4.93	−0.0005	+0.008	270 217	0.7 0.8		
					−0.0054	+0.006	277 13	0.3 0.5		
					−0.0020	*+0.007*		*1.0 1.3*	*0.027*	*306*
237	10.4	36.96	42 3 12.0	5.05	−0.0050	−0.070	268 262	0.8 1.0		
				5.01	−0.0043	−0.029	272 114	0.6 0.4		
					−0.0028	−0.077	275 8	0.3 0.7		
					−0.0044	*−0.065*		*1.7 2.1*	*0.075*	*221.8*
238	10.4	41.27	40 19 46.9	4.96	+0.0018	−0.032	267 307	0.7 0.8		
					+0.0046	−0.030	271 —	0.7 0.7		
					+0.0032	−0.061	274 2	0.3 0.6		
					+0.0032	*−0.040*		*1.7 2.1*	*0.047*	*132*
239	9.6	25 1.82	44 52 46.0	5.69	+0.0067	−0.142	269 205	0.3 0.3		
					+0.0078	−0.113	273 98	0.9 0.9		
					+0.0113	−0.124	276 8	0.3 0.3		
					+0.0083	*−0.121*		*1.5 1.5*	*0.141*	*142.5*
240	8.9	2.52	40 28 34.6	5.64	+0.0034	−0.117	267 316	0.3 0.6		
				5.46	+0.0014	−0.127	271 82	0.7 0.7		
					−0.0003	−0.141	274 11	0.4 0.7		
					+0.0013	*−0.129*		*1.4 2.0*	*0.121*	*173.8*
241	8.7	2.64	43 46 54.7	5.06	−0.0018	+0.003	269 210	0.7 0.9		
				5.04	−0.0020	−0.024	272 116	0.8 0.8		
					−0.0006	−0.014	276 16	0.7 0.9		
					−0.0015	*−0.011*		*2.2 2.6*	*0.018*	*264*
242	9.0	5.93	39 48 47.6	4.96	−0.0063	−0.024	267 322	0.3 0.7		
					−0.0044	−0.073	274 17	0.5 0.8		
					−0.0051	*−0.050*		*0.8 1.5*	*0.073*	*236.1*
243	9.2	19.21	39 58 15.4	5.34	+0.0030	−0.030	267 330	0.2 0.5		
				5.10	+0.0019	−0.021	271 83	0.3 0.2		
					+0.0013	−0.071	274 27	0.8 1.0		
					+0.0017	*−0.053*		*1.3 1.7*	*0.047*	*159*
244	8.1	20.07	44 17 46.2	5.49	+0.0029	+0.013	269 215	0.5 0.8		
				5.41	+0.0071	−0.016	273 102	0.9 0.9		
					+0.0076	+0.008	276 11	0.9 1.0		
					+0.0064	*+0.001*		*2.3 2.7*	*0.068*	*81.5*
245	7.6	45.17	46 38 47.2	4.93	−0.0037	−0.044	270 242	0.3 0.3		
					−0.0027	−0.020	277 33	0.6 0.6		
					−0.0030	*−0.028*		*0.9 0.9*	*0.038*	*240*
246	10.3	58.10	41 25 15.8	5.64	+0.0004	−0.003	271 91	0.7 0.7		
				5.60	+0.0031	−0.003	275 45	0.7 0.8		
					+0.0018	*−0.003*		*1.4 1.5*	*0.019*	*72*
247	9.4	26 2.54	46 17 41.1	4.93	−0.0032	−0.091	270 255	0.2 0.4		
					−0.0029	−0.084	277 36	0.9 0.9		
					−0.0030	*−0.086*		*1.1 1.3*	*0.084*	*203.8*
248	9.7	7.69	44 7 2.1	5.51	+0.0046	−0.074	273 122	0.8 0.6		
				5.44	+0.0037	−0.075	276 30	1.1 1.1		
					+0.0041	*−0.075*		*1.9 1.7*	*0.078*	*147.5*
249	8.6	23.25	40 23 20.6	5.54	+0.0029	+0.000	271 104	0.7 0.7		
					+0.0006	−0.021	274 44	1.0 1.0		
					+0.0015	*−0.012*		*1.7 1.7*	*0.016*	*101*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s,0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +0'',009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
250	8.6	6 26 35.75	40 56 9.3	5.73	+0.0032	−0.042	271 101	0.7 0.7		
				5.78	−0.0009	−0.048	274 53	0.5 0.4		
					+0.0015	*−0.044*		*1.2 1.1*	*0.038*	*158*
251	8.6	44.36	43 11 2.2	5.09	+0.0001	−0.026	272 157	0.8 0.8		
					+0.0013	−0.024	276 38	0.8 0.8		
					+0.0007	*−0.025*		*1.6 1.6*	*0.017*	*159*
252	10.3	27 3.97	39 56 33.0	4.96	*+0.0013*	*−0.041*	274 79	*1.0 1.0*	*0.035*	*158*
253	10.8	7.91	40 11 55.8	4.96	*−0.0028*	*−0.011*	274 76	*1.0 1.0*	*0.035*	*267*
254	9.3	15.06	41 33 2.8	5.54	−0.0004	−0.065	271 120	0.7 0.7		
					+0.0003	−0.071	275 76	1.0 1.0		
					+0.0000	*−0.069*		*1.7 1.7*	*0.060*	*181.9*
255	11.0	23.07	42 45 12.1	5.08	+0.0001	−0.003	272 183	0.8 0.8		
					−0.0041	+0.035	275 85	0.9 0.8		
					−0.0021	*+0.016*		*1.7 1.6*	*0.035*	*315*
256	7.4	27.35	43 8 31.6	5.09	−0.0019	−0.057	272 179	0.8 0.8		
					+0.0015	−0.051	276 48	0.8 0.8		
					−0.0002	*−0.054*		*1.6 1.6*	*0.045*	*185*
257	8.8	28.39	44 5 18.3	5.44	−0.0005	−0.022	273 142	0.6 0.4		
				5.29	−0.0002	−0.031	276 46	1.1 1.1		
					−0.0003	*−0.029*		*1.7 1.5*	*0.021*	*197*
258	9.4	30.15	41 34 28.4	5.54	+0.0043	+0.056	271 119	0.7 0.7		
					+0.0034	+0.052	275 98	1.0 1.0		
					+0.0038	*+0.054*		*1.7 1.7*	*0.075*	*33.1*
259	8.8	54.12	42 17 36.5	5.07	−0.0022	−0.025	272 199	0.8 0.7		
				5.06	+0.0011	−0.002	275 107	1.0 1.0		
					−0.0004	*−0.011*		*1.8 1.7*	*0.006*	*252*
260	10.2	58.44	39 44 55.4	4.96	*+0.0016*	*+0.000*	274 100	*1.0 1.0*	*0.018*	*61*
261	9.8	28 3.78	44 43 51.1	5.55	−0.0044	−0.193	273 150	0.9 0.9		
					−0.0074	−0.168	276 51	1.1 1.1		
					−0.0060	*−0.180*		*2.0 2.0*	*0.184*	*201.4*
262	9.0	8.22	42 7 15.9	5.05	−0.0019	−0.048	272 200	0.6 0.4		
				5.03	−0.0004	−0.047	275 108	1.0 1.0		
					−0.0010	*−0.047*		*1.6 1.4*	*0.040*	*199*
263	10.6	25.50	42 2 58.4	4.96	−0.0111	−0.004	272 —	0.4 0.3		
					−0.0055	+0.034	275 122	1.0 1.0		
					−0.0071	*+0.025*		*1.4 1.3*	*0.088*	*292.8*
264	9.7	31.02	41 33 39.9	5.50	+0.0007	−0.085	271 140	0.6 0.7		
				5.54	+0.0032	−0.082	275 124	1.0 1.0		
					+0.0023	*−0.083*		*1.6 1.7*	*0.078*	*162.0*
265	10.4	37.70	45 28 5.7	5.53	−0.0003	+0.002	273 156	0.9 0.9		
					−0.0015	+0.019	277 90	0.9 0.9		
					−0.0009	*+0.010*		*1.8 1.8*	*0.022*	*328*
266	10.2	39.45	45 20 12.5	5.53	+0.0027	−0.021	273 157	0.9 0.9		
					+0.0039	−0.020	277 93	0.9 0.9		
					+0.0033	*−0.020*		*1.8 1.8*	*0.035*	*108*
267	8.6	43.42	43 21 2.8	5.07	+0.0021	−0.093	272 209	0.8 0.8		
					+0.0050	−0.088	276 73	1.1 1.1		
					+0.0038	*−0.090*		*1.9 1.9*	*0.090*	*153.7*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
268	8.9	6 29 14.34	41 55 7.9	5.08	−0.0005	−0.073	271 147	0.2 0.2		
					+0.0005	−0.059	275 144	1.0 1.0		
					−0.0000	−0.061	278 2	0.1 0.1		
					+0.0003	*−0.061*		*1.3 1.3*	*0.052*	*177.8*
269	11	30 11.2	39 40 40	4.96	*+0.0029*	*−0.058*	274 —	*1.0 1.0*	*0.059*	*146.9*
270	8.7	12.55	42 32 19.8	5.38	−0.0053	−0.024	272 239	0.3 0.6		
					−0.0002	−0.004	275 173	1.0 1.0		
					0.0019	−0.047	279 16	0.7 0.8		
					−0.0014	*−0.023*		*2.0 2.1*	*0.022*	*231*
271	9.4	31.18	40 17 30.8	4.37	+0.0024	−0.049	274 168	1.0 1.0		
					+0.0037	−0.047	278 21	0.5 0.5		
					+0.0028	*−0.048*		*1.5 1.5*	*0.049*	*142*
272	10.7	40.47	41 5 34.1	4.07	+0.0013	−0.128	275 193	0.9 0.7		
				3.91	+0.0016	−0.137	278 29	0.9 1.0		
					+0.0014	*−0.133*		*1.8 1.7*	*0.125*	*173.6*
273	8.2	42.71	41 21 56.2	4.17	−0.0021	−0.036	275 192	1.0 1.0		
				4.12	−0.0017	−0.074	278 27	0.8 0.9		
					−0.0019	*−0.054*		*1.8 1.9*	*0.051*	*207.1*
274	9.0	46.39	40 50 43.3	4.12	+0.0051	+0.001	274 163	1.0 0.8		
				3.97	+0.0041	+0.002	278 30	0.9 1.0		
					+0.0046	*+0.002*		*1.9 1.8*	*0.051*	*77.6*
275	11.3	51.52	45 27 53.2	4.93	*+0.0061*	*−0.016*	277 139	*0.9 0.9*	*0.062*	*96.4*
276	9.6	56.86	41 25 16.7	4.17	−0.0008	+0.019	275 199	1.0 1.0		
				4.12	+0.0011	−0.018	278 26	0.8 0.9		
					+0.0000	*+0.001*		*1.8 1.9*	*0.010*	*349*
277	8.8	31 0.03	39 52 11.2	4.96	*+0.0014*	*−0.033*	274 177	*1.0 1.0*	*0.028*	*148*
278	8.3	10.72	42 6 30.4	5.33	+0.0013	−0.010	275 197	1.0 1.0		
				5.28	−0.0015	−0.026	279 33	0.5 0.4		
					+0.0004	*−0.015*		*1.5 1.4*	*0.007*	*153*
279	10.4	21.54	43 24 17.9	5.52	−0.0005	+0.011	276 115	1.1 1.1		
					−0.0003	−0.037	279 36	1.0 1.0		
					−0.0004	*−0.012*		*2.1 2.1*	*0.006*	*239*
280	9.9	24.75	46 42 15.8	4.93	*+0.0019*	*−0.027*	277 147	*0.9 0.9*	*0.026*	*133*
281	9.9	29.28	39 49 59.3	4.96	*+0.0038*	*−0.198*	274 194	*1.0 1.0*	*0.194*	*167.5*
282	7.9	36.92	40 25 42.8	4.07	+0.0015	−0.221	274 187	1.0 1.0		
					+0.0020	−0.244	278 47	1.0 1.0		
					+0.0018	*−0.232*		*2.0 2.0*	*0.224*	*175.1*
283	7.4	43.84	39 28 45.9	4.96	*−0.0001*	*−0.118*	274 207	*1.0 1.0*	*0.109*	*181.6*
284	9.7	45 17	45 59 13.2	5.27	+0.0040	−0.079	277 156	0.9 0.9		
				5.13	+0.0038	−0.114	280 34	0.3 0.2		
					+0.0040	*−0.085*		*1.2 1.1*	*0 086*	*152 2*
285	5 7	51.37	39 59 19.6	4.55	+0.0004	+0.003	274 204	1.0 1.0		
				4.66	+0.0018	−0.036	278 51	0.3 0.2		
					+0.0007	*−0.004*		*1.3 1.2*	*0.009*	*58*
286	8.7	32 1.26	44 35 21.3	5.55	−0.0026	−0.069	276 125	1.1 1.1		
					−0.0048	−0.090	280 41	0.7 0.7		
					−0.0035	*−0.077*		*1.8 1.8*	*0.078*	*209.8*
287	6.4	11.49	42 34 37.6	5.52	+0.0018	−0.080	275 219	1.0 1.0		
					−0.0020	−0.088	279 50	1.0 1.0		
					−0.0001	*−0.084*		*2.0 2.0*	*0.075*	*181.5*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
288	10.4	6 32 19.57	41 43 1.8	4.12	−0.0019	+0.015	275 243	1.0 1.0		
					−0.0014	+0.003	278 60	0.9 0.9		
					−0.0017	*+0.009*		*1.9 1.9*	*0.027*	*312*
289	10.6	20.13	43 28 56.6	5.52	+0.0045	−0.056	276 139	1.1 1.1		
					+0.0005	−0.053	279 55	1.0 1.0		
					+0.0026	*−0.055*		*2.1 2.1*	*0.054*	*148.7*
290	11	28.6	42 13 13	5.49	+0.0007	−0.059	275 —	1.0 1.0		
				5.46	+0.0052	−0.027	279 —	0.9 0.8		
					+0.0028	*−0.045*		*1.9 1.8*	*0.048*	*139*
291	9.7	38.00	46 10 34.1	4.93	*+0.0012*	*−0.001*	277 177	*0.9 0.9*	*0.014*	*54*
292	10.8	41.56	40 0 21.2	4.96	*−0.0036*	*−0.009*	274 228	*1.0 1.0*	*0.042*	*270*
293	7.4	42.74	44 6 7.3	5.48	+0.0010	+0.007	276 137	1.1 1.1		
				5.35	−0.0005	−0.026	280 67	0.6 0.4		
					+0.0005	*−0.002*		*1.7 1.5*	*0.008*	*30*
294	8.9	50.19	41 22 1.8	4.07	−0.0006	+0.008	275 250	1.0 1.0		
					−0.0008	−0.021	278 73	1.0 1.0		
					−0.0007	*−0.006*		*2.0 2.0*	*0.009*	*288*
295	9.2	54.35	39 19 57.1	4.96	*+0.0031*	*−0.032*	274 232	*1.0 0.9*	*0.042*	*123*
296	9.9	58.17	40 49 10.1	3.97	−0.0035	−0.098	274 221	0.8 0.7		
				3.91	−0.0043	−0.104	278 76	1.0 1.0		
					−0.0039	*−0.102*		*1.8 1.7*	*0.103*	*205.8*
297	11	33 9.8	39 48 17	4.96	*−0.0026*	*−0.040*	274 —	*1.0 1.0*	*0.044*	*225*
298	6.4	19.58	41 3 33.3	3.77	−0.0037	−0.009	275 262	0.5 0.4		
				3.69	−0.0031	−0.029	278 84	1.0 1.0		
					−0.0033	*−0.023*		*1.5 1.4*	*0.041*	*250*
299	8.8	19.62	42 30 31.1	5.52	−0.0034	−0.042	275 255	1.0 1.0		
					−0.0059	−0.047	279 77	1.0 1.0		
					−0.0046	*−0.044*		*2.0 2.0*	*0.064*	*236.6*
300	10.4	29.81	45 26 49.4	5.53	−0.0019	−0.026	277 206	0.9 0.9		
					+0.0006	−0.019	280 70	0.7 0.7		
					−0.0008	*−0.023*		*1.6 1.6*	*0.017*	*216*
301	8.7	42.61	42 8 33.0	5.49	+0.0047	−0.105	275 268	1.0 1.0		
				5.46	+0.0012	−0.098	279 89	0.9 0.8		
					+0.0030	*−0.102*		*1.9 1.8*	*0.099*	*159.9*
302	7.4	44.15	40 15 30.0	4.07	−0.0022	+0.023	274 245	1.0 1.0		
					−0.0037	−0.022	278 98	1.0 1.0		
					−0.0030	*+0.000*		*2.0 2.0*	*.0.036*	*284*
303	8.8	49.55	40 12 6.8	4.07	−0.0027	−0.072	274 246	1.0 1.0		
				4.12	−0.0025	−0.103	278 99	1.0 0.9		
					−0.0026	*−0.087*		*2.0 1.9*	*0.084*	*201.7*
304	9.4	49.60	46 27 25.7	5.15	+0.0053	−0.047	277 195	0.9 0.9		
					+0.0021	−0.028	284 2	0.2 0.2		
					+0.0047	*−0.044*		*1.1 1.1*	*0.061*	*125.0*
305	10.5	34 10.64	41 46 38.9	4.07	−0.0035	−0.142	275 279	1.0 1.0		
					−0.0054	−0.146	278 101	1.0 1.0		
					−0.0044	*−0.144*		*2.0 2.0*	*0.144*	*200.7*
306	9.7	12.41	42 42 37.5	5.58	+0.0029	−0.005	275 274	0.6 0.6		
					−0.0025	−0.018	279 94	1.0 1.0		
					+0.0014	−0.015	282 2	0.2 0.2		
					−0.0003	*−0.013*		*1.8 1.8*	*0.006*	*225*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
307	10.9	6 34 20.00	42 7 6.5	5.46	−0.0067	−0.048	275 277	0.9 1.0		
				5.35	−0.0072	−0.062	279 99	0.9 0.7		
					−0.0119	−0.046	282 4	0.2 0.3		
					−0.0074	*−0.053*		*2.0 2.0*	*0.094*	*242.1*
308	10.0	26.38	39 55 41.1	4.96	−0.0003	+0.026	274 261	0.8 1.0		
					−0.0045	−0.044	281 6	0.2 0.3		
					−0.0011	*+0.010*		*1.0 1.3*	*0.024*	*324*
309	10.0	32.56	41 45 9.4	4.11	−0.0001	−0.035	275 289	0.8 0.9		
				4.28	−0.0011	−0.057	278 100	1.0 1.0		
					+0.0011	−0.071	282 5	0.3 0.7		
					−0.0004	*−0.053*		*2.1 2.6*	*0.044*	*187.8*
310	10.8	53.91	39 53 48.4	4.96	*+0.0010*	*+0.025*	274 272	*0.5 0.8*	*0.035*	*16*
311	9.6	55.31	41 46 30.4	4.11	+0.0039	+0.036	275 288	0.6 0.8		
				4.28	−0.0001	−0.005	278 112	1.0 1.0		
					+0.0017	−0.020	282 16	0.5 0.8		
					+0.0015	*+0.003*		*2.1 2.6*	*0.019*	*51*
312	9.3	57.14	44 17 44.2	5.82	−0.0022	−0.027	276 163	0.8 0.9		
				5.81	+0.0005	−0.036	280 95	0.7 0.7		
					+0.0037	−0.036	283 13	0.5 0.6		
					+0.0002	*−0.032*		*2.0 2.2*	*0.023*	*178*
313	8.8	35 17.52	46 52 35.3	5.68	+0.0078	+0.007	277 225	0.3 0.3		
					+0.0070	+0.026	284 12	0.4 0.4		
					+0.0073	*+0.018*		*0.7 0.7*	*0.079*	*69.3*
314	9.7	37.77	43 46 8.7	6.05	+0.0015	+0.060	276 178	0.3 0.7		
				5.88	+0.0056	+0.019	279 121	1.0 0.9		
					+0.0048	+0.005	283 19	0.6 0.7		
					+0.0047	*+0.027*		*1.9 2.3*	*0.062*	*53.5*
315	8.9	39.79	39 43 58.9	4.96	*+0.0027*	*−0.013*	281 36	*0.8 1.0*	*0.030*	*96*
316	7.2	40.86	38 59 22.6	4.96	*+0.0032*	*−0.161*	281 29	*0.2 0.2*	*0.155*	*166.2*
317	9.4	43.55	45 6 54.2	6.01	+0.0008	−0.042	277 253	0.2 0.2		
					+0.0032	−0.079	280 112	0.7 0.7		
					+0.0072	−0.081	284 26	0.4 0.4		
					+0.0041	*−0.074*		*1.3 1.3*	*0.077*	*146.7*
318	6.7	48.44	44 37 14.8	6.06	−0.0061	−0.035	276 177	0.2 0.3		
					−0.0050	−0.027	280 118	0.7 0.7		
					+0.0012	−0.074	283 22	0.5 0.5		
					−0.0029	*−0.044*		*1.4 1.5*	*0.047*	*224*
319	10.8	51.70	39 22 11.8	4.96	*−0.0007*	*−0.022*	281 40	*0.6 0.7*	*0.015*	*217*
320	8.1	55.60	40 12 17.4	4.02	−0.0013	−0.066	278 144	1.0 0.9		
				4.12	+0.0014	−0.019	281 31	0.9 1.0		
					−0.0000	*−0.041*		*1.9 1.9*	*0.031*	*182*
321	9.4	36 12.26	46 51 59.0	6.25	*+0.0007*	*0.023*	284 27	*0.5 0.5*	*0.014*	*155*
322	9.9	13.43	39 26 41.5	4.96	*+0.0003*	*−0.088*	281 50	*0.8 0.9*	*0.078*	*177.8*
323	8.2	21.27	44 31 5.5	6.19	+0.0052	−0.069	280 130	0.7 0.7		
					+0.0091	−0.076	283 29	0.7 0.7		
					+0.0072	*−0.072*		*1.4 1.4*	*0.097*	*129.6*
324	8.4	26.69	40 3 30.3	4.17	+0.0046	−0.061	278 156	0.8 0.5		
				4.37	+0.0046	−0.039	281 47	1.0 1.0		
					+0.0046	*−0.046*		*1.8 1.5*	*0.062*	*125.2*
325	10.5	37.60	39 52 8.7	4.96	*−0.0023*	*−0.019*	281 60	*1.0 1.0*	*0.029*	*252*
326	8.7	39.17	46 4 16.9	6.25	*+0.0007*	*−0.019*	284 33	*0.9 0.9*	*0.011*	*146*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0001$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.009$; 313—326: $+0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		″	″			″	
327	10.2	6 36 46.31	40 0 16.3	4.29	−0.0004	−0.064	278 169	0.6 0.3		
				4.55	+0.0013	−0.074	281 59	1.0 1.0		
					+0.0007	*−0.072*		*1.6 1.3*	*0.062*	*173.6*
328	10.4	49.58	45 56 40.2	6.20	+0.0035	−0.141	280 124	0.5 0.3		
				6.22	+0.0032	−0.032	284 34	0.9 0.9		
					+0.0033	*−0.059*		*1.4 1.2*	*0.059*	*146.0*
329	10.2	50.25	40 24 8.1	4.07	−0.0023	−0.019	278 165	1.0 1.0		
					+0.0022	−0.016	281 55	1.0 1.0		
					−0.0000	*−0.018*		*2.0 2.0*	*0.008*	*187*
330	10.1	53.71	41 14 11.3	3.97	−0.0028	−0.008	278 159	1.0 1.0		
					−0.0006	−0.006	282 53	0.8 0.8		
					−0.0018	*−0.007*		*1.8 1.8*	*0.021*	*278*
331	8.9	37 2.08	39 43 33.0	4.96	*+0.0012*	*−0.027*	281 77	*1.0 1.0*	*0.021*	*145*
332	9.5	11.17	43 41 47.1	6.16	−0.0019	−0.105	279 146	1.0 1.0		
					−0.0030	−0.102	283 36	0.7 0.7		
					0.0024	*−0.104*		*1.7 1.7*	*0.098*	*196.0*
333	7.9	17.29	40 43 34.8	4.02	−0.0010	−0.186	278 176	1.0 1.0		
				3.97	−0.0003	−0.155	281 73	0.9 0.8		
					−0.0007	*−0.172*		*1.9 1.8*	*0.162*	*183.2*
334	8.8	17.85	42 27 16.2	5.52	−0.0001	−0.001	279 168	1.0 1.0		
					+0.0020	−0.014	282 60	1.0 1.0		
					+0.0010	*−0.008*		*2.0 2.0*	*0.009*	*77*
335	9.9	24.14	43 24 51.9	6.16	+0.0034	−0.019	279 161	1.0 1.0		
					+0.0024	−0.026	283 46	0.7 0.7		
					+0.0030	*−0.022*		*1.7 1.7*	*0.034*	*111*
336	11	27.3	42 21 30	5.52	+0.0025	−0.047	279 —	1.0 1.0		
					+0.0033	−0.084	282 —	1.0 1.0		
					+0.0029	*−0.066*		*2.0 2.0*	*0.064*	*151.0*
337	8.8	34.55	42 30 9.6	5.52	+0.0005	−0.047	279 166	1.0 1.0		
					+0.0031	−0.063	282 58	1.0 1.0		
					+0.0018	*−0.055*		*2.0 2.0*	*0.049*	*157*
338	7.4	38 12.15	44 20 24.4	6.19	+0.0129	−0.200	280 155	0.6 0.6		
					+0.0180	−0.222	283 56	0.7 0.7		
					+0.0156	*−0.212*		*1.3 1.3*	*0.262*	*140.4*
339	6.6	14.56	39 28 23.0	4.96	*+0.0011*	*−0.161*	281 103	*1.0 1.0*	*0.151*	*175.8*
340	10.5	24.53	42 53 50.2	5.55	−0.0009	−0.121	279 180	1.0 1.0		
				5.62	−0.0031	−0.134	282 76	0.9 0.7		
					−0.0019	*−0.126*		*1.9 1.7*	*0.118*	*190.7*
341	9.4	25.36	46 34 16.1	6.25	*+0.0032*	*−0.026*	284 55	*0.9 0.9*	*0.035*	*117*
342	8.8	34.38	45 52 15.8	6.20	+0.0012	−0.035	280 158	0.4 0.3		
				6.22	+0.0028	−0.095	284 71	0.9 0.9		
					+0.0023	*−0.080*		*1.3 1.2*	*0.074*	*161.8*
343	11	42.4	39 19 5	4.96	*−0.0034*	*−0.016*	281 —	*1.0 1.0*	*0.040*	*261*
344	10.7	47.18	40 6 33.9	4.96	*−0.0053*	*−0.055*	281 123	*1.0 1.0*	*0.076*	*233.6*
345	10.8	39 0.95	44 47 4.1	6.13	*−0.0123*	*−0.089*	280 172	*0.7 0.7*	*0.153*	*238.9*
346	8.7	1.04	39 23 57.0	4.96	*−0.0022*	*−0.029*	281 125	*1.0 1.0*	*0.033*	*235*
347	8.5	24.55	44 28 39.7	6.21	−0.0014	−0.020	280 177	0.5 0.6		
					+0.0046	−0.037	283 68	0.7 0.7		
					−0.0012	−0.018	287 7	0.2 0.4		
					+0.0016	*−0.027*		*1.4 1.7*	*0.023*	*137*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0001$; 345—347: $\pm 0^s.0000$; $\Delta\mu_\delta = +0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
348	5.6	6 39 32.00	43 40 36.9	6.17	+0.0021	+0.193	279 204	0.5 0.6		
					+0.0032	+0.146	283 79	0.7 0.7		
					+0.0002	+0.118	286 4	0.3 0.3		
					+0.0022	*+0.158*		*1.5 1.6*	*0.170*	*7.8*
349	10.8	37.35	42 36 45.3	5.42	−0.0020	−0.048	279 209	0.7 0.9		
				5.49	−0.0026	−0.086	282 111	1.0 1.0		
					−0.0066	−0.086	286 —	0.3 0.6		
					−0.0030	*−0.072*		*2.0 2.5*	*0.071*	*208.7*
350	9.3	37.39	45 28 53.5	6.21	−0.0009	+0.022	280 174	0.5 0.6		
					+0.0027	+0.030	284 87	0.9 0.9		
					−0.0064	+0.020	287 4	0.3 0.5		
					−0.0000	*+0.025*		*1.7 2.0*	*0.035*	*358*
351	9.7	38.48	42 26 53.4	5.49	−0.0031	−0.029	279 210	0.6 0.7		
				5.55	−0.0008	−0.069	282 112	1.0 1.0		
					−0.0009	−0.064	286 7	0.3 0.4		
					−0.0015	*−0.055*		*1.9 2.1*	*0.048*	*202*
352	8.6	39.22	46 12 55.4	6.25	*+0.0028*	*−0.033*	284 84	*0.9 0.9*	*0.036*	*129*
353	10.0	41.78	41 53 33.4	4.37	+0.0020	−0.022	278 208	0.3 0.3		
					+0.0035	−0.040	282 116	1.0 1.0		
					+0.0002	−0.038	285 7	0.3 0.3		
					+0.0026	*−0.036*		*1.6 1.6*	*0.038*	*133*
354	10.1	42.60	41 26 40.8	4.17	−0.0038	−0.037	278 211	0.5 0.8		
				3.92	+0.0005	+0.010	282 119	1.0 1.0		
					−0.0000	−0.031	285 11	0.4 0.7		
					−0.0007	*−0.017*		*1.9 2.5*	*0.011*	*232*
355	9.7	57.03	44 47 11.0	6.21	−0.0045	+0.026	280 181	0.5 0.6		
					+0.0008	−0.001	283 75	0.7 0.7		
					−0.0031	+0.037	287 10	0.5 0.6		
					−0.0019	*+0.020*		*1.7 1.9*	*0.037*	*324*
356	10.6	57.67	43 21 18.9	6.08	−0.0024	−0.034	279 207	0.5 0.8		
					+0.0029	−0.071	283 —	0.7 0.7		
					−0.0020	−0.078	286 14	0.5 0.8		
					−0.0001	*−0.061*		*1.7 2.3*	*0.051*	*182.2*
357	10.9	40 3.83	39 28 10.3	4.96	*−0.0005*	*−0.029*	281 155	*1.0 1.0*	*0.020*	*198*
358	10.9	14.22	40 32 8.7	4.96	+0.0008	+0.019	278 —	0.2 0.5		
					+0.0035	+0.042	281 146	1.0 1.0		
					−0.0002	+0.066	285 —	0.6 0.9		
					+0.0020	*+0.046*		*1.8 2.4*	*0.060*	*21.4*
359	10.0	14.89	44 14 47.7	6.23	−0.0111	−0.151	280 188	0.2 0.2		
					−0.0013	−0.164	283 86	0.7 0.7		
					−0.0016	−0.118	287 12	0.3 0.3		
					−0.0030	*−0.150*		*1.2 1.2*	*0.144*	*193.3*
360	10.4	15.62	40 7 34.0	4.55	−0.0075	−0.230	278 —	0.2 0.2		
					−0.0055	−0.180	281 151	1.0 1.0		
					−0.0025	−0.126	285 27	0.4 0.4		
					−0.0050	*−0.173*		*1.6 1.6*	*0.173*	*199.6*
361	10.4	47.02	44 23 14.3	6.25	+0.0029	−0.052	283 99	0.7 0.7		
					+0.0029	−0.052	287 20	0.6 0.6		
					+0.0029	*−0.052*		*1.3 1.3*	*0.052*	*144.5*
362	9.3	41 3.60	46 7 10.0	6.25	*−0.0006*	*−0.034*	284 99	*0.9 0.9*	*0.025*	*196*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^{s}.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	c
363	10 6	6 41 6.51	41 19 7 4	4.07	−0.0013	+0.013	282 156	1.0 1.0		
					−0.0013	+0.005	285 48	1.2 1.2		
					−0.0013	*+0.009*		*2.2 2.2*	*0.024*	*324*
364	10.2	27.74	45 54 34.6	6.25	+0.0011	−0.012	284 107	0.9 0.9		
					+0.0022	−0.042	287 —	0.4 0.3		
					+0.0014	*−0.020*		*1.3 1.2*	*0.018*	*124*
365	10.2	27.74	42 3 52.9	5.33	−0.0011	−0.076	282 178	1.0 1.0		
				5.28	−0.0031	0.091	286 32	0.5 0.4		
					−0.0018	*−0.080*		*1.5 1.4*	*0.073*	*195.9*
366	10.6	32.36	45 16 57.5	6.25	+0.0071	−0.058	284 111	0.9 0.9		
					+0.0059	−0.061	287 25	0.7 0.7		
					+0.0066	*−0.059*		*1.6 1.6*	*0.085*	*125.4*
367	9.8	36.07	39 39 15.5	4.96	*+0.0034*	*−0.027*	281 199	*1.0 1.0*	*0.043*	*113*
368	10.4	36.99	46 14 30.5	6.25	*+0.0027*	*+0.036*	284 105	*0.9 0.9*	*0.054*	*31.3*
369	10.4	54.98	40 16 42.0	4.12	+0.0010	−0.078	281 207	1.0 1.0		
				4.17	+0.0006	−0.093	285 91	1.1 1.0		
					+0.0008	*−0.086*		*2.1 2.0*	*0.077*	*173.2*
370	7.2	42 8.78	43 52 15.8	6.18	+0.0010	−0.090	283 119	0.7 0.7		
					−0.0016	−0.090	286 34	0.7 0.7		
					−0.0003	*−0.090*		*1.4 1.4*	*0.080*	*182.9*
371	9.9	12.56	42 58 43.9	5.80	−0.0027	−0.040	282 204	0.6 0.3		
				5.88	+0.0011	−0.026	283 120	0.4 0.2		
					−0.0014	−0.041	286 36	1.0 1.0		
					−0.0013	*−0.039*		*2.0 1.5*	*0.032*	*206*
372	11.2	13.49	42 7 49.4	4.96	+0.0027	0.000	282 218	1.0 1.0		
					+0.0068	+0.024	286 —	0.7 0.7		
					+0.0044	*+0.010*		*1.7 1.7*	*0.053*	*67.8*
373	8.6	29.34	40 52 16.5	3.91	−0.0004	−0.077	281 214	0.7 0.7		
					−0.0020	−0.073	285 112	1.2 1.2		
					−0.0014	*−0 074*		*1.9 1.9*	*0.066*	*194.0*
374	9.2	29.61	43 41 2.0	6.16	+0.0034	−0.058	283 129	0.7 0.7		
					+0.0006	−0.053	286 42	1.0 1.0		
					+0.0018	*−0.055*		*1.7 1.7*	*0.049*	*157*
375	8.6	32.18	45 49 42.5	6.25	−0.0000	−0.103	284 122	0.9 0.9		
					−0.0018	−0.117	287 34	0.6 0.5		
					−0.0007	*−0.108*		*1.5 1.4*	*0.098*	*184.7*
376	8.0	35.24	40 17 27.5	4.07	+0.0070	−0.132	281 219	1.0 1.0		
					+0.0058	−0.150	285 117	1.2 1.2		
					+0.0063	*−0.142*		*2.2 2.2*	*0.150*	*151.4*
377	9.6	45.32	40 32 57.2	4.07	+0.0003	−0.029	281 225	1.0 1.0		
					−0.0002	−0.042	285 115	1.2 1.2		
					+0.0000	*−0.036*		*2.2 2.2*	*0 026*	*177.8*
378	9.6	43 3.71	43 53 55.1	6.17	+0.0012	−0.002	283 136	0.7 0.7		
				6.18	−0.0005	−0.021	286 47	0.8 0.7		
					+0.0003	*−0.012*		*1.5 1.4*	*0.004*	*124*
379	11	17.2	40 7 35	4.12	+0.0087	−0.050	281 —	1.0 1.0		
				4.23	+0.0063	−0.097	285 —	1.1 0.9		
					+0.0074	*−0.072*		*2.1 1.9*	*0.105*	*126.1*

$\Delta\mu_\alpha = \pm 0^s.0000$; $\Delta\mu_\delta = +0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
380	10.7	6 43 20.09	43 12 38.2	6.08	+0.0080	−0.052	283 —	0.5 0.5		
					+0.0044	−0.031	286 68	1.0 1.0		
					+0.0056	*−0.038*		*1.5 1.5*	*0.067*	*114.7*
381	9.2	20.57	43 45 39.3	6.16	+0.0093	−0.023	283 144	0.7 0.7		
					+0 0092	−0.029	286 63	1.0 1.0		
					+0.0092	*−0.027*		*1.7 1.7*	*0.102*	*99.6*
382	6.2	41.80	41 53 57.4	4.17	−0.0011	−0.133	282 255	1.0 1.0		
				4.23	−0.0049	−0.161	285 141	1.0 0.9		
					−0.0030	*−0.146*		*2.0 1.9*	*0.140*	*194.0*
383	10.7	47.81	44 52 22.9	6.25	*+0.0035*	*−0.036*	287 59	*0.7 0.7*	*0.045*	*125*
384	7.6	57.60	44 10 31 4	6.25	+0.0049	−0.066	283 147	0.7 0.7		
					+0.0027	−0.032	287 61	0.7 0.6		
					+0.0025	−0.035	290 1	0.2 0.2		
					+0.0036	*−0.048*		*1.6 1.5*	*0.054*	*134.3*
385	8.6	59.05	41 43 53.4	4.07	+0.0007	−0.015	282 257	1.0 1.0		
					−0.0032	−0.044	285 142	1.2 1.2		
					−0.0014	*−0.031*		*2.2 2.2*	*0.026*	*217*
386	10.0	44 4.52	45 44 15.9	6.25	−0.0014	−0.097	284 135	0.9 0.9		
					−0.0010	−0.122	287 63	0.7 0.7		
					−0.0080	−0.044	291 —	0.2 0.4		
					−0.0020	*−0.095*		*1.8 2.0*	*0.087*	*193.2*
387	9.9	15.38	41 50 49.7	4.22	+0.0003	−0.014	282 265	0.9 1.0		
				4.36	−0.0013	−0.051	285 148	1.2 1.0		
					+0.0015	−0.003	289 1	0.2 0.2		
					−0.0004	*−0.030*		*2.3 2.2*	*0.021*	*194*
388	10.0	22.24	43 48 18.9	6.16	+0.0035	+0.042	283 153	0.6 0.7		
				6.18	+0.0044	+0.031	286 84	1.0 0.8		
					−0.0008	+0.053	290 5	0.2 0.5		
					+0.0035	*+0.040*		*1.8 2.0*	*0.063*	*37.2*
389	8.2	22.60	46 36 58.0	6.24	−0.0026	−0.021	284 139	0.7 0.7		
					+0.0007	+0.005	291 5	0.3 0.4		
					−0.0016	*−0.012*		*1.0 1.1*	*0.016*	*263*
390	9.4	28.66	43 25 4.1	6.16	−0.0016	+0.009	283 154	0.5 0.6		
				6.17	+0.0006	+0.005	286 86	1.0 1.0		
					−0.0031	−0.008	290 6	0.2 0.4		
					−0.0005	*+0.004*		*1.7 2.0*	*0.015*	*340*
391	8.0	29.56	40 59 14.3	4.00	+0.0043	−0.116	281 264	0.2 0.2		
					+0.0057	−0.090	282 280	0.2 0.2		
					+0.0028	−0.122	285 154	1.2 1.2		
					−0.0033	−0.124	288 1	0.1 0.1		
					+0.0021	−0.162	289 3	0.1 0.1		
					+0.0029	*−0.120*		*1.8 1.8*	*0.115*	*163.8*
392	9.4	34.98	41 33 19.7	3.91	+0.0000	+0.005	282 275	0.7 0.8		
				3.97	−0.0021	−0.017	285 166	1.2 1.2		
					−0.0013	*−0.008*		*1.9 2.0*	*0.015*	*278*
393	11	36.5	43 25 51	6.08	*+0.0010*	*+0.035*	286 —	*1.0 1.0*	*0.046*	*14*
394	7.9	38.39	43 47 9.9	6.16	+0.0041	−0.065	283 159	0.6 0.7		
				6.18	+0.0008	−0.077	286 91	1.0 0.9		
					+0.0030	−0.054	290 9	0.3 0.6		
					+0.0022	*−0.067*		*1.9 2.2*	*0.061*	*158.0*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
395	7.8	6 44 48.14	41 41 26.7	4.25	−0.0051	+0.088	282 274	0.7 0.8		
				4.58	−0.0089	+0.068	285 165	1.2 1.2		
					−0.0082	+0.082	289 9	0.3 0.6		
					−0.0076	*+0.077*		*2.2 2.6*	*0.122*	*315.7*
396	10.0	52.16	43 38 51.6	6.16	+0.0102	−0.030	283 160	0.5 0.6		
				6.17	+0.0107	−0.034	286 92	1.0 1.0		
					+0.0088	−0.029	290 10	0.5 0.6		
					+0.0101	*−0.032*		*2.0 2.2*	*0.112*	*101.3*
397	10.2	53.52	40 47 33.8	3.59	+0.0081	−0.006	281 273	0.3 0.3		
					+0.0065	−0.061	285 171	1.2 1.2		
					+0.0068	*−0.050*		*1.5 1.5*	*0.087*	*117.5*
398	9.9	56.88	44 46 14.1	6.25	−0.0116	−0.072	283 155	0.3 0.3		
					−0.0044	−0.011	287 75	0.7 0.7		
					−0.0032	+0.002	290 —	0.4 0.4		
					−0.0056	*−0.020*		*1.4 1.4*	*0.061*	*260.5*
399	8.1	45 5.72	40 31 22.3	4.20	−0.0008	−0.031	281 275	0.3 0.5		
				4.46	−0.0026	−0.052	285 183	1.2 1.2		
					−0.0092	−0.022	288 12	0.3 0.5		
					−0.0034	*−0.040*		*1.8 2.2*	*0.048*	*232*
400	10.7	13.79	42 43 20.2	6.08	−0.0029	−0.072	282 —	0.3 0.3		
					−0.0041	−0.104	286 102	1.0 1.0		
					−0.0038	*−0.097*		*1.3 1.3*	*0.097*	*205.8*
401	9.3	15.14	43 24 42.1	6.14	+0.0009	−0.054	283 164	0.3 0.4		
				6.16	−0.0001	−0.046	286 101	1.0 1.0		
					−0.0005	−0.056	290 13	0.5 0.6		
					−0.0000	*−0.051*		*1.8 2.0*	*0.041*	*181*
402	9.2	23.67	46 33 56.5	6.22	−0.0071	−0.049	284 144	0.4 0.5		
				6.23	+0.0017	−0.013	291 8	0.6 0.7		
					−0.0018	*−0.028*		*1.0 1.2*	*0.025*	*225*
403	11	35.4	42 30 22	5.89	+0.0020	−0.119	282 —	0.2 0.3		
				5.82	+0.0016	−0.175	286 —	1.0 1.0		
					+0.0017	*−0.162*		*1.2 1.3*	*0.153*	*172.9*
404	8.2	47.94	42 31 19.3	6.10	+0.0014	−0.048	286 112	1.0 1.0		
					−0.0004	−0.032	289 17	0.6 0.6		
					+0.0007	*−0.042*		*1.6 1.6*	*0.033*	*166*
405	6.4	50.23	44 57 40.0	6.24	−0.0012	−0.088	287 84	0.7 0.7		
					+0.0018	−0.061	290 17	0.3 0.3		
					−0.0032	−0.074	291 16	0.2 0.2		
					−0.0008	*−0.079*		*1.2 1.2*	*0.069*	*186.6*
406	10.8	54.80	40 0 30.9	6.16	+0.0037	−0.063	285 —	0.9 0.4		
					−0.0025	−0.033	288 29	0.7 0.7		
					+0.0010	*−0.044*		*1.6 1.1*	*0.036*	*162*
407	10.0	46 7.34	38 59 1.6	6.16	*+0.0001*	*+0.111*	288 45	*0.2 0.2*	*0.122*	*0.9*
408	6.9	8.70	38 59 20.1	6.16	*−0.0036*	*+0.033*	288 44	*0.2 0.2*	*0.061*	*316.3*
409	10.8	19.93	46 0 9.6	6.21	*−0.0027*	*+0.006*	291 18	*0.9 0.9*	*0.033*	*301*
410	9.2	30.88	40 31 33.2	4.67	−0.0001	−0.054	285 211	1.2 1.2		
					−0.0031	−0.006	288 47	0.7 0.7		
					−0.0012	*−0.036*		*1.9 1.9*	*0.029*	*209*
411	10.6	44.70	39 31 12.0	6.16	*−0.0023*	*0.010*	288 53	*0.7 0.7*	*0.026*	*270*
412	8.5	45.72	39 53 47.4	6.16	*−0.0056*	*+0.038*	288 51	*0.7 0.7*	*0.081*	*307.4*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.010$; 407—412: $+\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
413	8.9	6 46 55.35	45 32 14.3	6.23	+0.0011	−0.037	287 97	0.7 0.7		
					+0.0012	+0.001	291 20	0.9 0.9		
					+0.0012	*−0.016*		*1.6 1.6*	*0.014*	*111*
414	7.6	47 10.10	41 0 52.8	4.58	+0.0058	−0.084	285 218	1.2 1.2		
				4.17	+0.0044	−0.088	288 54	0.3 0.2		
					+0.0090	−0.127	289 32	0.4 0.3		
					+0.0063	*−0.092*		*1.9 1.7*	*0.108*	*138.8*
415	9.6	13.78	39 21 9.3	6.16	*+0.0012*	*+0.026*	288 62	*0.7 0.7*	*0.040*	*21*
416	9.8	17.74	39 46 56.5	6.16	*−0.0006*	*−0.070*	288 60	*0.7 0.7*	*0.059*	*186.8*
417	9.5	42.61	39 30 40.0	6.16	*+0.0003*	*−0.000*	288 68	*0.7 0.7*	*0.011*	*15*
418	9.9	46.85	43 30 24.5	6.14	+0.0018	−0.044	286 142	1.0 1.0		
					+0.0018	−0.047	290 44	0.9 0.9		
					+0.0018	*−0.045*		*1.9 1.9*	*0.039*	*151*
419	7.0	53.89	45 57 10.7	6.23	−0.0028	−0.209	287 110	0.4 0.3		
				6.22	−0.0034	−0.072	291 27	0.9 0.9		
					−0.0032	*−0.106*		*1.3 1.2*	*0.101*	*199.2*
420	8.8	56.82	45 25 57.5	6.23	+0.0008	−0.039	287 114	0.7 0.7		
					−0.0003	−0.001	291 30	0.9 0.9		
					+0.0002	*−0.018*		*1.6 1.6*	*0.007*	*164*
421	7.7	59.81	45 46 16.7	6.23	−0.0003	−0.108	287 111	0.6 0.6		
					−0.0001	−0.018	291 28	0.9 0.9		
					−0.0002	*−0.054*		*1.5 1.5*	*0.043*	*183*
422	6.4	48 1.75	44 2 5.4	6.20	+0.0019	−0.072	286 140	0.3 0.2		
					−0.0010	−0.006	287 120	0.4 0.2		
					−0.0001	−0.031	290 42	0.9 0.9		
					+0.0000	*−0.033*		*1.6 1.3*	*0.022*	*177*
423	8.4	31.40	40 14 3.1	4.93	−0.0042	−0.098	285 252	0.9 0.9		
					−0.0031	−0.053	288 93	0.7 0.7		
					−0.0037	*−0.078*		*1.6 1.6*	*0.080*	*212.7*
424	8.8	33.62	42 10 17.7	6.11	−0.0073	−0.088	286 155	0.6 0.5		
					−0.0089	−0.090	289 44	0.8 0.8		
					−0.0082	*−0.089*		*1.4 1.3*	*0.120*	*229.4*
425	10.2	42.85	40 25 16.6	4.75	−0.0034	−0.079	285 251	1.1 1.2		
				4.67	−0.0002	−0.035	288 103	0.7 0.7		
					−0.0022	*−0.063*		*1.8 1.9*	*0.058*	*205.7*
426	9.4	49 0.43	41 40 47.1	4.92	+0.0043	−0.055	285 253	0.9 0.9		
					+0.0049	−0.048	289 51	0.8 0.8		
					+0.0046	*−0.052*		*1.7 1.7*	*0.065*	*128.8*
427	10.3	7.55	43 39 34.6	6.15	+0.0020	−0.023	286 158	0.7 0.7		
					+0.0021	−0.047	290 62	0.9 0.9		
					−0.0027	−0.031	293 2	0.2 0.2		
					+0.0015	*−0.036*		*1.8 1.8*	*0.030*	*146*
428	5.8	8.56	46 24 4.6	6.21	*+0.0002*	*−0.025*	291 42	*0.9 0.9*	*0.014*	*172*
429	10.7	26.75	42 31 21.6	6.11	+0.0026	−0.052	286 162	0.7 0.8		
					+0.0040	−0.036	289 56	0.8 0.8		
					+0.0074	−0.041	293 —	0.2 0.4		
					+0.0038	*−0.043*		*1.7 2.0*	*0.053*	*127.3*
430	10.1	28.07	40 42 46.1	4.96	−0.0070	−0.063	285 264	1.0 1.1		
				4.88	−0.0026	−0.034	288 114	0.7 0.7		
					−0.0034	−0.080	292 4	0.2 0.2		
					−0.0050	*−0.055*		*1.9 2.0*	*0.072*	*232.3*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890 +	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
431	8.9	6 49 30.02	40 12 53.0	5.36	+0.0079	−0.473	285 266	0.5 0.5		
					+0.0124	−0.437	288 117	0.7 0.7		
					+0.0089	−0.439	292 7	0.1 0.1		
					+0.0104	*−0.451*		*1.3 1.3*	*0.456*	*164.9*
432	11.0	30.40	40 13 29.6	6.16	*+0.0122*	*−0.419*	288 116	*0.7 0.7*	*0.431*	*161.1*
433	6.3	31.39	46 50 9.4	6.21	*−0.0056*	*−0.116*	291 48	*0.9 0.7*	*0.119*	*208.5*
434	10.6	40.84	39 29 54.1	6.16	*+0.0025*	*−0.017*	288 134	*0.7 0.7*	*0.030*	*102*
435	8.7	50 17.50	43 0 35.6	6.13	−0.0026	−0.053	286 176	0.4 0.8		
				6.10	−0.0010	−0.032	289 69	0.5 0.3		
					−0.0023	−0.100	290 75	0.6 0.3		
					−0.0017	−0.055	293 23	0.9 1.0		
					−0.0019	*−0.057*		*2.4 2.4*	*0.050*	*203.5*
436	5.4	19.44	45 13 27.2	5.85	−0.0044	−0.082	287 137	0.3 0.6		
				5.86	−0.0036	−0.024	291 54	0.9 0.9		
					−0.0011	−0.018	294 15	0.8 1.0		
					−0.0027	*−0.036*		*2.0 2.5*	*0.038*	*229*
437	10.5	38.54	45 7 27.4	5.81	−0.0053	−0.096	287 140	0.2 0.5		
				5.82	−0.0025	−0.035	291 62	0.9 0.7		
					+0.0011	−0.005	294 16	0.9 1.0		
					−0.0012	*−0.035*		*2.0 2.2*	*0.027*	*207*
438	10.5	40.13	40 40 2.8	6.14	−0.0017	+0.035	288 149	0.7 0.7		
					−0.0070	+0.011	292 16	0.6 0.7		
					−0.0041	*+0.023*		*1.3 1.4*	*0.058*	*305.9*
439	10.7	43.44	43 50 28.8	6.21	*+0.0032*	*+0.025*	290 78	*0.9 0.9*	*0.050*	*43*
440	7.6	50.35	41 50 16.6	6.12	+0.0057	−0.053	289 80	0.8 0.8		
					+0.0008	−0.058	292 14	0.3 0.3		
					+0.0044	*−0.054*		*1.1 1.1*	*0.065*	*131.3*
441	9.7	56.08	46 48 21.4	6.21	*+0.0015*	*−0.016*	291 55	*0.9 0.8*	*0.016*	*108*
442	9.8	57.98	46 0 15.2	5.98	+0.0022	−0.001	291 68	0.9 0.9		
				6.04	−0.0038	−0.013	294 19	0.3 0.2		
					+0.0007	*−0.003*		*1.2 1.1*	*0.011*	*41*
443	8.4	51 3.60	40 10 11.0	6.14	+0.0009	−0.037	288 160	0.7 0.7		
					−0.0027	−0.042	292 19	0.4 0.3		
					−0.0004	*−0.038*		*1.1 1.0*	*0.027*	*188*
444	10.8	23.68	42 35 12.8	6.11	−0.0051	−0.110	289 89	0.8 0.8		
					+0.0008	−0.137	293 42	1.0 1.0		
					−0.0018	*−0.125*		*1.8 1.8*	*0.116*	*189.9*
445	10.6	37.76	45 9 18.4	5.21	−0.0063	−0.024	291 —	0.8 0.7		
					−0.0013	+0.003	294 29	1.0 1.0		
					−0.0035	*−0.008*		*1.8 1.7*	*0.038*	*275*
446	9.4	49.63	45 47 16.7	5.77	−0.0007	−0.048	291 74	0.9 0.9		
				5.80	−0.0032	−0.065	294 32	0.8 0.7		
					−0.0019	*−0.055*		*1.7 1.6*	*0.048*	*204*
447	9.0	50.55	44 55 59.3	5.62	−0.0065	−0.101	290 88	0.7 0.4		
				5.50	−0.0063	−0.109	294 36	1.0 1.0		
					−0.0064	*−0.107*		*1.7 1.4*	*0.118*	*215.3*
448	11.1	53.31	44 51 4.9	5.21	*+0.0003*	*+0.054*	294 37	*1.0 1.0*	*0.065*	*3.5*
449	9.6	55.73	43 45 7.9	6.15	+0.0061	−0.020	290 94	0.9 0.9		
					+0.0033	−0.041	293 44	0.8 0.8		
					+0.0048	*−0.030*		*1.7 1.7*	*0.055*	*110.1*
450	11	52 6.5	39 51 41	6.16	*+0.0056*	*−0.042*	288 —	*0.7 0.7*	*0.072*	*115.5*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
451	10.1	6 52 14.86	44 13 6.2	5.71	−0.0007	−0.087	290 92	0.9 0.9		
				5.77	+0.0023	−0.059	294 49	0.9 0.8		
					+0.0008	*−0.074*		*1.8 1.7*	*0.064*	*172.8*
452	9.0	46.66	40 34 25.2	6.14	+0.0028	+0.004	288 200	0.7 0.7		
					−0.0014	+0.007	292 33	0.7 0.7		
					+0.0007	*+0.006*		*1.4 1.4*	*0.019*	*25*
453	7.9	53.82	42 0 17.5	6.12	+0.0023	−0.093	289 108	0.8 0.8		
				6.14	+0.0014	−0.076	292 37	0.4 0.2		
					+0.0031	−0.089	293 72	0.6 0.3		
					+0.0024	*−0.089*		*1.8 1.3*	*0.082*	*161.6*
454	9.6	56.92	41 14 19.1	6.13	−0.0018	−0.037	288 109	0.6 0.6		
					−0.0020	−0.030	292 40	0.7 0.7		
					−0.0019	*−0.033*		*1.3 1.3*	*0.032*	*226*
455	8.8	53 5.47	43 7 14.1	6.13	−0.0030	+0.003	290 106	0.6 0.5		
				6.12	+0.0014	−0.002	293 66	0.9 0.9		
					−0.0004	*−0.000*		*1.5 1.4*	*0.013*	*342*
456	10.1	23.32	45 34 43.5	5.71	−0.0054	+0.012	291 96	0.9 0.9		
					−0.0013	−0.010	294 58	1.0 1.0		
					−0.0032	*+0.000*		*1.9 1.9*	*0.036*	*289*
457	9.2	23.38	44 18 13.4	5.71	+0.0004	+0.010	290 109	0.9 0.9		
					+0.0024	+0.028	294 64	1.0 1.0		
					+0.0015	*+0.019*		*1.9 1.9*	*0.035*	*27*
458	10.8	23.52	45 34 42.2	5.21	−0.0014	−0.048	291 —	0.9 0.9		
					−0.0019	−0.056	294 57	1.0 1.0		
					−0.0017	*−0.052*		*1.9 1.9*	*0.043*	*203*
459	8.3	25.17	42 13 43.1	6.11	−0.0048	−0.033	289 112	0.8 0.8		
					−0.0031	−0.035	293 81	1.0 0.9		
					−0.0039	*−0.034*		*1.8 1.7*	*0.047*	*242*
460	10.3	26.54	39 32 56.3	6.16	*−0.0016*	*−0.040*	288 218	*0.7 0.7*	*0.033*	*213*
461	9.4	39.10	40 5 45.3	6.14	+0.0031	−0.021	288 215	0.7 0.7		
					+0.0035	−0.029	292 49	0.6 0.5		
					+0.0033	*−0.024*		*1.3 1.2*	*0.040*	*108*
462	8.7	52.96	41 24 42.0	6.12	+0.0052	+0.025	289 122	0.6 0.7		
					+0.0010	+0.006	292 52	0.7 0.7		
					+0.0029	*+0.016*		*1.3 1.4*	*0.043*	*50*
463	9.1	53.93	44 52 42.2	5.52	−0.0014	+0.011	290 113	0.5 0.4		
				5.48	+0.0003	−0.000	294 66	1.0 1.0		
					−0.0013	−0.044	297 1	0.1 0.1		
					−0.0003	*0.000*		*1.6 1.5*	*0.013*	*342*
464	10.8	54 4.59	43 47 33.0	6.14	−0.0009	−0.029	290 114	0.9 0.9		
				6.15	−0.0045	−0.034	293 93	1.0 0.9		
					−0.0028	*−0.032*		*1.9 1.8*	*0.035*	*235*
465	8.2	12.37	40 9 34.6	6.14	−0.0012	−0.085	288 222	0.6 0.7		
					−0.0029	−0.083	292 66	0.6 0.6		
					−0.0020	*−0.084*		*1.2 1.3*	*0.076*	*197.7*
466	10.6	14.80	39 44 47.5	6.16	*+0.0051*	*+0.027*	288 225	*0.6 0.7*	*0.072*	*57.0*
467	9.0	22.26	46 26 27.6	5.96	−0.0032	−0.155	291 99	0.6 0.7		
				5.85	−0.0029	−0.088	298 5	0.3 0.6		
					−0.0031	*−0.124*		*0.9 1.3*	*0.116*	*195.5*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$; 455—467: $+\,0''.012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
468	8.9	6 54 25.92	40 47 52.4	6.13	+0.0013	+0.014	288 231	0.3 0.3		
					−0.0003	−0.008	292 63	1.0 1.0		
					−0.0039	−0.044	295 1	0.1 0.1		
					−0.0002	*−0.006*		*1.4 1.4*	*0.006*	*342*
469	9.5	42.02	39 58 37.6	6.14	+0.0012	+0.009	288 236	0.5 0.6		
				6.15	+0.0005	+0.029	292 74	0.4 0.2		
					−0.0072	−0.011	295 7	0.2 0.5		
					−0.0006	*+0.004*		*1.1 1.3*	*0.017*	*339*
470	7.8	46.78	44 35 22.8	5.48	+0.0011	−0.009	290 121	0.5 0.6		
				5.52	+0.0019	−0.012	294 76	1.0 1.0		
					−0.0023	−0.039	297 6	0.4 0.6		
					+0.0008	*−0.019*		*1.9 2.2*	*0.012*	*125*
471	9.4	49.74	44 4 24.3	5.55	+0.0009	−0.035	290 123	0.7 0.9		
				5.62	+0.0028	−0.023	294 77	0.9 0.7		
					+0.0009	−0.039	297 8	0.7 0.8		
					+0.0016	*−0.033*		*2.3 2.4*	*0.028*	*138*
472	9.7	59.23	45 36 15.1	5.53	−0.0029	−0.001	291 109	0.6 0.7		
				5.55	−0.0018	+0.010	294 80	1.0 1.0		
					−0.0012	+0.053	298 17	0.7 0.8		
					−0.0019	*+0.020*		*2.3 2.5*	*0.037*	*329*
473	10.4	55 9.38	39 14 53.9	6.16	−0.0059	−0.010	288 —	0.2 0.2		
					−0.0068	−0.022	295 13	0.2 0.3		
					−0.0064	*−0.017*		*0.4 0.5*	*0.073*	*266.1*
474	9.3	16.69	46 58 26.9	5.66	−0.0012	−0.043	291 103	0.2 0.2		
				5.76	−0.0001	+0.005	298 19	0.3 0.2		
					−0.0005	*−0.019*		*0.5 0.4*	*0.008*	*210*
475	10.8	22.98	45 39 46.4	5.25	−0.0020	−0.047	294 79	1.0 1.0		
					+0.0018	+0.008	298 23	0.8 0.9		
					−0.0003	*−0.021*		*1.8 1.9*	*0.009*	*193*
476	9.3	29.18	44 56 46.9	5.34	+0.0061	−0.056	290 124	0.2 0.2		
					+0.0074	−0.102	294 85	1.0 1.0		
					+0.0048	−0.089	297 15	0.3 0.3		
					+0.0118	−0.042	298 25	0.2 0.1		
					+0.0073	*−0.090*		*1.7 1.6*	*0.111*	*134.6*
477	8.4	29.69	41 46 43.0	6.12	+0.0040	−0.041	289 143	0.2 0.5		
					+0.0021	−0.038	292 87	0.7 0.7		
					+0.0007	−0.055	296 12	0.6 0.7		
					+0.0018	*−0.045*		*1.5 1.9*	*0.039*	*148*
478	9.2	40.20	42 25 26.1	6.11	+0.0018	−0.021	289 140	0.2 0.3		
					+0.0001	−0.053	293 117	1.0 1.0		
					−0.0006	−0.046	296 16	0.6 0.6		
					+0.0001	*−0.046*		*1.8 1.9*	*0.034*	*178*
479	10.3	44.22	44 10 55.1	5.31	−0.0036	−0.010	290 130	0.2 0.5		
				5.43	−0.0014	+0.008	294 89	1.0 0.9		
					−0.0020	+0.008	297 17	0.9 1.0		
					−0.0019	*+0.004*		*2.1 2.4*	*0.025*	*310*
480	8.6	50.92	44 35 20.4	5.32	−0.0009	−0.064	290 129	0.2 0.2		
					−0.0006	−0.077	294 88	1.0 1.0		
					−0.0022	−0.104	297 21	0.8 0.8		
					−0.0013	*−0.088*		*2.0 2.0*	*0.077*	*189.7*

$\Delta\mu_\alpha = \pm 0^s.0000$; 473—480: $+ 0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = + 0''.012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
481	9.6	6 56 0.99	42 8 36.0	6.10	−0.0037	−0.052	293 133	1.0 0.8		
				6.11	−0.0053	−0.063	296 24	0.7 0.7		
					−0.0044	*−0.057*		*1.7 1.5*	*0.065*	*226.2*
482	9.4	2.92	44 33 19.8	5.22	−0.0022	−0.065	294 98	1.0 1.0		
					−0.0031	−0.091	297 22	0.9 0.9		
					−0.0026	*−0.077*		*1.9 1.9*	*0.070*	*202.6*
483	11.1	8.23	46 29 11.4	5.30	*−0.0008*	*+0.004*	298 27	*1.0 1.0*	*0.017*	*336*
484	11.2	13.04	43 18 12.9	6.08	*+0.0018*	*−0.059*	293 126	*1.0 1.0*	*0.051*	*156.9*
485	9.4	13.90	46 43 31.4	5.30	*+0.0019*	*−0.006*	298 33	*0.8 0.7*	*0.021*	*73*
486	9.6	14.46	44 14 47.2	5.22	+0.0008	+0.003	294 100	1.0 0.9		
					+0.0003	−0.002	297 23	1.0 1.0		
					+0.0006	*+0.000*		*2.0 1.9*	*0.014*	*30*
487	10.2	24.25	40 48 44.8	6.13	+0.0003	−0.008	292 101	0.7 0.7		
					−0.0022	−0.020	295 33	0.5 0.4		
					−0.0007	*−0.012*		*1.2 1.1*	*0.007*	*270*
488	8.6	30.13	40 21 4.4	6.14	+0.0048	−0.084	292 102	0.7 0.7		
					+0.0021	−0.103	295 43	0.7 0.7		
					+0.0034	*−0.094*		*1.4 1.4*	*0.091*	*154.0*
489	9.6	31.62	39 18 40.9	6.16	*−0.0050*	*−0.044*	295 39	*0.6 0.6*	*0.065*	*240.7*
490	9.4	40.61	39 49 24.8	6.16	*−0.0133*	*−0.119*	295 46	*1.0 1.0*	*0.187*	*235.0*
491	9.2	49.62	45 22 26.6	5.25	−0.0008	−0.024	294 103	1.0 1.0		
					−0.0009	−0.009	298 42	1.0 1.0		
					−0.0008	*−0.016*		*2.0 2.0*	*0.008*	*240*
492	10.1	54.41	43 29 13.0	5.66	−0.0002	+0.004	293 145	1.0 1.0		
					+0.0022	+0.006	297 35	1.0 1.0		
					+0.0010	*+0.005*		*2.0 2.0*	*0.021*	*35*
493	10.5	57 31.38	44 5 43.1	5.22	+0.0004	−0.025	294 118	0.7 0.5		
					−0.0008	−0.036	297 36	1.0 1.0		
					−0.0003	*−0.031*		*1.7 1.5*	*0.019*	*189*
494	11.3	50.17	42 52 44.4	6.08	*−0.0052*	*−0.025*	293 161	*1.0 1.0*	*0.057*	*256.9*
495	8.7	58.64	46 40 42.8	5.30	*+0.0042*	*−0.020*	298 51	*1.0 1.0*	*0.046*	*100*
496	9.6	58 4.28	40 32 51.4	6.14	−0.0084	+0.060	292 121	0.7 0.7		
					−0.0114	+0.010	295 70	0.7 0.7		
					−0.0099	*+0.035*		*1.4 1.4*	*0.121*	*292.8*
497	10.9	6.41	43 47 59.2	5.61	−0.0039	−0.027	293 157	0.8 0.7		
				5.58	−0.0003	+0.006	297 46	1.0 1.0		
					−0.0019	*−0.008*		*1.8 1.7*	*0.020*	*281*
498	8.8	13.29	43 40 47.7	5.63	+0.0002	−0.038	293 165	0.9 0.8		
				5.61	+0.0006	−0.023	297 49	1.0 1.0		
					+0.0004	*−0.030*		*1.9 1.8*	*0.019*	*162*
499	9.8	15.00	46 51 24.0	5.30	*+0.0001*	*−0.026*	298 58	*0.9 0.7*	*0.038*	*3*
500	10.9	32.90	42 45 56.8	6.11	−0.0032	−0.023	293 170	1.0 1.0		
				6.10	−0.0014	−0.057	296 49	0.7 0.6		
					−0.0025	*−0.036*		*1.7 1.6*	*0.035*	*227*
501	9.6	39.00	42 44 0.4	6.11	+0.0001	−0.032	293 176	1.0 1.0		
					+0.0001	−0.076	296 57	0.7 0.7		
					+0.0001	*−0.050*		*1.7 1.7*	*0.038*	*177*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0001$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
502	8.8	6 58 46.61	45 46 51.8	5.26	−0.0055	−0.039	294 125	0.7 0.7		
					−0.0034	−0.032	298 75	1.0 1.0		
					−0.0125	+0.000	301 1	0.1 0.1		
					−0.0047	*−0.033*		*1.8 1.8*	*0.052*	*246.4*
503	10.8	58.54	40 51 5.9	6.16	*+0.0038*	*+0.030*	295 98	*0.7 0.6*	*0.061*	*46.3*
504	9.0	59 9.13	41 14 5.6	6.12	+0.0001	−0.000	292 131	0.6 0.7		
					+0.0021	−0.003	296 71	0.7 0.6		
					+0.0012	*−0.001*		*1.3 1.3*	*0.018*	*52*
505	9.1	15.69	40 14 18.8	6.14	+0.0008	+0.023	292 134	0.3 0.4		
					+0.0015	−0.002	295 111	0.7 0.7		
					+0.0013	*+0.007*		*1.0 1.1*	*0.025*	*40*
506	8.8	37.40	41 19 51.8	6.14	−0.0036	+0.002	292 137	0.5 0.6		
				6.15	−0.0017	−0.011	296 82	0.7 0.7		
					−0.0059	−0.010	299 1	0.2 0.4		
					−0.0030	*−0.006*		*1.4 1.7*	*0.034*	*280*
507	11	51.2	40 31 11	6.16	*−0.0012*	*−0.127*	295 —	*0.7 0.7*	*0.116*	*186.4*
508	9.8	56.16	41 9 41.9	6.15	−0.0064	+0.017	292 142	0.4 0.6		
				6.16	−0.0039	+0.043	296 84	0.7 0.6		
					−0.0082	+0.013	299 4	0.3 0.5		
					−0.0055	*+0.025*		*1.4 1.7*	*0.071*	*301.2*
509	9.0	56.36	44 35 30.1	5.22	+0.0020	+0.003	294 151	0.7 0.8		
					+0.0022	−0.029	297 63	1.0 1.0		
					+0.0001	−0.001	301 21	0.4 0.6		
					+0.0017	*−0.011*		*2.1 2.4*	*0.019*	*87*
510	8.3	58.08	40 21 22.0	6.17	−0.0005	+0.032	292 145	0.3 0.3		
					+0.0014	+0.003	295 121	0.7 0.7		
					+0.0002	+0.046	299 8	0.3 0.3		
					+0.0007	*+0.020*		*1.3 1.3*	*0.033*	*16*
511	10.7	58.75	46 21 43.3	5.30	*+0.0035*	*−0.036*	298 100	*1.0 1.0*	*0.044*	*123*
512	10.1	59.68	44 28 57.7	5.22	+0.0032	+0.020	294 152	0.5 0.7		
					+0.0026	−0.022	297 71	1.0 1.0		
					−0.0019	−0.018	301 23	0.4 0.6		
					+0.0018	*−0.008*		*1.9 2.3*	*0.020*	*79*
513	8.2	7 0 2.19	42 6 46.9	6.14	+0.0009	−0.019	293 192	0.2 0.2		
					−0.0003	−0.026	296 94	0.7 0.7		
					−0.0002	−0.048	300 9	0.2 0.2		
					−0.0001	*−0.029*		*1.1 1.1*	*0.017*	*177*
514	9.4	9.74	42 18 13.9	6.15	−0.0024	+0.029	293 190	0.3 0.4		
					−0.0011	+0.002	296 90	0.7 0.7		
					−0.0017	+0.000	300 7	0.3 0.4		
					−0.0015	*+0.009*		*1.3 1.5*	*0.026*	*323*
515	10.6	10.29	45 58 36.4	5.30	*−0.0002*	*0.020*	298 110	*1.0 1.0*	*0.009*	*159*
516	9.3	14.01	45 42 21.9	5.26	+0.0003	−0.056	294 153	0.4 0.4		
					+0.0008	−0.034	298 112	1.0 1.0		
					−0.0016	+0.001	301 24	0.3 0.4		
					+0.0003	*−0.031*		*1.7 1.8*	*0.019*	*168*
517	9.9	18.54	40 32 12.0	6.18	−0.0073	+0.014	292 147	0.2 0.3		
					+0.0006	−0.029	295 134	0.7 0.7		
					−0.0011	+0.004	299 12	0.4 0.6		
					−0.0011	*−0.009*		*1.3 1.6*	*0.012*	*284*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.000$; $\Delta\mu_\delta = +0''.012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		″	″			″	
518	9.9	7 0 24.32	41 44 13.8	6.16	−0.0023	−0.055	292 —	0.2 0.2		
				6.17	+0.0005	−0.042	296 96	0.7 0.7		
					−0.0045	−0.051	299 10	0.3 0.3		
					−0.0012	*−0.046*		*1.2 1.2*	*0.036*	*201*
519	9.7	32.60	47 0 38.8	5.30	*+0.0092*	*−0.020*	298 116	*0.7 0.3*	*0.095*	*94.8*
520	10.6	42.61	40 21 0.7	6.16	*−0.0036*	*−0.039*	295 144	*0.7 0.7*	*0.048*	*236*
521	10.3	48.55	40 53 24.5	6.20	−0.0018	−0.115	295 140	0.6 0.5		
				6.21	−0.0025	−0.109	299 20	0.6 0.7		
					−0.0022	*−0.112*		*1.2 1.2*	*0.103*	*193.0*
522	7.7	54.51	44 11 41.7	5.22	−0.0019	−0.004	294 159	0.1 0.1		
					+0.0007	−0.028	297 79	1.0 1.0		
					−0.0032	−0.026	301 36	0.4 0.3		
					−0.0005	*−0.026*		*1.5 1.4*	*0.015*	*196*
523	11.0	1 8.71	43 54 36.1	5.23	*−0.0013*	*−0.045*	297 81	*1.0 1.0*	*0.035*	*202*
524	8.2	9.57	42 40 48.4	6.19	+0.0004	−0.063	296 107	0.7 0.7		
					−0.0000	−0.046	300 17	0.7 0.7		
					+0.0002	*−0.054*		*1.4 1.4*	*0.041*	*176*
525	9.0	13.54	45 21 36.6	5.25	−0.0010	−0.086	298 128	1.0 1.0		
					−0.0011	−0.057	301 41	0.8 0.8		
					−0.0010	*−0.073*		*1.8 1.8*	*0.061*	*188.5*
526	11.1	36.99	45 4 35.8	5.21	−0.0009	−0.069	298 —	0.8 0.5		
					+0.0011	−0.070	301 42	0.8 0.8		
					+0.0001	*−0.070*		*1.6 1.3*	*0.057*	*178.0*
527	10.2	39.03	40 43 57.8	6.20	+0.0025	−0.020	295 163	0.7 0.6		
				6.21	−0.0006	−0.052	299 35	0.7 0.7		
					+0.0010	*−0.037*		*1.4 1.3*	*0.027*	*153*
528	9.4	56.99	46 21 23.1	5.30	*+0.0073*	*+0.051*	298 130	*1.0 1.0*	*0.099*	*49.9*
529	11	58.1	42 42 26	6.19	+0.0031	+0.007	296 —	0.7 0.7		
					+0.0019	−0.022	300 —	0.7 0.7		
					+0.0025	*−0.008*		*1.4 1.4*	*0.029*	*80*
530	9.3	2 0.87	42 41 37.9	6.19	+0.0007	−0.006	296 128	0.7 0.7		
					+0.0005	+0.019	300 22	0.7 0.7		
					+0.0006	*+0.006*		*1.4 1.4*	*0.020*	*20*
531	8.8	39.18	43 26 55.8	5.74	+0.0008	−0.029	297 100	1.0 1.0		
					+0.0001	−0.025	300 25	0.7 0.7		
					+0.0005	*−0.027*		*1.7 1.7*	*0.016*	*153*
532	10.8	40.03	44 54 46.8	5.21	*−0.0084*	*−0.040*	301 60	*0.8 0.8*	*0.093*	*253.1*
533	10.8	46.86	40 17 30.0	6.16	+0.0011	+0.020	295 192	0.7 0.7		
					−0.0042	+0.004	299 —	0.7 0.7		
					−0.0016	*+0.012*		*1.4 1.4*	*0.030*	*326*
534	10.8	47.11	42 49 12.8	6.20	+0.0003	−0.285	296 143	0.6 0.5		
					+0.0009	−0.258	300 30	0.7 0.7		
					+0.0006	*−0.269*		*1.3 1.2*	*0.256*	*178.2*
535	10.2	58.82	43 22 46.4	5.74	+0.0017	−0.013	297 103	1.0 1.0		
					+0.0004	−0.041	300 29	0.7 0.7		
					+0.0012	*−0.025*		*1.7 1.7*	*0.018*	*131*
536	11.0	3 7.44	46 19 31.6	5.30	*−0.0022*	*−0.038*	298 154	*1.0 1.0*	*0.033*	*221*
537	11.0	20.95	39 41 11.9	6.16	*+0.0042*	*−0.008*	295 202	*0.7 0.7*	*0.049*	*84*
538	9.6	28.30	43 51 27.3	5.71	+0.0007	−0.010	297 104	1.0 1.0		
				5.68	−0.0003	−0.006	300 32	0.6 0.6		
					+0.0003	*−0.008*		*1.6 1.6*	*0.007*	*45*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0001$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.012$; 523—538: $+\,0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
539	9.0	7 3 42.93	42 20 24.2	6.19	+0.0013	−0.082	296 152	0.7 0.7		
					+0.0007	−0.062	300 44	0.7 0.7		
					+0.0010	*−0.072*		*1.4 1.4*	*0.060*	*169.4*
540	9.4	43.08	41 16 2.3	6.20	−0.0019	−0.014	296 156	0.5 0.5		
					−0.0033	−0.046	299 62	0.7 0.7		
					−0.0027	*−0.033*		*1.2 1.2*	*0.035*	*235*
541	9.4	55.39	46 49 1.7	5.30	*+0.0009*	*−0.030*	298 171	*0.7 0.5*	*0.020*	*150*
542	8.4	1 3.39	42 57 21.4	6.09	+0.0004	−0.026	296 151	0.2 0.2		
					−0.0014	+0.035	297 121	0.2 0.2		
					+0.0006	−0.016	300 50	0.7 0.7		
					+0.0002	*−0.009*		*1.1 1.1*	*0.005*	*37*
543	9.5	8.75	39 3 1.0	6.16	*−0.0031*	*+0.055*	295 221	*0.2 0.2*	*0.076*	*332.8*
544	7.4	15.07	40 12 29.9	6.21	−0.0062	−0.125	295 215	0.6 0.7		
				6.20	0.0033	−0.111	299 74	0.7 0.6		
					−0.0046	*−0.119*		*1.3 1.3*	*0.118*	*206.6*
545	8.4	22.24	45 12 8.0	5.56	−0.0012	−0.062	298 179	0.5 0.5		
					+0.0007	−0.039	301 75	0.8 0.8		
					−0.0028	−0.028	305 6	0.2 0.2		
					−0.0004	*−0.045*		*1.5 1.5*	*0.032*	*185*
546	9.9	27.13	44 17 28.4	5.22	−0.0022	+0.010	297 116	0.8 0.9		
					−0.0050	−0.008	301 82	0.8 0.8		
					−0.0030	−0.009	304 4	0.2 0.6		
					−0.0035	*−0.001*		*1.8 2.3*	*0.039*	*288*
547	10.0	37.97	44 58 17.1	5.41	+0.0039	+0.021	297 114	0.2 0.2		
				5.42	+0.0005	−0.053	298 182	0.2 0.1		
					+0.0028	−0.009	301 85	0.8 0.8		
					+0.0059	−0.041	304 —	0.2 0.2		
					−0.0001	−0.018	305 9	0.1 0.1		
					+0.0029	*−0.013*		*1.5 1.4*	*0.031*	*90*
548	8.3	44.00	43 25 22.0	5.80	+0.0009	+0.017	297 125	0.5 0.7		
				5.69	+0.0011	−0.012	300 57	0.7 0.7		
					+0.0006	−0.006	304 8	0.3 0.5		
					+0.0009	*+0.000*		*1.5 1.9*	*0.017*	*40*
549	6.8	46.72	39 29 2.5	6.16	+0.0027	0.026	295 239	0.3 0.5		
					+0.0021	0.047	302 9	0.2 0.3		
					+0.0025	*0.034*		*0.5 0.8*	*0.036*	*126*
550	9.0	48.63	44 10 42.8	5.22	+0.0004	0.028	297 122	0.8 0.9		
					+0.0004	0.024	301 86	0.8 0.7		
					+0.0017	0.046	304 5	0.5 0.8		
					+0.0007	*−0.033*		*2.1 2.4*	*0.022*	*156*
551	9.4	52.74	39 43 19.2	6.16	−0.0020	+0.036	295 236	0.4 0.6		
					+0.0001	+0.003	302 17	0.2 0.5		
					−0.0013	*+0.021*		*0.6 1.1*	*0.037*	*338*
552	9.2	57.95	42 17 21.1	6.19	+0.0012	+0.016	296 168	0.4 0.5		
				6.18	+0.0016	+0.030	300 69	0.7 0.7		
					−0.0024	+0.027	303 6	0.4 0.5		
					+0.0004	*+0.025*		*1.5 1.7*	*0.038*	*7*
553	11	5 3.3	45 9 59	5.21	*+0.0026*	*−0.057*	301 —	*0.8 0.8*	*0.053*	*146.6*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
554	10.8	7 5 3.68	44 17 25.1	5.22	−0.0019	+0.015	297 —	0.5 0.8		
					−0.0015	+0.016	301 95	0.8 0.8		
					−0.0040	+0.021	304 9	0.7 0.8		
					−0.0025	*+0.017*		*2.0 2.4*	*0.040*	*319*
555	11.0	11.61	40 46 9.4	6.25	*−0.0026*	*−0.006*	299 83	*0.7 0.7*	*0.029*	*284*
556	8.6	14.10	45 18 28.7	5.96	−0.0001	−0.000	298 190	0.4 0.5		
				6.02	+0.0005	+0.018	301 92	0.8 0.8		
					−0.0004	+0.022	305 16	0.4 0.5		
					+0.0001	*+0.014*		*1.6 1.8*	*0.027*	*6*
557	8.8	19.14	44 9 15 2	5.22	+0.0020	−0.017	297 126	0.4 0.8		
					−0.0014	−0.016	301 96	0.8 0.6		
					+0.0021	+0.000	304 10	0.8 1.0		
					+0.0007	*−0.010*		*2.0 2.4*	*0.009*	*69*
558	9.4	21.86	41 17 17.1	6.20	−0.0024	−0.015	296 177	0.2 0.2		
					−0.0042	−0.059	299 81	0.7 0.7		
					−0.0041	−0.041	303 15	0.3 0.4		
					−0.0039	*−0.047*		*1.2 1.3*	*0.054*	*231.0*
559	8.9	26.62	39 46 8.6	6.16	−0.0054	−0.055	295 246	0.2 0.2		
					−0.0016	−0.039	302 28	0.5 0.6		
					−0.0027	*−0.043*		*0.7 0.8*	*0.042*	*225*
560	11	28.8	40 42 59	6.25	*+0.0030*	*−0.028*	299 —	*0.7 0.7*	*0.038*	*113*
561	10.7	54.08	45 4 29.2	5.21	*−0.0073*	*+0.001*	301 102	*0.8 0.8*	*0.078*	*280.3*
562	9.0	6 0.06	42 9 43.0	6.19	+0.0015	−0.022	300 86	0.7 0.6		
				6.18	+0.0001	−0.022	303 29	0.7 0.7		
					+0.0008	*−0.022*		*1.4 1.3*	*0.013*	*135*
563	11.1	3.10	44 25 10.1	5.21	+0.0056	−0.064	301 109	0.8 0.8		
					+0.0058	−0.081	304 —	1.0 1.0		
					+0.0057	*−0.073*		*1.8 1.8*	*0.086*	*134.1*
564	8.8	7.05	45 42 30.2	6.60	+0.0026	−0.092	301 105	0.8 0.8		
					+0.0007	−0.110	305 28	0.8 0.8		
					+0.0016	*−0.101*		*1.6 1.6*	*0.090*	*167.8*
565	9.5	17.18	43 9 58.1	5.87	+0.0012	−0.035	300 80	0.7 0.7		
				5.91	+0.0018	−0.036	304 18	0.6 0.5		
					+0.0015	*−0.035*		*1.3 1.2*	*0.028*	*142*
566	10.9	26.87	40 52 49.6	6.25	*+0.0006*	*−0.050*	299 107	*0.7 0.7*	*0.038*	*168*
567	9.9	32.40	40 21 20.2	6.20	+0.0016	−0.023	299 110	0.7 0.7		
					+0.0007	−0.004	302 46	0.7 0.7		
					+0.0012	*−0.014*		*1.4 1.4*	*0.014*	*94*
568	10.6	40.98	39 47 38.9	6.16	*−0.0015*	*−0.008*	302 48	*0.7 0.7*	*0 018*	*286*
569	10.6	50.22	42 50 24.9	6.20	−0.0027	−0.049	300 92	0.7 0.7		
					−0.0069	−0.064	303 39	0.5 0.4		
					−0.0045	*−0.054*		*1.2 1.1*	*0.063*	*229.5*
570	10.4	51.83	40 19 35.4	6.20	−0.0028	−0.018	299 120	0.7 0.7		
					−0.0037	−0.004	302 47	0.7 0.7		
					−0.0032	*−0.011*		*1.4 1.4*	*0.037*	*273*
571	8.8	7 2.33	40 46 33.1	6.21	+0.0004	−0.037	299 116	0.7 0.7		
					−0.0034	−0.040	302 51	0.6 0.5		
					−0.0013	*−0.038*		*1.3 1.2*	*0.029*	*209*
572	9.0	18.29	43 34 7.8	5.74	+0.0001	−0.026	300 98	0.7 0.7		
					−0.0002	−0.027	304 35	1.0 1.0		
					−0.0001	*−0.027*		*1.7 1.7*	*0.014*	*176*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0001$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
573	8.6	7 7 36.74	41 57 58.0	6.18	−0.0028	−0.103	299 121	0.4 0.2		
				6.17	−0.0015	−0.056	300 101	0.2 0.2		
					−0.0008	−0.087	303 52	0.7 0.7		
					−0.0015	*−0.084*		*1.3 1.1*	*0.073*	*191.9*
574	9.2	8 17.48	44 38 6.4	5.22	−0.0018	−0.061	301 136	0.8 0.8		
					−0.0001	−0.079	304 41	1.0 1.0		
					−0.0009	*−0.071*		*1.8 1.8*	*0.058*	*186.9*
575	7.0	21.27	45 34 56.4	6.60	−0.0017	−0.018	301 130	0.8 0.8		
					−0.0008	−0.026	305 62	0.8 0.8		
					−0.0012	*−0.022*		*1.6 1.6*	*0.014*	*231*
576	10.5	33.39	43 51 49.9	5.23	*−0.0007*	*−0.037*	304 46	*1.0 1.0*	*0.025*	*194*
577	8.2	34.85	45 12 58.0	6.60	+0.0164	+0.004	301 133	0.8 0.8		
				6.52	+0.0175	+0.001	305 73	0.8 0.7		
					+0.0170	*+0.003*		*1.6 1.5*	*0.182*	*84.9*
578	8.8	41.71	45 59 56.1	7.34	+0.0105	+0.040	301 129	0.3 0.2		
				7.52	+0.0105	+0.007	305 70	0.8 0.8		
					+0.0105	*+0.014*		*1.1 1.0*	*0.114*	*76.3*
579	8.4	43.03	41 33 0.9	6.18	+0.0007	−0.058	299 146	0.6 0.6		
				6.19	+0.0013	−0.050	303 77	0.7 0.7		
					+0.0010	*−0.054*		*1.3 1.3*	*0.043*	*161*
580	8.4	45.92	43 44 12.2	5.65	+0.0011	−0.078	300 108	0.5 0.5		
					+0.0017	−0.085	304 52	0.7 0.7		
					+0.0014	*−0.082*		*1.2 1.2*	*0.071*	*165.4*
581	7.8	53.51	42 6 27.7	6.16	−0.0034	−0.194	300 114	0.3 0.3		
					−0.0042	−0.166	303 75	0.7 0.7		
					−0.0040	*−0.174*		*1.0 1.0*	*0.166*	*194.6*
582	10.8	56.63	39 33 8.8	6.16	*+0.0013*	*−0.018*	302 101	*0.7 0.7*	*0.018*	*106*
583	9.3	9 17.89	40 25 13.1	6.19	−0.0002	−0.034	299 148	0.4 0.5		
				6.20	+0.0005	−0.039	302 105	0.7 0.7		
					−0.0085	−0.065	306 4	0.1 0.2		
					−0.0005	*−0.041*		*1.2 1.4*	*0.028*	*188*
584	9.7	22.65	41 4 42.1	6.19	−0.0029	−0.055	299 156	0.6 0.7		
				6.20	+0.0002	−0.057	303 84	0.6 0.5		
					+0.0012	−0.070	306 2	0.2 0.3		
					−0.0010	*−0.059*		*1.4 1.5*	*0.047*	*191*
585	10.8	33.39	43 27 51.7	5.26	*−0.0082*	*+0.015*	307 3	*0.2 0.4*	*0.091*	*287.8*
586	9.8	40.49	39 0 24.3	6.16	*+0.0000*	*+0.108*	302 122	*0.5 0.2*	*0.121*	*0.9*
587	10.1	41.76	41 41 40.0	6.17	+0.0010	+0.029	299 150	0.3 0.4		
				6.18	+0.0017	+0.000	303 89	0.7 0.7		
					+0.0001	−0.059	306 6	0.3 0.3		
					+0.0012	*−0.004*		*1.3 1.4*	*0.017*	*59*
588	9.3	49.39	39 19 35.7	6.16	*+0.0072*	*+0.006*	302 119	*0.7 0.7*	*0.087*	*77.4*
589	10.6	10 1.37	40 7 27.8	6.16	*+0.0030*	*−0.030*	302 125	*0.7 0.7*	*0.039*	*114*
590	10.7	12.55	42 57 59.7	5.54	+0.0034	+0.006	300 —	0.3 0.5		
				5.47	−0.0005	+0.021	303 95	0.5 0.3		
					−0.0029	+0.038	304 68	0.6 0.2		
					−0.0036	+0.010	307 13	0.6 0.7		
					−0.0016	*+0.014*		*2.0 1.7*	*0.032*	*330*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0001$; 589—590: $+0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.013$; 589—590: $+0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
591	9.3	7 10 25.37	42 28 25.6	5.85	−0.0030	−0.071	300 122	0.2 0.3		
				5.86	+0.0012	−0.069	303 96	0.7 0.7		
					−0.0017	−0.046	307 15	0.4 0.5		
					−0.0003	*−0.062*		*1.3 1.5*	*0.048*	*182*
592	8.8	30.04	44 13 51.0	5.22	−0.0057	+0.014	301 153	0.2 0.2		
					−0.0005	−0.002	304 71	1.0 1.0		
					−0.0013	−0.013	308 14	0.5 0.5		
					−0.0013	*−0.003*		*1.7 1.7*	*0.016*	*313*
593	10.9	33.54	42 12 27.6	6.13	*+0.0052*	*−0.001*	303 101	*0.7 0.7*	*0.060*	*77.6*
594	7.2	46.55	45 18 28.7	6.53	−0.0041	−0.058	301 155	0.2 0.4		
				6.32	+0.0003	−0.074	305 102	0.8 0.8		
					−0.0009	−0.078	308 16	0.9 1.0		
					−0.0007	*−0.073*		*1.9 2.2*	*0.059*	*185.8*
595	5.8	11 5.13	41 3 40.7	6.17	+0.0030	−0.152	302 142	0.2 0.1		
				6.18	−0.0011	−0.047	303 121	0.6 0.4		
					−0.0012	−0.035	306 27	0.9 0.9		
					−0.0007	*−0.047*		*1.7 1.4*	*0.033*	*189*
596	10.4	7.69	42 23 7.8	5.74	−0.0006	+0.041	303 110	0.7 0.7		
					−0.0067	+0.004	307 28	0.6 0.6		
					−0.0034	*+0.024*		*1.3 1.3*	*0.052*	*317.4*
597	10.9	19.00	39 27 23.2	6.16	*−0.0178*	*−0.109*	302 168	*0.7 0.7*	*0.224*	*244.9*
598	8.6	22.77	41 35 16.6	6.17	+0.0004	+0.005	303 126	0.7 0.7		
					+0.0016	−0.009	306 24	0.8 0.8		
					+0.0010	*−0.002*		*1.5 1.5*	*0.018*	*49*
599	10.8	29.83	43 13 34.3	5.25	−0.0033	−0.051	304 86	1.0 0.9		
					−0.0041	−0.028	307 33	0.7 0.7		
					−0.0036	*−0.041*		*1.7 1.6*	*0.047*	*235*
600	8.8	37.31	42 13 46.0	5.77	−0.0015	−0.041	303 123	0.7 0.7		
					−0.0046	−0.012	307 37	0.5 0.5		
					−0.0028	*−0.029*		*1.2 1.2*	*0.034*	*243*
601	11	45.1	42 42 32	5.70	+0.0024	−0.017	303 —	0.7 0.7		
					+0.0011	−0.036	307 —	0.7 0.7		
					+0.0018	*−0.026*		*1.4 1.4*	*0.025*	*119*
602	10.8	12 10.38	40 47 1.4	6.19	+0.0070	−0.022	302 177	0.6 0.6		
					+0.0021	−0.009	306 34	0.9 0.9		
					+0.0041	*−0.014*		*1.5 1.5*	*0.047*	*90*
603	10.4	44.77	41 27 2.3	6.17	+0.0013	−0.029	303 143	0.7 0.7		
					+0.0046	−0.034	306 44	0.9 0.9		
					+0.0032	*−0.032*		*1.6 1.6*	*0.042*	*115*
604	10.8	46.22	39 58 38.2	6.16	*+0.0018*	*−0.056*	302 193	*0.7 0.7*	*0.047*	*152*
605	10.8	13 5.66	40 27 38.7	6.18	−0.0024	−0.041	302 198	0.7 0.7		
					−0.0034	−0.042	306 50	0.9 0.9		
					−0.0030	*−0.042*		*1.6 1.6*	*0.043*	*229*
606	9.6	22.36	43 57 53.0	5.23	−0.0009	+0.004	304 102	1.0 1.0		
					−0.0041	+0.012	307 61	0.5 0.3		
					−0.0035	+0.024	308 41	0.4 0.2		
					−0.0023	*+0.008*		*1.9 1.5*	*0.032*	*314*
607	10.4	25.21	39 13 48.5	6.16	*−0.0023*	*−0.003*	302 212	*0.5 0.5*	*0.026*	*295*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
608	10.5	7 13 32.75	43 58 45.3	5.23	+0.0008	+0.012	304 101	1.0 1.0		
					−0.0017	+0.003	307 60	0.5 0.2		
					−0.0003	+0.020	308 40	0.5 0.2		
					−0.0001	*+0.012*		*2.0 1.4*	*0.026*	*2*
609	8.8	37.68	46 10 38.0	7.98	*+0.0028*	*−0.019*	305 127	*0.8 0.8*	*0.031*	*99*
610	10.3	55.14	44 58 37.2	5.21	−0.0033	−0.053	304 —	0.3 0.3		
					−0.0039	−0.002	305 —	0.3 0.2		
					−0.0030	−0.079	308 46	1.0 1.0		
					−0.0032	*−0.064*		*1.6 1.5*	*0.059*	*212.6*
611	9.8	58.58	43 13 20.8	5.25	+0.0005	−0.053	304 110	0.6 0.6		
					−0.0022	−0.038	307 76	0.7 0.7		
					−0.0010	*−0.045*		*1.3 1.3*	*0.032*	*196*
612	5.9	14 3.31	45 24 47.7	6.32	−0.0011	−0.041	305 132	0.6 0.6		
					−0.0042	−0.004	308 53	1.0 1.0		
					−0.0068	−0.011	312 3	0.2 0.2		
					−0.0035	*−0.017*		*1.8 1.8*	*0.035*	*265*
613	9.9	17.91	44 1 40.3	5.45	+0.0017	−0.048	304 113	1.0 1.0		
				5.98	+0.0018	−0.034	307 82	0.4 0.2		
					+0.0028	−0.035	308 60	0.7 0.4		
					+0.0033	−0.004	311 3	0.2 0.5		
					+0.0022	*−0.034*		*2.3 2.1*	*0.033*	*128*
614	7.7	25.91	39 16 39.0	6.16	*−0.0018*	*−0.029*	302 221	*0.3 0.4*	*0.024*	*232*
615	10.3	38.61	44 47 9.0	5.56	+0.0006	+0.006	304 111	0.4 0.5		
				5.68	−0.0004	−0.032	308 69	1.0 1.0		
					−0.0026	+0.010	311 5	0.2 0.3		
					−0.0004	*−0.014*		*1.6 1.8*	*0.002*	*270*
616	9.8	39.52	43 9 4.6	5.59	−0.0032	−0.034	304 120	0.4 0.4		
					−0.0038	−0.037	307 91	0.7 0.7		
					−0.0070	−0.030	311 10	0.2 0.2		
					−0.0041	*−0.035*		*1.3 1.3*	*0.047*	*243*
617	7.9	15 2.24	41 29 57.5	5.99	−0.0015	−0.050	303 166	0.3 0.4		
				5.94	+0.0028	−0.045	306 69	0.9 0.9		
					−0.0034	−0.047	310 9	0.4 0.6		
					+0.0004	*−0.047*		*1.6 1.9*	*0.034*	*168*
618	9.5	3.71	41 52 3.2	5.89	−0.0019	+0.005	303 165	0.3 0.6		
				5.86	+0.0066	−0.035	306 68	0.9 0.7		
					+0.0012	−0.015	310 6	0.7 0.9		
					+0.0033	*−0.016*		*1.9 2.2*	*0.039*	*93*
619	8.6	4.20	43 37 24.1	6.12	−0.0017	−0.036	304 116	0.5 0.8		
				6.09	−0.0050	−0.083	307 95	0.7 0.7		
					−0.0053	−0.041	311 12	0.5 0.6		
					−0.0041	*−0.053*		*1.7 2.1*	*0.058*	*227.8*
620	8.5	6.82	40 8 53.8	6.19	+0.0021	−0.071	302 227	0.2 0.5		
				6.18	+0.0015	−0.060	306 77	0.9 0.7		
					−0.0033	−0.039	309 8	0.5 0.8		
					+0.0001	*−0.054*		*1.6 2.0*	*0.040*	*176*
621	8.8	13.47	41 17 58.4	5.98	−0.0031	−0.055	303 167	0.2 0.2		
				5.94	+0.0008	−0.079	306 70	0.9 0.9		
					−0.0042	−0.080	310 13	0.4 0.5		
					−0.0011	*−0.076*		*1.5 1.6*	*0.063*	*189.2*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″				
622	10.8	7 15 32.55	44 16 23.3	6.44	+0.0057	+0.061	304	0.3 0.7		
				6.60	+0.0018	+0.051	308 83	1.0 1.0		
					+0.0035	+0.059	311 15	0.6 0.8		
					+0.0030	*+0.056*		*1.9 2.5*	*0.078*	*25.9*
623	9.2	33.81	41 36 6.1	5.84	-0.0014	+0.048	303 171	0.2 0.2		
				5.83	+0.0040	+0.036	306 80	0.9 0.9		
					−0.0015	+0.024	310 20	0.8 0.9		
					+0.0011	*+0.032*		*1.9 2.0*	*0.048*	*17*
624	9.6	35.02	46 16 17.0	5.91	+0.0011	−0.035	305 146	0.3 0.6		
				6.36	+0.0004	−0.049	312 12	0.9 1.0		
					+0.0006	*−0.044*		*1.2 1.6*	*0.031*	*163*
625	10.0	14.31	40 16 9.5	6.19	+0.0006	+0.013	306 83	0.9 0.9		
					−0.0035	+0.011	309 26	0.8 0.9		
					−0.0013	*+0.012*		*1.7 1.8*	*0.029*	*333*
626	9.2	46.06	41 9 41.8	5.95	+0.0071	+0.025	306 81	0.9 0.9		
					+0.0028	+0.018	310 21	0.4 0.4		
					+0.0058	*+0.023*		*1.3 1.3*	*0.077*	*61.4*
627	8.3	49.91	45 11 6.7	5.54	−0.0040	+0.005	305 152	0.2 0.2		
					−0.0067	−0.026	308 80	1.0 1.0		
					−0.0092	−0.039	312 20	0.5 0.5		
					−0.0071	*−0.026*		*1.7 1.7*	*0.075*	*260.8*
628	11	57.8	46 17 2	5.22	*−0.0055*	*0.221*	312 ..	*1.0 1.0*	*0.214*	*194.9*
629	11.1	16 0.02	42 17 37.7	5.28	+0.0040	+0.051	307 109	0.7 0.7		
					−0.0020	−0.017	310 23	0.9 1.0		
					+0.0006	*+0.011*		*1.6 1.7*	*0.027*	*20*
630	8.9	10.61	40 51 17.2	6.19	+0.0040	-0.014	306 90	0.9 0.9		
				6.20	−0.0033	+0.009	309 33	0.5 0.4		
					+0.0014	*−0.007*		*1.4 1.3*	*0.018*	*68*
631	10.9	21.40	41 33 55.8	5.75	+0.0036	−0.097	306 97	0.9 0.9		
					−0.0016	−0.063	310 24	1.0 1.0		
					+0.0009	*−0.079*		*1.9 1.9*	*0.066*	*169.5*
632	10,6	35.00	45 51 47.6	5.22	−0.0017	+0.034	308 90	0.9 0.8		
					−0.0008	+0.036	312 24	1.0 1.0		
					−0.0012	*+0.035*		*1.9 1.8*	*0.050*	*348.5*
633	10.6	36.86	39 50 13.7	6.16	+0.0016	-0.111	309 48	1.0 1.0	*0.099*	*168.3*
634	10.0	47.00	40 50 39.9	6.19	+0.0017	−0.043	306 108	0.9 0.9		
					−0.0012	−0.035	309 42	0.7 0.5		
					+0.0004	*-0.040*		*1.6 1.4*	*0.027*	*165*
635	9.3	51.40	46 44 16.2	5.22	*−0.0008*	*+0.008*	312 25	*0.9 0.8*	*0.023*	*345*
636	10.0	56.56	42 0 50.7	5.51	+0.0048	-0.146	306 103	0.5 0.2		
				5.41	+0.0004	−0.077	307 133	0.4 0.2		
					−0.0019	−0.101	310 47	1.0 1.0		
					+0.0003	*−0.104*		*1.9 1.4*	*0.090*	*176.2*
637	9.6	17 8.01	42 38 24.2	5.28	−0.0059	+0.041	307 130	0.7 0.7		
					−0.0068	+0.055	310 43	1.0 1.0		
					−0.0064	*+0.049*		*1.7 1.7*	*0.093*	*312.4*
638	11.2	8.59	43 2 53.7	5.26	*−0.0050*	*−0.020*	307 127	*0.7 0.7*	*0.053*	*263.5*
639	6.4	13.13	40 51 54.8	6.19	+0.0027	−0.034	306 111	0.9 0.9		
					−0.0020	+0.004	309 50	0.7 0.6		
					+0.0006	*−0.019*		*1.6 1.5*	*0.010*	*119*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s,0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0'',014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1809+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
640	8.8	7 17 16.77	43 25 2.2	6.62	+0.0000	-0.047	307 123	0 7 0.7		
					−0.0010	−0.036	311 41	0.8 0.8		
					−0.0005	*−0.041*		*1.5 1.5*	*0.027*	*188*
641	8.3	19.06	39 19 32.7	6.16	*−0.0003*	*-0.088*	309 56	*1.0 1.0*	*0.074*	*180.8*
642	9.6	26.85	41 48 48.5	5.70	+0.0046	0.043	306 110	0.7 0.6		
				5.67	+0.0006	−0.035	310 55	1.0 1.0		
					+0.0022	*0.038*		*1.7 1.6*	*0.036*	*132*
643	9.6	30.96	42 36 23.0	5.28	+0.0024	0.047	307 140	0.7 0.7		
					+0.0022	−0.023	310 52	1.0 1.0		
					+0.0023	*−0.033*		*1.7 1.7*	*0.033*	*125*
644	8.0	39.93	45 2 46.6	5.21	+0.0002	-0.033	308 107	1.0 1.0		
					−0.0013	−0.050	312 43	0.7 0.4		
					-0.0004	*−0.038*		*1.7 1.4*	*0.024*	*187*
645	9.5	42.70	40 16 11.0	6.18	+0.0015	−0.006	306 115	0.8 0.7		
					+0.0004	-0.021	309 61	1.0 1.0		
					+0.0009	*−0.015*		*1.8 1.7*	*0.012*	*95*
646	10.8	43.43	43 33 50.7	6.62	−0.0017	+0.025	307 134	0.7 0.7		
					−0.0038	+0.023	311 49	0.8 0.8		
					-0.0028	*+0.024*		*1.5 1.5*	*0.048*	*323*
647	8.8	44.23	46 18 8.7	5.22	*−0.0266*	*−0.313*	312 39	*1.0 1.0*	*0.406*	*222.5*
648	9.6	54.37	42 7 28.7	5.28	0.0005	-0.008	307 145	0.5 0.4		
					−0.0015	−0.024	310 59	1.0 1.0		
					-0.0012	*−0.019*		*1.5 1.4*	*0.012*	*246*
649	8.6	18 7.36	47 0 22.7	5.22	*0.0039*	*−0.028*	312 44	0.6 0.3	*0.040*	*250*
650	8.8	16.78	43 9 49.4	6.53	−0.0003	−0.079	307 148	0.7 0.7		
				6.45	+0.0006	−0.041	311 56	0.7 0.6		
					+0.0002	*−0.061*		*1.4 1.3*	*0.047*	*175*
651	9.0	33.03	43 21 3.1	6.62	+0.0005	−0.014	307 147	0.7 0.7		
					+0.0011	+0.009	311 55	0.8 0.8		
					+0.0008	*−0.002*		*1.5 1.5*	*0.016*	*43*
652	10.3	34.44	46 47 22.3	5.22	*−0.0031*	*−0.045*	312 51	*1.0 0.9*	*0.043*	*224*
653	10.9	39.21	42 5 43.7	5.30	+0.0041	0.033	307 —	0.4 0.3		
					-0.0014	-0.016	310 72	1.0 1.0		
					+0.0002	*−0.020*		*1.4 1.3*	*0.007*	*146*
654	7.4	59.57	42 21 49.1	5.28	-0.0053	-0.059	307 158	0.6 0.6		
					0.0061	-0.015	310 71	1.0 1.0		
					-0.0058	*0.032*		*1.6 1.6*	*0.066*	*254.1*
655	10.4	59.98	42 59 35.7	5.28	+0.0013	-0.008	307 157	0.7 0.7		
				5.27	−0.0020	+0.048	310 69	0.6 0.3		
					−0.0002	*+0.009*		*1.3 1.0*	*0.023*	*358*
656	11	19 0.6	40 18 18	6.16	*+0.0103*	*+0.001*	309	*1.0 1.0*	*0.121*	*82.9*
657	10.4	13.83	41 0 10.9	5.94	-0.0022	-0.005	306 125	0.8 0.9		
				6.03	−0.0003	+0.048	309 91	0.6 0.3		
					−0.0024	−0.039	310 82	0.6 0.3		
					−0.0017	*−0.001*		*2.0 1.5*	*0.021*	*307*
658	8.1	29.29	46 23 16.8	5.22	*+0.0003*	*−0.024*	312 54	*1.0 1.0*	*0.011*	*153*
659	8.3	35.79	44 40 38.5	6.47	−0.0008	−0.021	308 128	0.8 1.0		
				6.24	−0.0019	−0.030	311 69	0.8 0.8		
					+0.0009	−0.041	315 4	0.4 0.7		
					−0.0009	*−0.029*		*2.0 2.5*	*0.017*	*205*
660	9.2	36.83	46 20 38.6	5.22	*+0.0006*	*+0.000*	312 60	*1.0 1.0*	*0.016*	*30*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′ ″		s	″			″	
661	9.4	7 19 48.41	41 25 28.6	5.54	+0.0064	+0.036	306 130	0.4 0.6		
				5.57	+0.0043	+0.016	310 84	1.0 1.0		
					+0.0028	+0.036	313 2	0.4 0.6		
					+0.0044	*+0.027*		*1.8 2.2*	*0.066*	*51.7*
662	7.7	53.36	43 27 25.5	6.62	+0.0005	−0.060	307 164	0.4 0.5		
				6.39	−0.0003	−0.036	311 71	0.8 0.8		
					−0.0029	+0.002	314 4	0.3 0.5		
					−0.0006	*−0.032*		*1.5 1.8*	*0.019*	*196*
663	8.4	20 2.76	45 52 53.0	5.22	−0.0019	−0.034	308 130	0.3 0.3		
					+0.0008	−0.043	312 67	1.0 1.0		
					+0.0018	−0.009	315 5	0.3 0.3		
					+0.0005	*−0.035*		*1.6 1.6*	*0.022*	*162*
664	10.1	6.67	39 30 21.0	6.16	*−0.0001*	*−0.048*	309 127	*1.0 1.0*	*0.034*	*178*
665	10.6	16.88	43 30 35.6	6.56	+0.0004	−0.037	307 170	0.3 0.4		
				6.44	−0.0024	−0.037	311 81	0.8 0.8		
					−0.0001	−0.032	314 10	0.5 0.5		
					−0.0012	*−0.036*		*1.6 1.7*	*0.025*	*207*
666	8.6	29.23	39 8 27.6	6.16	*−0.0069*	*−0.075*	309 139	*1.0 0.9*	*0.099*	*232.0*
667	7.6	35.05	39 30 58.3	6.16	*−0.0085*	*−0.086*	309 137	*1.0 1.0*	*0.121*	*233.4*
668	9.5	48.11	39 2 40.8	6.16	*+0.0014*	*−0.016*	309 140	*0.8 0.4*	*0.018*	*96*
669	6.5	49.60	46 43 26.0	5.22	*+0.0013*	*−0.053*	312 71	*1.0 1.0*	*0.042*	*158*
670	9.0	57.49	39 58 12.0	6.02	+0.0017	−0.106	309 144	1.0 1.0		
					+0.0006	−0.080	313 10	0.2 0.2		
					+0.0015	*−0.102*		*1.2 1.2*	*0.090*	*167.8*
671	7.9	58.26	46 29 21.8	5.22	*−0.0003*	*−0.083*	312 72	*1.0 1.0*	*0.069*	*180.8*
672	8.5	58.30	45 27 22.8	5.21	−0.0015	+0.014	308 135	0.1 0.2		
					−0.0003	+0.010	312 79	1.0 1.0		
					+0.0010	+0.021	315 11	0.9 1.0		
					+0.0002	*+0.015*		*2.0 2.2*	*0.029*	*10*
673	7.6	21 15.10	40 51 32.5	5.70	+0.0088	−0.023	309 141	0.9 0.8		
				5.68	+0.0080	−0.068	313 12	1.0 1.0		
					+0.0084	*−0.048*		*1.9 1.8*	*0.103*	*109.3*
674	10.0	30.36	41 34 28.7	5.30	+0.0033	+0.046	310 106	1.0 1.0		
					+0.0022	+0.041	313 13	0.9 0.9		
					+0.0028	*+0.044*		*1.9 1.9*	*0.067*	*29.6*
675	9.4	32.20	46 30 1.4	5.22	*−0.0007*	*−0.080*	312 81	*1.0 1.0*	*0.066*	*185.2*
676	7.1	35.01	46 31 8.5	5.22	*−0.0025*	*−0.078*	312 80	*1.0 1.0*	*0.068*	*199.8*
677	9.2	51.10	43 43 20.5	6.69	+0.0049	−0.026	311 104	0.8 0.8		
				6.77	+0.0066	+0.029	314 32	0.6 0.6		
					+0.0056	*−0.002*		*1.4 1.4*	*0.064*	*79.2*
678	10.6	22 14.18	45 16 3.2	5.21	+0.0042	−0.031	312 89	1.0 0.9		
					+0.0043	−0.036	315 25	1.0 1.0		
					+0.0042	*−0.034*		*2.0 1.9*	*0.051*	*113.1*
679	8.4	16.61	45 51 19.7	5.22	−0.0032	−0.048	312 87	1.0 1.0		
					−0.0017	−0.020	315 23	0.8 0.7		
					−0.0025	*−0.036*		*1.8 1.7*	*0.033*	*229*
680	8.7	20.15	43 32 44.2	6.62	−0.0043	−0.037	311 109	0.8 0.8		
					−0.0040	+0.016	314 40	0.7 0.7		
					−0.0042	*−0.012*		*1.5 1.5*	*0.043*	*273*
681	10.5	23 5.07	46 12 58.8	5.22	*−0.0019*	*−0.006*	312 93	*1.0 1.0*	*0.020*	*294*

$\Delta\,\mu'_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
682	9.2	7 23 7.59	40 19 49.0	5.72	−0.0036	+0.019	309 188	1.0 1.0		
					−0.0038	−0.026	313 50	1.0 1.0		
					−0.0037	*−0.004*		*2.0 2.0*	*0.041*	*284*
683	10.6	8.59	41 37 24.8	5.30	−0.0009	+0.008	310 144	1.0 1.0		
					+0.0017	−0.022	313 44	1.0 1.0		
					+0.0004	*−0.007*		*2.0 2.0*	*0.009*	*41*
684	10.7	30.07	45 16 32.2	5.21	*+0.0043*	*−0.011*	315 34	*1.0 1.0*	*0.048*	*86*
685	9.4	31.67	44 54 30.9	6.13	−0.0027	−0.033	311 117	0.4 0.3		
				6.00	−0.0007	−0.029	315 37	1.0 1.0		
					−0.0013	*−0.030*		*1.4 1.3*	*0.019*	*215*
686	7.8	40.32	42 5 53.5	5.28	+0.0015	−0.040	310 153	1.0 1.0		
					+0.0002	−0.049	314 62	0.6 0.5		
					+0.0010	*−0.043*		*1.6 1.5*	*0.032*	*156*
687	10.6	50.66	46 21 35.8	5.22	*−0.0020*	*−0.014*	312 97	*1.0 1.0*	*0.019*	*270*
688	11.0	55.04	44 6 44.9	5.21	−0.0026	−0.036	311 —	0.8 0.8		
					−0.0015	−0.027	315 46	0.9 0.7		
					−0.0020	*−0.032*		*1.7 1.5*	*0.027*	*228*
689	9.8	24 3.73	40 18 59.5	5.70	+0.0021	−0.090	309 211	0.9 1.0		
				5.72	+0.0004	−0.120	313 81	1.0 1.0		
					+0.0012	*−0.105*		*1.9 2.0*	*0.092*	*170.0*
690	9.7	4.79	43 3 50.7	6.04	+0.0004	−0.045	311 127	0.3 0.3		
				5.89	+0.0021	+0.015	314 69	0.7 0.7		
					+0.0016	*−0.003*		*1.0 1.0*	*0.022*	*60*
691	10.8	5.75	45 53 28.6	5.22	−0.0063	+0.033	312 101	1.0 1.0		
					+0.0018	+0.009	315 47	0.9 0.7		
					−0.0025	*+0.023*		*1.9 1.7*	*0.044*	*327*
692	10.6	15.78	42 15 33.4	5.28	+0.0000	+0.003	310 163	0.8 1.0		
					−0.0028	+0.034	314 82	0.7 0.7		
					−0.0026	+0.011	317 2	0.1 0.3		
					−0.0014	*+0.015*		*1.6 2.0*	*0.032*	*334*
693	8.4	21.30	45 19 16.2	5.51	+0.0009	−0.015	312 107	0.7 0.7		
				5.63	+0.0018	−0.019	315 51	1.0 1.0		
					+0.0049	−0.021	319 8	0.2 0.2		
					+0.0018	*−0.018*		*1.9 1.9*	*0.021*	*101*
694	10.6	27.76	39 40 33.9	6.16	*+0.0053*	*−0.023*	309 216	*0.7 0.9*	*0.064*	*98.1*
695	9.3	29.06	44 47 31.0	5.90	+0.0172	+0.022	311 128	0.3 0.3		
					+0.0226	+0.016	315 57	1.0 1.0		
					+0.0227	−0.005	318 4	0.2 0.2		
					+0.0215	*+0.014*		*1.5 1.5*	*0.233*	*83.1*
696	8.7	36.32	43 16 41.2	5.89	+0.0035	−0.039	311 135	0.3 0.4		
				6.01	+0.0030	+0.018	314 90	0.7 0.7		
					+0.0024	+0.020	318 8	0.3 0.3		
					+0.0030	*+0.002*		*1.3 1.4*	*0.038*	*65*
697	11.0	53.43	43 29 18.8	5.26	*−0.0029*	*+0.018*	314 85	*0.7 0.7*	*0.043*	*318*
698	10.3	53.76	40 29 0.1	5.65	−0.0060	+0.025	309 218	0.4 0.6		
				5.75	−0.0039	−0.007	313 92	1.0 1.0		
					−0.0034	−0.006	316 5	0.4 0.6		
					−0.0043	*+0.002*		*1.8 2.2*	*0.049*	*289*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
699	9.3	7 25 3.85	44 59 6.4	5.83	−0.0033	+0.001	311 133	0.2 0.2		
					−0.0038	+0.040	312 109	0.2 0.2		
					+0.0020	−0.015	315 73	1.0 1.0		
					+0.0010	−0.000	318 10	0.2 0.2		
					+0.0040	−0.001	319 10	0.2 0.2		
					+0.0009	*−0.004*		*1.8 1.8*	*0.016*	*50*
700	8.6	7.32	40 39 42.1	5.65	+0.0022	+0.006	309 217	0.3 0.3		
				5.68	+0.0002	0.042	313 95	1.0 1.0		
					+0.0010	−0.034	316 4	0.5 0.6		
					+0.0008	*−0.032*		*1.8 1.9*	*0.021*	*149*
701	6.3	8.49	39 6 23.6	6.16	−0.0021	−0.038	309 225	0.2 0.2		
					−0.0038	−0.015	316 9	0.3 0.3		
					−0.0031	*−0.024*		*0.5 0.5*	*0.036*	*254*
702	7.6	22.21	46 44 49.1	6.94	−0.0035	−0.028	312 111	0.3 0.4		
				6.75	−0.0036	+0.006	319 13	0.4 0.4		
					−0.0036	*0.011*		*0.7 0.8*	*0.035*	*275*
703	8.5	26.36	46 58 48.2	5.22	*−0.0001*	*+0.032*	312 110	*0.2 0.2*	*0.046*	*1*
704	10.0	40.90	45 29 15.4	6.32	−0.0026	−0.000	312 115	0.2 0.5		
				6.25	−0.0015	+0.004	315 79	1.0 1.0		
					−0.0003	−0.030	319 16	0.6 0.7		
					−0.0012	*−0.008*		*1.8 2.2*	*0.013*	*299*
705	9.2	51.47	46 26 58.8	7.48	+0.0015	−0.051	312 116	0.2 0.5		
				7.06	+0.0025	−0.010	319 17	0.7 0.8		
					+0.0023	*−0.026*		*0.9 1.3*	*0.029*	*115*
706	8.9	53.31	43 15 58.1	5.25	+0.0025	+0.001	314 109	0.7 0.7		
					−0.0005	−0.017	318 19	0.6 0.6		
					+0.0011	*−0.007*		*1.3 1.3*	*0.016*	*63*
707	8.6	59.52	43 32 39.5	5.25	+0.0049	+0.003	314 113	0.7 0.7		
					+0.0036	−0.027	318 22	0.9 1.0		
					+0.0042	*−0.015*		*1.6 1.7*	*0.048*	*91*
708	8.5	26 1.83	40 3 22.0	5.77	−0.0098	−0.073	313 106	0.8 0.4		
				5.91	−0.0075	−0.070	316 18	1.2 1.2		
					−0.0084	*−0.071*		*2.0 1.6*	*0.110*	*238.8*
709	10.9	3.93	41 2 50.0	5.29	*−0.0015*	*−0.027*	313 104	*1.0 1.0*	*0.019*	*227*
710	9.4	28.68	47 2 40.1	7.98	*−0.0073*	*+0.142*	319 23	*0.2 0.2*	*0.172*	*335.2*
711	9.1	45.79	39 40 10.3	6.16	*−0.0015*	*−0.070*	316 41	*1.2 1.2*	*0.058*	*195.0*
712	9.0	47.95	43 16 48.6	5.25	−0.0046	−0.059	314 124	0.7 0.7		
					−0.0051	−0.079	318 26	0.9 0.8		
					−0.0049	*−0.070*		*1.6 1.5*	*0.075*	*221.8*
713	9.9	49.69	41 11 3.1	5.29	−0.0005	+0.009	313 121	1.0 1.0		
					−0.0028	+0.013	317 25	0.7 0.6		
					−0.0014	*+0.010*		*1.7 1.6*	*0.028*	*330*
714	10.6	50.58	45 38 48.1	6.60	−0.0022	−0.035	315 95	1.0 1.0		
					+0.0006	−0.053	319 33	0.8 0.8		
					−0.0010	*−0.043*		*1.8 1.8*	*0.030*	*194*
715	11	27 0.8	45 36 52	6.60	+0.0031	+0.022	315 -	1.0 1.0		
					+0.0006	+0.050	319	0.8 0.8		
					+0.0020	*+0.034*		*1.8 1.8*	*0.053*	*25.6*
716	9.0	2.63	42 23 31.4	5.24	−0.0023	−0.031	314 130	0.7 0.7		
					−0.0036	−0.035	318 33	1.0 1.0		
					−0.0031	*−0.033*		*1.7 1.7*	*0.036*	*238*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
717	11	7 27 4.4	41 47 7	5.30	+0.0004	+0.057	313 —	0.9 0.8		
					+0.0022	+0.011	317 —	1.0 1.0		
					+0.0013	*+0.031*		*1.9 1.8*	*0.049*	*23*
718	8.6	9.16	44 59 30.2	5.91	−0.0011	−0.033	315 108	1.0 1.0		
				5.61	+0.0014	−0.019	318 27	0.5 0.2		
					+0.0003	−0.047	319 34	0.4 0.2		
					−0.0001	*−0.033*		*1.9 1.4*	*0.019*	*174*
719	7.8	11.26	42 18 7.3	5.28	−0.0058	+0.004	314 136	0.7 0.7		
					−0.0077	+0.017	317 28	1.0 1.0		
					−0.0069	*+0.012*		*1.7 1.7*	*0.078*	*289.4*
720	10.5	14.63	45 27 22.1	6.60	+0.0011	−0.008	315 105	1.0 1.0		
					+0.0010	−0.017	319 39	0.8 0.8		
					+0.0011	*−0.012*		*1.8 1.8*	*0.014*	*82*
721	8.2	19.48	45 8 26.7	6.44	+0.0048	+0.010	315 107	1.0 1.0		
				6.35	+0.0067	−0.035	319 41	0.6 0.6		
					+0.0055	*−0.007*		*1.6 1.6*	*0.061*	*83.5*
722	8.6	31.85	43 18 25.7	5.24	−0.0003	−0.018	314 142	0.7 0.7		
					−0.0004	−0.028	318 40	1.0 1.0		
					−0.0004	*−0.024*		*1.7 1.7*	*0.010*	*186*
723	10.4	34.62	42 4 16.0	5.28	+0.0032	+0.001	314 148	0.5 0.3		
				5.29	+0.0039	+0.014	317 38	1.0 1.0		
					+0.0037	*+0.011*		*1.5 1.3*	*0.051*	*60.4*
724	10.4	46.23	41 39 0.7	5.30	−0.0015	−0.044	313 130	1.0 0.9		
					−0.0020	−0.059	317 41	1.0 1.0		
					−0.0018	*−0.052*		*2.0 1.9*	*0.042*	*204*
725	11.0	28 8.04	42 27 40.5	5.28	−0.0042	−0.061	314 154	0.7 0.7		
					−0.0016	−0.059	317 44	1.0 1.0		
					−0.0027	*−0.060*		*1.7 1.7*	*0.053*	*210.4*
726	11.2	17.75	39 52 21.3	6.16	*+0.0003*	*−0.014*	316 82	*1.2 1.2*	*0.006*	*90*
727	9.2	19.64	45 36 13.5	6.60	−0.0037	−0.043	315 125	1.0 1.0		
					−0.0037	−0.043	319 53	0.8 0.8		
					−0.0037	*−0.043*		*1.8 1.8*	*0.046*	*231*
728	5.8	53.83	43 15 4.5	5.24	−0.0025	−0.097	314 167	0.7 0.7		
					−0.0011	−0.073	318 58	1.0 1.0		
					−0.0017	*−0.083*		*1.7 1.7*	*0.071*	*193.1*
729	9.2	29 14.76	42 46 42.1	5.28	−0.0028	−0.037	314 176	0.6 0.7		
					−0.0032	−0.016	317 68	1.0 0.9		
					−0.0037	−0.016	321 3	0.2 0.2		
					−0.0031	*−0.024*		*1.8 1.8*	*0.034*	*253*
730	6.9	16.20	46 24 3.6	7.98	*−0.0010*	*−0.010*	319 65	*0.8 0.8*	*0.008*	*300*
731	9.0	27.88	39 59 2.4	6.02	−0.0050	−0.033	313 152	0.2 0.2		
					−0.0027	−0.029	316 99	1.2 1.2		
					−0.0030	*−0.030*		*1.4 1.4*	*0.036*	*243*
732	11.1	35.83	42 33 12.9	5.30	*−0.0018*	*−0.040*	314 —	*0.5 0.6*	*0.031*	*213*
733	11	44.5	42 33 37	5.29	+0.0029	−0.004	317 —	1.0 1.0		
					−0.0002	−0.033	321 —	0.2 0.4		
					+0.0024	*−0.012*		*1.2 1.4*	*0.029*	*86*
734	11.0	48.12	39 42 50.6	6.16	*−0.0022*	*−0.081*	316 110	*1.2 1.2*	*0.071*	*198.9*

$\Delta \mu_\alpha = + 0^s.0002$; $\Delta \mu_\delta = + 0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
735	9.8	7 29 48.60	40 58 53.9	5.56	−0.0032	+0.026	313 149	0.7 0.8		
				5.42	−0.0021	+0.013	316 102	0.9 0.4		
					−0.0013	+0.014	317 76	0.6 0.2		
					−0.0041	+0.020	320 5	0.3 0.7		
					−0.0025	*+0.020*		*2.5 2.1*	*0.042*	*324*
736	10.7	50.14	42 52 19.1	5.28	−0.0027	+0.034	314 180	0.5 0.6		
					−0.0028	−0.011	317 71	1.0 0.8		
					−0.0028	*+0.008*		*1.5 1.4*	*0.036*	*308*
737	10.0	55.12	40 54 22.2	5.70	−0.0016	+0.014	313 157	0.6 0.8		
				5.55	−0.0004	−0.019	316 103	1.1 0.9		
					−0.0006	−0.009	320 6	0.4 0.8		
					−0.0008	*−0.005*		*2.1 2.5*	*0.011*	*326*
738	10.7	30 1.30	39 12 29.4	6.16	*−0.0013*	*+0.001*	316 123	*1.2 1.2*	*0.019*	*321*
739	11.2	16.00	39 57 32.9	6.16	*−0.0017*	*−0.031*	316 119	*1.2 1.2*	*0.023*	*223*
740	8.8	22.84	39 19 6.1	6.16	*−0.0021*	*−0.009*	316 122	*1.2 1.2*	*0.022*	*283*
741	10.2	26.78	39 37 0.5	6.16	*+0.0014*	*−0.027*	316 133	*1.2 1.2*	*0.023*	*124*
742	7.6	27.30	40 14 55.1	5.87	−0.0047	−0.077	313 166	0.1 0.2		
				5.80	−0.0033	−0.069	316 131	1.2 1.2		
					−0.0002	−0.059	320 14	0.4 0.5		
					−0.0027	*−0.067*		*1.7 1.9*	*0.059*	*207.0*
743	9.0	28.29	41 0 24.2	5.29	−0.0022	+0.042	313 164	0.2 0.5		
					−0.0012	+0.027	317 87	0.7 0.3		
					+0.0014	+0.015	320 12	0.9 1.0		
					+0.0000	*+0.024*		*1.8 1.8*	*0.038*	*5*
744	9.3	31.49	43 8 12.1	5.25	−0.0008	−0.002	314 186	0.2 0.4		
					−0.0012	−0.021	318 84	1.0 0.9		
					+0.0005	−0.014	321 16	0.6 0.7		
					−0.0006	*−0.015*		*1.8 2.0*	*0.004*	*256*
745	9.6	33.67	40 58 34.0	6.16	*−0.0039*	*+0.037*	316 126	*0.9 0.4*	*0.065*	*321.2*
746	9.1	33.81	45 48 6.8	6.84	−0.0054	+0.024	315 141	0.2 0.2		
					−0.0010	+0.001	319 85	0.8 0.8		
					−0.0031	−0.004	322 10	0.5 0.5		
					−0.0023	*+0.002*		*1.5 1.5*	*0.026*	*307*
747	8.7	45.10	46 3 36.9	7.98	*+0.0012*	*−0.005*	319 84	*0.8 0.8*	*0.018*	*61*
748	7.8	50.96	44 57 9.4	5.22	−0.0014	−0.061	315 147	0.2 0.5		
				5.21	+0.0026	−0.051	318 76	0.8 0.4		
					−0.0028	−0.061	322 16	1.0 1.0		
					−0.0005	*−0.059*		*2.0 1.9*	*0.045*	*184*
749	10.8	52.40	43 13 44.4	5.24	+0.0009	−0.028	318 83	1.0 1.0		
					+0.0003	−0.041	321 15	0.7 0.7		
					+0.0007	*−0.033*		*1.7 1.7*	*0.022*	*150*
750	8.2	53.34	46 45 59.8	7.98	*+0.0006*	*+0.016*	319 82	*0.8 0.8*	*0.031*	*17*
751	9.2	31 9.75	43 48 4.6	5.24	−0.0094	−0.150	318 95	1.0 1.0		
					−0.0109	−0.162	321 19	0.4 0.4		
					−0.0098	*−0.153*		*1.4 1.4*	*0.174*	*216.8*
752	7.8	18.52	42 41 19.3	5.28	−0.0037	−0.174	317 90	1.0 1.0		
					+0.0009	−0.193	321 23	0.7 0.7		
					−0.0018	*−0.182*		*1.7 1.7*	*0.169*	*185.8*
753	10.6	24.49	44 25 7.7	5.22	+0.0025	−0.066	318 100	1.0 1.0		
					−0.0003	−0.062	322 30	0.9 0.9		
					+0.0012	*−0.064*		*1.9 1.9*	*0.052*	*163.3*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		ˢ	″			″	
754	10.7	7 31 28.81	39 34 4.7	6.16	*−0.0030*	*−0.001*	316 148	*1.2 1.2*	*0.035*	*292*
755	11	30.3	40 54 25	5.68	−0.0022	+0.002	316	1.0 0.9		
				5.65	−0.0027	+0.004	320	1.0 1.0		
					−0.0024	*+0.003*		*2.0 1.9*	*0.030*	*304*
756	8.9	30.52	39 44 44.8	6.16	*+0.0000*	*−0.022*	316 147	*1.2 1.2*	*0.009*	*159*
757	9.3	37.51	41 28 59.2	5.30	+0.0060	−0.247	317 101	1.0 1.0		
					+0.0048	−0.242	320 26	1.0 1.0		
					+0.0054	*−0.244*		*2.0 2.0*	*0.238*	*164.7*
758	10.6	43.99	41 10 58.5	5.29	+0.0036	−0.247	317 104	0.9 0.8		
					+0.0019	−0.251	320 29	1.0 1.0		
					+0.0027	*−0.249*		*1.9 1.8*	*0.237*	*171.8*
759	11	54.1	40 14 0	6.16	*+0.0026*	*−0.073*	316 —	*1.2 1.2*	*0.069*	*149.3*
760	10.2	32 1.14	43 20 30.1	5.24	−0.0023	−0.015	318 109	1.0 1.0		
					+0.0023	−0.010	321 31	0.7 0.7		
					−0.0004	*0.013*		*1.7 1.7*	*0.002*	*270*
761	11	6.8	40 11 13	6.16	*−0.0004*	*−0.009*	316 —	*1.2 1.2*	*0.004*	*346*
762	11.0	12.59	40 22 30.3	6.16	+0.0015	−0.011	316 159	1.2 1.2		
					−0.0002	+0.007	320 —	1.0 1.0		
					+0.0007	*−0.003*		*2.2 2.2*	*0.015*	*48*
763	8.2	27.47	45 54 1.2	6.84	+0.0015	−0.070	319 105	0.8 0.8		
				7.06	+0.0007	−0.073	322 36	0.7 0.5		
					+0.0011	*−0.071*		*1.5 1.3*	*0.060*	*165.5*
764	8.2	39.30	39 1 20.0	6.16	*−0.0005*	*−0.044*	316 167	*0.6 0.4*	*0.031*	*184*
765	9.8	46.53	43 33 20.8	5.24	−0.0060	−0.105	318 120	1.0 1.0		
					−0.0042	−0.108	321 45	0.7 0.7		
					−0.0053	*−0.106*		*1.7 1.7*	*0.108*	*210.1*
766	10.2	46.63	42 0 8.1	5.29	−0.0032	−0.098	317 118	1.0 1.0		
					−0.0033	−0.060	320 —	0.5 0.3		
					+0.0034	−0.051	321 50	0.4 0.2		
					−0.0018	*−0.084*		*1.9 1.5*	*0.073*	*193.5*
767	10.6	49.28	44 47 12.9	5.22	+0.0032	+0.018	318 115	0.8 0.8		
					+0.0003	+0.003	322 41	1.0 1.0		
					+0.0016	*+0.010*		*1.8 1.8*	*0.030*	*40*
768	8.6	52.59	43 33 9.9	5.24	+0.0007	−0.036	318 119	1.0 1.0		
					+0.0005	−0.056	321 44	0.7 0.7		
					+0.0006	*−0.044*		*1.7 1.7*	*0.033*	*162*
769	9.2	52.92	44 2 33.3	5.23	−0.0017	−0.027	318 118	1.0 1.0		
					−0.0001	−0.028	321 43	0.2 0.2		
					−0.0020	+0.031	322 44	0.7 0.4		
					−0.0017	*−0.013*		*1.9 1.6*	*0.014*	*270*
770	8.4	53.41	46 31 54.7	7.98	*+0.0017*	*+0.024*	319 109	*0.8 0.8*	*0.043*	*30*
771	9.8	33 8.89	47 1 52.0	7.98	*−0.0035*	*−0.064*	319 107	*0.2 0.2*	*0.061*	*212.9*
772	11	8.90	42 23 28.4	5.26	−0.0023	−0.006	317 —	1.0 1.0		
					+0.0064	+0.020	321 49	0.7 0.7		
					+0.0013	*+0.005*		*1.7 1.7*	*0.025*	*43*
773	8.4	16.41	42 20 1.5	5.28	−0.0031	−0.041	317 122	1.0 1.0		
					+0.0011	−0.062	321 59	0.7 0.7		
					−0.0014	*−0.050*		*1.7 1.7*	*0.039*	*198*
774	10.5	17.09	42 20 5.0	5.30	−0.0027	−0.043	317 121	1.0 1.0		
					+0.0028	−0.016	321 —	0.7 0.7		
					−0.0004	*−0.032*		*1.7 1.7*	*0.019*	*186*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.014$; 760—774: $+\,0''.013$.

N:o	Gr,	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
775	10.8	7 33 37.81	41 49 59.7	5.30	+0.0225	−0.320	317 130	1.0 1.0		
					+0.0189	−0.275	320 38	0.9 0.8		
					+0.0208	*−0.300*		*1.9 1.8*	*0.371*	*140.7*
776	8.4	40.09	46 50 44.8	7.98	*+0.0009*	*+0.028*	319 111	*0.5 0.4*	*0.043*	*16*
777	9.2	44.24	40 51 39.2	5.58	−0.0075	−0.030	316 178	0.6 0.6		
					-0.0031	−0.022	320 54	1.0 1.0		
					-0.0048	*−0.025*		*1.6 1.6*	*0.052*	*256.8*
778	9.1	53.14	40 21 35.9	5.70	+0.0011	−0.038	316 180	1.1 1.2		
				5.72	−0.0001	−0.030	320 57	1.0 1.0		
					+0.0005	*−0.034*		*2.1 2.2*	*0.023*	*157*
779	9.7	34 2.67	40 31 6.8	5.68	−0.0010	−0.058	316 195	1.0 1.0		
					+0.0016	−0.035	320 55	1.0 1.0		
					+0.0003	*−0.046*		*2.0 2.0*	*0.034*	*168*
780	11.0	15.54	43 6 43.3	5.26	*+0.0106*	*−0.141*	321 74	*0.7 0.7*	*0.175*	*137.1*
781	8.9	23.31	46 3 31.5	7.20	+0.0014	+0.049	319 122	0.8 0.8		
				7.05	−0.0030	+0.042	322 53	0.2 0.2		
					−0.0023	+0.045	326 4	0.3 0.5		
					-0.0001	*+0.047*		*1.3 1.5*	*0.060*	*1.0*
782	8.7	29.62	43 10 52.4	5.59	−0.0076	−0.098	318 140	0.4 0.4		
					−0.0054	−0.134	321 73	0.7 0.7		
					−0.0083	−0.092	325 8	0.2 0.2		
					−0.0065	*−0.116*		*1.3 1.3*	*0.123*	*213.4*
783	8.8	30.13	46 43 9.3	7.33	−0.0027	+0.015	319 119	0.4 0.4		
				7.21	−0.0043	+0.022	326 2	0.2 0.3		
					−0.0032	*+0.018*		*0.6 0.7*	*0.043*	*316*
784	8.7	32.25	44 21 55.4	5.64	+0.0030	−0.028	318 135	0.8 0.9		
				5.96	+0.0010	−0.024	322 59	1.0 1.0		
					−0.0007	−0.056	325 9	0.3 0.5		
					+0.0015	*−0.032*		*2.1 2.4*	*0.027*	*135*
785	11.0	34.42	45 28 5.2	5.21	*−0.0008*	*−0.083*	322 61	*1.0 1.0*	*0.070*	*184.1*
786	8.9	34.61	40 1 27.5	5.80	+0.0039	−0.015	316 204	1.0 1.1		
				6.01	+0.0012	+0.003	320 72	0.7 0.3		
					−0.0003	−0.001	323 2	0.2 0.5		
					+0.0025	*−0.008*		*1.9 1.9*	*0.031*	*81*
787	9.2	45.20	46 26 59.7	7.26	+0.0009	−0.038	319 120	0.6 0.6		
				7.17	−0.0015	−0.056	326 5	0.4 0.5		
					0.0001	*−0.046*		*1.0 1.1*	*0.033*	*177*
788	10.4	53.49	40 19 46.1	5.65	−0.0065	−0.148	316 208	0.5 0.9		
				5.80	−0.0047	−0.069	320 70	1.0 1.0		
					−0.0085	−0.076	323 7	0.3 0.6		
					−0.0058	*−0.099*		*1.8 2.5*	*0.107*	*216.2*
789	9.1	56.39	43 19 32.6	5.86	−0.0013	−0.056	318 144	0.4 0.5		
				5.93	+0.0031	−0.030	321 83	0.7 0.7		
					-0.0024	−0.025	325 12	0.3 0.4		
					+0.0007	*−0.037*		*1.4 1.6*	*0.026*	*157*
790	9.2	59.36	40 8 20.1	5.68	+0.0042	−0.031	316 209	0.5 1.0		
				5.85	−0.0004	−0 006	320 71	1.0 0.9		
					-0.0016	−0.001	323 8	0.4 0.7		
					+0.0006	*−0.014*		*1.9 2.6*	*0.009*	*96*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\ 0^s.0002$; 779—790; $+\ 0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\ 0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′ ″		s	″			″	
791	10.7	7 35 2.43	39 57 3.4	6.16	+0.0035	−0.011	316 210	0.4 0.9		
					−0.0053	+0.000	323 9	0.5 0.7		
					−0.0014	*−0.006*		*0.9 1.6*	*0.015*	*298*
792	9.0	4.83	44 27 24.4	6.10	−0.0003	−0.047	318 141	0.5 0.7		
					−0.0050	−0.057	322 73	1.0 1.0		
					−0.0048	−0.065	325 14	0.6 0.6		
					−0.0038	*−0.056*		*2.1 2.3*	*0.057*	*221.5*
793	10.1	25.42	43 10 30.7	5.94	−0.0201	−0.057	318 149	0.2 0.2		
					−0.0140	−0.090	321 93	0.7 0.7		
					−0.0182	−0.033	325 16	0.3 0.3		
					- 0.0161	*−0.070*		*1.2 1.2*	*0.182*	*251.8*
794	10.4	26.77	45 57 6.8	6.26	−0.0049	+0.012	319 125	0.4 0.6		
				6.63	−0.0015	+0.030	322 66	0.8 0.5		
					−0.0060	−0.001	326 7	0.6 0.7		
					−0.0038	*+0.012*		*1.8 1.8*	*0.044*	*305*
795	8.5	32.14	44 35 49.6	6.18	+0.0024	+0.007	318 146	0.3 0.4		
				6.22	−0.0003	−0.014	322 81	1.0 1.0		
					−0.0014	−0.046	325 17	0.6 0.6		
					−0.0002	*−0.019*		*1.9 2.0*	*0.006*	*171*
796	8.3	41.74	46 3 11.3	6.38	+0.0000	−0.044	319 124	0.2 0.6		
				6.78	−0.0019	−0.026	322 74	0.3 0.2		
					−0.0007	−0.049	326 10	0.7 0.7		
					−0.0009	*−0.044*		*1.2 1.5*	*0.032*	*191*
797	9.4	47.71	41 44 36.0	5.69	−0.0032	−0.125	320 76	1.0 1.0		
				5.71	−0.0039	−0.131	324 8	0.6 0.7		
					−0.0035	*−0.127*		*1.6 1.7*	*0.120*	*197.5*
798	10.5	53.89	44 16 29.0	6.47	+0.0017	+0.033	318 151	0.2 0.3		
				6.42	+0.0046	+0.019	322 84	1.0 1.0		
					+0.0010	0.021	325 22	0.8 0.8		
					+0.0029	*+0.006*		*2.0 2.1*	*0.039*	*61*
799	10.8	36 2.21	45 23 51.3	5.21	+0.0039	+0.101	322 90	1.0 1.0		
					+0.0044	+0.105	326 -	0.6 0.6		
					+0.0041	*+0.102*		*1.6 1.6*	*0.124*	*21.8*
800	9.4	30.59	46 23 11.1	6.25	*−0.0035*	*+0.009*	326 15	*0.7 0.7*	*0.040*	*304*
801	10.3	42.10	44 15 20.0	6.60	+0.0050	−0.023	322 101	1.0 0.9		
				6.67	+0.0030	−0.057	325 27	0.8 0.8		
					+0.0041	*−0.039*		*1.8 1.7*	*0.055*	*118.4*
802	7.6	44.31	44 1 52.5	6.60	−0.0081	−0.099	321 106	0.2 0.2		
				6.95	−0.0056	−0.007	322 104	0.7 0.4		
					−0.0082	−0.032	325 35	0.8 0.8		
					−0.0071	*−0.034*		*1.7 1.4*	*0.077*	*254.2*
803	10.1	49.72	43 23 52.1	6.62	+0.0103	−0.033	321 119	0.7 0.7		
					+0.0079	−0.021	325 38	0.8 0.8		
					+0.0090	*−0.027*		*1.5 1.5*	*0.103*	*97.8*
804	10.2	37 1.57	39 10 24.0	6.16	*+0.0030*	*−0.010*	323 36	*0.6 0.6*	*0.038*	*85*
805	9.3	10.18	42 19 13.0	5.70	−0.0047	−0.197	321 125	0.7 0.7		
					−0.0039	−0.184	324 22	0.7 0.7		
					−0.0043	*−0.190*		*1.4 1.4*	*0.183*	*194.3*
806	10.5	12.49	46 42 20.2	6.25	*−0.0018*	*+0.023*	326 25	*0.7 0.6*	*0 039*	*337*

$\Delta\mu_\alpha = +\ 0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +\ 0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
807	10.9	7 37 29.52	40 13 1.3	6.16	−0.0051	−0.023	320 —	0.8 0.8		
					−0.0074	−0.058	323 40	0.9 0.9		
					−0.0063	*−0.042*		*1.7 1.7*	*0.075*	*247.2*
808	9.5	50.25	42 20 23.2	5.72	−0.0067	−0.016	321 141	0.6 0.6		
					−0.0048	−0.021	324 35	0.7 0.7		
					−0.0057	*−0.019*		*1.3 1.3*	*0.060*	*264.3*
809	10.2	51.42	45 13 21.5	5.70	+0.0003	+0.002	322 120	1.0 1.0		
				5.67	+0.0004	+0.028	326 34	0.6 0.6		
					+0.0003	*+0.012*		*1.6 1.6*	*0.026*	*13*
810	9.0	56.20	45 2 3.5	5.99	+0.0009	−0.044	322 121	1.0 1.0		
				5.79	−0.0005	−0.053	325 44	0.2 0.2		
					−0.0007	−0.037	326 35	0.5 0.2		
					+0.0003	*−0.044*		*1.7 1.4*	*0.032*	*169*
811	9.9	38 4.11	45 20 38.7	5.73	+0.0034	+0.022	322 118	1.0 1.0		
					+0.0022	+0.013	326 32	0.7 0.7		
					+0.0029	*+0.018*		*1.7 1.7*	*0.046*	*48*
812	10.9	6.88	40 36 37.0	6.16	*−0.0056*	*+0.028*	323 46	*0.9 0.9*	*0.073*	*303.9*
813	7.4	8.46	39 48 53.6	6.16	*+0.0043*	*−0.686*	323 54	*0.9 0.9*	*0.675*	*175.6*
814	11.1	13.47	40 6 40.4	6.16	*−0.0066*	*−0.046*	323 57	*0.9 0.9*	*0.080*	*245.7*
815	10.4	26.67	40 10 25.2	6.16	*−0.0056*	*−0.052*	323 56	*0.9 0.9*	*0.073*	*237.8*
816	9.1	38.62	42 47 14.9	5.70	+0.0041	−0.016	321 152	0.7 0.7		
				5.67	+0.0052	−0.086	324 49	0.7 0.6		
					+0.0046	*−0.048*		*1.4 1.3*	*0.065*	*122.5*
817	10.4	57.96	40 3 11.1	6.16	*+0.0034*	*+0.022*	323 61	*0.9 0.9*	*0.055*	*50.9*
818	10.5	39 6.49	40 14 33.0	6.16	−0.0127	+0.116	320 —	0.5 0.5		
					−0.0072	+0.054	323 72	0.9 0.9		
					−0.0092	*+0.076*		*1.4 1.4*	*0.135*	*311.1*
819	10.7	14.44	45 0 17.8	6.13	−0.0003	+0.026	322 132	1.0 1.0		
				5.54	+0.0001	+0.039	325 66	0.5 0.2		
					−0.0042	−0.002	326 —	0.4 0.2		
					−0.0018	+0.023	329 1	0.2 0.5		
					−0.0011	*+0.024*		*2.1 1.9*	*0.038*	*348*
820	10.2	15.53	40 31 42.9	5.80	−0.0015	−0.084	320 119	0.7 0.8		
				5.77	+0.0010	−0.069	323 70	0.9 0.9		
					−0.0001	*−0.076*		*1.6 1.7*	*0.063*	*178.2*
821	8.4	16.50	46 9 25.6	6.25	*−0.0035*	*−0.023*	326 44	*0.7 0.7*	*0.034*	*253*
822	9.5	16.96	46 9 25.9	6.25	*−0.0019*	*−0.014*	326 43	*0.7 0.7*	*0.017*	*267*
823	10.6	18.73	40 4 11.8	6.16	*+0.0045*	*+0.002*	323 73	*0.9 0.9*	*0.056*	*74.5*
824	9.9	26.19	45 22 49.6	5.71	−0.0044	−0.042	322 137	0.8 0.9		
				5.63	−0.0051	−0.043	326 46	0.7 0.7		
					−0.0066	−0.050	329 5	0.3 0.6		
					−0.0050	*−0.044*		*1.8 2.2*	*0.059*	*238.2*
825	9.0	32.23	45 26 53.2	5.68	+0.0011	0.058	322 136	0.8 0.9		
				5.63	−0.0010	−0.072	326 51	1.0 1.0		
					−0.0005	−0.084	329 4	0.4 0.6		
					−0.0001	*−0.070*		*2.2 2.5*	*0.057*	*179.0*
826	9.8	33.16	46 5 57.6	6.25	*+0.0003*	*−0.002*	326 47	*0.7 0.7*	*0.013*	*29*
827	10.6	47.19	41 33 38.1	6.14	+0.0063	+0.028	320 —	0.4 0.6		
					+0.0014	+0.010	324 70	0.7 0.7		
					+0.0083	−0.036	327 6	0.3 0.4		
					+0.0043	*+0.006*		*1.4 1.7*	*0.054*	*69.6*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	α 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
828	8.7	7 39 47.86	45 2 59.9	5.83	+0.0002	+0.009	322 143	0.9 1.0		
				5.64	−0.0004	+0.018	325 73	0.3 0.2		
					+0.0006	+0.006	326 52	0.6 0.4		
					−0.0023	−0.022	329 6	0.7 0.8		
					−0.0005	*0.001*		*2.5 2.4*	*0.012*	*301*
829	9.3	58.50	39 43 51.0	6.16	*+0.0031*	*−0.005*	323 97	*0.9 0.9*	*0.043*	*65.2*
830	10.7	59.50	42 45 25.9	6.16	+0.0011	−0.001	324 -	0.7 0.7		
					−0.0028	0.015	328 13	0.5 0.7		
					0.0005	*0.007*		*1.2 1.4*	*0.006*	*342*
831	11.0	40 2.67	40 25 42.9	6.16	*+0.0036*	*−0.019*	323 87	*0.9 0.9*	*0.054*	*54.0*
832	8.6	13.97	44 54 20.4	6.13	−0.0034	0.140	322 150	0.7 0.8		
				5.99	−0.0060	−0.163	325 82	0.6 0.6		
					−0.0066	0.171	329 12	0.9 1.0		
					−0.0054	*0.159*		*2.2 2.4*	*0.156*	*200.3*
833	10.0	22.13	42 1 15.9	6.05	+0.0029	+0.006	321 176	0.1 0.1		
					−0.0011	+0.004	324 84	0.7 0.7		
					−0.0006	*+0.004*		*0.8 0.8*	*0.017*	*350*
834	10.0	24.01	41 3 57.1	7.06	−0.0067	+0.022	322 152	0.2 0.2		
				7.19	−0.0025	−0.051	325 83	0.8 0.8		
					−0.0002	−0.022	329 15	0.3 0.2		
					−0.0026	*0.034*		*1.3 1.2*	*0.033*	*230*
835	10.1	26.13	42 1 38.2	6.13	+0.0068	+0.042	321 —	0.1 0.1		
					−0.0006	+0.001	324 83	0.7 0.7		
					+0.0003	*0.006*		*0.8 0.8*	*0.020*	*20*
836	10.6	28.52	42 47 56.9	6.02	+0.0008	0.003	321 174	0.2 0.4		
				5.93	+0.0035	+0.028	324 80	0.7 0.6		
					+0.0030	0.002	328 27	0.7 0.8		
					+0.0029	*+0.008*		*1.6 1.8*	*0 042*	*60*
837	10.5	36.76	39 58 36.7	6.16	*−0.0041*	*−0.021*	323 100	*0.9 0.9*	*0.046*	*260*
838	9.2	11.18	41 31 24.3	6.14	−0.0028	0.075	321 88	0.7 0.7		
					-0.0021	0.071	327 18	0.6 0.7		
					−0.0025	*0.073*		*1.3 1.4*	*0.065*	*202.6*
839	9.4	11.96	44 21 2.0	6.67	−0.0013	0.052	322 154	0.2 0.3		
				6.60	+0.0014	0.015	325 88	0.8 0.8		
					+0.0010	+0.009	329 21	0.7 0.7		
					+0.0009	*0.006*		*1.7 1.8*	*0.023*	*34*
840	10.3	12.30	41 18 54.1	6.14	−0.0017	-0.056	324 89	0.7 0.7		
					−0.0011	0.091	327 19	0.7 0.8		
					−0.0014	*0.076*		*1.4 1.5*	*0.064*	*191.7*
841	10.1	13.91	46 21 34.1	6.25	*+0.0080*	*−0.066*	326 61	*0.7 0.7*	*0.100*	*121.9*
842	8.9	41 3.20	39 51 54.6	6.16	*+0.0007*	*−0.061*	323 110	*0.9 0.9*	*0.049*	*167*
843	9.0	16.91	41 3 49.6	6.15	−0.0053	−0.052	323 116	0.3 0.2		
					−0.0024	+0.024	324 104	0.6 0.4		
					−0.0019	−0.001	327 26	0.9 0.9		
					−0.0026	*−0.001*		*1.8 1.5*	*0.030*	*294*
844	8.4	20.46	43 15 54.3	7.07	+0.0007	−0.048	325 96	0.8 0.8		
					+0.0002	−0.060	328 29	0.9 0.9		
					+0.0004	*−0.054*		*1.7 1.7*	*0.042*	*169*
845	9.8	24.71	40 53 49.3	6.16	+0.0043	−0.032	323 117	0.7 0.6		
					+0.0060	−0.012	327 28	0.9 0.9		
					+0.0053	*−0.020*		*1.6 1.5*	*0.063*	*96.3*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.013$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
846	10.0	7 41 25.39	39 13 21.0	6.16	*+0.0022*	*−0.107*	323 126	*0.9 0.8*	*0.098*	*163.4*
847	8.6	34.06	46 51 49.0	6.25	*+0.0261*	*−0.227*	326 66	*0.6 0.6*	*0.345*	*128.4*
848	11.0	50.86	42 23 43.8	6.16	+0.0001	−0.002	324 —	0.7 0.7		
					−0.0050	−0.013	328 40	0.8 0.8		
					−0.0026	*−0.008*		*1.5 1.5*	*0.025*	*281*
849	11	12 17.2	44 2 50	6.84	−0.0061	−0.041	325 —	0.8 0.8		
				7.19	−0.0016	−0.032	329 —	0.7 0.4		
					−0.0040	*−0.038*		*1.5 1.2*	*0.047*	*238*
850	10.3	19.95	44 30 45.5	6.60	+0.0002	−0.041	325 114	0.8 0.8		
					−0.0022	−0.029	329 44	1.0 1.0		
					−0.0011	*−0.034*		*1.8 1.8*	*0.023*	*203*
851	9.6	27.03	40 54 42.7	6.16	+0.0007	−0.028	323 134	0.6 0.4		
					+0.0001	−0.023	327 51	0.9 0.9		
					+0.0003	*−0.025*		*1.5 1.3*	*0.014*	*150*
852	10.8	31.67	42 12 22.3	6 14	+0.0025	−0.047	324 112	0.7 0.7		
					+0.0007	−0.075	328 56	0.7 0.7		
					+0.0016	*−0.061*		*1.4 1.4*	*0.052*	*157.4*
853	10.1	32.43	44 33 52.9	6.60	+0.0051	−0.037	325 113	0.8 0.8		
					+0.0048	−0.048	329 43	1.0 1.0		
					+0.0049	*−0.043*		*1.8 1.8*	*0.064*	*118.2*
854	11	37.9	39 35 11	6.16	*+0.0165*	*−0.138*	323 —	*0.9 0.9*	*0.231*	*122.8*
855	8.7	37.97	41 43 31.9	6.14	+0.0069	−0.295	324 116	0.7 0.7		
					+0.0056	−0.284	327 49	0.8 0.8		
					+0.0062	*−0.289*		*1.5 1.5*	*0.285*	*165.2*
856	8.4	38.77	46 21 6.8	6.25	*−0.0004*	*−0.113*	326 76	*0.7 0.7*	*0.100*	*180.6*
857	10.8	48.19	45 57 29.5	6.25	+0.0012	+0.022	326 80	0.7 0.7		
					+0.0007	−0.014	329 —	0.6 0.3		
					+0.0010	*+0.011*		*1.3 1.0*	*0.027*	*28*
858	10.8	49.35	43 26 50.1	7.07	−0.0010	−0.073	325 129	0.8 0.8		
					−0.0001	−0.073	328 59	0.9 0.9		
					−0.0005	*−0.073*		*1.7 1.7*	*0.060*	*182.9*
859	9.5	49.86	39 56 8.1	6.16	*−0.0023*	*−0.071*	323 141	*0.9 0.9*	*0.063*	*202.5*
860	8.1	55.63	46 48 26.6	6.25	*+0.0169*	*−0.016*	326 85	*0.6 0.5*	*0.176*	*91.0*
861	8.8	43 2.78	45 56 25.3	5.82	+0.0031	−0.014	326 88	0.7 0.7		
				5.95	+0.0027	+0.012	329 46	0.7 0.4		
					+0.0029	*−0.005*		*1.4 1.1*	*0.034*	*78*
862	9.2	8.83	42 41 13.6	6.15	+0.0010	+0.013	324 117	0.6 0.6		
					+0.0012	−0.007	328 60	0.9 0.9		
					+0.0011	*+0.001*		*1.5 1.5*	*0.021*	*51*
863	10.4	14.96	39 57 49.7	6 16	−0.0028	−0.045	323 152	0.9 0.9		
					−0.0052	−0.030	327 60	0.3 0.2		
					−0.0034	*−0.042*		*1.2 1.1*	*0.047*	*230*
864	10.6	15.91	43 9 35.8	6.91	−0.0048	−0.096	325 133	0.6 0.4		
				6.77	−0.0024	−0.096	328 64	0.9 0.9		
					−0.0034	*−0.096*		*1.5 1.3*	*0.091*	*202.0*
865	10.2	35.47	40 1 27.6	6.16	*+0.0018*	*+0.044*	323 163	*0.9 0.9*	*0.061*	*23.2*
866	10.0	50.29	40 1 59.8	6.16	+0.0020	−0.060	323 162	0.9 0.9		
					−0.0007	−0.059	327 70	0.6 0.4		
					+0.0009	*−0.060*		*1.5 1.3*	*0.050*	*163.7*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s,0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0'',013$; 861—866: $+\,0'',012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
867	10.7	7 43 52.72	43 15 2.0	6.91	+0.0078	0.030	325 136	0.6 0.5		
				6.84	+0.0038	0.032	328 71	0.9 0.9		
					+0.0054	*0.031*		*1.5 1.4*	*0.065*	*107.0*
868	10.8	54.10	40 13 1.4	6.16	+0.0011	0.017	323 171	0.9 0.9		
					−0.0024	0.017	327 68	0.9 0.8		
					−0.0006	*0.001*		*1.8 1.7*	*0.012*	*340*
869	11	55.2	41 39 44	6.16	*−0.0058*	*0.046*	327 —	*0.9 0.9*	*0.071*	*241.3*
870	10.8	44 3.10	42 10 31.0	6.14	−0.0056	0.073	324 129	0.6 0.7		
					−0.0125	0.056	328 79	0.8 0.7		
					−0.0095	*0.064*		*1.4 1.4*	*0.115*	*243.2*
871	10.6	4.50	42 45 30.6	6.16	−0.0123	0.199	321 —	0.4 0.4		
					−0.0155	0.220	328 76	0.9 0.9		
					−0.0145	*0.214*		*1.3 1.3*	*0.256*	*217.9*
872	11.6	5.32	42 45 21.0	6.16	*−0.0151*	*0.239*	328 75	*0.9 0.9*	*0.280*	*215.8*
873	9.8	7.52	43 35 40.8	6.88	+0.0006	0.063	325 138	0.6 0.7		
				6.85	+0.0030	0.071	328 80	0.9 0.9		
					−0.0004	0.060	332 1	0.1 0.2		
					+0.0019	*0.067*		*1.6 1.8*	*0.060*	*157.3*
874	10.1	37.39	44 3 40.1	6.37	+0.0026	0.065	325 139	0.7 0.8		
				6.40	+0.0023	0.024	328 84	0.3 0.2		
					−0.0006	0.031	329 68	0.8 0.6		
					−0.0009	0.032	332 2	0.4 0.7		
					+0.0008	*0.043*		*2.2 2.3*	*0.033*	*160*
875	10.7	47.98	41 32 44.1	6.16	+0.0018	0.011	324 —	0.4 0.5		
					−0.0007	0.001	327 79	0.9 0.9		
					−0.0028	0.002	331 —	0.2 0.4		
					−0.0003	*0.006*		*1.5 1.8*	*0.006*	*0*
876	9.9	45 18.51	43 57 18.5	5.21	*−0.0039*	*0.005*	329 76	*0.4 0.2*	*0.040*	*280*
877	7.9	21.18	41 24 7.3	6.15	+0.0070	0.067	324 139	0.2 0.3		
					+0.0067	0.017	327 86	0.9 0.9		
					+0.0043	0.110	331 8	0.4 0.5		
					+0.0061	*0.053*		*1.5 1.7*	*0.082*	*120.0*
878	9.7	27.76	43 56 5.2	6.01	−0.0023	0.018	325 144	0.3 0.6		
				6.31	+0.0047	0.010	328 96	0.7 0.5		
					+0.0007	0.004	332 12	0.9 1.0		
					+0.0017	*0.013*		*1.9 2.1*	*0.021*	*93*
879	11	32.5	42 17 48	6.15	−0.0103	0.060	328 —	0.9 0.9		
					−0.0109	0.004	331 —	0.6 0.6		
					−0.0105	*0.034*		*1.5 1.5*	*0.115*	*259.0*
880	8.8	46 5.01	40 26 38.6	6.16	+0.0042	0.000	327 110	0.9 0.9		
					+0.0001	0.008	330 27	0.7 0.8		
					+0.0024	*0.004*		*1.6 1.7*	*0.034*	*62*
881	10.6	36.86	42 34 11.8	6.15	−0.0088	0.038	328 129	0.9 0.9		
					−0.0067	0.030	331 23	0.6 0.6		
					−0.0080	*0.035*		*1.5 1.5*	*0.088*	*254.9*
882	10.6	47.09	40 11 31.8	6.16	−0.0036	0.019	327 119	0.8 0.7		
					−0.0032	0.066	330 35	0.9 0.9		
					−0.0034	*0.059*		*1.7 1.6*	*0.059*	*217.5*
883	10.7	52.78	46 16 26.2	7.98	*+0.0008*	*+0.007*	333 27	*0.8 0.8*	*0.022*	*30*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +0''.012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
881	9.8	7 47 17.10	40 51 27.8	6.16	+0.0002	−0.028	327 125	0.9 0.9		
					−0.0029	+0.047	330 45	0.6 0.6		
					−0.0010	*−0.036*		*1.5 1.5*	*0.049*	*349*
885	10.2	20.84	42 44 24.8	6.15	+0.0039	0.008	328 147	0.9 0.9		
					+0.0069	+0.025	331 33	0.6 0.6		
					+0.0051	*+0.005*		*1.5 1.5*	*0.061*	*73.9*
886	11.1	36.11	40 0 14.3	6.16	*0.0008*	*0.022*	330 57	*0.9 0.9*	*0.012*	*211*
887	9.5	46.33	45 0 36.1	6.01	+0.0035	−0.039	329 109	1.0 1.0		
				5.73	+0.0026	+0.075	332 26	0.5 0.3		
					+0.0061	+0.076	333 39	0.5 0.3		
					−0.0039	*+0.053*		*2.0 1.6*	*0.079*	*34.7*
888	11.2	48 11.11	44 48 25.8	5.21	+0.0066	−0.053	329 114	1.0 1.0		
					+0.0078	−0.071	332 —	0.9 0.8		
					+0.0072	*0.061*		*1.9 1.8*	*0.093*	*121.8*
889	7.3	13.10	39 58 30.0	6.16	+0.0000	−0.060	327 137	0.3 0.2		
					−0.0017	−0.030	330 62	0.9 0.9		
					−0.0013	*−0.035*		*1.2 1.1*	*0.025*	*206*
890	8.9	14.60	43 43 49.9	5.64	−0.0002	+0.017	328 162	0.7 0.7		
					+0.0006	+0.001	332 35	1.0 1.0		
					+0.0003	*+0.008*		*1.7 1.7*	*0.021*	*17*
891	9.0	15.37	40 56 11.4	6.16	+0.0011	−0.069	327 134	0.9 0.9		
					−0.0022	−0.061	330 64	0.6 0.4		
					−0.0002	*−0.067*		*1.5 1.3*	*0.055*	*180.0*
892	9.2	26.70	39 53 46.6	6.16	*+0.0052*	*−0.034*	330 74	*0.9 0.9*	*0.067*	*109.2*
893	10.9	28.03	39 30 51.9	6.16	*+0.0023*	*+0.002*	330 77	*0.9 0.9*	*0.033*	*65*
894	9.4	39.87	40 28 43.5	6.16	−0.0021	−0.065	327 144	0.8 0.8		
					−0.0042	−0.064	330 86	0.9 0.9		
					0.0032	*−0.064*		*1.7 1.7*	*0.062*	*212.4*
895	8.8	45.33	43 32 46.3	5.67	−0.0033	0.101	328 170	0.8 0.8		
					−0.0003	−0.112	332 44	1.0 1.0		
					−0.0016	*−0.107*		*1.8 1.8*	*0.096*	*189.0*
896	10.6	50.71	40 50 11.2	6.16	*+0.0036*	*+0.017*	327 139	*0.9 0.9*	*0.053*	*56.6*
897	10.6	51.19	46 16 47.9	7.98	*−0.0011*	*−0.043*	333 42	*0.8 0.8*	*0.032*	*194*
898	10.8	57.47	45 17 18.2	6.47	−0.0016	−0.017	329 121	1.0 1.0		
				6.41	−0.0024	0.014	333 46	0.8 0.8		
					−0.0079	−0.004	336 3	0.2 0.3		
					−0.0026	*−0.014*		*2.0 2.1*	*0.025*	*265*
899	11.0	58.18	40 47 42.6	6.16	*−0.0025*	*+0.042*	330 83	*0.8 0.8*	*0.060*	*335.2*
900	11.3	49 27.13	40 8 27.9	6.16	*+0.0022*	*+0.009*	330 96	*0.9 0.9*	*0.035*	*53*
901	10.5	38.07	46 30 33.0	7.98	*−0.0002*	*0.035*	333 51	*0.8 0.8*	*0.023*	*178*
902	10.0	43.00	42 28 40.8	6.01	−0.0060	0.015	328 185	0.6 0.6		
				5.94	−0.0034	+0.002	331 51	0.7 0.7		
					−0.0012	0.026	335 3	0.2 0.3		
					−0.0041	*0.010*		*1.5 1.6*	*0.043*	*273*
903	10.9	45.80	43 27 30.7	5.61	+0.0021	−0.007	332 60	1 0 1.0		
				5.64	−0.0015	−0.007	335 -	0.3 0.4		
					+0.0013	*−0.007*		*1.3 1.4*	*0.025*	*42*
904	10.9	50.80	42 43 43.7	6.16	−0.0081	+0.027	328 184	0.6 0.7		
					−0.0011	+0.053	331	0.7 0.7		
					−0.0035	0 007	335 -	0.3 0.6		
					−0.0042	*+0.026*		*1.6 2.0*	*0.057*	*311 5*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s,0003$; $\Delta\mu_\delta = +0'',012$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′ ″		″	″			″	°
905	10.9	7 49 52.37	43 44 55.9	5.23	−0.0038	−0.038	328 —	0.4 0.4		
					+0.0044	+0.002	332 59	1.0 1.0		
					+0.0033	−0.049	335 —	0.2 0.3		
					+0.0022	*−0.016*		*1.6 1.7*	*0.026*	*99*
906	9.3	59.86	41 48 28.6	6.01	+0.0032	−0.082	327 157	0.2 0.3		
				5.98	+0.0010	−0.069	331 57	0.7 0.7		
					−0.0044	−0.044	334 5	0.2 0.3		
					+0.0004	*−0.066*		*1.1 1.3*	*0.055*	*171.6*
907	8.5	50 18.01	41 24 55.6	5.84	−0.0007	−0.071	327 164	0.3 0.5		
					−0.0025	−0.099	331 60	0.7 0.7		
					−0.0047	−0.045	334 11	0.7 0.8		
					−0.0031	*−0.070*		*1.7 2.0*	*0 065*	*207 3*
908	8 5	29 23	44 54 46 7	5 22	−0.0083	−0.016	329 134	0.4 0.7		
					−0.0087	+0.005	332 62	0.8 0.7		
					−0.0062	−0.001	336 11	0.9 1.0		
					−0.0076	*−0.004*		*2.1 2.4*	*0.077*	*275.9*
909	10.6	30.52	40 34 10.7	5.80	−0.0032	−0.099	330 111	0.9 0.9		
				5 77	−0.0019	−0.108	334 14	0.7 0.8		
					−0.0026	*−0.103*		*1.6 1.7*	*0.095*	*196.5*
910	10.9	40.17	40 33 41.0	6.16	−0.0041	−0.021	330 110	0.9 0.9		
					−0.0075	−0.013	334 —	0.7 0 8		
					−0.0056	*0.017*		*1.6 1.7*	*0.060*	*265.2*
911	9.1	40.80	40 33 39.9	5.80	−0.0024	−0.015	330 109	0.9 0.9		
				5.77	−0.0012	+0.013	334 21	0.7 0.8		
					−0.0019	*−0.002*		*1.6 1.7*	*0.021*	*299*
912	9.2	46.85	43 4 6.6	5.25	−0.0086	+0.001	332 64	0.8 0.5		
					−0.0082	−0.000	335 8	0.7 0.7		
					0.0084	*−0.000*		*1.5 1.2*	*0.090*	*277.7*
913	11.0	47.11	40 19 3.1	6.16	*−0.0089*	*−0.595*	330 114	*0.9 0.9*	*0.591*	*189.6*
914	9.1	51.77	40 18 28.7	5.83	−0.0042	−0.012	330 122	0.9 0.9		
				5.80	−0.0038	−0.013	334 22	0.6 0.7		
					−0.0040	*−0.012*		*1.5 1.6*	*0.043*	*270*
915	8.4	56.26	46 5 29.3	7.98	*+0.0014*	*+0.005*	333 61	*0.8 0.8*	*0.025*	*47*
916	8.1	51 4.50	41 14 43.9	5.71	+0.0083	−0.170	331 76	0.7 0.6		
				5.69	+0.0060	−0.153	334 23	1.0 1.0		
					+0.0069	*−0.159*		*1.7 1.6*	*0.169*	*151.3*
917	10.9	8.36	41 52 9.5	5.21	+0.0038	+0.004	332 —	0.9 0.7		
					+0.0058	+0.006	336 16	1.0 1.0		
					+0.0049	*+0.005*		*1.9 1.7*	*0.057*	*73.8*
918	10.7	12.26	17 0 12.3	7.98	*+0.0011*	*+0.049*	333 65	*0.5 0.3*	*0.062*	*13.1*
919	8.6	14.17	42 55 15.1	5.65	−0.0004	−0.082	331 70	0.6 0.4		
				5.59	+0.0032	−0.067	335 12	0.7 0.7		
					+0.0015	*−0.072*		*1.3 1.1*	*0.065*	*161.0*
920	7.0	15.26	44 14 40.6	5.22	+0.0047	−0.006	332 68	1.0 1.0		
					+0.0065	−0.004	336 19	0.7 0.7		
					+0.0054	*−0.005*		*1.7 1.7*	*0.062*	*84.5*
921	9.6	15.83	44 26 12.1	5.22	+0.0011	+0.010	332 66	1.0 1.0		
					+0.0041	+0.002	336 28	0.9 0.9		
					+0.0025	*+0.006*		*1.9 1.9*	*0.034*	*60*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s,0003$; $\Delta\mu_\delta = +0'',012$; 916—921: $+0'',011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
922	10.4	7 51 18.33	45 30 57.2	6.67	−0.0013	−0.010	333 72	0.8 0.8		
					−0.0019	−0.012	336 25	0.9 0.9		
					−0.0016	*−0.011*		*1.7 1.7*	*0.014*	*270*
923	10.6	23.50	45 34 30.9	6.67	−0.0006	−0.033	333 70	0.8 0.8		
					+0.0006	−0.042	336 23	0.9 0.9		
					+0.0000	*−0.038*		*1.7 1.7*	*0.027*	*174*
924	10.9	27.32	41 31 55.4	6.13	*+0.0010*	*+0.007*	331 80	*0.7 0.7*	*0.023*	*38*
925	10.3	34.79	40 40 51.1	5.73	−0.0024	+0.013	330 132	0.9 0.9		
					−0.0040	−0.011	334 30	1.0 1.0		
					−0.0032	*+0.000*		*1.9 1.9*	*0.036*	*288*
926	9.4	39.89	43 57 5.5	5.24	−0.0067	−0.042	332 74	1.0 1.0		
					−0.0064	−0.031	335 16	0.4 0.3		
					−0.0046	−0.032	336 29	0.2 0.2		
					−0.0064	*−0.038*		*1.6 1.5*	*0.071*	*247.8*
927	9.1	42.50	39 1 16.4	6.16	*−0.0065*	*−0.076*	330 147	*0.6 0.3*	*0.098*	*228.3*
928	11	45.4	43 34 2	5.24	+0.0011	−0.071	332 —	1.0 1.0		
					+0.0082	−0.046	335 —	0.7 0.7		
					+0.0040	*−0.061*		*1.7 1.7*	*0.068*	*137.4*
929	11	52 12.5	41 33 59	5.71	−0.0001	+0.040	331 —	0.7 0.7		
					−0.0051	+0.006	334 —	1.0 1.0		
					−0.0030	*+0.020*		*1.7 1.7*	*0.044*	*315*
930	10.0	12.57	41 46 57.0	5.76	−0.0051	−0.035	331 83	0.7 0.7		
				5.78	−0.0066	−0.046	334 31	0.8 0.7		
					−0.0059	*−0.040*		*1.5 1.4*	*0.069*	*245.3*
931	8.0	12.83	45 7 8.0	6.44	+0.0006	+0.087	333 82	0.7 0.6		
				6.35	−0.0007	+0.086	336 39	1.0 1.0		
					−0.0002	*+0.086*		*1.7 1.6*	*0.097*	*0.6*
932	9.6	14.50	45 41 26.0	6.67	−0.0099	−0 154	333 81	0.8 0.8		
					−0.0143	−0.144	336 35	0.9 0.9		
					−0.0122	*−0.149*		*1.7 1.7*	*0.186*	*222.2*
933	9.4	21.57	41 7 24.5	5.66	−0.0023	+0.044	331 91	0.6 0.5		
				5.64	+0.0017	+0.009	334 34	1.0 1.0		
					+0.0002	*+0.021*		*1.6 1.5*	*0.032*	*9*
934	11.1	26.44	40 7 53.7	6.16	*+0.0049*	*−0.036*	330 150	*0.9 0.9*	*0.064*	*113.0*
935	9.6	27.12	45 50 35.7	6.75	+0.0056	−0.008	333 86	0.8 0.8		
				6.84	+0.0039	−0.007	336 34	0.8 0.7		
					+0.0048	*−0.008*		*1.6 1.5*	*0.053*	*86.8*
936	9.4	28.76	42 33 56.7	5.70	−0.0018	+0.051	331 87	0.7 0.7		
					+0.0013	+0.002	335 27	0.7 0.7		
					0.0002	*+0.026*		*1.4 1.4*	*0.037*	*0*
937	10.2	41.15	46 44 28.9	7.98	*−0.0018*	*−0.025*	333 84	*0.7 0.6*	*0.021*	*229*
938	11.1	53 21.18	39 59 23.6	6.16	*−0.0044*	*−0.124*	330 159	0.9 0.9	*0.122*	*202.6*
939	9.3	45.04	46 31 59.7	7.98	+0.0093	+0.038	333 93	0.7 0.7		
					+0 0107	+0.031	340 2	0.1 0.2		
					+0.0095	*+0.036*		*0.8 0.9*	*0.111*	*65.0*
940	9.0	52.72	42 26 58.6	5.65	−0.0006	+0.002	331 98	0.6 0.6		
				5.67	+0.0008	−0.036	335 47	0.7 0.7		
					+0.0002	*−0.018*		*1.3 1.3*	*0.008*	*150*
941	9.3	54 9.57	39 53 34.5	6.16	*+0.0060*	*−0.003*	330 174	*0.8 0.9*	*0.073*	*83.7*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
942	8.4	7 54 9.90	45 4 44.6	6.13	−0.0015	+0.001	333 103	0.3 0.3		
				6.00	−0.0019	−0.007	336 63	1.0 1.0		
					+0.0037	−0.026	340 5	0 1 0.1		
					−0.0014	*−0.007*		*1.4 1.4*	*0.013*	*288*
943	10.9	16.43	42 21 38.6	5.26	+0.0130	−0.069	331 —	0.6 0.6		
					+0.0154	−0.074	335 54	0.7 0.7		
					+0.0143	*−0.072*		*1.3 1.3*	*0.172*	*110.8*
944	8.3	32.99	40 40 32.6	5.64	−0.0012	−0.013	330 178	0.5 0.5		
					−0.0005	−0.033	334 58	1.0 1.0		
					−0.0058	−0.027	337 1	0.2 0.2		
					−0.0013	*−0.026*		*1.7 1.7*	*0.019*	*219*
945	10.6	36.33	44 15 42.5	5.61	−0.0057	−0.008	332 93	0.8 0.9		
				5.96	−0.0052	−0.014	336 76	1.0 1.0		
					−0.0118	−0.030	339 5	0.3 0.6		
					−0.0063	*−0.016*		*2.1 2.5*	*0.065*	*265.6*
946	11.1	38.13	42 26 31.4	5.26	−0.0058	+0.053	331 —	0.5 0.6		
					−0.0110	−0.035	335 63	0.7 0.7		
					−0.0088	*+0.006*		*1.2 1.3*	*0.097*	*280.1*
947	10.0	39.12	45 7 38.8	6.25	−0.0067	+0.010	333 108	0.3 0.3		
				6.35	−0.0026	−0.023	336 74	1.0 1.0		
					+0.0052	+0.049	340 10	0.2 0.3		
					−0.0024	*−0.003*		*1.5 1.6*	*0.023*	*290*
948	7.2	42.63	41 39 52.2	5.59	−0.0024	−0.097	331 106	0.5 0.6		
				5.57	−0.0038	−0.113	334 63	1.0 1.0		
					−0.0063	−0.105	338 10	0.3 0.6		
					−0.0038	*−0.106*		*1.8 2.2*	*0.103*	*202.8*
949	10.6	45.20	40 54 39.3	5.29	*−0.0035*	*−0.054*	344 68	*1.0 1.0*	*0.056*	*219.9*
950	10.1	55.17	39 9 52.4	6.16	*+0.0038*	*+0.049*	330 191	*0.2 0.2*	*0.076*	*38.1*
951	8.6	56.23	39 53 28.9	6.14	+0.0075	−0.020	330 189	0.4 0.7		
					+0.0009	+0.008	337 10	0.3 0.6		
					+0.0047	*−0.007*		*0.7 1.3*	*0.056*	*85.9*
952	8.0	55 1.99	40 25 19.7	5.67	−0.0024	−0.079	330 186	0.4 0.6		
				5.77	−0.0014	−0.064	334 78	1.0 1.0		
					−0.0064	−0.078	337 7	0.3 0.5		
					−0.0025	*−0.072*		*1.7 2.1*	*0.066*	*202.3*
953	9.1	7.09	42 44 42.0	5.42	−0.0040	−0.002	331 110	0.2 0.2		
					−0.0033	−0.090	335 75	0.7 0.7		
					−0.0037	−0.066	338 16	0.4 0.4		
					−0.0035	*−0.069*		*1.3 1.3*	*0.068*	*211.8*
954	10.5	7.52	40 46 16.2	5.44	−0.0027	−0.001	330 185	0.2 0.2		
				5.49	−0.0031	+0.009	334 77	1.0 1.0		
					−0.0054	−0.001	337 —	0.2 0.3		
					−0.0034	*+0.006*		*1.4 1.5*	*0.039*	*296*
955	9.7	7.75	43 4 28.0	5.80	−0.0059	−0.007	332 103	0.2 0.2		
				5.64	−0.0018	−0.002	335 70	0.7 0.7		
					−0.0049	−0.057	339 16	0.3 0.2		
					−0.0033	*−0.013*		*1.2 1.1*	*0.033*	*267*
956	7.7	16.27	44 17 52.7	6.22	−0.0008	+0.011	332 100	0.4 0.7		
				6.17	−0.0000	−0.007	336 80	1.0 1.0		
					−0.0064	−0.003	339 9	0.6 0.7		
					−0.0021	*−0.001*		*2.0 2.4*	*0.021*	*298*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		ˋ	″			″	
957	10.7	7 55 29.52	44 8 15.1	6.40	−0.0034	−0.007	332 101	0.3 0.7		
				6.32	−0.0003	−0.017	336 85	0.9 0.8		
					−0.0075	−0.085	339 18	0.7 0.8		
					−0.0035	*−0.038*		*1.9 2.3*	*0.043*	*232*
958	10.8	46.27	42 24 8.3	5.28	−0.0018	−0.037	335 79	0.7 0.7		
					−0.0060	0.008	338 22	0.8 0.9		
					−0.0040	*−0.012*		*1.5 1.6*	*0.042*	*269*
959	9.4	55.81	41 58 12 6	5.26	*+0.0015*	*−0.002*	335 88	*0.4 0.2*	*0.021*	*65*
960	8.1	56 1.25	45 53 50.6	6.79	−0.0031	+0.009	333 115	0.2 0.4		
				7.10	−0.0048	−0.020	336 87	0.9 0.7		
					−0.0023	−0.032	340 17	0.8 0.8		
					−0.0036	*−0.019*		*1.9 1.9*	*0.034*	*256*
961	8.0	3.96	46 29 44.1	7.98	+0.0046	+0.025	333 114	0.2 0.3		
					−0.0005	−0.010	340 16	0 7 0.7		
					+0.0006	*+0.000*		*0.9 1.0*	*0.016*	*45*
962	10.0	5.25	46 44 24.5	7.98	−0.0048	+0.025	333 113	0.1 0.2		
					+0.0033	−0.023	340 18	0.6 0.6		
					+0.0021	*−0.011*		*0.7 0.8*	*0.026*	*90*
963	10.7	17.07	46 40 8.5	7.98	*−0.0061*	*−0.061*	340 19	*0.6 0.6*	*0.077*	*229.7*
964	10.8	19.77	41 25 55.1	5.29	−0.0084	−0.021	334 84	1.0 1.0		
					−0.0079	−0.041	338 28	0.9 0.9		
					−0.0082	*−0.030*		*1.9 1.9*	*0.090*	*257.8*
965	10.7	54.26	42 26 4.9	5.28	−0.0002	−0.054	335 97	0.7 0.7		
					−0.0009	−0.003	338 39	1.0 1.0		
					−0.0006	*−0.024*		*1.7 1.7*	*0.013*	*189*
966	9.7	57 11.35	41 12 58.3	5.29	+0.0014	−0.006	334 98	1.0 1.0		
					−0.0004	−0.014	338 41	0.8 0.7		
					+0.0006	*−0.009*		*1.8 1.7*	*0.011*	*80*
967	11.1	20.86	41 35 53.6	5.30	−0.0030	−0.029	334 —	1.0 1.0		
					−0.0074	−0.013	338 40	1.0 1.0		
					−0.0052	*−0.021*		*2.0 2.0*	*0.055*	*259.5*
968	10.0	22.17	44 14 31.8	6.67	+0.0155	+0.003	336 115	0.9 0.8		
				6.75	+0.0121	−0.009	339 40	0.8 0.8		
					+0.0139	*−0.003*		*1.7 1.6*	*0.154*	*87.0*
969	10.5	22.85	41 2 51.2	5.29	−0.0017	−0.059	334 103	1.0 1.0		
					−0.0028	−0.059	338 47	0.6 0.4		
					−0.0021	*−0.059*		*1.6 1.4*	*0.052*	*202.6*
970	8.6	26.39	45 16 16.9	6.52	+0.0008	−0.010	336 112	1.0 1.0		
				6.44	+0.0028	−0.034	340 30	0.7 0.7		
					+0.0016	*−0.020*		*1.7 1.7*	*0.024*	*112*
971	11	47.2	41 16 26	5.29	−0.0038	+0.008	334 —	1.0 1.0		
					−0.0030	+0.011	338 —	0.9 0.9		
					−0.0034	*+0.009*		*1.9 1.9*	*0.040*	*300*
972	7.8	56.82	40 1 21.7	5.89	+0.0013	−0.045	334 108	0.4 0.3		
				5.94	−0.0019	−0.036	337 33	0.7 0.7		
					−0.0007	*−0.039*		*1.1 1.0*	*0.028*	*190*
973	10.6	56.84	42 6 51.7	5.28	−0.0046	−0.035	335 109	0.5 0.4		
				5.29	−0.0024	−0.007	338 51	1.0 1.0		
					−0.0031	*−0.015*		*1.5 1.4*	*0.030*	*262*
974	11	58 13.6	45 59 48	7.98	*−0.0063*	*−0.013*	340 —	*0.8 0.8*	*0.062*	*268.2*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′		s	″			″	
975	8.6	7 58 36.85	43 37 54.8	6.77	−0 0047	+0.042	335 111	0.6 0.6		
					−0.0050	0.053	339 58	0.8 0.8		
					−0.0049	*+0.048*		*1.4 1.4*	*0.077*	*320.3*
976	10 4	59 17.43	45 3 42.7	6.13	−0.0003	-0.022	336 135	1.0 1.0		
				5.61	+0.0051	0.015	340 50	0.6 0.4		
					−0.0017	-0.021	343 3	0.3 0.7		
					+0.0012	*0.020*		*1.9 2.1*	*0.019*	*122*
977	10.8	29.54	46 22 22.4	7.98	*+0.0020*	*0.023*	340 51	*0.8 0.8*	*0.028*	*117*
978	10.5	37.78	41 32 56.8	5.30	+0.0014	0.066	334 118	0.6 0.7		
					+0.0007	−0.067	338 79	1.0 1.0		
					+0.0022	−0.008	341 1	0.2 0.4		
					+0.0011	*0.055*		*1.8 2.1*	*0.048*	*159*
979	10.6	58.94	42 27 14.5	5.29	−0.0067	0.008	335 127	0.3 0.5		
				5.28	−0.0039	0.059	338 76	1.0 1.0		
					−0.0070	0.071	342	0.3 0.5		
					−0.0050	*0.049*		*1.6 2.0*	*0.065*	*233.1*
980	9.8	8 0 11.45	46 33 9.0	7.98	*−0.0035*	*-0.048*	340 57	*0.8 0.8*	*0.050*	*220.1*
981	5.9	14.41	43 32 51.3	6.62	−0.0001	0.058	335 125	0.2 0.4		
				6.50	−0.0014	0.031	339 68	0.8 0.8		
					−0.0045	0.078	342 4	0.4 0.5		
					−0.0021	*−0.053*		*1.4 1.7*	*0.047*	*204*
982	9.9	29.79	45 29 45.6	6.18	−0.0019	0.002	336 144	0.3 0.5		
				6.09	+0.0047	0.007	340 74	0.8 0.8		
					+0.0006	-0.013	343 16	0.9 0.9		
					+0.0019	*−0.008*		*2.0 2.2*	*0.023*	*85*
983	10.8	58.86	44 56 21.2	5.86	+0.0027	0.007	336 151	0.2 0.3		
				5.47	0.0022	−0.007	339 75	0.6 0.4		
					+0.0036	0.000	343 25	1.1 1.1		
					+0.0017	*−0.000*		*1.9 1.8*	*0.024*	*66*
984	9.8	1 24 53	39 39 18.6	6.13	*−0.0024*	*0.045*	337 63	*0.7 0.7*	*0.042*	*214*
985	10.6	26.15	43 27 17.4	6.62	+0.0013	-0.001	339 78	0.8 0.8		
					+0.0042	−0.082	342 16	0.7 0.7		
					+0.0027	*-0.039*		*1.5 1.5*	*0.044*	*131*
986	8.4	42.77	40 14 7.5	5.77	+0.0011	0.058	337 65	0.7 0.7		
				5.80	−0.0008	0.043	341 17	0.8 0.7		
					+0.0001	*−0.050*		*1.5 1.4*	*0.040*	*173*
987	9.0	50.57	45 21 42.6	6.13	−0.0007	+0.004	340 87	0.8 0.8		
					−0.0035	+0.002	343 31	1.1 1.1		
					−0.0023	*−0.003*		*1.9 1.9*	*0.024*	*303*
988	9.3	56.19	42 9 7.5	5.28	−0.0019	−0.020	338 100	1.0 1.0		
					−0.0044	+0.014	342 23	0.5 0.4		
					−0.0027	*−0.010*		*1.5 1.4*	*0.026*	*270*
989	8.8	2 6.94	42 37 25.9	5.28	−0.0004	-0.056	338 99	1.0 1.0		
					−0.0014	−0.056	342 22	0.7 0.7		
					−0.0008	*−0.056*		*1.7 1.7*	*0.046*	*186*
990	9.3	12.10	39 52 6.3	6.13	*+0.0001*	*−0.082*	337 73	*0.7 0.7*	*0.072*	*175.2*
991	8.8	22.59	39 12 10.4	6.13	*−0.0022*	*−0.084*	337 77	*0.6 0.5*	*0.077*	*196.6*
992	6.9	31.20	42 43 25.0	5.28	+0.0011	−0.082	338 103	0.9 0.8		
					−0.0011	−0.082	342 25	0.7 0.7		
					+0.0001	*−0.082*		*1.6 1.5*	*0.072*	*175.2*
993	10.1	37.38	46 44 54.8	7.98	*−0.0081*	*+0.039*	340 92	*0.7 0.6*	*0.093*	*301.8*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.011$; 976—993: $+\,0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′ ″		s	″			″	
994	9.6	8 2 55.01	44 3 56.6	6.46	−0.0040	−0.047	339 91	0.8 0.8		
				6 93	−0.0036	−0.036	343 45	0.8 0.5		
					−0.0038	*−0.043*		*1.6 1.3*	*0.050*	*229.0*
995	10.6	3 14.16	45 24 21.1	6.13	+0.0057	−0.110	340 99	0.8 0.8		
					+0.0077	−0.116	343 47	1.1 1.1		
					+0.0069	*−0.113*		*1.9 1.9*	*0.128*	*143.6*
996	10.6	20.49	42 43 40.2	5.28	+0.0063	−0.067	338 110	0.8 0.7		
					+0.0053	−0.074	342 30	0.7 0.7		
					+0.0058	*−0.070*		*1.5 1.4*	*0.091*	*131.0*
997	10.5	22.45	42 56 38.3	5.27	+0.0006	−0.011	338 109	0.5 0.4		
					+0.0025	−0.035	342 29	0.7 0.7		
					+0.0017	*−0.026*		*1.2 1.1*	*0.028*	*125*
998	8.9	28.45	45 1 55.4	5.81	−0.0018	+0.031	339 94	0.2 0.2		
				5.52	+0.0024	−0.034	340 104	0.3 0.3		
					−0.0015	−0.000	343 50	1.1 1.1		
					−0.0008	*−0.002*		*1.6 1.6*	*0.009*	*328*
999	10.4	36.95	42 3 17.0	5.30	*0.0004*	*−0.003*	338 118	*1.0 1.0*	*0.007*	*352*
1000	10.7	37.07	44 54 39.0	4.29	*+0.0036*	*−0.027*	343 60	*1.1 1.1*	*0.045*	*112*
1001	11.1	47.73	45 21 25.8	4.29	+0.0062	+0.038	340	0.6 0.6		
					−0.0002	+0.015	343 56	1.1 1.1		
					+0.0021	*+0.023*		*1.7 1.7*	*0.041*	*37*
1002	9.0	4 8.61	46 5 36.8	7.37	+0.0022	−0.040	340 106	0.8 0.8		
				6.60	+0.0057	−0.091	347 2	0.3 0.7		
					+0.0032	*−0.064*		*1.1 1.5*	*0.065*	*145.6*
1003	10.8	27.87	42 9 21.6	5.10	+0.0032	+0.019	338 125	0.8 0.9		
				4.95	+0.0061	−0.002	342	0.6 0.6		
					+0.0095	−0.004	345 2	0.2 0.6		
					+0.0051	*+0.006*		*1.6 2.1*	*0 062*	*75.1*
1004	8.2	34.46	43 42 10.8	6.16	−0.0038	+0.003	339 104	0.6 0.7		
				5.95	−0.0068	−0.041	342 44	0.7 0.7		
					−0.0073	−0.014	346 7	0.4 0.8		
					−0.0059	*−0.017*		*1.7 2.2*	*0.060*	*263.3*
1005	8.7	38.81	42 18 36.6	5.13	−0.0006	0.006	338 128	0.7 0.8		
				5.01	−0.0007	−0.005	342 48	0.7 0.7		
					−0.0005	−0.027	345 5	0.3 0.7		
					−0.0006	*−0.012*		*1.7 2.2*	*0.004*	*236*
1006	10.1	43.79	44 50 48.0	4.93	+0.0031	+0.000	339 107	0.3 0.3		
					+0.0023	−0.007	343 69	1.1 1.1		
					+0.0018	+0.013	346 6	0.3 0.4		
					+0.0024	*−0.001*		*1.7 1.8*	*0.030*	*73*
1007	6.5	43.91	39 1 43.8	6.13	*−0.0088*	*−0.141*	337 96	*0.2 0.2*	*0.164*	*217.1*
1008	8.1	52.85	45 30 18.9	5.37	+0.0057	+0.019	340 119	0.6 0.6		
					+0.0039	−0.015	343 68	1.1 1.1		
					+0.0043	−0.017	347 13	0.7 0.8		
					+0.0045	*−0.007*		*2.4 2.5*	*0.051*	*86.6*
1009	9.0	5 0.21	43 12 26.9	5.59	+0.0055	+0.018	339 112	0.3 0.3		
				5.65	+0.0045	0.069	342 46	0.7 0.7		
					+0.0008	−0.013	346 11	0.4 0.5		
					+0.0037	*−0.033*		*1.4 1.5*	*0.059*	*117.6*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.010$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	′
1010	8.4	8 5 2.96	40 49 45.9	5.29	+0.0037	−0.018	337 93	0.2 0.2		
				5.23	+0.0041	+0.002	341 57	1.0 1.0		
					+0.0037	+0.037	344 4	0.2 0.3		
					+0.0040	*+0.006*		*1.4 1.5*	*0.052*	*71.9*
1011	11	4.4	39 51 5	4.31	*+0.0037*	*−0.007*	344 —	*0.4 0.7*	*0.047*	*86*
1012	9.0	18.85	41 0 9.9	5.12	−0.0009	+0.011	337 97	0.1 0.1		
					−0.0052	+0.004	338 135	0.1 0.1		
					−0.0026	−0.007	341 54	1.0 1.0		
					−0.0027	+0.024	344 7	0.2 0.2		
					−0.0046	+0.001	345 12	0.2 0.2		
					−0.0029	*−0.000*		*1.6 1.6*	*0.031*	*289*
1013	9.0	51.79	39 24 20.0	4.31	*−0.0033*	*−0.096*	344 18	*0.6 0.7*	*0.092*	*201.6*
1014	8.9	53.99	46 26 21.0	4.91	−0.0037	+0.007	340 123	0.2 0.3		
				5.43	+0.0057	−0.003	347 21	1.1 1.0		
					+0.0043	*−0.001*		*1.3 1.3*	*0.049*	*79*
1015	7.9	6 13.48	39 46 18.9	4.31	*+0.0052*	*−0.014*	344 21	*0.9 0.9*	*0.064*	*93.6*
1016	9.4	19.03	43 50 31.7	4.76	+0.0003	−0.184	342 56	0.6 0.6		
				4.73	−0.0007	−0.107	346 29	1.1 1.1		
					−0.0003	*−0.134*		*1.7 1.7*	*0.124*	*180.0*
1017	8.6	29.64	40 17 10.7	4.81	−0.0018	−0.015	341 71	1.0 1.0		
					−0.0006	−0.002	344 26	0.9 0.9		
					−0.0012	*−0.009*		*1.9 1.9*	*0.010*	*276*
1018	9.8	53.83	39 42 40.4	4.31	*−0.0015*	*−0.012*	344 27	*0.9 0.9*	*0.013*	*261*
1019	9.1	7 20.53	39 47 14.6	4.31	*+0.0052*	*−0.026*	344 35	*0.9 0.9*	*0.064*	*105.3*
1020	10.6	27.72	45 1 54.1	4.30	−0.0028	−0.090	343 101	1.1 1.1		
				4.29	−0.0020	−0.100	346 33	0.3 0.2		
					−0.0038	−0.070	347 40	0.7 0.3		
					−0.0030	*−0.088*		*2.1 1.6*	*0.084*	*200.2*
1021	11.0	31.61	41 3 58.5	5.32	−0.0010	+0.099	341 85	1.0 1.0		
					−0.0008	+0.139	345	0.7 0.5		
					−0.0003	*+0.112*		*1.7 1.5*	*0.121*	*0.0*
1022	11.2	45.81	45 43 4.2	4.30	−0.0086	−0.022	343 -	1.0 0.9		
					−0.0081	−0.021	347 43	1.1 1.1		
					−0.0083	*−0.021*		*2.1 2.0*	*0.085*	*261.9*
1023	9.9	47.48	46 8 35.5	4.31	*−0.0041*	*−0.048*	345 42	*1.1 1.1*	*0.056*	*225.7*
1024	11	17.6	46 45 10	4.30	*0.0144*	*−0.224*	347	*1.0 0.9*	*0.259*	*214.0*
1025	10.4	54.04	42 59 13.5	4.76	+0.0033	−0.053	342 73	0.7 0.7		
				4.94	+0.0050	+0.015	345 41	0.7 0.3		
					+0.0026	+0.021	346 44	0.6 0.2		
					+0.0037	*−0.024*		*2.0 1.2*	*0.046*	*109*
1026	8.4	8 12.09	44 42 24.6	4.30	−0.0030	+0.014	343 104	1.1 1.1		
					−0.0046	−0.012	346 45	1.1 1.1		
					−0.0038	*+0.001*		*2.2 2.2*	*0.038*	*285*
1027	7.4	14.27	41 26 42.8	4.81	−0.0009	−0.056	341 93	1.0 1.0		
					−0.0037	−0.050	345 54	1.1 1.1		
					−0.0024	*−0.053*		*2.1 2.1*	*0.050*	*208.6*
1028	10.9	19.15	44 54 25.0	4.29	−0.0011	+0.020	343 108	1.1 1.1		
					−0.0019	+0.012	346 —	0.9 0.8		
					−0.0015	*+0.017*		*2.0 1.9*	*0.029*	*333*
1029	8.7	19.78	46 24 44.1	4.30	*−0.0061*	*−0.046*	347 45	*1.1 1.1*	*0.070*	*238.3*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +0''.010$; 1019—1029: $+0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1030	9.4	8 8 23.08	40 9 48.1	4.69	−0.0074	−0.112	341 95	0.6 0.5		
				4.65	−0.0036	−0.082	344 47	0.9 0.9		
					−0 0051	*−0.093*		*1.5 1.4*	*0.101*	*213.7*
1031	8.6	37.93	43 18 21.0	4.78	+0.0047	+0.048	342 79	0.7 0.7		
					+0.0038	+0.093	346 56	1.1 1.1		
					+0.0042	*+0.076*		*1.8 1.8*	*0.098*	*30.0*
1032	11.0	42.33	40 32 22.9	4.31	−0.0045	−0.004	341 —	0.9 0.9		
					−0.0001	−0.013	344 56	0.9 0.9		
					−0.0023	*−0.008*		*1.8 1.8*	*0.023*	*272*
1033	9.4	45.94	41 2 0.3	4.82	+0.0019	−0.049	341 97	1.0 1.0		
				4.98	+0.0023	−0.047	344 53	0.3 0.2		
					+0.0019	−0.010	345 58	0.8 0.4		
					+0.0020	*−0.039*		*2.1 1.6*	*0.039*	*140*
1034	11.0	47.88	45 53 19.2	4.30	−0.0012	+0.030	343 —	0.6 0.5		
					+0.0030	+0.019	347 51	1.1 1.1		
					+0.0015	*+0.022*		*1.7 1.6*	*0.036*	*32*
1035	9.8	51.24	40 54 21.0	4.87	−0.0044	+0.013	341 99	1.0 1.0		
				4.90	−0.0038	+0.017	344 55	0.7 0.6		
					−0.0042	*+0.014*		*1.7 1.6*	*0.050*	*297.6*
1036	9.7	9 3.71	43 48 43.0	4.61	−0.0005	−0.071	342 84	0.4 0.3		
					−0.0015	−0.059	346 62	1.1 1.1		
					+0.0051	−0.048	349 2	0.1 0.1		
					−0.0008	*−0.061*		*1.6 1.5*	*0.052*	*187.7*
1037	10.1	6.00	44 15 56.5	4.30	−0.0011	+0.004	343 115	0.7 0.7		
					−0.0031	−0.030	346 60	1.1 1.1		
					+0.0035	−0.028	350 4	0.1 0.1		
					+0.0020	*−0.017*		*1.9 1.9*	*0.021*	*247*
1038	9.4	29.49	41 2 22.8	4.77	−0.0026	−0.052	341 103	0.8 0.9		
				4.99	−0.0024	−0.043	344 60	0.4 0.2		
					−0.0021	+0.014	345 62	0.9 0.5		
					−0.0041	−0.048	348 1	0.2 0.4		
					−0.0025	*−0.034*		*2.3 2.0*	*0 035*	*225*
1039	7.2	34.40	45 14 32.8	4.30	−0.0012	−0.039	343 117	0.9 1.0		
					0.0013	−0.040	347 62	1.1 1.1		
					−0.0034	−0.057	350 5	0.5 0.8		
					-0.0017	*−0.044*		*2.5 2.9*	*0.038*	*203*
1040	9.1	45.64	46 36 31.1	4.30	*+0.0069*	*−0.183*	347 56	*1.1 1.1*	*0.189*	*156.7*
1041	8.9	58.48	41 11 39.6	4.78	−0.0023	−0.043	341 109	0.4 0.8		
				4.95	−0.0031	−0.005	345 67	1.1 1.0		
					−0.0017	−0.037	348 6	0.5 0.8		
					−0.0026	*−0.027*		*2.0 2.6*	*0.032*	*236*
1042	11.0	10 3.92	45 53 31.4	4.30	*+0.0013*	*+0.021*	347 67	*1.1 1.1*	*0.034*	*28*
1043	9.8	6.37	39 1 36.6	4.31	*+0.0070*	*−0.070*	344 75	*0.6 0.3*	*0.105*	*125.7*
1044	10.5	18.78	39 39 18.5	4.31	*+0.0029*	*+0.008*	344 73	*0.9 0.9*	*0.041*	*65*
1045	9.0	23.87	41 4 26.0	4.86	−0.0026	+0.062	341 112	0.2 0.5		
				4.97	−0.0033	+0.124	345 73	0.9 0.8		
					−0.0014	+0.082	348 11	0.8 0.9		
					−0.0024	*+0.093*		*1.9 2.2*	*0.105*	*346.2*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1046	9.9	8 10 27.45	40 25 33.2	4.75	−0.0076	−0.065	341 115	0.2 0.2		
				4.77	−0.0024	−0.037	344 78	0.9 0.9		
					−0.0018	−0.034	348 14	0.6 0.7		
					−0.0028	*−0.039*		*1.7 1.8*	*0.042*	*224*
1047	9.9	31.19	42 39 38.6	4.41	−0.0081	+0.022	342 97	0.2 0.4		
				4.52	−0.0022	−0.027	345 76	1.1 1.1		
					−0.0002	−0.034	349 15	0.9 0.9		
					−0.0019	*−0.021*		*2.2 2.4*	*0.022*	*236*
1048	11	45.3	40 10 38	4.31	*+0.0005*	*+0.001*	344 —	*0.9 0.9*	*0.013*	*39*
1049	10.6	54.57	42 50 8.2	4.32	−0.0013	+0.019	345 75	1.0 0.9		
					−0.0008	−0.007	349 14	1.1 1.1		
					−0.0010	*+0.005*		*2.1 2.0*	*0.017*	*327*
1050	9.4	11 5.18	43 5 1.3	4.32	−0.0042	+0.009	346 84	0.9 0.7		
					−0.0014	−0.011	349 20	1.1 1.1		
					−0.0027	*−0.003*		*2.0 1.8*	*0.028*	*283*
1051	9.5	9.94	39 56 13.4	4.31	*−0.0005*	*−0.002*	344 82	*0.9 0.9*	*0.008*	*337*
1052	8.8	16.25	44 55 45.0	4.31	+0.0042	−0.245	346 77	0.9 0.8		
					+0.0027	−0.261	350 17	1.1 1.1		
					+0.0034	*−0.254*		*2.0 1.9*	*0.248*	*171.0*
1053	9.7	16.74	46 23 12.0	4.30	*+0.0038*	*+0.004*	347 78	*1.1 1.1*	*0.045*	*73*
1054	9.5	30.40	39 56 50.5	4.31	*−0.0005*	*−0.033*	344 89	*0.9 0.9*	*0.024*	*187*
1055	8.9	42.83	39 18 3.2	4.31	*−0.0095*	*−0.167*	344 96	*0.9 0.9*	*0.191*	*214.1*
1056	8.4	44.56	43 11 44.7	4.32	+0.0023	−0.038	346 87	1.0 0.9		
					+0.0024	−0.033	349 25	1.1 1.1		
					+0.0024	*−0.035*		*2.1 2.0*	*0.039*	*132*
1057	9.4	48.84	39 17 2.7	4.31	*+0.0068*	*−0.384*	344 95	*0.9 0.9*	*0.384*	*167.5*
1058	10.9	49.00	40 20 11.5	4.75	+0.0009	−0.008	344 92	0.9 0.9		
					−0.0011	−0.017	348 27	0.8 0.8		
					-0.0000	*−0.012*		*1.7 1.7*	*0.004*	*135*
1059	8.2	12 6.26	40 2 19.1	4.64	+0.0000	−0.134	344 93	0.9 0.9		
				4.59	+0.0015	−0.123	348 33	0.5 0.4		
					+0.0005	*−0.131*		*1.4 1.3*	*0.122*	*175.8*
1060	10.9	11.4	41 8 42	4.85	−0.0048	+0.056	345 —	0.9 0.8		
				4.89	−0.0034	−0.004	348 31	1.0 1.0		
					−0.0041	*+0.023*		*1.9 1.8*	*0.054*	*306.7*
1061	11.1	11.76	42 15 56.9	4.31	+0.0012	−0.052	345 86	1.1 1.1		
					−0.0026	−0.071	349	0.9 0.9		
					−0.0005	*−0.061*		*2.0 2.0*	*0.052*	*183.3*
1062	11	35.7	40 56 41	4.92	−0.0154	−0.188	344 —	0.5 0.3		
				5.01	−0.0161	−0.207	348	1.0 1.0		
					−0.0159	*−0.203*		*1.5 1.3*	*0.263*	*222.4*
1063	10.9	43.21	42 6 28.1	4.31	+0.0024	−0.033	345 99	1.1 1.1		
					+0.0015	−0.070	349 -	0.8 0.7		
					+0.0020	*−0.047*		*1.9 1.8*	*0.046*	*146*
1064	7.3	13 7.46	44 58 41.1	4.31	−0.0078	−0.059	346 95	0.5 0.3		
					−0.0030	−0.053	347 93	0.3 0.2		
					−0.0097	−0.062	350 23	1.1 1.1		
					−0.0081	*−0.060*		*1.9 1.6*	*0.097*	*238.4*
1065	8.5	8.90	40 52 9.8	4.89	−0.0023	−0.039	344 109	0.6 0.5		
				4.96	−0.0014	−0.041	348 44	1.0 1.0		
					−0.0017	*−0.040*		*1.6 1.5*	*0.035*	*209*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.009$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		″	″			″	°
1066	11	8 13 10.5	44 33 24	4.31	*−0.0026*	*−0.047*	350 —	*1.1 1.1*	*0.045*	*212*
1067	8.9	19.50	45 15 39.5	4.31	+0.0042	+0.043	347 99	0.9 0.8		
					−0.0005	+0.002	350 26	1.1 1.1		
					+0.0016	*+0.019*		*2.0 1.9*	*0.035*	*37*
1068	10.6	19.98	44 13 54.4	4.31	*+0.0000*	*+0.006*	346 100	*1.1 1.1*	*0.015*	*11*
1069	9.6	37.66	43 14 45.7	4.32	+0.0033	−0.001	346 104	0.8 0.8		
					+0.0022	−0.005	349 38	1.1 1.1		
					+0.0027	*−0.003*		*1.9 1.9*	*0.034*	*80*
1070	10.9	56.27	40 33 13.8	5 29	−0.0002	−0.054	344 —	0.7 0.7		
					+0.0011	−0.022	348 55	1.0 1.0		
					+0.0006	*−0.035*		*1.7 1.7*	*0.028*	*161*
1071	8.6	59.28	42 24 59.6	4.32	−0.0022	−0.045	345 106	1.0 1.0		
					−0.0046	−0.025	349 44	1.1 1.1		
					−0.0035	*−0.035*		*2.1 2.1*	*0.044*	*234*
1072	9.0	59.44	39 15 56.2	4.31	*+0.0021*	*+0.012*	344 120	*0.5 0.5*	*0.034*	*52*
1073	9.5	14 12.29	45 14 53.9	4.30	+0.0027	−0.019	347 105	0.6 0.6		
					+0.0009	−0.086	350 32	1.1 1.1		
					+0.0007	−0.059	354 2	0.2 0.2		
					+0.0014	*−0.062*		*1.9 1.9*	*0.056*	*161.2*
1074	11	12.9	39 57 21	4.31	*+0.0015*	*−0.090*	344 —	*0.8 0.9*	*0.084*	*165.5*
1075	8.8	28.48	40 40 5.9	4.88	−0.0121	−0.176	344 123	0.5 0.5		
					−0.0125	−0.189	348 61	1.0 1.0		
					−0.0130	−0.190	351 1	0.2 0.2		
					−0.0124	*−0.185*		*1.7 1.7*	*0.224*	*218.1*
1076	10.4	15 20.86	42 6 1.8	4.31	+0.0083	−0.224	345 117	0.3 0.7		
					+0.0041	−0.273	349 58	1.0 0.8		
					+0.0013	−0.202	352 9	0.9 1.0		
					+0.0035	*−0.231*		*2.2 2.5*	*0.227*	*169.3*
1077	10.5	28.14	44 44 56.9	4.31	−0.0033	−0.079	346 113	0.2 0.3		
					−0.0028	−0.111	350 37	1.1 1.1		
					−0.0082	−0.118	353 —	0.5 0.5		
					−0.0044	*−0.108*		*1.8 1.9*	*0.109*	*203.3*
1078	11	31.7	42 6 3	4.30	+0.0043	+0.001	345 —	0.2 0.6		
					−0.0065	−0.071	349 —	0.9 0.8		
					−0.0086	+0.012	352 —	1.0 1.0		
					−0.0065	*−0.018*		*2.1 2.4*	*0.070*	*261.8*
1079	10.2	33.93	41 24 0.7	4.85	+0.0026	−0.166	345 121	0.2 0.2		
				4.82	+0.0005	−0.210	348 75	1.0 1.0		
					−0.0007	−0.193	352 16	0.7 0.8		
					+0.0003	*−0.199*		*1.9 2.0*	*0.191*	*178.2*
1080	8.2	36.30	45 40 14.1	4.30	−0.0061	−0.069	347 113	0.3 0.7		
					−0.0046	−0.092	350 38	1.1 1.1		
					−0.0043	−0.064	354 15	0.9 0.9		
					−0.0047	*−0.077*		*2.3 2.7*	*0.083*	*213.7*
1081	10.9	54.07	41 25 56.4	4.85	+0.0013	−0.023	348 81	1.0 1.0		
					+0.0007	−0.018	352 15	0.9 0.9		
					+0.0010	*−0.021*		*1.9 1.9*	*0.019*	*133*
1082	8.8	56.42	40 40 50.5	4.88	+0.0048	−0.128	348 87	1.0 1.0		
					+0.0044	−0.138	351 13	0.8 0.8		
					+0.0046	*−0.132*		*1.8 1.8*	*0.136*	*156.1*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.009$; 1076—1082: $+\,0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1083	6.7	8 15 57.82	40 45 47.4	4.96	+0.0000	−0.043	348 86	1.0 1.0		
					+0.0003	−0.065	351 12	0.6 0.6		
					+0.0001	*−0.051*		*1.6 1.6*	*0.043*	*175*
1084	5.8	59.53	43 30 33.3	4.73	−0.0027	−0.090	349 63	1.1 1.1		
				4.76	−0.0040	−0.095	353 12	0.8 0.9		
					−0.0032	*−0.092*		*1.9 2.0*	*0.090*	*200.9*
1085	11.0	16 5.54	46 24 28.7	4.28	*+0.0011*	*−0.003*	354 18	*1.0 1.0*	*0.016*	*72*
1086	9.8	12.62	39 19 49.6	4.29	*+0.0022*	*+0.001*	351 26	*0.8 0.8*	*0.030*	*73*
1087	10.8	34.94	39 44 34.2	4.29	*−0.0003*	*−0.042*	351 30	*1.1 1.1*	*0.034*	*180*
1088	10.0	42.33	41 30 10.1	4.79	+0.0029	+0.015	348 91	1.0 1.0		
					+0.0028	+0.017	352 28	1.1 1.1		
					+0.0028	*+0.016*		*2.1 2.1*	*0.042*	*56*
1089	8.9	58.84	39 55 17.1	4.29	*−0.0012*	*−0.009*	351 35	*1.1 1.1*	*0.011*	*265*
1090	9.2	17 14.79	39 22 34.0	4.29	*+0.0021*	*+0.003*	351 36	*1.1 1.1*	*0.029*	*68*
1091	9.2	14.95	46 18 21.0	4.28	*+0.0019*	*−0.125*	354 38	*1.0 1.0*	*0.119*	*168.9*
1092	9.2	16.98	45 16 19.2	4.30	−0.0057	−0.178	350 56	1.1 1.1		
					−0.0060	−0.174	354 36	0.9 0.8		
					−0.0058	*−0.176*		*2.0 1.9*	*0.178*	*199.0*
1093	7.4	19.45	45 16 33.6	4.30	−0.0074	−0.180	350 55	1.1 1.1		
					−0.0063	−0.206	354 37	0.9 0.8		
					−0.0069	*−0.191*		*2.0 1.9*	*0.196*	*200.9*
1094	7.0	56.63	42 19 37.1	4.30	−0.0030	+0.005	349 87	1.0 0.9		
					+0.0004	+0.002	352 43	1.1 1.1		
					−0.0012	*+0.003*		*2.1 2.0*	*0.016*	*315*
1095	7.8	57.92	42 18 21.0	4.30	−0.0076	−0.059	349 88	1.0 0.9		
					−0.0044	−0.065	352 44	1.1 1.1		
					−0.0059	*−0.062*		*2.1 2.0*	*0.083*	*229.4*
1096	11.0	18 6.00	42 22 37.1	4.30	−0.0073	−0.028	349 86	1.0 1.0		
					−0.0048	−0.020	352 42	1.1 1.1		
					0.0060	*−0.024*		*2.1 2.1*	*0.065*	*255.7*
1097	10.0	9.63	44 51 50.4	4.72	+0.0032	−0.012	350 67	1.1 1.1		
				4.69	−0.0001	−0.004	353 26	0.8 0.7		
					+0.0018	*−0.009*		*1.9 1.8*	*0.022*	*93*
1098	9.6	20.18	42 49 1.7	4.31	−0.0064	−0.097	349 94	1.1 1.1		
					−0.0052	−0.095	352 47	1.0 0.9		
					−0.0058	*−0.096*		*2.1 2.0*	*0.108*	*215.2*
1099	8.9	31.38	39 56 19.8	4.29	*0.0065*	*0.120*	351 50	*1.1 1.1*	*0.133*	*212.7*
1100	9.8	34.81	40 42 29.2	4.79	−0.0049	−0.061	348 113	1.0 1.0		
					−0.0023	−0.079	351 47	1.1 1.1		
					−0.0035	*−0.070*		*2.1 2.1*	*0.073*	*211.5*
1101	8.5	36.63	39 33 56.6	4.29	*+0.0050*	*−0.074*	351 51	*1.1 1.1*	*0.089*	*137.7*
1102	11	41.5	44 13 5	4.86	−0.0096	−0.027	350 —	0.8 0.8		
					−0.0058	+0.000	353 —	1.0 1.0		
					−0.0075	*−0.012*		*1.8 1.8*	*0.078*	*267.1*
1103	10.7	45.45	43 20 58.7	4.32	+0.0001	+0.024	349 98	1.1 1.1		
					−0.0050	+0.016	353 —	1.0 1.0		
					−0.0023	*+0.020*		*2.1 2.1*	*0.036*	*322*
1104	10.6	59.60	45 35 46.9	4.29	+0.0025	+0.025	350 76	0.9 0.9		
					+0.0004	+0.016	354 54	1.0 1.0		
					−0.0014	+0.009	357 —	0.2 0.2		
					+0.0011	*+0.019*		*2.1 2.1*	*0.031*	*29*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	′ ″		s	″			″	
1105	9 9	8 19 5.12	43 28 41.7	4.80	+0.0009	+0.023	349 96	0.9 0.9		
				4.76	+0.0005	+0.012	353 35	1.0 1.0		
					+0.0014	−0.042	356 1	0.1 0.2		
					+0.0007	*+0.012*		*2.0 2.1*	*0.022*	*27*
1106	9.2	10.35	42 15 40.4	4.29	0.0068	−0.024	349 103	0.7 0.7		
					0.0035	−0.011	352 58	1.1 1.1		
					−0.0036	−0.090	356 3	0.1 0.1		
					−0.0047	*0.020*		*1.9 1.9*	*0.050*	*256.2*
1107	11	11.2	42 39 3	4.30	−0.0026	+0.009	349 —	0.9 1.0		
					+0.0027	+0.023	352 —	1.1 1.1		
					+0.0003	*+0.016*		*2.0 2.1*	*0.025*	*14*
1108	11	19.0	40 40 33	4.73	−0.0051	−0.108	348 —	0.8 0.8		
					−0.0005	−0.115	351 —	1.1 1.1		
					−0.0024	*−0.112*		*1.9 1.9*	*0.107*	*193.5*
1109	10.6	23.53	41 36 24.6	4.62	+0.0023	−0.022	348 114	0.5 0.7		
				4.70	+0.0036	−0.058	352 59	1.1 1.1		
					+0.0032	*−0.044*		*1.6 1.8*	*0.053*	*132.7*
1110	8.6	40.89	42 44 0.4	4.28	−0.0041	−0.004	349 107	0.9 0.9		
				4.26	−0.0007	−0.030	352 63	1.1 1.1		
					−0.0034	−0.019	356 6	0.4 0.7		
					−0.0024	*−0.018*		*2.4 2.7*	*0.025*	*247*
1111	10.7	41.26	42 51 22.6	4.27	−0.0041	+0.026	349 106	0.9 1.0		
				4.26	−0.0019	+0.007	352 62	1.0 0.9		
					−0.0037	−0.022	356 5	0.4 0.7		
					−0.0031	*+0.006*		*2.3 2.6*	*0.034*	*294*
1112	10.6	41.60	46 19 42.9	4.28	*−0.0022*	*−0.017*	354 60	*1.0 1.0*	*0.022*	*246*
1113	9.3	45.77	45 18 9.9	4.29	+0.0034	−0.039	350 88	0.8 0.9		
					+0.0009	−0.023	354 62	1.0 1.0		
					+0.0004	−0.016	357 4	0.6 0.9		
					+0.0016	*−0.026*		*2.4 2.8*	*0.027*	*132*
1114	10.7	48.02	43 2 7.6	4.26	+0.0065	−0.035	349 105	0.9 1.0		
				4.25	+0.0075	−0.075	352 61	0.5 0.2		
					+0.0061	−0.020	353 —	0.7 0.3		
					+0.0069	−0.080	356 4	0.5 0.8		
					+0.0067	*−0.052*		*2.6 2.3*	*0.088*	*120.1*
1115	11	50.4	42 47 58	4.30	+0.0170	+0.006	349 —	0.8 0.9		
					+0.0191	−0.042	352 —	1.0 1.0		
					+0.0182	*−0.019*		*1.8 1.9*	*0.203*	*93.1*
1116	11	52.0	42 32 1	4.30	−0.0064	−0.070	349 —	0.7 0.8		
					−0.0034	−0.049	352 —	1.1 1.1		
					−0.0046	*−0.058*		*1.8 1.9*	*0.069*	*223.8*
1117	9.3	52.58	43 58 3.9	5.09	+0.0036	+0.004	349 104	0.2 0.2		
					+0.0017	+0.001	353 40	1.0 1.0		
					+0.0020	*+0.002*		*1.2 1.2*	*0.027*	*68*
1118	8.7	56.83	39 22 30.3	4.29	*+0.0032*	*−0.017*	351 61	*1.1 1.1*	*0.040*	*103*
1119	9.2	20 9.33	45 33 19.3	4.29	+0.0000	−0.016	350 87	0.5 0.7		
					−0.0015	−0.039	354 66	1.0 1.0		
					−0.0019	−0.020	357 9	0.7 0.8		
					−0.0013	*−0.026*		*2.2 2.5*	*0.021*	*211*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s{,}0003$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''{,}008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1120	8.6	8 20 10.72	44 11 9.4	4.85	−0.0008	−0.043	350 96	0.3 0.3		
					−0.0019	−0.031	353 44	1.0 1.0		
					+0.0015	−0.026	357 10	0.5 0.5		
					−0.0008	*−0.032*		*1.8 1.8*	*0.025*	*192*
1121	8.5	13.43	39 20 22.0	4.29	*+0.0038*	*−0.015*	351 70	*1.1 1.1*	*0.047*	*99*
1122	9.7	19.45	40 37 47.8	4.76	+0.0031	−0.057	348 128	0.2 0.5		
				4.86	+0.0058	−0.086	351 66	1.1 1.1		
					+0.0021	−0.097	355 13	0.7 0.8		
					+0.0042	*−0.084*		*2.0 2.4*	*0.092*	*146.1*
1123	10.9	25.87	41 28 13.0	4.29	−0.0000	+0.005	352 85	1.1 1.1		
					−0.0040	−0.001	355 —	0.7 0.7		
					−0.0016	*+0.003*		*1.8 1.8*	*0.019*	*306*
1124	9.1	29.48	41 40 38.7	4.70	−0.0005	+0.031	348 124	0.2 0.2		
				4.73	−0.0004	+0.013	352 81	1.1 1.1		
					−0.0004	+0.013	355 8	0.5 0.6		
					−0.0004	*+0.015*		*1.8 1.9*	*0.023*	*358*
1125	6.4	38.53	45 59 27.4	4.28	−0.0047	−0.373	350 90	0.1 0.1		
					−0.0021	−0.363	354 71	1.0 1.0		
					+0.0014	−0.387	357 11	0.3 0.2		
					−0.0015	*−0.367*		*1.4 1.3*	*0.359*	*182.1*
1126	10.5	43.92	42 1 29.7	4.29	+0.0012	+0.009	352 78	1.1 1.1		
					+0.0047	−0.023	356 —	0.3 0.2		
					+0.0020	*+0.004*		*1.4 1.3*	*0.027*	*63*
1127	10.5	51.74	46 0 42.0	4.28	+0.0064	+0.073	350 —	0.1 0.1		
					+0.0003	+0.019	354 70	1.0 1.0		
					+0.0009	*+0.024*		*1.1 1.1*	*0.034*	*21*
1128	9.0	56.73	44 59 20.1	4.56	−0.0076	+0.060	350 99	0.2 0.3		
				4.44	−0.0081	+0.050	353 45	0.7 0.3		
					−0.0093	+0.065	354 83	0.6 0.3		
					−0.0078	+0.065	357 19	1.1 1.1		
					−0.0082	*+0.062*		*2.6 2.0*	*0.109*	*309.8*
1129	9.6	58.93	40 55 30.8	4.85	+0.0030	+0.017	351 77	0.9 0.7		
				4.91	+0.0006	−0.003	355 18	1.0 1.0		
					+0.0017	*+0.005*		*1.9 1.7*	*0.026*	*59*
1130	10.8	21 5.66	45 36 40.6	4.28	−0.0008	−0.004	354 77	1.0 1.0		
					−0.0004	−0.011	357 16	0.9 0.9		
					−0.0006	*−0.007*		*1.9 1.9*	*0.003*	*288*
1131	7.4	6.97	46 34 41.6	4.28	*−0.0037*	*−0.024*	354 74	*1.0 1.0*	*0.039*	*246*
1132	7.7	15.60	42 2 42.8	4.38	−0.0020	−0.042	352 88	1.1 1.1		
				4.33	−0.0020	−0.053	355 21	0.2 0.1		
					−0.0026	−0.078	356 14	0.4 0.3		
					−0.0021	*−0.050*		*1.7 1.5*	*0.047*	*207*
1133	10.3	37.05	45 1 59.9	4.29	−0.0028	−0.060	353 —	0.3 0.2		
					−0.0040	−0.067	354 89	0.7 0.3		
					−0.0033	−0.037	357 22	1.1 1.1		
					−0.0035	*−0.046*		*2.1 1.6*	*0.050*	*221.0*
1134	10.5	54.68	43 31 33.2	4.69	+0.0043	−0.041	353 54	1.0 1.0		
					+0.0015	−0.037	356 18	1.0 1.0		
					+0.0029	*−0.039*		*2.0 2.0*	*0.047*	*132*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0003$; 1130—1134: $+0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.008$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	″ ′ °		s	″			″ .	°
1135	10.8	8 22 4.29	15 17 11.2	4.28	0.0033	−0.052	354 97	1.0 1.0		
					0.0014	−0.043	357 25	1.1 1.1		
					−0.0023	*−0.047*		*2.1 2.1*	*0.044*	*208*
1136	11.0	10.32	46 5 36.6	4.28	*+0.0153*	*−0.017*	354 95	*1.0 1.0*	*0.162*	*93.2*
1137	9.1	31.97	46 15 15.2	4.28	*−0.0326*	*−0.425*	354 100	*1.0 1.0*	*0.535*	*218.8*
1138	10.5	36.90	46 24 50.4	4.28	*−0.0024*	*−0.004*	354 99	*1.0 1.0*	*0.022*	*280*
1139	9.1	23 3.04	40 21 45.3	4.79	+0.0015	−0.073	351 97	1.1 1.1		
					+0.0008	−0.085	355 45	1.0 1.0		
					+0.0012	*−0.079*		*2.1 2.1*	*0.074*	*167.5*
1140	11.0	10.50	42 29 35.0	4.22	+0.0027	−0.007	352 115	1.1 1.1		
					+0.0039	−0.040	356 29	1.0 1.0		
					+0.0033	*−0.023*		*2.1 2.1*	*0.042*	*112*
1141	10.6	28.93	41 31 2.5	4.82	−0.0047	−0.004	352 124	1.0 1.0		
					−0.0035	−0.005	355 49	1.0 1.0		
					−0.0041	*−0.004*		*2.0 2.0*	*0.043*	*274*
1142	11.1	31.67	45 15 15.7	4.29	−0.0008	−0.057	354 115	0.8 0.7		
					+0.0004	−0.014	357 41	1.1 1.1		
					−0.0001	*−0.031*		*1.9 1.8*	*0.024*	*175*
1143	10.8	31.81	45 15 19.5	4.29	+0.0001	−0.016	354 114	0.8 0.7		
					+0.0008	−0.001	357 40	1.1 1.1		
					+0.0005	*−0.007*		*1.9 1.8*	*0.009*	*90*
1144	10.8	35.60	43 10 10.9	4.15	*−0.0040*	*−0.043*	356 35	*1.0 1.0*	*0.055*	*228.7*
1145	9.6	42.10	39 11 32.6	4.29	*+0.0010*	*−0.094*	351 103	*0.6 0.6*	*0.088*	*170.2*
1146	11	43.4	40 9 59	4.76	−0.0043	−0.075	351 —	1.1 1.1		
				4.73	−0.0064	−0.084	355 —	0.9 0.8		
					−0.0052	*−0.079*		*2.0 1.9*	*0.092*	*218.4*
1147	9.2	47.59	40 24 28.6	4.82	+0.0017	+0.013	351 101	1.0 1.0		
					+0.0022	−0.007	355 59	1.0 1.0		
					+0.0020	*+0.003*		*2.0 2.0*	*0.027*	*68*
1148	9.9	24 19.87	45 13 3.2	4.28	+0.0017	−0.056	354 127	0.5 0.5		
					+0.0044	−0.030	357 48	1.1 1.1		
					−0.0005	−0.005	361 4	0.2 0.2		
					+0.0031	*−0.034*		*1.8 1.8*	*0.045*	*127*
1149	10.2	25.04	43 20 54.5	4.53	−0.0019	+0.021	353 60	0.6 0.7		
				4.55	+0.0005	+0.022	356 40	1.0 1.0		
					−0.0009	−0.022	360 3	0.2 0.3		
					−0.0005	*+0.015*		*1.8 2.0*	*0.022*	*355*
1150	6.2	32.73	40 33 38.2	4.83	−0.0008	−0.031	351 108	0.7 0.8		
				4.76	−0.0004	−0.033	355 65	1.0 1.0		
					−0.0024	−0.010	358 1	0.2 0.3		
					−0.0008	*−0.029*		*1.9 2.1*	*0.023*	*193*
1151	10.0	25 3.23	39 41 53.9	4.18	+0.0166	−0.111	351 113	0.3 0.8		
				4.19	+0.0197	−0.152	358 8	0.6 0.9		
					+0.0187	*−0.133*		*0.9 1.7*	*0.251*	*120.1*
1152	9.6	11.64	44 4 23.7	4.55	−0.0038	−0.033	353 62	0.6 0.8		
				4.60	−0.0028	−0.036	357 60	0.9 0.8		
					−0.0055	−0.033	360 8	0.9 1.0		
					−0.0041	*−0.034*		*2.4 2.6*	*0.050*	*237.3*
1153	10.4	26.52	44 51 17.4	4.29	+0.0012	−0.009	357 58	1.1 1.1		
					−0.0017	+0.012	360 11	0.5 0.5		
					+0.0003	*−0.002*		*1.6 1.6*	*0.007*	*45*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.008$; 1139—1153: $+\,0''.007$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1154	9.3	8 25 40.80	43 1 4.5	4.16	−0.0005	−0.091	353 —	0.1 0.1		
				4.17	0.0034	−0.016	356 52	1.0 1.0		
					−0.0024	+0.027	359 8	0.2 0.1		
					−0.0002	−0.088	360 16	0.2 0.2		
					0.0026	*−0.029*		*1.5 1.4*	*0.035*	*231*
1155	9.2	41.24	40 10 54.6	4.70	0.0011	−0.029	355 81	0.9 0.9		
					−0.0024	−0.035	358 12	1.0 1.0		
					−0.0018	*−0.032*		*1.9 1.9*	*0.031*	*216*
1156	7.9	46.68	45 19 10.8	4.25	−0.0028	−0.126	354 136	0.2 0.2		
					−0.0032	−0.108	357 61	1.1 1.1		
					−0.0050	0.103	361 14	0.6 0.6		
					−0.0037	*−0.108*		*1.9 1.9*	*0.108*	*200.1*
1157	9.8	51.02	39 27 8.3	4.11	*+0.0041*	*−0.046*	358 13	*0.8 0.9*	*0.063*	*128.5*
1158	9.9	52.27	45 2 58.3	4.26	−0.0079	−0.049	354 137	0.1 0.1		
				4.27	−0.0027	−0.055	357 63	1.1 1.1		
					−0.0074	−0.087	361 15	0.4 0.3		
					−0.0042	*−0.061*		*1.6 1.5*	*0.069*	*218.5*
1159	9.0	55.71	43 57 45.4	4.24	+0.0006	+0.025	356 58	0.7 0.4		
				4.25	+0.0008	+0.008	357 72	0.6 0.2		
					−0.0002	−0.018	360 19	1.1 1.1		
					+0.0003	*0.005*		*2.4 1.7*	*0.005*	*68*
1160	10.2	26 3.76	43 31 12.0	4.21	−0.0047	−0.054	356 60	1.0 1.0		
					−0.0037	−0.096	360 20	1.0 1.0		
					−0.0042	*−0.075*		*2.0 2.0*	*0.081*	*212.9*
1161	8.2	31.42	42 20 8.2	4.13	−0.0064	−0.053	356 66	1.0 1.0		
					−0.0049	−0.039	359 25	0.9 0.9		
					−0.0057	*−0.046*		*1.9 1.9*	*0.072*	*237.4*
1162	8.9	34.92	41 3 10.5	4.95	−0.0085	+0.014	355 86	1.0 1.0		
				5.02	−0.0103	+0.044	359 30	0.4 0.3		
					−0.0090	*+0.021*		*1.4 1.3*	*0.104*	*285.6*
1163	10.4	39.64	39 56 11.6	4.11	*−0.0030*	*−0.064*	358 17	*1.1 1.1*	*0.066*	*210.1*
1164	10.1	40.01	46 12 2.4	4.19	*−0.0092*	*−0.022*	361 20	*0.9 0.9*	*0.095*	*260.9*
1165	11.0	48.24	44 22 37.7	4.28	+0.0024	−0.046	357 74	1.1 1.1		
					+0.0006	−0.036	360 25	1.1 1.1		
					+0.0015	*−0.041*		*2.2 2.2*	*0.038*	*152*
1166	9.6	57.59	39 16 12.0	4.11	*+0.0064*	*−0.105*	358 23	*0.9 0.8*	*0.125*	*141.8*
1167	9.2	27 10.08	39 34 11.8	4.11	*−0.0052*	*−0.068*	358 22	*1.1 1.1*	*0.084*	*223.6*
1168	9.7	10.40	46 26 45.8	4.19	*+0.0009*	*−0.012*	361 22	*0.9 0.9*	*0.013*	*113*
1169	9.8	11.90	42 17 42.5	4.13	0.0014	−0.001	356 82	1.0 0.9		
					+0.0025	+0.009	359 35	0.9 0.9		
					+0.0019	*+0.004*		*1.9 1.8*	*0.025*	*64*
1170	10.0	16.76	42 54 5.9	4.13	+0.0170	−0.053	356 78	1.0 1.0		
				4.14	+0.0178	−0.054	359 38	0.6 0.5		
					+0.0173	*−0.053*		*1.6 1.5*	*0.197*	*103.5*
1171	10.3	19.13	45 58 46.1	4.23	−0.0096	−0.090	357 75	0.7 0.3		
				4.21	−0.0093	−0.093	361 23	0.9 0.9		
					−0.0094	*−0.092*		*1.6 1.2*	*0.128*	*228.5*
1172	6.8	21.83	45 32 16.4	4.24	−0.0029	−0.048	357 78	1.1 1.1		
					−0.0045	−0.033	361 24	0.9 0.9		
					−0.0036	*−0.041*		*2.0 2.0*	*0.050*	*226.6*

$\Delta\,\mu_\alpha = +\,0^s.0002$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.007$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1173	10.9	8 27 34.50	45 12 29.0	4.29	−0.0030	−0.018	357 80	1.1 1.1		
					−0.0048	−0.056	361 —	0.8 0.7		
					−0.0038	*−0.033*		*1.9 1.8*	*0.046*	*236*
1174	9.9	37.32	44 11 33.1	4.28	−0.0034	−0.036	357 82	0.9 0.8		
					−0.0056	−0.019	360 31	1.1 1.1		
					−0.0046	*−0.026*		*2.0 1.9*	*0.052*	*218.1*
1175	10.8	58.17	43 7 17.8	4.21	+0.0018	+0.007	356 85	1.0 1.0		
				4.20	+0.0009	−0.037	360 37	0.9 0.8		
					+0.0014	*−0.013*		*1.9 1.8*	*0.018*	*109*
1176	10.6	28 8.37	45 16 7.8	4.24	−0.0058	−0.046	357 83	1.1 1.1		
					−0.0045	−0.035	361 29	0.9 0.8		
					−0.0052	*−0.041*		*2.0 1.9*	*0.063*	*237.3*
1177	10.8	20.36	44 56 15.5	4.29	−0.0061	−0.058	357 86	1.1 1.1		
					−0.0079	−0.059	360 39	0.8 0.6		
					−0.0069	*−0.058*		*1.9 1.7*	*0.087*	*234.3*
1178	9.1	34.15	42 41 40.6	4.13	−0.0039	+0.012	356 95	1.0 1.0		
					−0.0031	−0.027	359 50	0.9 0.9		
					−0.0035	*−0.006*		*1.9 1.9*	*0.037*	*272*
1179	8.5	48.59	42 6 7.5	4.12	−0.0235	−0.632	356 97	0.4 0.4		
					−0.0238	−0.629	359 57	0.9 0.9		
					−0.0237	*−0.630*		*1.3 1.3*	*0.676*	*202.8*
1180	9.2	55.68	44 16 33.1	4.28	−0.0001	−0.034	357 91	0.8 0.8		
					−0.0007	−0.014	360 44	1.1 1.1		
					−0.0004	*−0.022*		*1.9 1.9*	*0.015*	*191*
1181	10.8	29 9.35	44 40 29.8	4.28	+0.0028	−0.034	357 90	1.0 1.1		
					+0.0025	−0.012	360 46	1.1 1.1		
					−0.0019	−0.026	364 —	0.2 0.4		
					+0.0022	*−0.023*		*2.3 2.6*	*0.031*	*122*
1182	10.4	20.38	43 52 32.7	4.24	+0.0039	+0.021	356 99	0.4 0.4		
					−0.0006	−0.060	360 49	1.1 1.1		
					+0.0027	−0.026	363 —	0.2 0.2		
					+0.0008	*−0.037*		*1.7 1.7*	*0.032*	*160*
1183	7.9	22.78	43 24 36.4	4.21	+0.0001	+0.024	356 100	0.8 0.8		
					−0.0015	−0.053	360 50	1.1 1.1		
					−0.0014	−0.008	363 1	0.2 0.5		
					−0.0009	*−0.018*		*2.1 2.4*	*0.013*	*212*
1184	9.2	42.80	43 50 40.5	4.23	+0.0001	+0.033	356 103	0.4 0.4		
					−0.0018	−0.027	360 53	1.1 1.1		
					−0.0029	+0.011	363 4	0.2 0.2		
					−0.0015	*−0.008*		*1.7 1.7*	*0.014*	*266*
1185	10.1	56.02	39 24 58.1	4.11	*−0.0028*	*−0.022*	358 40	*1.1 1.1*	*0.034*	*241*
1186	7.1	30 6.41	39 45 51.3	4.11	*−0.0002*	*−0.002*	358 46	*1.1 1.1*	*0.005*	*349*
1187	9.0	18.55	43 48 36.0	4.23	−0.0061	+0.019	356 108	0.2 0.2		
					−0.0067	−0.045	360 60	1.1 1.1		
					−0.0073	−0.024	363 8	0.4 0.4		
					−0.0068	*−0.033*		*1.7 1.7*	*0.076*	*249.9*
1188	10.1	20.01	42 47 4.5	4.13	−0.0062	+0.039	356 114	0.3 0.7		
				4.14	−0.0020	−0.013	359 71	0.9 0.8		
					−0.0036	−0.033	363 14	0.7 0.8		
					−0.0033	*−0.004*		*1.9 2.3*	*0.034*	*275*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.007$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			s	°
1189	10.1	8 30 22.09	40 52 45.8	4.36	−0.0064	+0.025	355 117	0.3 0.6		
				4.50	−0.0014	−0.019	358 41	1.0 0.8		
					−0.0029	−0.004	362 13	0.9 1.1		
					−0.0027	*−0.002*		*2.2 2.5*	*0.028*	*280*
1190	9.8	22.88	39 28 26.5	4.11	*−0.0016*	*−0.086*	358 48	*1.1 1.1*	*0.081*	*192.1*
1191	9.1	32.28	40 41 23.6	4.24	−0.0023	+0.032	355 118	0.1 0.2		
				4.30	+0.0002	−0.011	358 51	1.1 1.1		
					+0.0012	+0.017	362 14	1.0 1.0		
					0.0005	*+0.005*		*2.2 2.3*	*0.014*	*34*
1192	11.1	42.11	39 38 9.0	4.11	*+0.0004*	*+0.040*	358 55	*1.1 1.1*	*0.048*	*8*
1193	10.1	48.35	41 6 1.0	4.20	−0.0067	−0.028	359 84	0.7 0.6		
				4.21	−0.0046	−0.025	362 20	1.1 1.2		
					−0.0054	*−0.026*		*1.8 1.8*	*0.062*	*252.1*
1194	9.6	56.28	44 14 1.3	4.23	−0.0006	−0.001	360 76	1.1 1.1		
					−0.0010	+0.000	364 17	0.5 0.5		
					−0.0007	*−0.001*		*1.6 1.6*	*0.008*	*320*
1195	9.1	58.47	42 9 3.5	4.12	−0.0043	−0.101	359 88, 89	0.9 0.9		
1196	9.6				−0.0051	−0.126	363 25	0.5 0.4		
					−0.0046	*−0.109*		*1.4 1.3*	*0.113*	*205.2*
1197	8.8	31 0.32	46 53 58.9	4.19	*−0.0054*	*+0.008*	361 54	*0.7 0.6*	*0.055*	*285.8*
1198	11	13.0	44 0 13	4.28	*−0.0076*	*−0.215*	360 —	*1.1 1.1*	*0.223*	*201.0*
1199	9.5	19.94	44 25 19.3	4.22	+0.0043	+0.005	360 75	1.1 1.1		
					+0.0051	+0.006	364 24	0.8 0.8		
					0.0046	*+0.005*		*1.9 1.9*	*0.053*	*77.0*
1200	10.8	22.58	41 17 33.0	4.20	−0.0059	+0.018	359 96	0.9 0.9		
					−0.0055	+0.010	362 25	1.2 1.2		
					−0.0057	*+0.013*		*2.1 2.1*	*0.065*	*287.9*
1201	10.2	23.27	44 30 11.6	4.22	+0.0103	−0.100	360 80	1.1 1.1		
					+0.0119	−0.108	364 21	0.8 0.8		
					+0.0110	*−0.103*		*1.9 1.9*	*0.153*	*128.9*
1202	10.2	35.67	41 13 59.1	4.20	+0.0014	−0.024	359 97	0.8 0.7		
					+0.0023	−0.005	362 30	1.2 1.2		
					+0.0019	*−0.012*		*2.0 1.9*	*0.025*	*102*
1203	10.7	32 7.70	39 22 10.5	4.11	*−0.0001*	*−0.018*	358 72	*1.1 1.1*	*0.012*	*175*
1204	8.8	11.28	44 40 52.8	4.21	−0.0004	−0.004	360 89	1.1 1.1		
					−0.0018	−0.008	364 29	0.9 0.9		
					−0.0010	*−0.006*		*2.0 2.0*	*0.009*	*270*
1205	11	24.1	45 22 17	4.15	*+0.0099*	*−0.020*	364 —	*0.9 0.9*	*0.107*	*97.5*
1206	9.0	39.02	40 21 42.5	4.20	+0.0008	−0.068	358 76	1.1 1.1		
					+0.0040	−0.046	362 41	1.2 1.2		
					+0.0025	*−0.057*		*2.3 2.3*	*0.060*	*148.7*
1207	8.8	42.01	40 39 42.4	4.20	−0.0038	−0.042	358 73	1.0 0.9		
					−0.0019	−0.043	362 38	1.2 1.2		
					−0.0028	*−0.043*		*2.2 2.1*	*0.048*	*219*
1208	10.8	50.14	46 6 36.5	4.19	*−0.0056*	*−0.018*	361 63	*0.9 0.9*	*0.057*	*257.9*
1209	9.6	33 11.31	40 24 45.5	4.20	−0.0055	−0.045	358 79	1.1 1.1		
					−0.0024	−0.024	362 42	1.2 1.2		
					−0.0039	*−0.034*		*2.3 2.3*	*0.051*	*236.9*
1210	11.0	18.55	41 54 6.8	4.11	+0.0052	−0.029	359 117	0.9 0.9		
					+0.0036	+0.007	362 —	1.0 0.8		
					+0.0044	*−0.012*		*1.9 1.7*	*0.050*	*96.8*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0002$; 1203—1210: $+0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.007$; 1203—1210: $+0''.006$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1211	8.5	8 33 21.39	46 37 56.0	4.19	*−0.0054*	*−0.014*	361 66	*0.8 0.8*	*0.055*	*261.6*
1212	8.5	36.48	41 26 40.3	4.20	−0.0030	−0.061	359 123	0.7 0.7		
					−0.0026	−0.049	362 48	1.2 1.2		
					−0.0027	*−0.053*		*1.9 1.9*	*0.055*	*211.7*
1213	10.0	37.16	40 36 37.5	4.20	−0.0098	−0.075	358 82	0.9 0.9		
					−0.0077	−0.079	362 49	1.2 1.2		
					−0.0086	*−0.077*		*2.1 2.1*	*0.120*	*233.8*
1214	10.6	42.50	39 11 1.4	4.11	*−0.0043*	*−0.029*	358 86	*0.6 0.6*	*0.054*	*244.9*
1215	9.1	53.60	43 28 30.9	4.21	−0.0169	−0.296	360 107	0.9 1.0		
					−0.0143	−0.298	363 45	0.9 0.9		
					−0.0156	*−0.297*		*1.8 1.9*	*0.337*	*210.1*
1216	8.4	59.39	46 46 58.2	4.19	*−0.0027*	*+0.012*	361 69	*0.6 0.6*	*0.032*	*304*
1217	9.1	34 3.23	39 23 43.7	4.11	*−0.0070*	*−0.055*	358 93	*0.7 0.8*	*0.094*	*238.5*
1218	5.7	6.63	46 11 5.2	4.20	+0.0001	+0.078	361 70	0.9 0.9		
				4.22	+0.0026	+0.075	368 2	0.2 0.5		
					+0.0006	*+0.077*		*1.1 1.4*	*0.083*	*4.8*
1219	10.2	6.99	40 52 29.5	4.23	−0.0007	+0.009	358 88	0.5 0.4		
					+0.0014	+0.009	362 60	1.2 1.2		
					0.0008	*+0.009*		*1.7 1.6*	*0.018*	*34*
1220	7.0	15.88	40 22 16.1	4.20	−0.0010	−0.010	358 90	0.9 0.9		
					+0.0019	−0.019	362 62	1.2 1.2		
					+0.0007	*−0.015*		*2.1 2.1*	*0.013*	*135*
1221	10.6	26.68	39 28 21.8	4.11	*−0.0036*	*−0.016*	358 99	*0.8 0.8*	*0.041*	*256*
1222	7.3	55.53	45 13 7.6	4.19	−0.0021	−0.058	361 81	0.4 0.4		
					−0.0014	−0.023	364 62	0.9 0.9		
					+0.0004	−0.033	368 13	0.4 0.4		
					−0.0011	*−0.034*		*1.7 1.7*	*0.030*	*201*
1223	9.1	35 30.14	41 57 48.4	4.18	−0.0010	−0.093	359 139	0.2 0.4		
				4.15	−0.0048	−0.041	362 74	1.0 0.5		
					−0.0032	−0.057	363 65	0.4 0.2		
					−0.0037	−0.072	366 19	0.8 0.9		
					−0.0038	*−0.067*		*2.4 2.0*	*0.074*	*214.5*
1224	9.1	44.37	42 3 26.7	4.15	−0.0030	−0.068	362 72	0.4 0.2		
				4.14	−0.0017	−0.036	363 63	0.7 0.4		
					−0.0018	−0.068	366 17	0.9 0.9		
					−0.0020	*−0.059*		*2.0 1.5*	*0.057*	*201.6*
1225	10.6	47.25	43 13 33.2	4.14	+0.0037	−0.012	360 —	0.1 0.2		
					+0.0034	+0.001	363 57	0.9 0.9		
					+0.0044	−0.071	367 11	0.5 0.5		
					+0.0038	*−0.023*		*1.5 1.6*	*0.045*	*112*
1226	8.9	36 0.26	45 39 43.2	4.21	−0.0021	−0.055	361 84	0.1 0.2		
					+0.0017	−0.029	364 73	0.9 0.9		
					+0.0017	−0.035	368 21	1.0 1.0		
					+0.0015	*−0.034*		*2.0 2.1*	*0.033*	*149*
1227	9.0	5.72	42 30 52.2	4.13	+0.0003	−0.093	363 68	0.9 0.9		
					+0.0028	−0.112	366 21	0.7 0.8		
					+0.0014	*−0.102*		*1.6 1.7*	*0.097*	*170.0*
1228	11	21.8	41 10 2	4.28	*+0.0018*	*−0.017*	362 —	*1.2 1.2*	*0.024*	*118*
1229	11	24.6	46 8 52	4.28	*+0.0003*	*−0.043*	368 —	*1.0 1.0*	*0.037*	*172*
1230	9.4	35.58	46 7 17.6	4.28	*−0.0052*	*−0.136*	368 23	*1.0 1.0*	*0.140*	*202.2*

$\frac{1}{2}\Delta\mu_\alpha = +0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.006$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1231	10.4	8 36 44.44	41 3 10.0	4.22	−0.0028	−0.062	362 88	1.2 1.2		
				4.24	+0.0015	−0.092	365 —	0.2 0.1		
					−0.0057	−0.023	366 34	0.4 0.3		
					−0.0030	*−0.057*		*1.8 1.6*	*0.061*	*212.9*
1232	9.2	50.42	44 31 36.9	4.13	−0.0028	−0.004	364 82	0.9 0.9		
					−0.0007	+0.007	367 21	0.9 0.9		
					−0.0018	*+0.002*		*1.8 1.8*	*0.019*	*295*
1233	7.2	57.80	43 2 27.7	4.13	−0.0023	−0.058	363 78	0.9 0.9		
					−0.0023	−0.010	366 35	0.3 0.2		
					−0.0044	−0.132	367 26	0.5 0.4		
					−0.0029	*−0.071*		*1.7 1.5*	*0.072*	*205.5*
1234	7.9	37 3.36	45 48 49.9	4.22	−0.0012	−0.042	364 79	0.7 0.7		
					−0.0019	−0.048	368 31	1.0 1.0		
					−0.0016	*−0.046*		*1.7 1.7*	*0.043*	*202*
1235	11	4.1	40 38 25	4.20	−0.0054	−0.090	362 —	1.2 1.2		
					−0.0014	−0.130	365 —	0.8 0.7		
					−0.0038	*0.105*		*2.0 1.9*	*0.108*	*203.5*
1236	9.8	20.16	45 18 54.7	4.21	−0.0031	−0.024	364 87	0.9 0.9		
					−0.0020	−0.023	368 39	0.9 0.9		
					−0.0026	*−0.024*		*1.8 1.8*	*0.032*	*235*
1237	10.0	22.23	45 15 36.1	4.13	+0.0018	+0.004	364 88	0.9 0.9		
					+0.0021	+0.006	367 40	0.9 0.8		
					+0.0020	*+0.005*		*1.8 1.7*	*0.025*	*63*
1238	9.4	32.78	42 45 23.0	4.13	+0.0003	−0.010	363 83	0.9 0.9		
					+0.0015	+0.019	366 39	0.7 0.7		
					0.0008	*+0.003*		*1.6 1.6*	*0.013*	*48*
1239	11.2	33.53	46 29 3.2	4.28	*−0.0080*	*−0.050*	368 44	*1.0 1.0*	*0.092*	*241.5*
1240	9.7	33.62	42 21 26.0	4.13	+0.0042	−0.018	363 85	0.8 0.8		
					+0.0052	−0.030	366 41	0.9 0.9		
					+0.0047	*−0.024*		*1.7 1.7*	*0.056*	*108.8*
1241	10.2	45.91	40 36 5.4	4.20	+0.0023	−0.047	362 100	1.2 1.2		
					+0.0007	−0.026	365 36	0.9 0.9		
					+0.0016	*−0.038*		*2.1 2.1*	*0.037*	*149*
1242	9.9	53.80	46 38 8.6	4.28	*+0.0003*	*−0.023*	368 41	*1.0 1.0*	*0.018*	*164*
1243	9.0	54.26	41 18 21.7	4.20	−0.0018	−0.047	362 98	1.2 1.2		
					−0.0033	−0.033	366 50	0.9 0.8		
					−0.0024	*−0.041*		*2.1 2.0*	*0.044*	*218*
1244	9.8	59.95	46 37 32.3	4.28	*−0.0054*	*−0.106*	368 42	*1.0 1.0*	*0.115*	*209.2*
1245	9.8	38 1.14	39 15 25.1	4.11	*+0.0007*	*−0.090*	365 45	*0.8 0.8*	*0.084*	*173.9*
1246	8.9	12.16	42 25 19.0	4.13	−0.0031	−0.055	363 98	0.8 0.8		
					−0.0039	−0.060	366 53	0.9 0.9		
					−0.0035	*−0.058*		*1.7 1.7*	*0.065*	*216.9*
1247	8.2	16.14	44 32 46.6	4.13	−0.0048	−0.057	364 100	0.9 0.9		
					−0.0026	−0.031	367 40	0.9 0.9		
					−0.0037	*0.044*		*1.8 1.8*	*0.054*	*225.7*
1248	8.3	34.70	42 3 8.8	4.14	−0.0242	−0.702	362 108	0.2 0.1		
				4.13	−0.0247	0.684	363 104	0.4 0.3		
					−0.0252	−0.663	366 55	0.9 0.9		
					−0.0249	*−0.671*		*1.5 1.3*	*0.721*	*202.7*

$\Delta\mu_\alpha = +0^s.0001$; 1245—1248: $\pm 0^s.0000$; $\Delta\mu_\delta = +0''.006$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1249	8.2	8 38 40.57	42 46 2.5	4.13	+0.0043	−0.073	363 102	0.9 0.9		
					+0.0045	−0.071	366 62	0.9 0.8		
					+0.0044	*−0.072*		*1.8 1.7*	*0.082*	*143.4*
1250	10.3	47.39	39 58 14.2	4.11	−0.0067	−0.056	362 —	0.2 0.2		
					−0.0059	−0.048	365 52	0.9 0.9		
					0.0060	*−0.049*		*1.1 1.1*	*0.080*	*237.7*
1251	10.1	39 4.62	45 45 34.2	4.23	−0.0017	−0.035	364 105	0.5 0.5		
				4.22	−0.0019	−0.024	368 70	1.0 1.0		
					+0.0047	−0.037	371 3	0.1 0.2		
					+0.0020	*−0.029*		*1.6 1.7*	*0.031*	*138*
1252	9.0	17.43	46 55 27.1	4.28	*−0.0026*	*−0.053*	368 64	*0.8 0.6*	*0.054*	*209.9*
1253	11.1	32.56	42 16 20.2	4.11	+0.0020	−0.067	363 —	0.4 0.4		
					+0.0086	−0.100	366 77	0.9 0.9		
					+0.0066	*−0.090*		*1.3 1.3*	*0.111*	*139.0*
1254	9.3	40 1.60	45 47 6.8	4.22	−0.0017	−0.045	364 119	0.3 0.4		
					−0.0024	−0.051	368 82	1.0 1.0		
					+0.0015	−0.056	371 14	0.4 0.4		
					−0.0014	*−0.051*		*1.7 1.8*	*0.047*	*197*
1255	10.0	2.71	41 28 37.8	3.97	−0.0069	−0.057	362 119	0.5 0.7		
				3.91	−0.0104	−0.047	366 83	0.9 0.9		
					−0.0100	−0.056	369 5	0.5 0.8		
					−0.0094	*−0.053*		*1.9 2.4*	*0.115*	*245.9*
1256	8.9	9.19	40 24 50.0	3.95	+0.0068	−0.029	362 122	0.4 0.5		
				3.90	+0.0077	−0.023	365 68	0.9 0.9		
					0.0056	−0.029	369 7	0.5 0.7		
					+0.0069	*−0.026*		*1.8 2.1*	*0.081*	*104.2*
1257	9.8	10.81	44 8 0.1	4.12	−0.0054	−0.195	364 127	0.2 0.2		
					−0.0025	−0.148	367 62	0.9 0.9		
					−0.0023	−0.161	371 18	0.3 0.3		
					−0.0029	*−0.158*		*1.4 1.4*	*0.155*	*191.5*
1258	10.2	25.75	44 56 36.7	4.13	−0.0064	−0.052	364 126	0.3 0.6		
				4.14	−0.0039	−0.041	367 69	0.7 0.4		
					−0.0026	−0.045	371 22	0.8 0.9		
					−0.0037	*−0.046*		*1.8 1.9*	*0.056*	*224.3*
1259	9.0	31.77	45 25 31.0	4.21	+0.0026	−0.059	364 122	0.3 0.5		
				4.20	+0.0026	−0.040	368 92	1.0 1.0		
					+0.0046	−0.048	371 19	0.7 0.8		
					+0.0033	*−0.047*		*2.0 2.3*	*0.053*	*140.3*
1260	11	35.8	40 57 48	3.65	−0.0012	−0.186	365 —	0.6 0.3		
				3.53	+0.0008	−0.087	369 —	1.0 1.1		
					+0.0000	*−0.108*		*1.6 1.4*	*0.108*	*180.0*
1261	8.6	40.52	43 51 44.3	4.12	+0.0024	−0.004	363 116	0.1 0.1		
					−0.0002	−0.003	367 73	0.9 0.9		
					−0.0036	−0.033	370 12	0.4 0.4		
					−0.0010	*−0.012*		*1.4 1.4*	*0.013*	*241*
1262	9.5	41 4.85	45 53 55.6	4.28	*−0.0003*	*−0.202*	368 98	*1.0 1.0*	*0.197*	*180.9*
1263	8.8	4.94	45 53 58.3	4.24	+0.0005	−0.183	368 97	1.0 1.0		
					+0.0024	−0.194	371 24	0.5 0.4		
					+0.0011	*−0.186*		*1.5 1.4*	*0.181*	*176.2*

$\Delta\mu_\alpha = \pm 0^s.0000$; $\Delta\mu_\delta = +0''.006$; 1262—1263: $+0''.005$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1264	10.4	8 41 14.84	43 15 20.1	4.13	−0.0037	−0.107	367 82	0.9 0.9		
					−0.0040	−0.071	370 20	0.9 0.9		
					−0.0038	*−0.089*		*1.8 1.8*	*0.094*	*206.6*
1265	8.7	18.49	41 35 1.6	3.75	−0.0038	−0.007	366 100	0.9 0.9		
					−0.0030	−0.041	369 19	0.9 0.9		
					−0.0034	*−0.024*		*1.8 1.8*	*0.042*	*243*
1266	9.5	31.51	39 4 48.5	4.11	*−0.0080*	*−0.074*	365 88	*0.6 0.5*	*0.116*	*233.4*
1267	9.9	49.18	45 21 1.3	4.21	+0.0035	+0.002	368 104	1.0 1.0		
					+0.0047	+0.008	371 34	0.9 0.9		
					+0.0041	*+0.005*		*1.9 1.9*	*0.044*	*77*
1268	9.4	54.62	43 45 37.8	4.13	−0.0044	−0.041	367 86	0.9 0.9		
					−0.0055	−0.046	370 25	0.7 0.6		
					0.0049	*−0.043*		*1.6 1.5*	*0.064*	*233.8*
1269	9.5	42 3.20	44 32 2.9	4.13	+0.0002	+0.006	367 85	0.9 0.9		
					+0.0019	+0.012	371 35	0.9 0.9		
					+0.0010	*+0.009*		*1.8 1.8*	*0.018*	*38*
1270	11.0	10.84	41 46 38.4	4.11	−0.0047	−0.081	366 115	0.9 0.9		
					−0.0030	−0.078	369 —	0.9 0.8		
					−0.0038	*−0.080*		*1.8 1.7*	*0.086*	*209.8*
1271	7.9	57.52	45 20 52.5	4.21	−0.0041	−0.029	368 112	0.9 0.9		
					−0.0041	−0.012	371 39	0.9 0.9		
					−0.0041	*−0.020*		*1.8 1.8*	*0.046*	*251*
1272	9.8	43 5.34	45 2 31.8	4.18	+0.0067	−0.003	367 92	0.2 0.1		
					+0.0045	−0.028	368 115	0.5 0.3		
					+0.0047	−0.013	371 45	1.0 1.0		
					+0.0049	*−0.016*		*1.7 1.4*	*0.053*	*101.9*
1273	9.5	27.83	45 38 21.5	4.21	−0.0055	+0.016	368 118	1.0 1.0		
					−0.0038	+0.003	371 43	0.9 0.9		
					−0.0047	*+0.010*		*1.9 1.9*	*0.051*	*287.0*
1274	8.2	28.93	39 57 36.9	3.92	+0.0062	+0.023	365 101	0.9 0.9		
				3.98	+0.0071	−0.030	369 39	0.3 0.2		
					+0.0064	*+0.013*		*1.2 1.1*	*0.076*	*76.3*
1275	11.2	32.98	42 8 56.3	4.11	−0.0072	−0.025	366 125	0.9 0.9		
					−0.0025	−0.057	370 —	0.8 0.7		
					−0.0050	*−0.039*		*1.7 1.6*	*0.065*	*238.3*
1276	10.9	44 16.30	41 32 54.6	3.66	−0.0110	+0.037	366 132	0.7 0.7		
					−0.0041	−0.033	369 42	1.1 1.1		
					−0.0068	*−0.006*		*1.8 1.8*	*0.076*	*269.2*
1277	8.7	28.36	42 57 45.1	4.08	−0.0003	+0.018	366 127	0.2 0.2		
					+0.0004	−0.024	370 47	0.9 0.9		
					+0.0032	−0.003	373 1	0.1 0.1		
					+0.0005	*−0.015*		*1.2 1.2*	*0.011*	*153*
1278	8.7	57.99	43 28 49.0	3.95	−0.0008	−0.058	367 106	0.4 0.6		
				3.92	−0.0043	−0.035	370 53	0.9 0.9		
					−0.0051	−0.022	374 7	0.5 0.7		
					−0.0037	*−0.037*		*1.8 2.2*	*0.051*	*231.3*
1279	9.0	59.88	44 21 31.5	3.91	+0.0030	+0.026	367 105	0.5 0.7		
				3.88	−0.0008	−0.011	371 69	0.9 0.9		
					+0.0020	−0.003	374 8	0.7 0.9		
					+0.0010	*+0.002*		*2.1 2.5*	*0.014*	*60*

$\Delta\,\mu_\alpha = \pm\,0^s.0000$; $\Delta\,\mu_\delta = +\,0''.005$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1280	5.8	8 45 14.35	44 5 55.4	3.80	+0.0021	+0.046	367 108	0.4 0.7		
				3.82	−0.0023	+0.004	371 71	0.7 0.6		
					−0.0013	+0.032	374 10	0.9 1.0		
					−0.0010	*+0.029*		*2.0 2.3*	*0.036*	*341*
1281	11	21.0	45 28 10	3.89	−0.0102	−0.097	368 —	0.4 0.6		
				3.93	−0.0108	−0.075	371 —	0.9 0.9		
					−0.0111	−0.164	375 —	0.8 0.8		
					−0.0108	*−0.112*		*2.1 2.3*	*0.157*	*227.1*
1282	6.9	23.93	45 41 16.1	3.86	−0.0001	−0.032	368 140	0.4 0.7		
				3.89	+0.0020	−0.038	371 64	0.9 0.9		
					+0.0002	−0.088	375 21	0.9 1.0		
					+0.0009	*−0.056*		*2.2 2.6*	*0.052*	*171.1*
1283	8.6	24.45	39 16 48.4	3.46	−0.0031	−0.041	365 112	0.1 0.2		
				3.57	−0.0049	+0.001	372 3	0.5 0.5		
					−0.0046	*−0.011*		*0.6 0.7*	*0.054*	*263.7*
1284	9.6	25.83	41 46 54.6	3.38	−0.0089	+0.044	366 144	0.2 0.5		
				3.48	−0.0051	+0.026	369 57	1.1 1.0		
					−0.0053	+0.013	373 9	0.9 1.0		
					−0.0055	*+0.024*		*2.2 2.5*	*0.069*	*294.7*
1285	6.8	33.33	42 22 43.8	3.83	−0.0089	−0.031	366 142	0.2 0.3		
				3.82	−0.0040	−0.082	370 61	0.9 0.9		
					−0.0027	−0.086	373 12	0.8 0.9		
					−0.0040	*−0.076*		*1.9 2.1*	*0.084*	*212.4*
1286	9.3	51.05	40 31 28.3	3.30	−0.0041	−0.026	369 67	1.1 1.1		
					−0.0036	−0.041	372 5	0.9 0.9		
					−0.0039	*−0.033*		*2.0 2.0*	*0.054*	*238.7*
1287	10.5	46 3.86	39 30 9.1	3.30	*+0.0008*	*−0.101*	372 7	*0.9 0.9*	*0.096*	*175.2*
1288	9.8	15.91	42 29 2.2	3.75	−0.0011	−0.077	370 70	0.9 0.9		
					−0.0005	−0.049	373 18	1.0 1.0		
					−0.0008	*−0.062*		*1.9 1.9*	*0.058*	*189.0*
1289	10.9	22.95	46 3 58.4	3.30	*+0.0017*	*−0.002*	375 36	*1.1 1.1*	*0.016*	*79*
1290	10.4	32.50	45 22 21.8	3.75	+0.0067	+0.004	371 89	0.9 0.9		
					+0.0055	−0.022	375 42	1.0 1.0		
					+0.0061	*−0.010*		*1.9 1.9*	*0.063*	*94.5*
1291	10.9	55.52	46 4 12.0	3.30	*+0.0150*	*−0.144*	375 48	*1.1 1.1*	*0.208*	*131.9*
1292	10.4	47 2.09	43 2 26.0	4.15	+0.0018	−0.007	370 77	0.9 0.9		
					+0.0003	+0.003	373 —	0.3 0.2		
					+0.0019	+0.005	374 —	0.6 0.3		
					+0.0016	*−0.003*		*1.8 1.4*	*0.016*	*83*
1293	9.2	11.61	45 39 49.1	3.72	+0.0047	−0.044	371 91	0.9 0.9		
					+0.0043	−0.059	375 59	1.1 1.1		
					+0.0045	*−0.052*		*2.0 2.0*	*0.066*	*135.0*
1294	9.8	31.83	44 2 6.6	3.70	−0.0015	−0.085	370 81	0.3 0.2		
				3.58	−0.0028	−0.035	371 100	0.5 0.3		
					−0.0028	−0.043	374 26	1.1 1.1		
					−0.0026	*−0.047*		*1.9 1.6*	*0.051*	*214.6*
1295	7.1	41.58	39 37 56.0	3.30	*−0.0036*	*−0.002*	372 27	*1.1 1.1*	*0.042*	*274*
1296	11.1	50.75	41 1 57.0	3.30	*−0.0023*	*−0.041*	369 87	*1.1 1.1*	*0.045*	*217*
1297	7.2	59.26	40 30 59.5	3.30	+0.0033	−0.175	369 89	1.1 1.1		
					+0.0037	−0.187	372 29	1.1 1.1		
					+0.0035	*−0.181*		*2.2 2.2*	*0.180*	*167.5*

$\Delta\mu_\alpha = \pm 0^s.0000$; 1287—1297: $-0^s.0001$; $\Delta\mu_\delta = +0''.005$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
1298	7.5	8 48 3.77	43 58 5.3	3.68	0.0017	0.221	370 87	0.5 0.3		
1299	8.2			3.58	−0.0062	−0.199	371 107	0.3 0.2		
					−0.0055	−0.139	374 31;32	1.1 1.1		
					−0.0054	*−0.162*		*1.9 1.6*	*0.168*	*200.6*
1300	9.7	26.49	46 14 27.2	3.30	*−0.0056*	*−0.065*	375 73	*1.1 1.1*	*0.084*	*224.5*
1301	9.2	41.51	39 32 11.0	3.30	*−0.0028*	*−0.105*	372 31	*1.1 1.1*	*0.105*	*198.3*
1302	9.4	49 2.46	38 58 9.8	3.30	*−0.0089*	*−0.133*	372 45	*0.5 0.2*	*0.165*	*219.1*
1303	7.7	4.48	45 2 38.7	3.67	+0.0027	−0.051	371 113	0.9 0.9		
				3.75	+0.0044	−0.100	374 38	0.5 0.2		
					+0.0072	−0.087	375 87	0.8 0.5		
					−0.0000	−0.049	378 1	0.2 0.3		
					+0.0043	*−0.065*		*2.4 1.9*	*0.074*	*97.8*
1304	7.2	5.99	42 3 33.2	3.54	−0.0035	−0.089	370 104	0.3 0.3		
				3.50	−0.0011	−0.044	373 52	1.1 1.1		
					−0.0016	*−0.054*		*1.4 1.4*	*0.053*	*201.2*
1305	7.8	6.95	40 25 33.6	3.30	+0.0011	−0.029	369 104	0.8 0.9		
					−0.0002	−0.035	372 37	1.1 1.1		
					+0.0003	*−0.032*		*1.9 2.0*	*0.027*	*176*
1306	9.1	12.31	39 46 45.0	3.30	*−0.0040*	*−0.066*	372 49	*1.1 1.1*	*0.077*	*217.6*
1307	10.8	14.38	41 30 5.2	3.30	−0.0062	−0.039	369 99	0.8 0.9		
					−0.0027	−0.054	373 54	1.1 1.1		
					−0.0042	*−0.047*		*1.9 2.0*	*0.064*	*228.8*
1308	10.0	32.71	39 3 7.1	3.30	*+0.0070*	*−0.271*	372 52	*0.9 0.5*	*0.278*	*163.1*
1309	6.3	46.29	46 8 45.5	3.30	*−0.0006*	*−0.035*	375 91	*1.1 1.1*	*0.031*	*193*
1310	8.0	56.52	39 11 42.3	3.30	*−0.0015*	*−0.060*	372 55	*1.1 1.0*	*0.058*	*198.1*
1311	5.1	50 1.32	40 35 5.2	3.30	−0.0076	−0.061	369 107	0.4 0.7		
					−0.0054	−0.068	372 57	1.1 1.1		
					−0.0059	−0.056	376 6	0.5 0.8		
					−0.0060	*−0.062*		*2.0 2.6*	*0.089*	*230.4*
1312	6.2	4.01	46 0 54.6	3.42	−0.0124	−0.027	371 122	0.2 0.2		
					−0.0096	−0.067	375 98	1.1 1.1		
					−0.0169	−0.102	378 10	0.2 0.2		
					−0.0109	*−0.066*		*1.5 1.5*	*0.130*	*242 1*
1313	6.9	24.14	44 47 29.8	3.42	+0.0040	+0.006	371 129	0.3 0.6		
				3.53	+0.0042	−0.015	374 57	1.1 1.1		
					+0.0010	+0.006	378 16	0.9 1.0		
					+0.0029	*−0.003*		*2.3 2.7*	*0.030*	*86*
1314	10.5	51 3.47	46 15 45.2	3.30	*+0.0001*	*−0.026*	375 110	*1.1 1.1*	*0.022*	*183*
1315	10.7	13.23	40 43 15.4	3.30	+0.0019	−0.061	372 68	1.1 1.1		
					+0.0009	−0.070	376 24	1.1 1.1		
					+0.0014	*−0.066*		*2.2 2.2*	*0.064*	*167.3*
1316	8.1	20.68	46 44 4.5	3.30	*−0.0043*	*−0.074*	375 107	*1.1 1.1*	*0.084*	*213.3*
1317	9.8	32.09	42 0 34.8	3.30	0.0036	0.050	373 90	1.1 1.1		
					−0.0062	−0.085	376 27	0.3 0.2		
					−0.0042	−0.025	377 24	0.3 0.2		
					−0.0042	*−0.051*		*1.7 1.5*	*0.067*	*225.6*
1318	9.0	45.72	40 33 12.8	3.30	−0.0072	−0.095	372 73	1.1 1.1		
					−0.0070	−0.089	376 31	1.1 1.1		
					−0.0071	*−0.092*		*2.2 2.2*	*0.121*	*223.3*

$\Delta\,\mu_\alpha = -0^s.0001$; $\Delta\,\mu_\delta = +0''.005$; 1314—1318: $+0''.004$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	
1319	9.4	8 51 46.32	44 16 53.0	3.30	−0.0098	−0.086	374 70	1.1 1.1		
					−0.0129	−0.082	378 28	0.9 0.9		
					−0.0112	*−0.084*		*2.0 2.0*	*0.146*	*236.7*
1320	10.0	57.87	39 54 43.2	3.30	*+0.0028*	*−0.008*	372 82	*1.1 1.1*	*0.030*	*98*
1321	10.4	52 13.41	45 11 4.4	3.30	+0.0002	−0.038	375 127	0.9 0.9		
					−0.0062	−0.016	378 33	1.1 1.1		
					−0.0033	*−0.026*		*2.0 2.0*	*0.043*	*239*
1322	10.8	17.29	41 47 30.6	3.30	+0.0068	−0.050	373 97	1.1 1.1		
					+0.0077	−0.057	376 38	0.9 0.8		
					+0.0072	*−0.053*		*2.0 1.9*	*0.092*	*122.1*
1323	5.6	37.97	46 7 34.8	3.30	*−0.0002*	*−0.073*	375 129	*1.1 1.1*	*0.069*	*184.1*
1324	10.2	43.68	39 34 20.7	3.30	*+0.0009*	*−0.036*	372 91	*1.1 1.1*	*0.033*	*164*
1325	9.9	53 18.47	42 45 37.3	3.30	+0.0021	−0.183	373 106	0.9 0.8		
					+0.0007	−0.157	377 37	1.1 1.1		
					+0.0013	*−0.168*		*2.0 1.9*	*0.165*	*175.5*
1326	8.5	27.70	42 45 29.4	3.30	−0.0038	−0.069	373 105	0.8 0.8		
					−0.0048	−0.050	377 38	1.1 1.1		
					−0.0044	*−0.058*		*1.9 1.9*	*0.074*	*222.8*
1327	8.4	39.93	42 55 7.2	3.30	+0.0089	−0.023	373 111	0.6 0.4		
					+0.0067	−0.030	377 43	1.1 1.1		
					+0.0075	*−0.028*		*1.7 1.5*	*0.084*	*106.7*
1328	8.8	55.93	39 22 21.3	3.30	*−0.0006*	*−0.099*	372 99	*0.8 0.9*	*0.095*	*185.4*
1329	10.6	59.08	41 44 25.5	3.30	−0.0082	−0.047	373 115	1.0 1.1		
					−0.0082	−0.061	376 58	1.1 1.1		
					−0.0082	*−0.054*		*2.1 2.2*	*0.106*	*241.7*
*1330	3.2	54 9.28	42 10 46.1	3.30	−0.0375	−0.298	373 117	1.0 1.1		
					−0.0366	−0.212	377 53	1.1 1.0		
					−0.0403	−0.269	380 2	0.3 0.5		
					−0.0374	*−0.259*		*2.4 2.6*	*0.490*	*238.7*
*1331	8.7	16.90	42 35 14.6	3.30	−0.0014	−0.135	373 116	0.8 0.9		
					−0.0032	−0.101	377 52	1.1 1.1		
					−0.0079	−0.143	380 1	0.3 0.4		
					−0.0032	*−0.121*		*2.2 2.4*	*0.123*	*198.0*
*1332	9.3	34.24	40 27 47.7	3.29	−0.0075	−0.026	372 102	0.8 0.9		
					−0.0069	−0.022	376 77	1.1 1.1		
					−0.0075	−0.013	379 2	0.2 0.5		
					−0.0072	*−0.022*		*2.1 2.5*	*0.086*	*257.9*
*1333	5.2	55 14.27	40 6 25.8	3.29	−0.0046	−0.116	372 110	0.3 0.7		
					−0.0020	−0.088	376 91	1.1 0.8		
					−0.0045	−0.074	379 13	0.8 1.1		
					−0.0033	*−0.090*		*2.2 2.6*	*0.094*	*204.4*
1334	10.5	29.00	46 25 11.2	3.30	*−0.0039*	*+0.013*	375 155	*0.5 0.8*	*0.046*	*292*
*1335	10.0	29.67	39 32 13.2	3.28	*−0.0057*	*+0.005*	379 14	*0.8 1.0*	*0.068*	*277.7*
*1336	8.9	56 27.61	44 58 48.1	3.29	−0.0079	−0.035	378 75	1.1 1.1		
					−0.0048	−0.073	381 14	0.5 0.4		
					−0.0103	−0.072	382 15	0.4 0.2		
					−0.0076	*−0.048*		*2.0 1.7*	*0.094*	*242.1*
*1337	10.9	32.21	46 15 42.7	3.29	*+0.0018*	*−0.007*	382 12	*1.1 1.1*	*0.017*	*100*
*1338	10.3	55.92	40 38 40.5	3.29	−0.0058	−0.044	376 114	1.1 1.1		
					−0.0057	−0.014	379 21	1.1 1.1		
					−0.0058	*−0.029*		*2.2 2.2*	*0.072*	*249.8*

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0002$; $\Delta\mu_\delta = +0''.004$.

N:o	Gr.	α 1900.0	δ 1900.0	E 1890+	μ_α	μ_δ	Région N:o	Poids	μ (abs.)	P
		h m s	° ′ ″		s	″			″	°
*1339	9.9	8 56 59.28	46 5 39.6	3.29	+0.0007	−0.018	382 18	1.1 1.1	0.015	160
1340	11	57 38.1	41 39 58	3.29	−0.0053	−0.140	376 —	1.0 1.0	0.149	204.5
*1341	8.4	46.10	40 56 30.6	3.29	+0.0123	−0.101	376 129	1.1 1.1		
					+0.0132	−0.092	379 40	0.8 0.5		
					+0.0127	−0.098		1.9 1.6	0.169	123.7
*1342	8.7	58 0.69	40 59 55.5	3.29	−0.0086	−0.209	376 128	1.1 1.1		
					−0.0105	−0.182	379 49	0.7 0.3		
					−0.0100	−0.152	380 42	0.8 0.4		
					−0.0095	−0.192		2.6 1.8	0.218	210.6
*1343	9.6	9.90	39 25 32.9	3.28	−0.0035	−0.037	379 54	1.1 1.1	0.054	232.5
*1344	9.0	12.64	41 46 49.1	3.29	+0.0040	−0.002	376 132	0.9 0.8		
					+0.0030	−0.018	380 39	1.2 1.2		
					+0.0034	−0.012		2.1 2.0	0.037	103
*1345	6.6	14.19	43 51 15.9	3.29	−0.0097	−0.038	377 95	0.8 0.7		
					−0.0088	−0.078	381 33	1.2 1.2		
					−0.0092	−0.063		2.0 1.9	0.118	240.0
*1346	9.3	17.54	38 57 52.9	3.28	+0.0080	−0.055	379 56	0.5 0.4	0.103	119.5
*1347	10.9	20.88	39 48 36.6	3.28	−0.0016	−0.253	379 59	1.1 1.1	0.250	184.8
1348	9.9	29.18	45 21 15.2	3.30	+0.0038	+0.015	378 105	1.1 1.1	0.042	63
1349	10.0	40.96	40 42 6.4	3.29	+0.0058	−0.062	376 138	1.1 1.1	0.086	132.6
*1350	8.8	42.20	39 56 5.6	3.28	+0.0072	−0.029	379 66	1.1 1.1	0.083	107.6
*1351	8.8	42.50	39 56 7.4	3.28	+0.0104	−0.023	379 67	1.1 1.1	0.119	99.2
*1352	10.2	53.52	39 12 36.0	3.28	−0.0005	−0.480	379 69	1.1 1.1	0.476	181.1
*1353	10.6	59 5.46	40 6 47.6	3.28	−0.0074	−0.050	376 —	0.5 0.4		
					−0.0073	−0.015	379 65	1.1 1.1		
					−0.0073	−0.024		1.6 1.5	0.089	257.1
*1354	9.5	6.74	46 30 17.8	3.29	+0.0061	−0.106	382 41	1.1 1.1	0.118	149.5
*1355	9.9	8.81	45 21 26.8	3.29	+0.0026	−0.003	378 110	1.1 1.1		
					−0.0020	+0.011	382 44	1.1 1.1		
					−0.0067	+0.051	385 2	0.3 0.5		
					−0.0005	+0.013		2.5 2.7	0.019	335
*1356	10.2	20.91	43 21 32.6	3.29	−0.0016	−0.056	377 109	1.0 1.1		
					−0.0046	−0.076	381 53	1.2 1.2		
					−0.0039	−0.059	384 1	0.4 0.6		
					−0.0033	−0.065		2.6 2.9	0.073	213.3
*1357	9.9	23.89	40 37 39.7	3.27	−0.0056	−0.081	376 152	0.8 1.0		
					−0.0080	−0.082	379 72	1.1 1.1		
					−0.0111	−0.040	383 3	0.2 0.5		
					−0.0074	−0.074		2.1 2.6	0.112	231.2
*1358	9.3	24.41	40 16 16.2	3.27	+0.0046	−0.134	376 153	0.5 0.6		
					+0.0061	−0.116	379 75	1.1 1.1		
					+0.0063	−0.115	383 5	0.2 0.3		
					+0.0057	−0.121		1.8 2.0	0.133	151.7
*1359	8.8	9 0 38.92	45 34 40.6	3.28	−0.0043	−0.094	378 132	0.4 0.5		
					−0.0057	−0.057	382 67	1.1 1.1		
					−0.0089	−0.035	385 18	0.8 0.9		
					−0.0066	−0.056		2.3 2.5	0.089	234.2

$\Delta\mu_\alpha = -0^s.0002$; 1353—1359: $-0^s.0003$; $\Delta\mu_\delta = +0''.004$.

* L'astérisque indique que l'étoile rentre aussi dans le Catalogue du volume premier de ce travail.

Deuxième partie.

I.

Fréquence des mouvements propres.

I. **Introduction.** Dans la discussion statistique des matériaux contenus dans le premier volume du présent travail, je me bornai au traitement des mouvements propres $> 0''.05$ par an. Ceux qui étaient $< 0''.05$ furent laissés de côté, tout faisant présumer qu'une grande partie d'entre eux n'avaient pas été découverts lors de l'examen des clichés au *blink*-microscope. Je supposai, au contraire, que la plupart au moins des mouvements propres $> 0''.05$ avaient été découverts; je basai donc mes recherches sur le nombre de ces mouvements propres.

Les mouvements propres publiés dans le premier volume ont depuis été traités par d'autres auteurs. KAPTEYN et VAN RHIJN, dans leur travail sur le nombre d'étoiles à mouvement propre compris entre des limites définies*, ont fait usage de mes matériaux en tant que ceux-ci se rapportent à des mouvements propres $> 0''.10$, en laissant de côté les autres, parce que leur nombre n'était pas complet. — A l'aide de données que je lui ai fournies, M. E. ÖPIK** a calculé le nombre probable d'étoiles à mouvement propre en se fondant sur le nombre observé dans divers groupes des mouvements propres; il a trouvé que mes matériaux sont complets à peu près à partir de $0''.011$, tandis que pour les mouvements propres plus petits, le nombre réel dépasse le nombre observé à mesure que le mouvement propre devient plus petit.

Dans le présent volume, je ne me suis pas contenté de former, comme dans le volume premier, une statistique des matériaux observés: j'ai aussi tenté de tirer de ceux-ci le nombre réel des mouvements propres pour les divers groupes. En ce sens, j'ai traité non seulement les mouvements propres publiés dans le présent volume, mais encore ceux du volume précédent. Ces derniers ont été calculés à nouveau en tenant compte des nouvelles corrections systématiques ici déterminées (p. 60—66). De là les petits écarts qu'on peut constater entre le nombre des mouvements propres

* J. C KAPTEYN and P. J. VAN RHIJN: The number of stars between definite limits of proper motion, visual magnitude etc. (Gron. Publ. N:o 30).

** E. ÖPIK: On The Frequency of Proper Motions of Stars (Tartu Publ. XXVI. 4).

trouvé directement, donné dans le volume I:er, et celui qui est donné ici. La discussion a toujours été limitée aux étoiles à mouvement propre $> 0''.05$. Pour les autres, le nombre réel des étoiles ne peut être obtenu qu'avec des valeurs assez peu certaines.

2. **Groupement des matériaux d'après l'ascension droite et la grandeur des mouvements propres. Nombre des étoiles à mouvement propre observées.** On a exclu de la présente statistique le nombre relativement restreint d'étoiles (entre $5^h\,53^m$ et $6^h\,0^m$) dont l'ascension droite est $< 6^h\,0^m$, ainsi que les quelques étoiles pour lesquelles elle est $> 12^h\,0^m$. Il devient ainsi possible de répartir les matériaux en douze groupes dont chacun comprend une partie d'étendue identique sur la sphère céleste, ayant 30 minutes d'ascension droite. Voici ces groupes:

Le groupe	I	comprend	les	étoiles	entre	6^h	0^m	et	6^h	30^m		
»	»	II	»	»	»	»	6	30	»	7	0	
»	»	III	»	»	»	»	7	0	»	7	30	
»	»	IV	»	»	»	»	7	30	»	8	0	
»	»	V	»	»	»	»	8	0	»	8	30	
»	»	VI	»	»	»	»	8	30	»	9	0	
»	»	VII	»	»	»	»	9	0	»	9	30	
»	»	VIII	»	»	»	»	9	30	»	10	0	
»	»	IX	»	»	»	»	10	0	»	10	30	
»	»	X	»	»	»	»	10	30	»	11	0	
»	»	XI	»	»	»	»	11	0	»	11	30	
»	»	XII	»	»	»	»	11	30	»	12	0	

Tableau VII.

Nombre des étoiles à mouvement propre observées.

μ / Groupe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Σ
0".051- 0".060	21	19	16	30	11	25	9	15	20	29	16	17	231
0.061—0.070	13	22	13	28	12	14	8	9	7	24	11	14	175
0.071—0.080	18	19	12	14	7	11	12	7	12	13	23	13	161
0.081—0.090	13	7	5	4	12	14	6	5	13	14	16	11	120
0.091—0.100	4	7	8	10	8	9	7	6	14	10	6	9	98
0.101 0.110	5	6	3	4	9	7	5	8	7	12	12	9	87
0.111—0.120	1	10	2	4	1	9	6	8	4	7	10	5	67
0.121—0.130	3	4	3	3	6	3	4	10	3	6	6	4	55
0.131—0.140	1	1	—	1	2	2	1	2	4	3	4	3	24
0.141—0.150	5	3	—		—	2	3	1	3	4	2	4	27
0.151—0.200	3	9	3	11	7	9	7	10	21	12	9	6	107
0.201—0.250	-	1	3	3	4	4	1	6	4	6	5	3	43
0.251—0.300		1	1	2	3	1	3	3	1	3	4	—	22
0.301—0.350	1	—	-	1		1	3	2	1	1	1	1	12
0.351—	1	1	1	3	4	3	2	1	2	1	3	5	27
Ensemble	92	110	70	118	86	114	80	93	116	145	128	101	1256

Dans chaque groupe, les matériaux ont été répartis d'après la grandeur des mouvements propres, le nombre d'étoiles ayant été compté entre les limites suivantes de ces mouvements: 0″.051 —0″.060, 0″.061—0″.070, 0″.071—0″.080, 0″.081—0″.090, 0″.091—0″.100, 0″.101—0″.110, 0″.111 —0″.120, 0″.121—0″.130, 0″.131—0″.140, 0″.141—0″.150, 0″.151—0.″200, 0″.201—0″.250, 0″.251 —0″.300, 0″.301—0″.350, $>$ 0″.350. Les étoiles doubles ainsi que les étoiles à mouvements propres parallèles ont été regardées comme étoiles simples. Les résultats sont donnés dans le tableau VII.

Il ressort du tableau que le nombre des étoiles est un peu plus faible dans les premiers groupes que dans les suivants; mais la différence n'est pas fort marquée. Entre 6^h et 9^h, le nombre total est de 590; entre 9^h et 12^h, il est de 666. Cependant, pour la raison mentionnée plus haut, les chiffres du tableau ne permettent de tirer des conclusions valables que pour les mouvements propres $>$ 0″.1 sur la fréquence des mouvements propres et sur sa dépendance éventuelle de la situation de la région sur la sphère céleste. Il devient donc nécessaire de chercher à déterminer, en partant du nombre observé des mouvements propres, leur nombre réel. Avant d'exposer la méthode employée à cet effet, il faut expliquer en quelques mots la situation réciproque des clichés de la zone de Helsingfors.

3. **Situation réciproque des clichés de la zone de Helsingfors.** Les clichés de la zone de Helsingfors appartiennent à deux séries: l'une avec des centres aux degrés pairs en déclinaison (40°, 42°, 44°, 46°), et aux dizaines entières de minutes de temps en ascension droite ($6^h\,0^m$, $6^h\,10^m$, $6^h\,20^m$ etc.); l'autre avec des centres aux degrés impairs en déclinaison (41°, 43°, 45°), et aux ascensions droites $6^h\,5^m$, $6^h\,15^m$ etc. La portion utilisable des clichés a une superficie de 63′ × 63′ environ. A 47°, 10^m en ascension droite correspondent à peu près à 102′ d'un grand cercle; à 43°, c'est-à-dire au milieu de la zone, elles correspondent à 110′; à 39°, elles correspondent à 117′. Rappelons de plus à ce propos que toutes les régions ont été observées à nouveau afin de déterminer les mouvements propres; chaque région est donc représentée par deux clichés que nous appellerons dorénavant *une paire de clichés*. De ces faits ressortent évidemment les conclusions suivantes:

1:o) Dans le domaine compris entre 46° 3′ et 39° 57′, chaque étoile, — à moins qu'elle ne soit trop faible, — apparaît sur deux paires de clichés au moins. Chaque paire de clichés ayant été examinée absolument à part au point de vue de la recherche des étoiles à mouvement propre, il en résulte que dans ce domaine chaque étoile a été soumise à deux examens au moins, indépendants l'un de l'autre.

2:o) Dans ledit domaine, les étoiles dont la coordonnée x sur le cliché dépasse en valeur absolue une quantité variant entre 41′ (à 46°) et 53′ (à 40°) apparaissent généralement sur trois paires de clichés. Elles ont donc été examinées à trois reprises au point de vue de la constatation des mouvements propres.

3:o) Dans ce même domaine, les étoiles dont la coordonnée y est comprise, en valeur absolue, entre 57′ et 63′, apparaissent de même sur trois paires de clichés au moins, sauf dans les cas où le centre du cliché est situé à 45° et où y est positif, ou lorsque le centre du cliché est à 41° et y négatif.

4:o) Une étoile remplissant à la fois les conditions 2:o) et 3:o) peut appartenir à quatre ou cinq paires de clichés.

5:o) Si la déclinaison d'une étoile est supérieure à 46° 3′, ou inférieure à 39° 57′, cette étoile n'apparaît le plus souvent que sur une seule paire de clichés. Ce n'est que dans le cas où la coordonnée x de l'étoile dépasse en valeur absolue une quantité variant entre 39′ (à 47°) et 54′ (à 39°), que l'étoile peut appartenir à deux paires de clichés.

4. **Méthode pour la recherche des étoiles à mouvement propre dans le blink-microscope.** Cette méthode a déjà été décrite dans le I:er volume du présent travail (p. 7). Afin de faciliter la lecture de ce qui doit suivre, je répéterai succintement cet exposé.

Lors de l'examen au *blink*-microscope, j'ai noté non seulement les étoiles chez lesquelles je croyais pouvoir constater un mouvement propre sensible, mais encore un certain nombre d'autres pour lesquelles la réalité d'un mouvement propre sensible me semblait douteuse. Les numéros de ces dernières dans la région furent notés d'un ?. Les premières furent mesurées dans tous les cas; elles se retrouvent donc toutes dans le *Catalogue général*. Les dernières furent mesurées dans tous les cas où leur déclinaison était $> 46°$ ou $< 39°$. Pour les déclinaisons comprises entre 39° et 46°, ces étoiles ne furent mesurées que dans les cas où elles avaient été notées d'un ? lors de l'examen de deux paires de clichés au moins. Dans le cas contraire, elles furent négligées; elles ne se retrouvent donc pas au *Catalogue général*.

5. **Formules pour le calcul du coefficient de découverte.** Nous définissons ici le coefficient de découverte comme étant le rapport du nombre des étoiles à mouvement propre observées à leur nombre réel. Dans le calcul de cette quantité, on fait usage des formules ci-dessous.

Supposons d'abord qu'on ait traité un groupe d'étoiles appartenant à deux paires de clichés et ayant par conséquent été soumis à deux examens indépendants dans le but de constater des mouvements propres. Soit n_1 le nombre des étoiles notées dans un seul examen comme ayant un mouvement propre, n_2 le nombre de celles qui ont été notées dans les deux examens, s le nombre total des étoiles à mouvement propre trouvées. La valeur moyenne du coefficient de découverte p pour ce groupe d'étoiles s'obtient alors, selon M. ÖPIK, par la formule: *

$$p = \frac{2\,n_2}{n_1 + 2\,n_2} = \frac{2\,n_2}{s + n_2}. \tag{1}$$

Considérons maintenant un groupe d'étoiles ayant été l'objet de trois séries d'observations indépendantes, et désignons par n_3 le nombre des étoiles trouvées dans les trois examens, par n_2 celui des étoiles notées deux fois, par n_1 celui des étoiles notées une seule fois, et enfin par s le nombre total des étoiles à mouvement propre découvertes. On trouvera p par la formule

$$p = \frac{n_2 + 3\,n_3}{n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3} = \frac{n_2 + 3\,n_3}{s + n_2 + 2\,n_3}. \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) donnent le rapport du nombre des étoiles à mouvement propre découvertes pendant un seul examen au nombre réel. Le coefficient total de découverte, π, c'est-à-dire le rapport du nombre des étoiles trouvées dans tous les examens en question, et du nombre réel, est donné par la formule

$$\pi = 1 - (1 - p)^2 \tag{3}$$

dans le cas où il s'agit de deux séries d'observations, et par la formule

* Voir ÖPIK, loc. cit. p. 8.

(4) $$\pi = 1 - (1 - p)^3$$

s'il s'agit de trois examens.

Nous avons remarqué plus haut que mes matériaux contiennent aussi un certain nombre d'étoiles faisant partie de 4 ou 5 séries d'observations indépendantes. Pour des raisons mentionnées plus bas, ces cas n'ont pas été traités à part. J'ai considéré ces étoiles comme appartenant à trois paires de clichés seulement. Par suite, il est inutile de noter ici les formules qui donneraient p et π dans les cas où les séries d'observations sont plus de 3.

Comme M. Öpik l'a remarqué dans son travail cité plus haut, les formules (1)—(4) ne sont pas immédiatement applicables à mes observations. En effet, les mouvements propres que j'ai examinés ne peuvent pas être rangés simplement en deux catégories: »découverts» ou »non découverts». Il existe une troisième catégorie, embrassant les mouvements propres considérés comme incertains lors de l'examen et notés d'un *?*. Ces mouvements ne peuvent être regardés que comme »partiellement découverts», puisque (si l'on excepte les cas où $\delta > 46°$ ou $< 39°$) ils n'ont été mesurés que lorsque dans l'examen d'une autre région on les a considérés comme certains, ou muni d'un *?* leur numéro.

Il est clair que si on traite les matériaux en regardant les mouvements propres munis d'un *?* comme certainement découverts, on trouve une valeur trop grande pour le coefficient de découverte. Si au contraire on les néglige comme non découverts, la valeur de ce coefficient devient trop petite. Sa grandeur exacte se trouve entre ces deux limites; on peut donc, en calculant celles-ci, arriver à une valeur approchée du coefficient.

Cependant, M. Öpik * a montré que mes observations permettent d'obtenir une valeur exacte du coefficient de découverte par les formules suivantes. Soit p' la valeur de ce coefficient obtenue en supposant que les mouvements propres marqués d'un *?* sont regardés comme découverts; et soit p'' la valeur correspondante dans le cas contraire. Désignons par p_1 la probabilité qu'un mouvement propre soit noté comme certain, et par p_2 celle qu'il soit noté avec un *?*. Il ressort de la définition qu'on a

$$p_1 = p''.$$

Désignons par p_0 la probabilité que, lors d'un examen, un mouvement propre ait été noté, soit comme certain, soit avec un *?*. On a alors

$$p_0 = p_1 + p_2.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un groupe d'étoiles apparaissant sur *deux* paires de clichés, et par conséquent examiné deux fois. Dans ce cas on obtient les équations

(5) $$p' = \frac{p_0^2}{p_0^2 + p''(1 - p_0)},$$

permettant de calculer p_0 si p' et p'' sont connus, et

(6) $$\pi = p_0^2 + 2\,p''(1 - p_0),$$

qui donne le coefficient total de découverte π.

* Öpik: loc. cit. p. 15—18.

Dans le cas où les étoiles à mouvement propre apparaissent sur *trois* paires de clichés, p_0 ressort de l'équation

$$p_0 = 2 - \frac{1}{p'} + p''\left(\frac{1}{p_0} - 1\right). \tag{7}$$

équation du 3e degré en p_0, qu'on résout le plus facilement par approximations successives. Le coefficient total de découverte π est déterminé ensuite au moyen de l'équation

$$\pi = p_0^3 + 3\,p_0^2\,(1 - p_0) + 3\,p''(1 - p_0)^2 \tag{8}$$

qui, en vertu de l'égalité $p_0 - p'' = p_2$, peut être mise sous la forme plus commode pour le calcul

$$\pi = 1 - (1 - p_0)^3 - 3\,p_2\,(1 - p_0)^2. \tag{8 a}$$

6. **Calcul des coefficients de découverte en partant des matériaux disponibles.** Pour les étoiles les plus faibles, il faut remarquer que leurs images sont souvent invisibles sur les clichés où elles sont très éloignées du centre; on ne les trouve que sur ceux où elles sont situées au voisinage du centre. Ces étoiles n'ayant été l'objet que d'un seul examen, il m'a semblé le plus juste d'exclure toutes les étoiles les plus faibles du calcul des coefficients de découverte, ainsi que de l'élaboration statistique des matériaux. L'expérience nous apprend que les étoiles de grandeur 10.6 ou plus faibles (échelle de Helsingfors) n'apparaissent pas toujours près des coins ou des bords des clichés. Les matériaux ont donc été limités aux étoiles jusqu'à la grandeur 10. 5 inclusivement. Si nous excluons les étoiles plus faibles, le tableau VII est remplacé par le tableau VIII. A titre de comparaison, le tableau donne aussi le nombre total d'étoiles de chaque groupe.

Tableau VIII.

Nombre des étoiles à mouvement propre $\leq 10^{m}.5$.

μ Groupe	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
0″.051—0″.060	20	11	9	16	7	23	8	13	18	27	11	15	178
0.061—0.070	10	17	10	19	7	10	7	7	6	22	9	11	135
0.071—0.080	14	15	9	9	6	10	11	4	9	10	21	11	129
0.081—0.090	10	6	4	2	7	12	5	5	10	12	7	10	90
0.091—0.100	3	5	5	6	6	7	2	6	11	9	6	9	75
0.101—0.110	4	5	3	4	8	3	4	7	7	10	10	7	72
0.111—0.120	1	8	2	2	1	8	5	6	2	7	6	3	51
0.121—0.130	2	3	2	1	4	3	2	9	1	6	5	4	42
0.131—0.140	1	1	—	1	2	2	1	2	4	2	3	3	22
0.141—0.150	5	3	—	—	—	1	3	1	3	3	1	3	23
0.151—0.200	2	7	3	9	6	8	7	10	18	11	8	5	94
0.201—0.250	—	1	1	1	3	1	3	4	3	6	4	2	29
0.251—0.300	—	1	—	1	1	1	3	3	1	2	4	—	17
0.301—0.350	—	—	—	1	—	1	2	1	1	1	1	1	9
0.351—	1	1	1	1	4	3	2	1	1	1	1	5	22
Ensemble	73	84	19	73	62	93	65	79	95	129	97	89	988
Nombre total d'étoiles	1951	1490	1109	997	823	905	885	814	816	871	621	586	

La différence entre le nombre d'étoiles des premiers et des derniers groupes est plus prononcée ici que dans le tableau VII. Sur un total de 988 étoiles à mouvement propre, 434 appartiennent à la région comprise entre 6^h et 9^h d'ascension droite, tandis que les 554 autres sont situées entre 9^h et 12^h. Le nombre observé des étoiles à mouvement propre croît donc en général avec l'ascension droite, et cela malgré qu'en même temps le nombre total d'étoiles décroît fort rapidement.

Les étoiles plus faibles que $10^m.5$ ayant été écartées de la statistique, les matériaux restants ont été divisés en deux parties selon le temps où l'examen des clichés avait eu lieu. Les paires de clichés se rapportant au premier volume du présent travail ont été examinées durant le printemps et l'été 1913; les autres, c'est-à-dire celles pour lesquelles nous publions ici les mouvements propres, furent examinées en mars—novembre 1918. On ne peut admettre que l'auteur ait procédé d'une manière identique à ces deux époques différentes pour trouver les étoiles à mouvement propre; et en effet, les résultats prouvent bien le contraire. Les deux parties ont donc été traitées indépendamment l'une de l'autre, en ce que le coefficient de découverte a été calculé séparément pour chacune d'elles. Le catalogue général du I:er volume commençait à $8^h\,54^m$ d'ascension droite; la première partie embrasse donc toutes les étoiles situées en ascension droite entre $6^h\,0^m$ et $8^h\,54^m$. La seconde comprend celles dont l'ascension droite est $> 8^h\,54^m$ et $< 12^h\,0^m$. La première partie sera désignée dans la suite par la lettre *A*, la seconde par la lettre *B*.

Je rendrai compte maintenant des détails de la méthode suivie dans le calcul du coefficient de découverte. Cette quantité a d'abord été déterminée pour le cas où les étoiles appartiennent à deux paires de clichés. A cette fin, on a d'abord laissé de côté les bandes communes avec d'autres clichés ayant leur centre sur le même cercle parallèle. Les étoiles situées dans ces domaines appartiennent en effet le plus souvent à trois régions au moins et sont donc nécessaires dans le calcul du coefficient de découverte pour *trois* examens. Il est vrai que pour les étoiles situées au nord de $46°\,3'$ et au sud de $39°\,57'$, ceci n'a pas lieu; elles n'appartiennent qu'à deux paires de clichés; mais sur ces deux paires elles sont situées près des bords; leur situation est donc plus défavorable que dans le cas général d'étoiles appartenant à deux paires de clichés; c'est pourquoi on les a ici laissées de côté.

Les clichés dont les centres ont la même ascension droite mais diffèrent de $2°$ en déclinaison, ont en commun une bande étroite (sa largeur est d'environ $6'$). Les étoiles qui se trouvent dans ce domaine appartiennent donc en général à trois paires de clichés; sur l'une d'elles la coordonnée y est près de 0, sur les deux autres, sa valeur absolue est près de $60'$. La position de ces étoiles sur la paire de clichés où $y > 60'$ est particulièrement défavorable; la détermination du mouvement propre est donc peu sûre; par suite, ces étoiles n'ont pas été employées dans le calcul du coefficient de découverte pour trois examens; elles ont été considérées comme appartenant à deux paires de clichés seulement. La région où la coordonnée y des étoiles est $> 60'$ a été négligée.

Les étoiles dont la déclinaison est comprise entre $46°\,0'$ et $46°\,3'$ ou entre $39°\,57'$ et $40°\,0'$, appartiennent en général à deux paires de clichés. Cependant elles n'ont pas été employées dans le calcul du coefficient de découverte, parce que la coordonnée y sur l'une des paires de clichés est $> 60'$.

Nous avons déjà mentionné que la présente statistique n'embrasse que les étoiles dont le mouvement propre annuel est $> 0''.05$. Les coefficients de découverte ont cependant été calculés

aussi pour les mouvements propres de la classe 0″.041—0″.050. Lors de l'ajustement des valeurs obtenues directement, il devient ainsi possible de déterminer avec plus de certitude les coefficients de découverte pour les autres classes de mouvements propres, et surtout pour la classe 0″.051—0″.060.

En appliquant les formules données plus haut pour les étoiles examinées deux fois, on a obtenu les valeurs suivantes des quantités p', p'', p_0 et π. Une recherche spéciale a prouvé que ces quantités peuvent être considérées comme constantes pour toutes les classes de grandeur jusqu'à $10^m.5$ inclusivement.

Tableau IX.

Coefficients de découverte pour deux examens.

μ	0″.041—0″.050	0″.051—0″.060	0″.061—0″.070	0″.071—0″.080	0″.081—0″.090	0″.091—0″.100	0″.101—0″.110	0″.111—
				A.				
p'	0.459	0.635	0.733	0.807	0.909	0.963	1.000	1.000
p''	0.275	0.415	0.643	0.667	0.759	0.923	0.957	0.966
p_0	0.380	0.562	0.712	0.781	0.894	0.962	1.000	1.000
π	0.486	0.679	0.877	0.902	0.961	0.996	1.000	1.000
				B.				
p'	0.711	0.623	0.681	0.787	0.848	0.833	0.857	0.983
p''	0.273	0.321	0.389	0.364	0.615	0.750	0.692	0.977
p_0	0.552	0.510	0.586	0.668	0.809	0.820	0.833	0.983
π	0.550	0.575	0.666	0.688	0.889	0.942	0.925	1.000

La comparaison des deux parties de ce tableau prouve que les coefficients de découverte sont généralement plus grands dans la partie *A* que dans la partie *B*, sauf pour les mouvements propres 0″.041—0″.050. En d'autres termes, dans l'examen de la partie de la zone comprise entre 6^h et $8^h\ 54^m$, examen qui a eu lieu plus récemment, un nombre plus restreint d'étoiles ont échappé à l'observation que dans la partie comprise entre $8^h\ 54^m$ et 12^h.

La partie *B* contient les mêmes matériaux que ceux que j'ai mis à la disposition de M. ÖPIK, et qu'il a élaborés dans son travail cité plus haut. Les chiffres ici publiés s'écartent un peu de ceux du travail de M. ÖPIK*; cela tient à ce que les mouvements propres ont été corrigés des nouvelles erreurs systematiques après que M. ÖPIK eut reçu mes matériaux.

Pour le calcul des coefficients de découverte dans le cas de trois examens, j'ai fait usage exclusivement des étoiles appartenant aux domaines communs aux clichés ayant leurs centres sur le même cercle parallèle; la raison en a été expliquée plus haut. Les rares étoiles de ce genre appartenant à quatre ou cinq paires de clichés ont été traitées comme appartenant à trois paires; les cas où la coordonnée y dépasse 60′ en valeur absolue, ont été exclus.

Pour *trois* examens j'ai ainsi obtenu les valeurs suivantes de p', p'', p_0 et π:

* ÖPIK. Loc. cit. p. 16.

Tableau X.

Coefficients de découverte pour trois examens.

μ	0.″041—0.″050	0.″051—0.″060	0.″061—0.″070	0.″071—0.″080	0.″081—0.″090	0.″091—0.″100	0.″101—0.″110	0.″111
				A.				
p'	0.370	0.568	0.609	0.720	0.909	1.000	0.750	0.955
p''	0.167	0.371	0.421	0.353	0.722	0.800	0.667	0.905
p_0	0.291	0.530	0.580	0.685	0.907	1.000	0.745	0.955
π	0.457	0.791	0.842	0.870	0.994	1.000	0.968	1.000
				B.				
p'	0.409	0.528	0.677	0.600	0.854	0.789	0.771	0.981
p''	0.071	0.158	0.391	0.500	0.552	0.583	0.478	0.901
p_0	0.243	0.416	0.643	0.585	0.847	0.779	0.754	0.970
π	0.270	0.537	0.858	0.885	0.976	0.960	0.935	1.000

L'on voit que, dans ce cas aussi, les valeurs obtenues sont généralement plus grandes pour la partie *A* que pour la partie *B*.

Les valeurs de π calculées plus haut et données dans les tableaux IX et X sont valables pour la partie de la zone située entre 40° et 46° de déclinaison. Il faut excepter cependant les étoiles situées à moins de 3′ des degrés 41°, 42°, 43°, 44° et 45°, lesquelles, quoique appartenant en général à 3 paires de clichés, peuvent apparaître quelquefois dans 4 ou 5 régions. Cependant, j'ai cru pouvoir employer même pour ces étoiles les valeurs de π valables pour trois examens. Le fait que certaines de ces étoiles font partie de 4 ou 5 paires de clichés et ont subi par conséquent 4 ou 5 examens, est en effet compensé par ce que ces étoiles occupent une situation défavorable sur la majorité des clichés (la coordonnée y est toujours presque $= 60'$ sur deux paires de clichés au moins).

Pour ce qui est des étoiles à déclinaison $> 46°$ ou $< 40°$, il faut remarquer les faits suivants. La plupart de ces étoiles n'appartiennent qu'à une seule paire de clichés. Les mouvements propres ayant toujours été mesurés dans ces parties de la zone, même dans les cas où ils ont été considérés comme douteux et sont marqués d'un ?, il semble justifié d'employer pour les étoiles en question les quantités p' comme coefficients de découverte. De plus, la situation de ces étoiles étant généralement analogue à celle des étoiles dans les parties de la zone comprises entre 40° et 46° qui ont été soumises à deux examens, il faut choisir pour p' les valeurs données dans le tableau IX. Parmi les étoiles à $\delta > 46°$ ou $< 39°$, une minorité appartient à deux paires de clichés. Pour cette minorité, les coefficients de découverte π' doivent être évidemment calculés par la formule

$$\pi' = 1 - (1 - p')^2.$$

Dans cette formule, le plus juste est d'employer les valeurs de p' déduites pour trois examens et données dans le tableau X. Car dans le cas maintenant en question les étoiles sont généralement situées dans les mêmes domaines des clichés que celles qui ont été employées pour fixer les coefficients de découverte dans le cas de trois examens.

Pour les différentes parties de la zone j'ai donc fait usage des coefficients de découverte suivants (les indices indiquent les quantités se rapportant à 2 ou à 3 examens):

$\delta > 46°$ *ou* $< 39°$: pour un examen $p'_{(2)}$, pour deux examens $\pi'_{(3)} = 1 - (1 - p'_{(3)})^2$;

$\delta < 46°$ *et* $> 39°$ (sauf pour les bandes larges de 6′ situées à 41°, 42°, 43°, 44° et 45°): pour deux examens $\pi_{(2)}$, pour trois examens $\pi_{(3)}$;

pour les bandes à 41°, 42°, 43°, 44° et 45°: $\pi_{(3)}$.

7. **Ajustement des coefficients de découverte.** En général, les coefficients de découverte calculés ci-dessus suivent une marche assez régulière, en ce que leurs valeurs croissent en même temps que celles des mouvements propres. Un ajustement des nombres obtenus semble cependant nécessaire. Or, il a été impossible de trouver aucune formule simple satisfaisant aux diverses valeurs. J'ai donc effectué l'ajustement par la méthode graphique, en procédant de la manière suivante.

La valeur du coefficient de découverte calculée pour une certaine classe de mouvements propres, soit par exemple entre les limites 0″.051 et 0″.060, est une valeur moyenne pour la classe en question. Mais cette valeur moyenne ne correspond pas à la moyenne directe des mouvements propres, 0″.0555, car le nombre des mouvements propres n'est par le même pour chacun des millièmes de la seconde d'arc: 0″.051, 0.″052 etc. Pour commencer, j'ai supposé que la valeur moyenne du coefficient de découverte est valable pour la moyenne des mouvements propres qu'on obtient en multipliant chacun des millièmes, 0″.051, 0″.052, par le nombre d'étoiles pour ce millième, et en divisant la somme des produits par le nombre total d'étoiles de la classe en question. J'ai trouvé ainsi que les valeurs suivantes de $p'_{(2)}$, $\pi'_{(3)}$, $\pi_{(2)}$ et $\pi_{(3)}$ correspondent aux valeurs ci-dessous des mouvements propres. Dans quelques cas où cela a semblé opportun, quelques-unes des classes de mouvements propres ont été subdivisées en deux ou trois.

A.

μ	0″.0456	0″.0551	0″.0644	0″.0750	0″.0856	0″.0959	0″.1010			
$p'_{(2)}$	0.459	0.635	0.733	0.807	0.909	0.963	1.000			
μ	0″.0465	0″.0544	0″.0651	0″.0745	0″.0848	0″.0920	0″.1060	0″.1132	0″.1210	
$\pi'_{(3)}$	0.603	0.813	0.847	0.922	0.992	1.000	0.938	0.960	1.000	
μ	0″.0427	0″.0483	0″.0528	0″.0584	0″.0644	0″.0750	0″.0856	0″.0959	0″.1010	
$\pi_{(2)}$	0.348	0.587	0.645	0.725	0.877	0.902	0.961	0.996	1.000	
μ	0″.0465	0″.0544	0″.0651	0″.0745	0″.0848	0″.0920	0″.1060	0″.1110		
$\pi_{(3)}$	0.457	0.791	0.842	0.870	0.944	1.000	0.968	1.000		

B.

μ	0″.0449	0″.0548	0″.0655	0″.0755	0″.0861	0″.0954	0″.1056	0″.1151	0″.1263	0″.1310
$p'_{(2)}$	0.714	0.623	0.681	0.787	0.848	0.833	0.857	0.933	0.941	1.000
μ	0″.0456	0″.0564	0″.0664	0″.0763	0″.0848	0″.0948	0″.1043	0″.1110		
$\pi'_{(3)}$	0.651	0.777	0.896	0.840	0.979	0.955	0.948	1.000		
μ	0.0449	0.0548	0″.0655	0.″0755	0″.0861	0″.0954	0″.1056	0″.1110		
$\pi_{(2)}$	0.550	0.575	0.666	0.688	0.889	0.942	0.925	1.000		
μ	0″.0456	0″.0564	0″.0664	0″.0763	0.″0848	0″.0948	0″.1043	0″.1110		
$\pi_{(3)}$	0.270	0.537	0.858	0.885	0.976	0.960	0.935	1.000		

Les valeurs des coefficients de découverte données dans cette liste ont été portées graphiquement comme ordonnées des valeurs correspondantes des mouvements propres considérées comme abscisses; on a tracé les courbes qui se rattachent le plus étroitement aux points ainsi obtenus. Les courbes résultant de cette opération représentent une solution approximative du problème. Leur courbure a permis de calculer des valeurs améliorées pour les coefficients de découverte correspondant aux valeurs moyennes des mouvements propres, ce qui a permis de fixer le tracé définitif des courbes. Cela fait, les coefficients de découverte ont été déterminés pour chaque millième de seconde en question (0″.051, 0″.052 etc.). Il est évidemment inutile de donner ici toutes ces valeurs. Le tableau ci-dessous donne les valeurs ajustées de $p'_{(2)}$, $\pi'_{(3)}$, $\pi_{(2)}$ et $\pi_{(3)}$, correspondant aux valeurs des mouvements propres 0″.051, 0″.061 etc., ayant des intervalles de 0″.010.

Tableau XI.

Valeurs définitives des coefficients de découverte.

μ	0″.051	0″.061	0″.071	0″.081	0″.091	0″.101	0″.111	0″.121	0″.131
					A.				
$p'_{(2)}$	0.562	0.696	0.790	0.867	0.942	1.000	1.000	1.000	1.000
$\pi'_{(3)}$	0.728	0.851	0.910	0.943	0.962	0.976	0.990	1.000	1.000
$\pi_{(2)}$	0.627	0.788	0.891	0.957	0.990	1.000	1.000	1.000	1.000
$\pi_{(3)}$	0.690	0.838	0.902	0.943	0.970	0.988	1.000	1.000	1.000
					B.				
$p'_{(2)}$	0.648	0.694	0.739	0.784	0.828	0.872	0.916	0.961	1.000
$\pi'_{(3)}$	0.722	0.810	0.870	0.916	0.953	0.979	1.000	1.000	1.000
$\pi_{(2)}$	0.550	0.634	0.718	0.800	0.877	0.948	1.000	1.000	1.000
$\pi_{(3)}$	0.464	0.704	0.846	0.914	0.949	0.979	1.000	1.000	1.000

8. **Réduction des grandeurs des étoiles à l'échelle photographique de Harvard.** Comme nous l'avons déjà dit, nous avons compris dans la présente statistique toutes les étoiles jusqu'à la grandeur $10^m.5$ inclusivement d'après l'échelle employée pour le catalogue de Helsingfors. Les clichés appartenant aux diverses parties de la zone ayant été photographiées en des saisons différentes et durant des états différents de l'atmosphère, il n'est pas certain *a priori* que ladite grandeur observée ($10^m.5$) corresponde toujours à la même grandeur réelle des étoiles. Par cette raison, et afin de rendre possible une classification certaine des matériaux selon les grandeurs, j'ai tenté de réduire les grandeurs de Helsingfors à l'échelle photographique de Harvard. A cet effet, j'ai recherché dans *The Henry Draper Catalogue* toutes les étoiles qui appartiennent à la zone de Helsingfors entre 5^h et 13^h d'ascension droite, et j'ai comparé leurs grandeurs photographiques dans ce catalogue avec les grandeurs dans le catalogue de Helsingfors. Cependant, le catalogue de Harvard ne contenant pas en général des étoiles plus faibles que $9^m.5$ selon l'échelle de Helsingfors, j'ai dû compléter les matériaux pour les étoiles plus faibles. Ce travail a été possible par le fait que les archives photographiques de

l'Observatoire de Helsingfors possèdent un certain nombre de clichés où certaines régions du catalogue de l'Observatoire ont été photographiées avec la séquence polaire. Sur ces clichés, j'ai déterminé directement les grandeurs selon l'échelle de Harvard pour un certain nombre d'étoiles faibles, et je les ai comparées avec les grandeurs du catalogue de Helsingfors.

Les résultats de toutes ces comparaisons sont donnés dans le tableau XII. Les différences moyennes Harvard—Helsingfors y sont indiquées pour différentes ascensions droites et pour quelques valeurs moyennes des grandeurs d'après l'échelle de Helsingfors. Les différences des quatre premières colonnes se basent sur la comparaison avec *The Draper Catalogue*. Le premier nombre, $-0^m.07$, indique donc la différence moyenne Draper—Helsingfors pour toutes les étoiles communes ayant des grandeurs entre $6^m.00-6^m.99$ (Hels.) et comprises entre 5^h et 6^h d'ascension droite; et ainsi de suite. La dernière colonne donne les résultats de la comparaison directe avec la séquence polaire. En général je n'ai eu à ma disposition que deux clichés pour chaque heure d'ascension droite, et ces deux clichés ont représenté la même région. Les chiffres de la dernière colonne se basent donc sur les différences pour un nombre assez restreint d'étoiles; mais en revanche, chaque différence est d'une exactitude plus grande que celle des autres matériaux.

Tableau XII.

Différences de grandeurs Harvard—Helsingfors.

α	m 6.59	m 7.70	m 8.41	m 9.20	m 10.19
$5^h\,30^m$	—0.07	+0.26	+0.53	+0.77	+ 0.83
	6.59	7.58	8.49	9.39	10.24
6 30	+0.29	+0.51	+0.75	+1.12	+ 1.01
	6.56	7.59	8.49	9.18	10.42
7 30	+0.16	+0.46	+0.73	+0.89	+ 0.99
	6.55	7.55	8.52	9.14	10.16
8 30	+0.90	+0.75	+0.80	+0.68	+ 0.98
	6.55	7.56	8.59	9.23	10.26
9 30	+1.07	+1.06	+0.93	+1.22	+ 1.23
	6.46	7.53	8.43	—	10.16
10 30	+1.09	+1.08	+0.97	—	+ 0.97
	6.59	7.52	8.43	9.50	10.20
11 30	+0.87	+0.78	+1.07	+1.17	+ 0.93
	6.51	7.64	8.49	9.37	10.37
12 30	+0.38	+0.38	+0.77	+0.97	+ 1.10

Il ressort de ce tableau que les différences Harvard—Helsingfors varient beaucoup avec les grandeurs moyennes, ainsi qu'avec l'ascension droite, ce qui a lieu surtout pour les étoiles les plus lumineuses. Les variations ayant un caractère très continu, leur ajustement ne présente aucune difficulté. Après cet ajustement, exécuté selon la méthode graphique, j'ai obtenu les valeurs définitives suivantes pour la réduction des grandeurs de Helsingfors à l'échelle de Harvard.

Tableau XIII.

Réduction à l'échelle de Harvard.

α	m 6.5	m 7.5	m 8.5	m 9.5	m 10.5
$5^h\ 30^m$	—0.1	+0.3	+0.6	+0.8	+0.9
6 30	+0.1	+0.4	+0.7	+0.9	+1.0
7 30	+0.2	+0.5	+0.8	+1.0	+1.0
8 30	+0.6	+0.8	+0.9	+1.0	+1.1
9 30	+0.9	+0.9	+1.0	+1.1	+1.2
10 30	+1.0	+1.0	+1.0	+1.0	+1.1
11 30	+0.9	+0.9	+0.9	+1.0	+1.1
12 30	+0.3	+0.6	+0.8	+1.0	+1.1

A l'aide du tableau ci-dessus, les grandeurs de toutes les étoiles faisant partie de la présente statistique (à mouv. pr. $> 0''.05$) ont été réduites à l'échelle de Harvard. Nous avons déjà vu que sur les clichés ici traités apparaissent toutes les étoiles jusqu'à la grandeur $10^m.5$ de Helsingfors inclusivement; la réduction à l'échelle de Harvard entre 6^h et 12^h est de $+ 1^m.0$ au moins. Les matériaux examinés sont donc complets jusqu'à la grandeur $11^m.5$ inclusivement selon l'échelle de Harvard. Pour obtenir des matériaux aussi homogènes que possible, et afin de pouvoir comparer entre eux les résultats pour les différentes parties de la section de la zone, j'ai exclu de la statistique suivante les étoiles qui, après réduction à l'échelle de Harvard, ont obtenu une grandeur $> 11^m.5$.

9. **Nombre probables des étoiles à mouvement propre, reparti par groupes selon l'ascension droite.** Les coefficients de découverte ayant été déterminés pour chaque millième de la seconde d'arc ($0''.051$, $0''.052$ etc.), ainsi qu'il a été dit plus haut, le nombre réel ou probable des étoiles à mouvement propre peut être calculé pour chacun de ces millièmes, en divisant le nombre observé par le coefficient de découverte. Les résultats de ce calcul sont donnés dans le tableau XIV ci-dessous. Les matériaux de chacun des douze groupes en ascension droite y ont été classés selon la grandeur des mouvements propres. Le nombre observé des étoiles à mouvement propre y est désigné par n *, et leur nombre calculé par N. A titre de comparaison nous y donnons aussi pour chaque groupe le nombre total M des étoiles jusqu'à la classe $11^m.5$ de Harvard. On y trouvera enfin l'ascension droite, la latitude galactique b et la distance à l'antiapex ($A = 90°$; $D = -30°$) du centre de chaque domaine, σ'.

Le tableau montre que le nombre des mouvements propres varie assez considérablement pour les divers groupes. Cependant ce nombre ne diminue pas, comme le nombre total des étoiles, lorsque la distance à la Voie lactée augmente. Au contraire, le nombre des mouvements propres est relativement considérable dans les groupes où le nombre total des étoiles est le plus petit. Ceci est vrai surtout des mouvements propres les plus grands, mais aussi pour ceux de grandeur moindre. Le tableau confirme donc une fois de plus un fait constaté déjà dans le premier volume de ce travail ainsi que par d'autres auteurs: les étoiles à mouvement propre sensible ne présentent pas une densité croissante dans la direction vers la Voie lactée.

* Quelques rares étoiles rentrant dans le *Catalogue général*, quoiqu'elles n'aient pas été découvertes lors de l'examen des clichés, ont été laissées de côté.

Tableau XIV.

Nombre observé et nombre probable des étoiles à mouvement propre > 0″.05 jusqu' à 11ᵐ.5 (Harvard). pour les groupes I—XII.

Groupe	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII		IX		X		XI		XII		Σ	
α	6ʰ	15ᵐ	6ʰ	45ᵐ	7ʰ	15ᵐ	7ʰ	45ᵐ	8ʰ	15ᵐ	8ʰ	45ᵐ	9ʰ	15ᵐ	9ʰ	45ᵐ	10ʰ	15ᵐ	10ʰ	45ᵐ	11ʰ	15ᵐ	11ʰ	45ᵐ		
μ	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N
0″.051—0″.060	20	28.4	11	16.0	9	12.3	16	21.2	7	9.8	23	33.2	7	11.1	11	18.0	17	28.0	26	43.2	10	17.0	14	23.5	171	261.7
0.061—0.070	10	11.9	17	20.7	10	12.4	17	21.0	7	9.0	10	12.2	6	8.6	6	7.7	6	8.2	21	28.3	9	12.8	11	15.7	130	168.5
0.071—0.080	14	15.4	15	16.3	9	10.1	9	10.1	5	5.7	10	11.3	11	13.7	4	5.0	8	9.5	10	12.8	20	24.6	11	14.1	126	148.6
0.081—0.090	10	10.4	6	6.3	4	4.2	2	2.1	7	7.4	12	13.0	4	4.4	4	4.6	10	11.6	12	13.6	7	8.0	10	11.8	88	97.4
0.091—0.100	3	3.1	5	5.0	5	5.1	6	6.0	6	6.2	6	6.1	1	1.2	6	6.6	11	12.0	9	9.7	6	6.4	8	8.9	72	76.3
0.101—0.110	4	4.0	5	5.0	3	3.0	4	4.0	7	7.0	3	3.3	4	4.2	7	7.4	5	5.2	10	10.3	9	9.3	6	6.1	67	68.8
0.111—0.120	1	1.0	8	8.0	2	2.0	2	2.0	1	1.0	8	8.0	3	3.2	6	6.2	2	2.1	7	7.1	5	5.1	3	3.1	48	48.8
0.121—0.130	2	2.0	3	3.0	2	2.0	1	1.0	4	4.0	3	3.0	2	2.0	9	9.1	1	1.0	6	6.0	5	5.0	4	4.0	42	42.1
0.131—0.140	1	1	1	1	—	—	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	3	3	21	21
0.141—0.150	5	5	3	3	—	—	—	—	—	—	1	1	3	3	1	1	2	2	3	3	1	1	3	3	22	22
0.151—0.200	2	2	7	7	3	3	9	9	6	6	8	8	7	7	10	10	18	18	11	11	8	8	5	5	94	94
0.201—0.250	—	—	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	3	3	4	1	2	2	6	6	4	4	2	2	28	28
0.251—0.300	-	—	1	1	—	—	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3	1	1	2	2	4	4	—	—	16	16
0.301—0.350	–	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—	—	7	7
0.351—	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	5	5	22	22
Σ	73	85.2	84	94.3	49	56.1	71	81.4	60	66.1	92	107.1	57	67.4	75	86.6	88	105.6	127	157.0	93	110.2	85	105.2	954	1122.2
M	1.951		1490		1109		997		763		840		731		705		748		824		578		525			
b	14°.6		19°.5		24°.7		30°.1		35°.5		40°.9		46°.1		51°.9		57°.2		62°.4		67°.2		71°.3			
o'	73.1		73.7		75.0		76.9		79.3		82.2		85.6		89.1		93.5		97.9		102.6		107.4			

Tableau XV.

Nombre des étoiles à mouvement propre > 0″.05, réparti par grandeurs des étoiles selon l'échelle de Harvard.

μ	< 6.6		6.6—7.0		7.1—7.5		7.6—8.0		8.1—8.5		8.6—9.0		9.1—9.5		9.6—10.0		10.1—10.5		10.6—11.0		11.1—11.5		Σ	
	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N	n	N
												6^h—9^h												
0″.051—0″.060	—	—	1	1.5	2	3.0	3	4.1	3	4.2	6	8.5	7	9.6	15	21.1	16	22.3	18	25.4	15	21.1	86	120.8
0.061—0.070	2	2.4	—	—	3	4.0	1	1.2	4	4.9	5	6.2	7	8.2	10	12.1	12	14.7	15	18.2	12	15.0	71	86.9
0.071—0.080	2	2.2	—	—	1	1.0	2	2.3	4	4.4	4	4.5	11	12.0	8	8.8	13	14.7	5	5.5	12	13.6	62	69.0
0.081—0.090	3	3.1	—	—	1	1.0	1	1.0	2	2.1	3	3.2	7	7.5	6	6.2	6	6.4	7	7.6	5	5.3	41	43.4
0.091—0.100	1	1.0	—	—	—	—	1	1.0	—	—	2	2.0	7	7.1	8	8.2	3	3.0	5	5.1	4	4.1	31	31.5
0.101—0.110	—	—	—	—	1	1.0	3	3.0	3	3.0	2	2.0	1	1.0	4	4.2	5	5.2	4	4.0	3	3.0	26	26.4
0.111—0.120	1	1.0	—	—	1	1.0	1	1.0	—	—	1	1.0	—	—	4	4.0	7	7.0	4	4.0	3	3.0	22	22.0
0.121—0.130	—	—	1	1.0	—	—	—	—	2	2.0	1	1.0	2	2.0	3	3.0	1	1.0	4	4.0	1	1.0	15	15.0
0.131—0.140	1	1	—	—	—	—	1	1	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	—	—	1	1	7	7
0.141—0.150	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	—	—	—	—	2	2	3	3	2	2	9	9
0.151—0.200	1	1	2	2	1	1	1	1	5	5	1	1	4	4	4	4	6	6	6	6	4	4	35	35
0.201—0.300	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	—	—	—	—	4	4	2	2	1	1	2	2	11	11
0.301—	1	1	1	1	—	—	1	1	—	—	—	—	4	4	2	2	3	3	—	—	1	1	13	13
Σ	12	12.7	5	5.5	10	12.0	16	17.6	25	27.6	26	30.4	50	55.4	70	79.6	78	89.3	72	83.8	65	76.1	429	490.0
												9^h—12^h												
0″.051—0″.060	—	—	—	—	2	3.5	1	1.5	1	1.6	4	6.9	4	6.6	19	32.6	20	32.9	17	27.2	17	28.0	85	140.8
0.061—0.070	1	1.2	1	1.4	—	—	—	—	3	4.1	2	2.7	4	5.6	11	15.0	13	18.0	13	17.6	11	15.6	59	81.2
0.071—0.080	2	2.3	—	—	1	1.1	3	3.8	2	2.3	5	6.4	6	7.4	15	19.4	8	10.0	11	13.6	11	13.5	64	79.8
0.081—0.090	—	—	1	1.1	—	—	2	2.4	3	3.1	1	1.1	6	6.7	11	12.8	11	12.4	6	7.2	6	6.9	47	54.0
0.091—0.100	—	—	1	1.1	—	—	3	3.2	1	1.1	2	2.2	3	3.3	7	7.5	9	10.1	7	7.6	8	8.7	41	44.8
0.101—0.110	1	1.0	3	3.1	—	—	2	2.2	1	1.0	—	—	5	5.1	13	13.5	7	7.2	3	3.1	6	6.2	41	42.4
0.111—0.120	—	—	—	—	1	1.1	2	2.0	3	3.1	—	—	5	5.1	5	5.2	6	6.2	2	2.0	2	2.1	26	26.8
0.121—0.130	1	1.0	1	1.0	1	1.0	—	—	2	2.0	2	2.0	1	1.0	5	5.0	3	3.0	7	7.0	4	4.0	27	27.0
0.131—0.140	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	5	5	3	3	2	2	—	—	14	14
0.041—0.150	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—	4	4	2	2	4	4	—	—	1	1	13	13
0.151—0.200	5	5	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	8	8	18	18	9	9	7	7	59	59
0.201—0.300	1	1	—	—	1	1	1	1	2	2	3	3	2	2	7	7	8	8	6	6	2	2	33	33
0.301—	2	2	2	2	—	—	1	1	—	—	2	2	1	1	5	5	1	1	1	1	1	1	16	16
Σ	14	14.5	10	10.7	8	9.7	17	19.1	20	22.6	25	30.3	47	53.8	113	138.0	111	133.8	84	103.3	76	96.0	525	631.8
ΣΣ	26	27.2	15	16.2	18	21.7	33	36.7	45	50.2	51	60.7	97	109.2	183	217.6	189	223.1	156	187.1	141	172.1	954	1121.8

D'autre part, et surtout si nous supposons pour les coordonnées de l'antiapex des valeurs un peu différentes de celles généralement adoptées, il semble que le nombre des étoiles à mouvement propre est une fonction de la distance à l'antiapex (ou à l'apex). Les parties de la zone dont cette distance est minima, contiennent relativement peu d'étoiles à mouvement propre, tandis que, dans les régions situées vers 90° de l'antiapex (ou de l'apex), le nombre de ces étoiles est notablement plus grand. Cependant, la partie de la zone ici traitée est trop faible pour qu'on puisse tirer des conclusions certaines sur la relation entre le nombre des étoiles à mouvement propre et la distance à l'antiapex.

10. **Nombre probable des étoiles à mouvement propre, reparti par grandeurs des étoiles.** Ainsi que nous l'avons dit plus haut, nous avons réduit à l'échelle de Harvard les grandeurs de toutes les étoiles à mouvement propre $> 0.''05$. Cela fait, les matériaux ont été répartis par grandeurs des étoiles selon les principes qui ressortent du tableau suivant, et le nombre réel des mouvements propres dans chaque groupe a été calculé à l'aide des coefficients de découverte. Les calculs ont été effectués séparément pour le domaine entre 6^h et 9^h et pour celui entre 9^h et 12^h d'ascension droite.

Pour chaque groupe de grandeurs, j'ai calculé la densité d, c'est-à-dire le rapport du nombre N pour le groupe et du même nombre pour tout le domaine; j'ai obtenu les valeurs suivantes:

d

m	< 6.6	6.6-7.0	7.1-7.5	7.6-8.0	8.0-8.5	8.6-9.0	9.1-9.5	9.6-10.0	10.1-10.5	10.6-11.0	11.1-11.5
6^h-9^h	0.026	0.011	0.024	0.036	0.056	0.062	0.113	0.162	0.182	0.171	0.155
9^h-12^h	0.023	0.017	0.015	0.030	0.036	0.048	0.085	0.218	0.212	0.164	0.152
6^h-12^h	0.024	0.014	0.019	0.033	0.045	0.051	0.097	0.194	0.199	0.167	0.153

Les chiffres prouvent que la densité d prend à peu près les mêmes valeurs pour les deux domaines en ascension droite. Concernant la valeur de cette quantité pour les divers groupes de grandeurs, remarquons que d croît en même temps que les grandeurs jusqu'aux groupes 9.6—10.0 et 10.1—10.5, où le maximum est atteint. Ensuite on trouve une lente décroissance. Le nombre des étoiles à mouvement propre $> 0''.05$ ne semble donc pas croître continuellement en même temps que la classe de grandeur, comme le nombre total des étoiles. Ce résultat s'accorde bien avec le fait que la fréquence desdites étoiles à mouvement propre ne dépend pas de la latitude galactique.

11. **Spectres des étoiles à mouvement propre.** Pour toutes les étoiles de la présente statistique qui font partie du *Draper Catalogue*, j'ai cherché dans ce catalogue les types des spectres. J'ai obtenu ainsi le tableau suivant du nombre des étoiles à mouvement propre appartenant aux diverses classes de spectres. Les étoiles ont été réparties en deux groupes: l'un comprend celles à mouvement propre $\leq 0''.10$, l'autre celles dont le mouvement propre est plus grand.

On voit que la très grande majorité de ces étoiles appartient aux classes F—K; les autres classes sont très faiblement représentées. De plus, il ressort du tableau que le nombre relatif des étoiles des classes G et K est plus considérable dans le second groupe (mouv. propre $> 0''.10$) que dans le premier ($\leq 0''.10$).

Tableau XVI.

Nombre d'étoiles à mouvement propre faisant partie du Draper Catalogue, par classes de spectres.

Spectre	0″.051—0″.100		0″.101—		Ensemble	
	n	%	*n*	%	*n*	%
B	1	0.7	—	—	1	0.3
A	9	5.5	7	4.9	16	5.2
F	59	36.0	41	28.5	100	32.5
G	56	34.1	59	41.0	115	37.3
K	36	22.0	36	25.0	72	23.4
M	3	1.8	1	0.7	4	1.3
Total	164		144		308	

II.

Détermination de l'apex et du vertex.

1. **Détermination de l'apex.** De même que dans le volume antérieurement publié de ce travail, j'ai entrepris ici une détermination de la position de l'apex, quoiqu'une telle détermination doive être affectée d'une incertitude assez considérable par suite de la faible extension de la section de la zone. J'ai basé mon calcul sur tous les mouvements propres $> 0''.05$ contenus dans les deux volumes. Ici, comme dans la discussion de la fréquence des mouvements propres, les étoiles ont été réparties en douze groupes, mais cette fois en comprenant dans le premier les étoiles dont l'ascension droite tombe entre 5^h53^m et 6^h0^m, et dans le dernier celles pour lesquelles elle est $> 12^h0^m$. Les centres des groupes ont été calculés en prenant la moyenne des ascensions droites et des déclinaisons de toutes les étoiles appartenant au groupe respectif. Puis j'ai calculé pour chaque groupe la direction vers l'antiapex, déterminée par l'angle de position H; ce calcul a été fait selon la méthode indiquée par SCHWARZSCHILD * ainsi qu'au moyen de la formule

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} H = \frac{\Sigma (\mu_\alpha + \Delta\mu_\alpha) \cos\delta}{\Sigma (\mu_\delta + \Delta\mu_\delta)}.$$

Afin de donner une idée de la variation du nombre d'étoiles à mouvement propre en fonction de l'angle de position P de ce mouvement, le tableau suivant donne, comme dans le volume précédent, ce nombre d'étoiles entre les limites 0° et 10°, 10° et 20° etc. de l'angle de position.

* Voir le I:er volume pp. 176—177.

Tableau XVII.

Nombre d'étoiles à mouvement propre $> 0''.05$ pour différents angles de position.

P	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0	1	3	1	2	1	1	—	—	—	2	1	—
10	1	—	—	1	—	—	—	—	1	1	1	—
20	1	1	3	2	1	—	—	—	1	—	—	1
30	2	2	—	2	—	—	1	—	—	—	1	—
40	1	1	1	—	—	—	—	1	—	1	—	—
50	1	2	1	3	—	—	—	1	2	2	1	—
60	—	2	2	2	—	—	—	—	—	—	3	2
70	—	1	4	3	2	2	—	—	—	2	—	1
80	1	—	4	5	1	—	—	2	—	2	1	3
90	—	2	2	3	3	3	3	3	—	5	2	1
100	2	1	1	2	2	5	3	2	2	2	2	2
110	1	4	1	4	—	1	3	2	2	3	1	3
120	4	7	—	6	4	3	—	2	2	2	4	2
130	—	4	1	2	3	4	2	2	—	5	6	1
140	5	6	1	2	4	4	3	5	5	4	2	3
150	9	7	—	3	2	1	1	5	3	3	1	4
160	8	6	6	6	6	4	2	—	6	2	4	3
170	7	8	4	5	6	5	2	5	1	4	1	1
180	10	11	7	7	4	6	5	7	4	2	—	2
190	9	11	8	5	3	5	7	4	7	3	1	5
200	6	10	1	10	6	15	8	3	4	6	3	1
210	4	2	2	10	14	12	7	4	9	6	5	4
220	2	2	4	4	7	8	7	6	7	10	3	2
230	5	5	4	3	5	14	3	2	7	12	6	6
240	4	3	1	6	1	9	3	6	12	12	8	8
250	2	1	2	7	1	4	6	13	12	13	11	6
260	1	2	2	4	5	3	3	9	11	12	12	3
270	1	—	—	2	—	1	4	5	8	4	16	7
280	1	—	3	1	1	3	3	1	1	14	10	15
290	1	1	—	—	—	1	1	—	6	4	10	6
300	—	3	—	1	3	—	2	1	—	3	4	6
310	—	2	2	2	—	—	—	1	2	1	3	4
320	1	—	—	2	—	—	—	—	—	—	2	—
330	—	—	2	1	—	—	1	—	—	1	2	—
340	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	—	2
350	1	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	—

Les résultats des calculs de Π sont donnés plus bas. Les valeurs obtenues en appliquant la formule (1) sont désignées par Π_1; Π_2 désigne celles qu'a données la méthode de SCHWARZSCHILD; Π_m enfin est la moyenne entre Π_1 et Π_2.

Groupe	Nombre d'étoiles	α	δ	Π_1	Π_2	Π_m
I	130	$6^h\ 9^m\ 13^s$	43° 0′	182°.3	180°.0	181°.15
II	110	43 16	42 23	177.1	176.1	176.6

Groupe	Nombre d'étoiles	α	δ	H_1	H_2	H_m
III	70	7 15 3	42 57	186.2	184.3	185.25
IV	118	44 19	42 32	181.5	191.2	186.35
V	86	8 15 36	42 41	191.3	198.5	194.9
VI	114	45 1	42 26	200.4	208.9	204.65
VII	80	9 15 46	42 55	212.3	211.4	211.85
VIII	93	45 18	43 20	208.5	215.9	212.2
IX	116	10 14 56	42 46	230.5	234.4	232.45
X	145	45 42	43 5	236.9	238.2	237.55
XI	127	11 15 23	42 53	251.0	260.5	255.75
XII	106	42 33	42 48	249.8	252.4	251.1

En général, les deux méthodes donnent à peu près les mêmes valeurs de l'angle H; cependant dans plusieurs cas les valeurs de H_1 sont un peu inférieures à celles de H_2. L'angle en question croît assez régulièrement avec l'ascension droite.

Pour déterminer la position de l'apex à l'aide des matériaux qui précèdent, j'ai procédé comme il suit. J'ai formé d'abord la moyenne H_μ des six premières valeurs de H_m. Cette moyenne a été considérée comme valable pour le point de la sphère dont l'ascension droite et la déclinaison sont les moyennes respectives pour les six premiers groupes. Le même calcul a ensuite été effectué pour les six derniers groupes. La direction vers l'antiapex a ainsi été déterminée pour deux points situés à peu près au centre de chaque moitié de la section de la zone. La position de l'apex a enfin été calculée comme étant l'un des points d'intersection des deux grands cercles correspondant aux valeurs H_μ. Mais la position de l'apex ainsi obtenue ne peut être considérée que comme une première approximation, H n'étant pas une fonction linéaire de l'ascension droite: la moyenne d'un certain nombre de valeurs de H n'est donc pas exactement valable pour la moyenne des ascensions droites correspondantes.

Afin de trouver ensuite des valeurs améliorées pour les coordonnées de l'apex, j'ai calculé pour chaque groupe les quantités σ, c'est-à-dire l'arc de grand cercle reliant le centre du groupe et la position approximative trouvée pour l'antiapex, ainsi que H_0, c'est-à-dire l'angle de position dudit arc au centre du groupe; j'ai enfin déterminé la quantité Δ de l'équation

$$\sin \Delta = \sin (H_m - H_0) \sin \sigma .$$

La quantité Δ désigne la distance à laquelle le grand cercle qui est déterminé par H_m, passe près de la position approximative de l'antiapex.

La condition pour qu'une position calculée de l'antiapex soit la plus probable, est

$$\Sigma \Delta^2 = \text{minimum}.$$

J'ai donc tâché d'ajouter aux moyennes H_μ des corrections telles que cette condition fût satisfaite; puis j'ai entrepris, en partant des valeurs ainsi corrigées, un nouveau calcul de la position de l'apex. Mais la condition n'a été complètement satisfaite qu'après une troisième approximation.

Comme résultats de mes calculs, j'ai trouvé les valeurs définitives suivantes pour l'ascension droite et la déclinaison de l'apex:

$$A = 285°;\ D = +12°.$$

Pour les quantités A, j'ai obtenu les valeurs ci-dessous, se rapportant aux douze groupes:

$$+13°.7,\ +1°.6,\ +0°.8,\ -5°.3,\ -5°.9,\ -4°.6,\ -5°.2,\ -11°.3,\ +1°.1,$$
$$+0°.2,\ +12°.5,\ +3°.0.$$

Ces valeurs sont en général assez petites. Elles présentent cependant une marche systématique, ce qui pourrait dénoter des courants spéciaux dans cette partie de la sphère céleste.

Les valeurs que nous venons d'obtenir pour les coordonnées de l'apex concordent de très près avec celles qui résultaient de la discussion de la région située entre 9^h et 12^h, traitée dans le premier volume du présent travail. Les moyennes de celles-ci étaient en effet:

$$A = 293°;\ D = +13°.$$

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, un calcul de l'apex basé sur les mouvements propres dans un domaine aussi restreint donne nécessairement des résultats peu certains Cela étant, il est remarquable que ces résultats ne s'écartent pas plus notablement de ceux qui ont été obtenus à l'aide de matériaux se rapportant à la majeure partie de la sphère céleste.

2. **Détermination du vertex.** J'ai aussi tenté un calcul du vertex en me basant sur les angles de position des mouvements propres.

A l'aide de la méthode indiquée par SCHWARZSCHILD dans son travail cité plus haut, et employée déjà dans notre volume précédent, nous avons d'abord déterminé les directions vers le vertex. Ces directions ne ressortant pas avec exactitude pour chaque groupe en particulier, on a réuni ces groupes deux par deux. L'angle de position H_v fixant la direction vers le vertex a donc été calculé pour six groupes. Les centres de ceux-ci ont été déterminés de la même manière que dans le calcul de l'apex. Les résultats sont donnés ci-dessous.

Groupes	Nombre d'étoiles	α			δ		H_v
I + II	240	6	24	50	42°	43′	182°.9
III + IV	188	7	33	25	42	41	233.9
V + VI	200	8	32	22	42	32	261.6
VII + VIII	173	9	31	39	43	8	273.6
IX + X	261	10	32	2	42	56	272.3
XI + XII	233	11	27	44	42	51	285.7

Par la méthode qui nous a déjà servi dans le calcul de la position de l'apex, nous avons ensuite déterminé les coordonnées du vertex à l'aide des valeurs de H_v. Les résultats sont

$$A = 93°;\ D = +29°.$$

Pour les six domaines l'angle A prend les valeurs

$$-2°.1,\ -1°.1,\ +2°.9,\ +4°.1,\ -4°.1,\ -0°.1,$$

qui montrent que les diverses valeurs de H_v concordent assez bien avec la valeur trouvée pour le vertex.

Dans le premier volume du présent travail, nous avons trouvé pour coordonnées du vertex:

$$A = 131°;\ D = +43°.$$

Les nouvelles valeurs concordent donc mieux que celles-ci avec celles qu'on adopte généralement. Mais dans les deux cas, la déclinaison présente un écart considérable. Ce fait confirme peut-être ce qui a été constaté dans d'autres recherches, je veux dire que les étoiles plus faibles donnent une valeur en déclinaison plus grande que celles qui sont plus lumineuses.

J'ai enfin déduit pour les différentes groupes le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ entre le demi-petit axe et le demi-grand axe de l'ellipse de vitesse. J'ai trouvé les valeurs

$$0.76,\ 0.81,\ 0.71,\ 0.80,\ 0.66,\ 0.65,$$

qui semblent montrer que le rapport en question est assez constant dans la section considérée de la zone.

Table des matières.

P.

Préface . . . . . 3.

Première partie.

I. Introduction. Les mesures et leur réduction. Résultats des mesures . . . . . 5.
II. Calcul des mouvements propres annuels. Réduction au mouvement propre absolu 57.
III. Catalogue général des mouvements propres . . . . . 67.

Deuxième partie.

I. Fréquence des mouvements propres.
1. Introduction . . . . . 141.
2. Groupement des matériaux d'après l'ascension droite et la grandeur des mouvements propres. Nombre des étoiles à mouvement propre observées . . . 142.
3. Situation réciproque des clichés de la zone de Helsingfors . . . . . 143.
4. Méthode pour la recherche des étoiles à mouvement propre dans le *blink*-microscope . . . . . 144.
5. Formules pour le calcul du coefficient de découverte . . . . . 144.
6. Calcul des coefficients de découverte en partant des matériaux disponibles 146.
7. Ajustement des coefficients de découverte . . . . . 150.
8. Réduction des grandeurs des étoiles à l'échelle photographique de Harvard 151.
9. Nombre probable des étoiles à mouvement propre, réparti par groupes selon l'ascension droite . . . . . 153.
10. Nombre probable des étoiles à mouvement propre, réparti par grandeurs des étoiles . . . . . 156.
11. Spectres des étoiles à mouvement propre . . . . . 156.
II. Détermination de l'apex et du vertex.
1. Détermination de l'apex . . . . . 157.
2. Détermination du vertex . . . . . 160.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 8.

ÜBER
STABVERBINDUNGEN
MIT
VERÄNDERLICHEM KRAFTANGRIFF

VON
HARALD LUNELUND

(Am 17. November 1924 von Hj. Tallqvist und Osc. V. Johansson mitgeteilt)

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Über Stabverbindungen mit veränderlichem Kraftangriff.

Gewöhnlich werden in der Statik Stabverbindungen mit *konstanter* Kraftrichtung untersucht. Abweichend davon wollen wir im folgenden einige Fälle mit *veränderlichem* Kraftangriff behandeln. Wir beginnen mit der ebenen Dreiecksverbindung, um sodann die Betrachtungen auf räumliche Stabverbindungen auszudehnen.

Ebene Stabverbindung. AC und BC seien (Fig. 1) zwei in den Punkten A und B an einer Mauer und in C unter sich gelenkartig verbundene starre Stäbe, welche in C die Last P tragen. Die Widerstandskräfte der Mauer werden mit K_1 bzw. K_2 bezeichnet. Wir wollen dieselben zuerst unter der speziellen Voraussetzung berechnen, dass P die Richtung der Lotlinie hat.

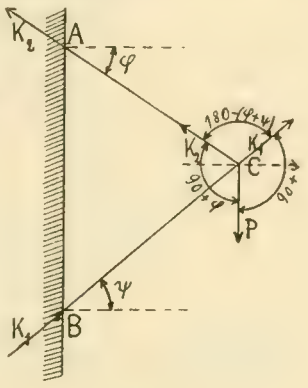


Fig. 1.

Die Richtungen von K_1 und K_2 mögen mit der Horizontalen die Winkel ψ bzw. φ bilden. Dabei rechnen wir ψ nach oben pos., φ nach unten pos. Weil K_1 und K_2 mit P im Gleichgewicht sind, schneiden sich die Wirkungslinien der drei Kräfte in einem Punkte C. Dann ergibt sich

$$P : K_1 = \sin[180° - (\varphi + \psi)] : \sin(90° + \varphi) = \sin(\varphi + \psi) : \cos\varphi$$
$$P : K_2 = \sin[180° - (\varphi + \psi)] : \sin(90° + \psi) = \sin(\varphi + \psi) : \cos\psi$$

und daraus

$$K_1 = \frac{P\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}, \quad K_2 = \frac{P\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)}.$$

Wie verändern sich K_1 und K_2 mit φ und ψ?

Es sei zuerst φ als konstant, ψ als variabel angenommen. Dann variiert K_1 zwischen ∞ und $P\cos\varphi$ für

$$\begin{cases} \psi = -\varphi \text{ und } \psi = 90° - \varphi, \\ \text{bzw. } \psi = 180° - \varphi \end{cases}$$

K_2 zwischen ∞ und 0 für

$$\begin{cases} \psi = -\varphi \text{ und } \psi = 90°, \\ \text{bzw. } \psi = 180° - \varphi. \end{cases}$$

Der Fall $\psi = -\varphi$ bzw. $\psi = 180° - \varphi$ bedeutet geometrisch, das AC und BC parallel, der Fall $\psi = 90° - \varphi$ dass AC zu BC senkrecht ist.

Sehr einfach gestaltet sich die Sache, wenn φ oder $\psi = 0$ ist. Im ersten Falle ist $K_1 = \frac{P}{\sin\psi}$, $K_2 = P \cdot \operatorname{ctg}\psi$, im zweiten $K_1 = P \cdot \operatorname{ctg}\varphi$, $K_2 = \frac{P}{\sin\varphi}$.

Wenn $\varphi + \psi = \alpha = \text{konst.}$ ist, wächst K_1 proportional zu $\cos\varphi$, K_2 proportional zu

$\cos\psi$. $\varphi+\psi=$ konst. bedeutet geometrisch, dass C sich auf einem Kreissegmente befindet, dessen Sehne $=AB$ und dessen eingeschlossener Winkel $=\alpha$ ist.

Um die Veränderlichkeit von K_1 und K_2 mit ψ oder φ zu untersuchen, bilden wir $\frac{dK_1}{d\psi}$ und $\frac{dK_2}{d\psi}$ $\left(\text{bzw. } \frac{dK_1}{d\varphi} \text{ und } \frac{dK_2}{d\varphi}\right)$. Es ist

$$\frac{dK_1}{d\psi}=-\frac{P\cdot\cos\varphi\cdot\cos(\varphi+\psi)}{\sin^2(\varphi+\psi)}=-\frac{P\cos\varphi}{\sin(\varphi+\psi)}\cdot\operatorname{ctg}(\varphi+\psi),$$

$$\frac{dK_2}{d\psi}=-\frac{P[\sin(\varphi+\psi)\sin\psi+\cos\psi\cos(\varphi+\psi)]}{\sin^2(\varphi+\psi)}=-\frac{P\cos\varphi}{\sin^2(\varphi+\psi)}.$$

Weil die Differentialquotienten keine besonders übersichtliche Form annehmen, stellen wir für gewisse Werte von φ und ψ die entsprechenden Werte von K_1 und K_2 in Tabelle 1 zusammen.

Tabelle 1.

Abhängigkeit der Kraft K_1 von φ und α bei $P=1000$ kg Belastung.

φ	$\alpha=15°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=75°$	$\alpha=90°$
0°	3864	2000	1414	1155	1035	1000
± 15°	3732	1932	1366	1115	1000	966
± 30°	3346	1732	1225	1000	897	866
± 45°	2732	1414	1000	817	732	707
± 60°	1932	1000	707	577	518	500
± 75°	1000	518	366	299	268	259
± 90°	0	0	0	0	0	0

Wir nehmen für $\varphi+\psi=\alpha$ die Werte 15°, 30°, 45°, 60°, 75° und 90°. Wenn $\alpha=105°$, ist ja $\sin 105°=\sin 75°$ usw., und man kommt auf die vorigen Werte zurück. Wenn $\varphi=\psi$, ist $K_1=K_2$. Sonst erhält man den Wert von K_2 aus den in Tabelle 1 angeführten Werten von K_1, indem man φ durch $\psi=\alpha-\varphi$ ersetzt. Es sei einfachheitshalber $P=1000$ kg. Wir lassen φ der Reihe nach die Werte 0°, ± 15°, ± 30°, ± 45°, ± 60°, ± 75° (und ± 90°) durchlaufen.

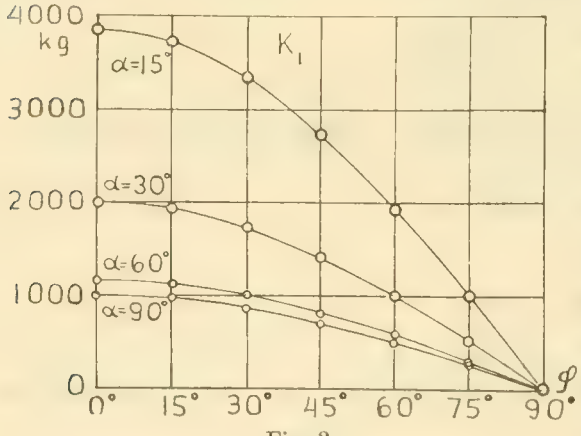


Fig. 2.

Wir stellen in Fig. 2 die Abhängigkeit der Widerstandskraft K_1 von φ und α graphisch dar.

Bei $\alpha=15°$ sind die Kurven für K_1 und K_2 im Verhältnis zu einander nur wenig verschoben. K_1 und K_2 nehmen mit wachsendem φ gegen 0 schnell ab.

Viel kleiner ist die Veränderlichkeit der Kräfte mit φ bei $\alpha=45°$, wo K_2 in Bezug auf 45° symmetrisch verläuft und innerhalb der in der Figur angegebenen Grenzen den Wert 1000 nicht untersteigt.

Bei $\alpha = 90°$ nimmt K_1 mit wachsendem φ gegen 0 kontinuierlich ab, während K_2 in der entsprechenden Weise von 0 bis 1000 wächst.

Spannungen bei veränderlicher Kraftrichtung. Bisher haben wir angenommen, dass P senkrecht nach unten wirkt, nun möge die Richtung von P wechseln. Derartige Überlegungen haben praktische Bedeutung z. B. beim Heben von Lasten mittels eines Krans. Es verbleibe jedoch die Kraft P in der Zeichenebene.

Fig. 3 stellt schematisch einen Kran dar, welcher unten in einem Spurzapfenlager, oben in einem Halslager befestigt sein möge.

Wir benutzen die frühere Abkürzung $\varphi + \psi = \alpha$. P bilde mit der Normale zu BC den Winkel ϑ (Fig. 4), der bei Drehung von CN entgegengesetzt dem Uhrzeiger pos. gerechnet wird.

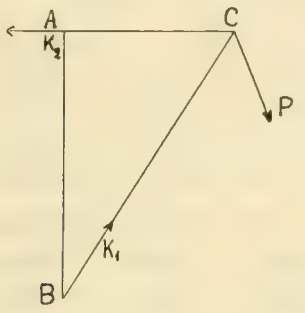


Fig. 3.

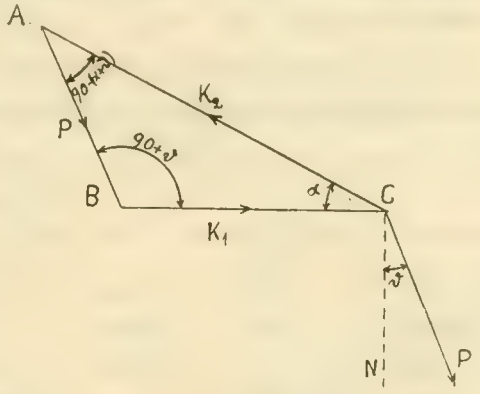


Fig. 4.

Dann ist, wenn wir mit K_1 die in der Richtung BC wirkende Kraft, mit K_2 die in der Richtung CA wirkende Kraft bezeichnen,

$$P\cos(\alpha+\vartheta) = K_1 \sin\alpha$$
$$P\cos\vartheta \quad\quad = K_2 \sin\alpha,$$

woraus

$$K_1 = \frac{\cos(\alpha+\vartheta)}{\sin\alpha} P; \quad K_2 = \frac{\cos\vartheta}{\sin\alpha} P.$$

K_1 variiert zwischen $-\frac{P}{\sin\alpha}$ und $\frac{P}{\sin\alpha}$ für $\vartheta = 180° - \alpha$ bzw. $\vartheta = -\alpha$

K_2 » » $-\frac{P}{\sin\alpha}$ » $\frac{P}{\sin\alpha}$ » $\vartheta = 180°$ » $\vartheta = o$.

K_1 ist $= 0$ für $\vartheta = 90° - \alpha$ » $\vartheta = -\alpha - 90°$

K_2 » $= 0$ » $\vartheta = 90°$.

Die Extremwerte von K_1 und K_2 ergeben sich aus

$$\frac{dK_1}{d\vartheta} = -\frac{P}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\vartheta) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dK_2}{d\vartheta} = -\frac{P}{\sin\alpha}\sin\vartheta = 0,$$

sind aber auch unmittelbar zu bestimmen. Wie die obenstehenden Formeln zeigen, ist die Abnahme von K_2 zu $\sin\vartheta$ proportional, während $\frac{dK_1}{d\vartheta}$ durch eine Sin.-Kurve mit der Amplitude $\frac{P}{\sin\alpha}$ und einer Phasenverschiebung $= \alpha$ dargestellt wird.

Die Werte von K_1 und K_2 werden in Tabelle 2 für die Werte $\vartheta = 0°$, $\pm 30°$, $\pm 60°$, $\pm 90°$, $\pm 120°$, $\pm 150°$ und $\pm 180°$ zusammengestellt. Um Zahlenausdrücke zu bekommen sind die

Rechnungen für bestimmte Werte von α, nämlich $\alpha = 30°$, $60°$, $90°$, $120°$ und $150°$ ausgeführt. P ist dabei gleich 1000 kg genommen.

Die Extremwerte $-\frac{P}{\sin\alpha}$ und $\frac{P}{\sin\alpha}$ haben bei verschiedenem α folgende absolute Beträge:

$\alpha =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{P}{\sin\alpha} =$	5760	2924	2000	1556	1305	1155	1064	1015	1000 kg.

Tabelle 2.

Abhängigkeit der Kräfte K_1 und K_2 von ϑ und α. K_2 ergibt sich aus der Tabelle durch Verschieben der Werte von K_1 um einen Schritt nach unten, wenn $\alpha = 30°$ ist (zweite Kol.), um zwei Schritte wenn $\alpha = 60°$ ist usw.

ϑ	$\alpha = 30°$		$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 120°$	$\alpha = 150°$
	K_1	K_2	K_1	K_1	K_1	K_1
−180°	−1732	−2000	− 573	0	+ 578	+1732
−150°	−1000	−1732	0	+ 500	+1000	+2000
−120°	0	−1000	+ 578	+ 866	+1155	+1732
− 90°	+1000	0	+1000	+1000	+1000	+1000
− 60°	+1732	+1000	+1155	+ 866	+ 578	0
− 30°	+2000	+1732	+1000	+ 500	0	−1000
0°	+1732	+2000	+ 578	0	− 578	−1732
+ 30°	+1000	+1732	0	− 500	−1000	−2000
+ 60°	0	+1000	− 578	− 866	−1155	−1732
+ 90°	−1000	0	−1000	−1000	−1000	−1000
+120°	−1732	−1000	−1155	− 866	− 578	0
+150°	−2000	−1732	−1000	− 500	0	+1000
+180°	−1732	−2000	− 578	0	+ 578	+1732

Fig. 5 stellt die Veränderung von K_1 mit ϑ bei $\alpha = 30°$, $60°$ und $90°$ graphisch dar. Ausserdem ist für den Winkel $\alpha = 30°$ die Variation von K_2 angegeben.

Die Werte von K_1 und K_2 können auch dadurch veranschaulicht werden, dass man das Dreieck mit den Seiten K_1, K_2 und P mit einem Kreis vom Durchmesser $\frac{P}{\sin\alpha}$ umschreibt. K_1 und K_2 können höchstens gleich dem Durchmesser werden.

Räumliche Stabverbindungen. Wenn es gilt Lasten zu heben, und kein ordentlicher Kran zur Verfügung steht, hilft man sich zuweilen mit der in Fig. 7 dargestellten Anordnung. AD ist ein Stab, dessen unteres Ende auf dem Boden ruht und an dem im Punkte D die Stäbe oder Seile BD und CD befestigt sind, welche in B und C verankert werden (in Wirklichkeit

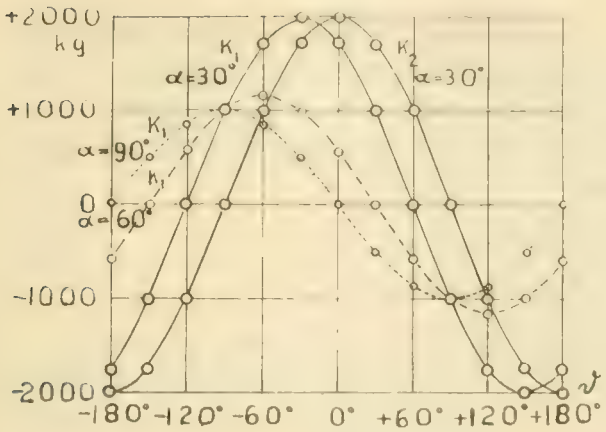


Fig. 5.

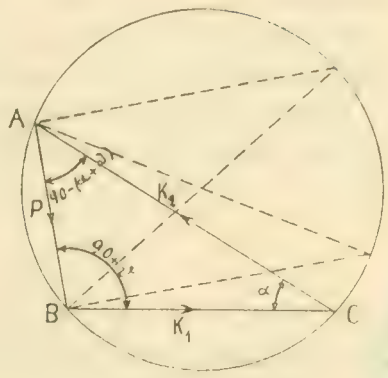


Fig. 6.

gewöhnlich von Leuten gehalten werden, so dass das Ganze eine grosse Beweglichkeit bekommt). Die Last wirkt im Punkte D und zwar nehmen wir an, dass die Kraftrichtung derselben in der Papierebene veränderlich ist. Die in den Stäben AD, BD und CD wirkenden Spannungen werden gesucht unter der Voraussetzung, dass P mit der Lotlinie den Winkel φ bildet. $\varphi = \angle NDP$ wird bei Drehung aus der Lage DP entgegen dem Uhrzeiger positiv gerechnet.

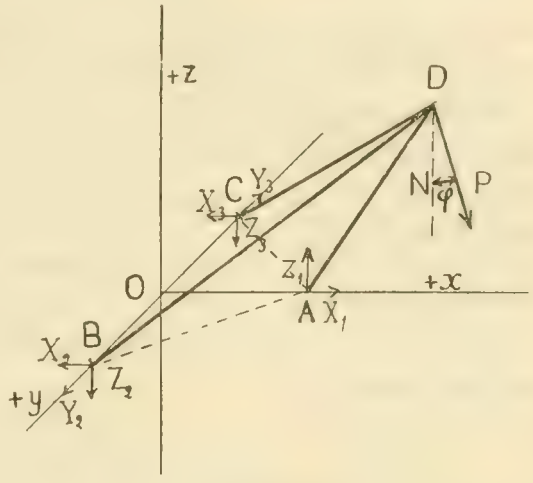


Fig. 7 a.

Wir wählen den Mittpunkt O der Linie BC zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen positive z-Achse nach oben gerichtet ist. Die Richtungen der beiden anderen Achsen sind aus Fig. 7 a ersichtlich.

A, B und C liegen in der xy-Ebene (Fig. 7 a, b, c). Die Koordinaten der genannten Punkte sind bzw. $(b, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ u. $(0, -a, 0)$, die von D $(c, 0, d.)$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung verlangt, dass die Translationsresultante und das resultierende Kräftepaar beide gleich 0 sind und somit auch ihre Komponenten. Es ist bekanntlich

$$\Sigma X = 0;\ \Sigma Y = 0;\ \Sigma Z = 0;$$
$$M_x = \Sigma(Zy - Yz) = 0;\ M_y = \Sigma(Xz - Zx) = 0;\ M_z = \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Zur Bestimmung der obengenannten neun Kräfte sind also sechs Bedingungsgleichungen vorhanden. Die Ermittlung sämtlicher neun Komponenten ist daher nur auf Grund besonderer Annahmen möglich.

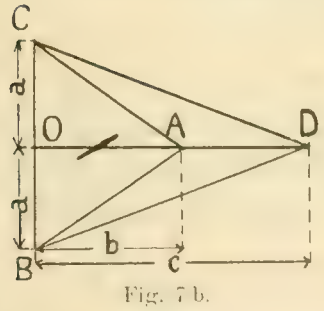


Fig. 7 b.

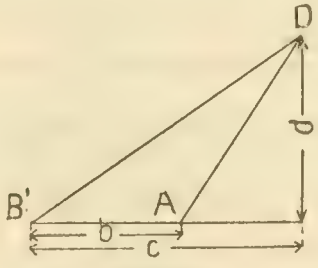


Fig. 7 c.

Wir nehmen erstens an, dass die in A und D wirkenden Kräfte keine Komponenten parallel der Y-Achse besitzen. Der in A wirkende Auflager-

widerstand sei durch seine Komponenten X_1, Y_1, Z_1 in der Richtung der Koordinatenachsen ersetzt, ebenso die in B und C wirkenden angreifenden Widerstandskräfte durch ihre Achsenkomponenten X_2, Y_2, Z_2 bzw. X_3, Y_3, Z_3.

Nach unserer obenstehenden Annahme ist $Y_1 = 0$. Für die Stabverbindung als ganzes bestehen dann folgende Gleichgewichtsbedingungen:

1) $\Sigma X = 0$: $X_1 - X_2 - X_3 + P \cdot \sin\varphi = 0$,
2) $\Sigma Y = 0$: $Y_2 - Y_3 = 0$, d. h. $Y_2 = Y_3$,
3) $\Sigma Z = 0$: $Z_1 - Z_2 - Z_3 - P \cdot \cos\varphi = 0$,
4) $M_x' = 0$: $-Z_2 \cdot a + Z_3 \cdot a = 0$, d. h. $Z_2 = Z_3$,
5) $M_y = 0$: $-Z_1 \cdot b + P \cdot \cos\varphi \cdot c + P \cdot \sin\varphi \cdot d = 0$,
6) $M_z = 0$: $X_2 \cdot a - X_3 \cdot a = 0$, d. h. $X_2 = X_3$.

Aus 5) ergibt sich

$$Z_1 = \frac{P}{b}(c \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi).$$

Aus 3) ergibt sich

$$Z_2 = Z_3 = \frac{P}{2b}[(c-b) \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi].$$

Wir denken uns nun die einzelnen Stäbe der Reihe nach freigemacht.

Freimachung des Stabes AD. In A sind anzubringen die Kräfte H_1 (horiz.) und V_1 (vertik.), in D einige weitere Kräfte. Die Momente der letzteren verschwinden jedoch, wenn man die durch D zur Y-Achse gezogenen Parallele als Momentenachse wählt. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$-H_1 \cdot d + V_1(c-b) = 0.$$

Daraus erhält man

$$H_1 \quad X_1 \cdot \cdot \frac{V_1(c-b)}{d} = \frac{Z_1(c-b)}{d} = \frac{P(c-b)}{bd}(c \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$$

und mit Hilfe von 1)

$$X_2 = X_3 = \frac{Pc}{2bd}[(c-b) \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi].$$

Freimachung des Stabes BD. Wir denken uns in D statt des Stabes AD die Kräfte H_1 und V_1, statt des Stabes CD die zu den Achsen parallelen, den genannten Kräften entgegengesetzt gerichteten Kräfte H_3, Y_3, V_3 angebracht. Die Last P sei ganz dem Stab BD zugeteilt. Die in B anzubringenden Kräfte geben, wenn die Y-Achse als Momentenachse gewählt wird, die Momente 0. Bei Gleichgewicht ist daher:

$$M_y = 0: \quad P \cdot \cos\varphi \cdot c + P \cdot \sin\varphi \cdot d - V_1 \cdot c + H_1 \cdot d - H_3 \cdot d + V_3 \cdot c = 0.$$

Es ergibt sich somit

$$\cdot H_3 \cdot d + V_3 \cdot c \cdot \cdot 0.$$

Freimachung des Knotenpunktes D. In D greifen ausser der Last P an Stelle von AD die im Sinne von vorhin wirkenden Kräfte H_1, V_1, an Stelle des Stabes CD die Kräfte H_3, Y_3, V_3, endlich an Stelle des Stabes BD die noch unbekannten Kräfte H_2, Y_2' und V_2 an. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

1) $\Sigma X = 0$: $H_1 - H_2 - H_3 + P \cdot \sin\varphi = 0$.

Wegen der Symmetrie ist $H_2 = H_3$, daher

$$H_2 = H_3 = \frac{Pc}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi].$$

2) $\Sigma Z = 0$: $\quad -V_2 - V_3 - P\cdot\cos\varphi + V_1 = 0$, d. h.

$$V_2 = V_3 = \frac{P}{2b}|(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi|$$

3) $\Sigma Y = 0$: $\quad Y_3 - Y_2' = 0$, $Y_3 = Y_2'$.

Desgl. des Stabes CD. In D seien die entgegegesetzten Kräfte H_3, Y_3, V_3 angebracht. Nimmt man die durch C zur X-Achse gezogene Parallele als Momentenachse, so liefern die in C anzubringenden Kräfte je ein Moment $=0$, daher (die Last dem Stab BD zugeteilt)

$$M_x = 0: \quad -Y_3\cdot d + V_3\cdot a = 0,$$

woraus

$$Y_3 = \frac{a}{d}\cdot V_3 = \frac{Pa}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi].$$

Nachdem jetzt die Achsenkomponenten der Spannungen ermittelt worden sind, können wir *die resultierenden Spannungen* in den Stäben berechnen. Vordem sei jedoch bemerkt, dass man auch so vorgehen kann, dass man zuerst nach der Dreiecksmethode (*S.* 3) die Spannunsverteilung im Dreieck OAD berechnet und die Spannung in dem hypothetischen Stabe OD in ihre längs BD und CD gerichteten Komponenten zerlegt.

Weil die Stäbe der Verbindung nur in ihren Endpunkten von Kräften beansprucht werden, erleiden sie nur Druck- oder Zugspannung S. Um dieselbe zu berechnen, setzen wir für jeden Stab die parallel zu den Achsen wirkenden Komponenten H, Y und V eines Endpunktes zu einer Resultante H_r, Y_r, V_r zusammen. Est ist dann

$$S = \sqrt{H_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2}.$$

Für den Stab AD ergibt sich mit den oben angegebenen Werten

$$S_1 = \frac{P\sqrt{(c-b)^2+d^2}}{bd}(c\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi), \quad \text{(Druck, wenn } c\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi > 0 \text{ ist)}.$$

Für die Stäbe BD und CD erhält man die unter einander gleichen Werte

$$S_2 = S_3 = \frac{P\sqrt{a^2+c^2+d^2}}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi], \quad \text{(Zug, wenn } (c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi > 0).$$

Wir untersuchen jetzt die Veränderlichkeit der Spannungskomponenten X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 sowie der resultierenden Spannungen S_1, S_2, S_3 mit dem Winkel φ. Es ist

$$\frac{dX_1}{d\varphi} = \frac{P(c-b)}{bd}(-c\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi) = 0, \quad \text{woraus } \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c},$$

$$\frac{dY_1}{d\varphi} = 0,$$

$$\frac{dZ_1}{d\varphi} = \frac{P}{b}(-c\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi) = 0, \qquad \text{»} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c},$$

$$\frac{dX_2}{d\varphi} = \frac{Pc}{2bd}[(c-b)\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi] = 0, \quad \text{und somit} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{d}{c-b},$$

$$\frac{dY_2}{d\varphi} = \frac{Pa}{2bd}[-(c-b)\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi] = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c-b},$$

$$\frac{dZ_2}{d\varphi} = \frac{P}{2b}[-(c-b)\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi] = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c-b},$$

$$\frac{dS_1}{d\varphi} = \frac{P\sqrt{(c-b)^2+d^2}}{bd}(-c\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi) = 0, \quad \text{woraus} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c},$$

$$\frac{dS_2}{d\varphi} = \frac{P\sqrt{a^2+c^2+d^2}}{2bd}[-(c-b)\cdot\sin\varphi + d\cdot\cos\varphi = 0], \quad \text{»} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c-b}.$$

Die Spannung im Stabe AD und ihre Komponenten (ausser Y_1) nehmen also je ein Maximum an, wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c}$, während die resultierenden Spannungen in den Stäben BC und CD sowie ihre Komponenten für $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{c-b}$ einen Extremwert liefern. Durch Einsetzen der Werte von φ ergeben sich als grösstmögliche Spannungen

$$S_1 = -\frac{P\sqrt{(c-b)^2+d^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}{bd},$$

$$S_2 = S_3 = -\frac{P\sqrt{a^2+c^2+d^2}\cdot\sqrt{(c-b)^2+d^2}}{2bd}.$$

Dagegen ist

$$S_1 = 0, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{c}{d},$$

$$S_2 = S_3 = 0, \quad \text{»} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b-c}{d}.$$

$S_1 > 0$ bedeutet Druckspannung, S_2 bzw. $S_3 > 0$ Zugspannung. Es ist bei

$0° \leq \varphi \leq 90°$ stets $S_1 > 0$ und S_2 stets > 0, wenn, wie hier, $c > b$,

$90° \leq \varphi \leq 180°$ » $S_1 > 0$, wenn $d\cdot\sin\varphi > c\cdot\cos\varphi$, $S_2 > 0$, stets wenn $d\cdot\sin\varphi > (c-b)\cdot\cos\varphi$,

$180° < \varphi < 270°$ » $S_1 < 0$, $S_2 < 0$,

$270° \leq \varphi \leq 360°$ » $S_1 > 0$, wenn $c\cdot\cos\varphi > d\cdot\sin\varphi$, $S_2 > 0$, wenn $(c-b)\cdot\cos\varphi > d\cdot\sin\varphi$.

Wir stellen die Spannungen und Spannungskomponenten in Tabelle 3 zusammen.

Tabelle 3.

Spannungen und Spannungskomponenten.

Spannung	Stab AD	Stab BD und Stab CD
S	$\frac{P\sqrt{(c-b)^2+d^2}}{bd}(c\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi)$	$\frac{P\sqrt{a^2+c^2+d^2}}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi]$
X	$\frac{P(c-b)}{bd}(c\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi)$	$\frac{Pc}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi]$
Y	0	$\frac{Pa}{2bd}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi]$
Z	$\frac{P}{b}(c\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi)$	$\frac{Pd}{2b}[(c-b)\cdot\cos\varphi + d\cdot\sin\varphi]$

Spezialfall. Wir wollen nun die Spannungen zahlenmässig zusammenstellen (Tabelle 4) für den besonderen Fall, dass $P = 1000\,\text{kg}$ ist und a, b, c, und d folgende Längen haben: $a = 2\,\text{m}$, $b = 3\,\text{m}$, $c = 5\,\text{m}$, $d = 4\,\text{m}$. Die grösste Spannung tritt dann für folgende Winkel φ auf

in AD für $\varphi = 38° 39' 35''$ bzw. $-141° 20' 25''$,
» BD und CD » $\varphi = 63° 26' 6''$ » $-116° 33' 54''$.

Die Spannung ist 0

in AD für $\varphi = 128° 39' 35''$ bzw. $-51° 20' 25''$,
» BD und CD » $\varphi = 153° 26' 6''$ » $-26° 33' 54''$.

Wir geben im folgenden die Spannungen für folgende Winkel φ an: 180°, 153° 26′ 6″, 128° 39′ 35″, 90°, 63° 26′ 6″, 38° 39′ 35″, 0°, −26° 33′ 54″, −51° 20′ 25″, −90°, −116° 33′ 54′ und −141° 20′ 25″ an.

Tabelle 4.

Variation der Stabspannungen und ihrer Achsenkomponenten mit dem Winkel φ, Zugspannungen sind mit positivem Zeichen versehen. Werte in kg.

Winkel	Spannung							
	X_1	Y_1	Z_1	S_1	$X_2 = X_3$	$Y_2 = Y_3$	$Z_2 = Z_3$	$S_2 = S_3$
180°	+ 833	0	+ 1776	+ 1863	− 417	− 167	− 333	− 559
153° 26′ 6″	+ 447	0	+ 894	+ 1000	0	0	0	0
128° 39′ 35″	0	0	0	0	+ 391	+ 157	+ 314	+ 524
90°	− 667	0	− 1333	− 1491	+ 833	+ 333	+ 667	+ 1118
63° 26′ 6″	− 969	0	− 1938	− 2167	+ 932	+ 373	+ 746	+ 1250
38° 39′ 35″	− 1067	0	− 2134	− 2383	+ 846	+ 338	+ 677	+ 1135
0°	− 833	0	− 1666	− 1863	+ 417	+ 167	+ 333	+ 559
− 26° 33′ 54″	− 447	0	− 894	− 1000	0	0	0	0
− 51° 20′ 25″	0	0	0	0	− 391	− 157	− 314	− 524
90°	+ 667	0	+ 1333	+ 1491	− 833	− 333	− 667	− 1118
− 116° 33′ 54″	+ 969	0	+ 1938	+ 2167	− 932	− 373	− 746	− 1250
− 141° 20′ 25″	+ 1067	0	+ 2134	+ 2386	− 846	− 338	− 677	− 1135

Die resultierenden Spannungen und ihre Komponenten sind in Fig. 8 veranschaulicht. Die Maximalwerte betragen für S_1 2386 kg, für S_2 und S_3 1250 kg. Z_1 erreicht den Höchstwert 2134 kg, X_1 dagegen nur 1067 kg. Noch kleiner sind die Komponenten X_2, Y_2, Z_2 bzw. X_3, Y_3, Z_3, mit den Maximalwerten 932, 373, und 746 kg. bzw.

Eine andere räumliche Stabverbindung. Wir betrachten jetzt eine aus drei Stäben bestehende räumliche Stabverbindung $A_1 A_2 D$, welche in den Knotenpunkten A_1 und A_2 gestützt

und in C verankert ist. Wir wollen nebenbei auch den Fall behandeln, dass C mit A_1 und A_2 durch Stäbe verbunden ist. In D wirke eine Kraft P, deren Richtung mit der nach unten gerichteten Lotlinie den Winkel φ bilde. φ wird bei Drehung gegen den Uhrzeiger positiv gerechnet.

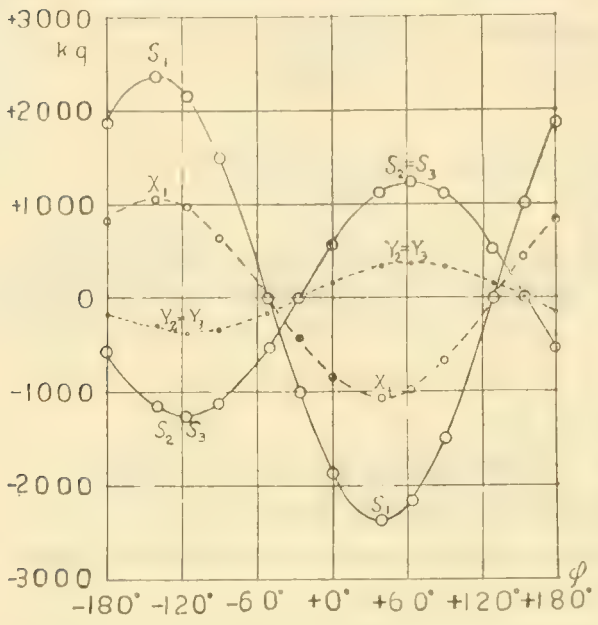


Fig. 8.

Wir wählen $A_2\,A_1$ zur Y-Achse, die durch die Mitte O von $A_1\,A_2$ gehende, zu $A_1\,A_2$ senkrecht gezogene Horizontale zur X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Koordinaten der Punkte A_1, A_2, C und D seien bzw. $(0,\ a,\ 0)$, $(0,\ -a,\ 0)$, $(0,\ 0,\ c)$ und $(b,\ 0,\ d,)$.

Die in A_1 bzw. in A_2 wirkenden Auflagerwiderstände sowie die Widerstandskraft der Mauer in C seien durch ihre Komponenten X_1, Y_1, Z_1, bzw. X_2, Y_2, Z_2 und X_3, Y_3, Z_3 ersetzt. Wir haben dann neun Kräfte, welche mit P im Gleichgewicht sind. Da nur sechs Gleichgewichtsbedingungen: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$, $\Sigma Z=0$, $M_x=0$, $M_y=0$, $M_z=0$ zur Verfügung stehen, wollen wir die besondere Annahme machen, dass die Befestigung in C so beschaffen ist, dass sie nur eine zur X-Achse parallele Kraft auszuüben vermag. Es ist dann $Y_3=Z_3=0$.

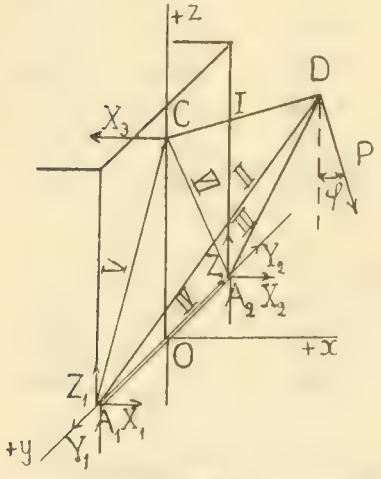


Fig. 9 a.

Für die Stabverbindung als ganzes bestehen dann folgende Gleichgewichtsbedingungen:

1) $\Sigma X=0$: $X_1+X_2-X_3+P\cdot\sin\varphi=0$.

2) $\Sigma Y=0$: $Y_1+Y_2=0$. Weil kein Bestreben zur Verschie-

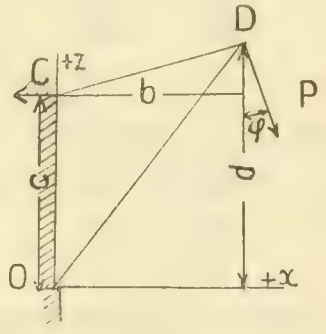


Fig. 9 b.

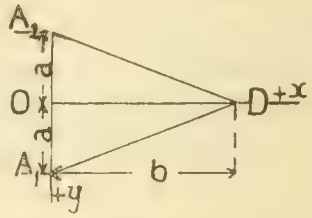


Fig. 9 c.

bung des Systems in der Richtung der Y-Achse vorhanden ist, so nehmen wir weiter an, dass $Y_1=Y_2=0$.

3) $\Sigma Z=0$: $Z_1+Z_2-P\cdot\cos\varphi=0$.

4) $\Sigma M_x=0$: $Z_1\cdot a-Z_2\cdot a=0$, woraus $Z_1=Z_2$. Aus 3) folgt $Z_1=0,5\,P\cdot\cos\varphi$.

5) $\Sigma M_y=0$: $P\cdot\cos\varphi\cdot b-X_3\cdot c+P\cdot\sin\varphi\cdot d$, woraus $X_3=\frac{P}{c}\cdot(b\cdot\cos\varphi+d\cdot\sin\varphi)$.

6) $\Sigma M_z = 0$: $-X_1 \cdot a + X_2 \cdot a = 0$, woraus $X_1 = X_2$ und mit Hilfe von 1) $X_1 = \frac{P}{2c}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi]$.

Die Spannungen in den Stäben werden bestimmt, indem man sich die Stäbe der Reihe nach freigemacht denkt. Wenn das starre Dreieck $A_1 A_2 C$ existiert, so ist es zuerst freizumachen. Wir ersetzen zu dem Zweck den Stab I durch zwei in C wirkende Kräfte H_1 (horiz.) und V_1 (vertik.), deren Resultante in die Stabrichtung fällt. (Die nach der Y-Achse wirkende Komponente $= 0$). Die Momentengleichung um $A_1 A_2$ als Achse ergibt dann

$$M_y = 0: \quad c \cdot H_1 - X_3 \cdot c = 0,$$

und daraus

$$H_1 = X_3 = \frac{P}{c}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi).$$

Stab I. Um V_1 zu bestimmen, denken wir uns in C die entgegengesetzten Kräfte H_1 und V_1 angebracht und in D eine Anzahl weiterer Kräfte, welche letzteren jedoch verschwinden, wenn man die durch D gezogene Parallele zur Y-Achse als Momentenachse wählt. Bei Gleichgewicht ist dann die Momentengleichung um jene Achse

$$M = 0: \quad H_1 \cdot (d-c) - V_1 \cdot b = 0.$$

$$V_1 = \frac{H_1 (d-c)}{b} = \frac{P(d-c)}{bc}[b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi].$$

Stab II. Statt des Stabes I werden in D die Kräfte H_1 und V_1 angebracht, statt des Stabes III die zu den Achsen parallelen Kräfte H_3', Y_3' und V_3'. Wir wollen die Last P ganz dem Stab II zuteilen. Das Moment der ausserdem in A_1 anzubringenden Kräfte verschwindet, wenn wir die Y-Achse als Momentenachse wählen. Es ist dann bei Gleichgewicht (Fig. 9 b)

$$P \cdot \cos\varphi \cdot b + V_1 \cdot b - V_3' \cdot b + H_3' \cdot d - H_1 \cdot d + P \cdot \sin\varphi \cdot d = 0$$

und somit

$$b \cdot V_3' + d \cdot H_3' = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Knotepunkt D gibt, wenn der Stab II durch die vorläufig unbekannten Kräfte H_2', Y_2', V_2' ersetzt wird

$$\Sigma X = 0: \quad -H_1 + H_3 + H_2' + P \cdot \sin\varphi = 0.$$

Wegen der Symmetrie ist $H_2' = H_3'$, woraus

$$H_2' = H_3' = \frac{1}{2}(H_1 - P \cdot \sin\varphi) = \frac{P}{2c}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi]$$

und somit

$$V_3' = \frac{H_3' \cdot d}{b} = \frac{Pd}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi].$$

$$\Sigma Z = 0: \quad V_2' + V_3' - V_1 - P \cdot \cos\varphi = 0,$$

also

$$V_2' = \frac{Pd}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi] = V'.$$

$$\Sigma Y = 0: \quad Y_3' - Y_2' = 0, \text{ d. h. } Y_2' = Y_3'.$$

Freimachung des Stabes III. Die in D anzubringenden entgegengesetzten Kräfte seien H_3, Y_3', V_3'. Die Kräfte in A_2 verschwinden, wenn wir die durch A_2 gehende Parallele zur X-Achse als Momentenachse nehmen. Dann ist

$$M_x = 0: \quad Y_3' \cdot d - V_3' \cdot a = 0,$$

woraus

$$Y_3' = Y_2' = \frac{V_3' \cdot a}{d} = \frac{Pa}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi].$$

Wir bestimmen jetzt die in den eventuel vorhandenen Stäben A_1A_2, A_1C und A_2C wirkenden Spannungskomponenten.

Stab V. Anstatt des Stabes I sind in C die Kräfte H_1 und V_1 anzubringen, anstatt des Stabes VI die Kräfte Y_6 und V_6 ($H_6 = 0$). Ausserdem sei X_3 ganz diesem Stab zugeteilt. In Bezug auf die durch A_1 zur X-Achse gezogene Parallele als Momentenachse erhält man

$$M = 0: \quad -V_1 \cdot a + Y_6 \cdot c + V_6 \cdot a = 0$$

und somit

$$c \cdot Y_6 + V_6 \cdot a = \frac{Pa(d-c)}{bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi).$$

Stab. VI. Wir denken uns in C die entgegengesetzten Kräfte Y_6 und V_6 angebracht. Es sei die durch A_2 zur X-Achse gezogene Parallele die Momentenachse. Dann geben die in A_2 angreifenden Kräfte je ein Moment $= 0$, daher

$$M_x = 0: \quad V_6 \cdot a - Y_6 \cdot c = 0.$$

Es ist also

$$Y_6 = \frac{Pa(d-c)}{2bc^2}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi),$$

$$V_6 = \frac{P(d-c)}{2bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi).$$

Im Knotenpunkt A_2 denken wir uns den Stab VI durch die mit den vorigen gleichgerichteten Kräfte Y_6 und V_6, den Stab III durch die wie vorhin gerichteten Kräfte H_3', Y_3', V_3' ersetzt. An Stelle von Stab IV ist die Kraft Y_4 anzubringen, dazu kommen die Auflagerdrücke X_2 und Z_2. Die Gleichgewichtsbedingung

$\Sigma Y = 0$ gibt daher: $Y_4 + Y_6 - Y_3' = 0$, woraus

$$Y_4 = \frac{Pa}{2bc^2}[(2bc - bd) \cdot \cos\varphi - (c-d)^2 \cdot \sin\varphi].$$

Zur Probe der oben erhaltenen Resultate stellen wir die Gleichgewichtsbedingungen im Knotenpunkt A_1 auf. Es ist

$$\Sigma X = 0: \quad X - H_2' = 0, \quad \frac{P}{2c}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi] - \frac{P}{2c}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi] \equiv 0,$$

$$\Sigma Y = 0: \quad Y_2' - Y_6 - Y_4 = 0, \quad \frac{Pa}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi] - \frac{P(d-c)}{2bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi) -$$
$$- \frac{Pa}{2bc^2}[(2bc - bd) \cdot \cos\varphi - (c-d)^2 \cdot \sin\varphi] \equiv 0,$$

$$\Sigma Z = 0: \quad V_6 + Z_1 - Y_2' = 0, \quad \frac{P(d-c)}{2bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi) + 0,5 \cdot P \cdot \cos\varphi -$$
$$- \frac{Pd}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c) \cdot \sin\varphi] \equiv 0.$$

Resultierende Spannungen. Um die resultierenden Spannungen zu berechnen, setzen wir wie oben (S. 9) die parallel zu den Achsen wirkenden Komponenten H, Y und V eines Stabendpunktes zu einer Resultante H_r, Y_r, V_r zusammen. Es ist dann $S = \sqrt{H_r^2 + Y_r^2 + V_r^2}$. Wir stellen die auf diese Weise berechneten Werte in Tabelle 5 zusammen.

Tabelle 5.

Spannungskomponenten und resultierende Spannungen.

Stab Nr.	H_r	Y_r	V_r	S
I	$H_1 = \frac{P}{c}(b \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$	0	$V_1 = \frac{P(d-c)}{bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$	$\frac{P}{bc}\sqrt{b^2 + (d-c)^2}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$
II u. III	$H'_2 = H'_3 = \frac{P}{2c}[b \cdot \cos\varphi + (d-c)\sin\varphi]$	$Y'_2 = Y'_3 = \frac{Pa}{2bc}[b \cdot \cos\varphi + (d-c)\sin\varphi]$	$V'_2 = V'_3 = \frac{Pd}{2bc}[b \cos\varphi + (d-c)\sin\varphi]$	$\frac{P}{2bc}\sqrt{a^2 - b^2 - d^2}[b \cdot \cos\varphi + (d-c)\sin\varphi]$
IV	0	$Y_4 = \frac{Pa}{2bc^2}[(2bc - bd)\cos\varphi - (c-d)^2 \sin\varphi]$	0	$\frac{Pa}{2bc^2}[(2bc - bd)\cos\varphi - (c-d)^2 \sin\varphi]$
V u. VI	0	$Y_5 = Y_6 = \frac{Pa(d-c)}{2bc^2}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$	$V_5 = V_6 = \frac{P(d-c)}{2bc}(b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi)$	$\frac{P(d-c)}{2bc^2}\sqrt{a^2 - c^2}(b \cdot \cos\varphi - d \cdot \sin\varphi)$

Wir untersuchen zuerst für welche Winkel φ die Spannungskomponenten und die resultierenden Spannungen ihren Höchstwert annehmen bzw. $= 0$ werden.

Als gemeinsamer Faktor für die Stäbe I, V und VI tritt $b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi$ auf. Durch Differentiation nach φ ergibt sich

$$-b \cdot \sin\varphi + d \cdot \cos\varphi = 0$$

und somit die grösste Spannung bei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{b}.$$

Dann ist

$$b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi = \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Die Spannung ist $= 0$, wenn

$$b \cdot \cos\varphi + d \cdot \sin\varphi = 0,$$

woraus

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b}{d}.$$

Die für die Stäbe II und III geltenden Spannungen enthalten dagegen den gemeinsamen Faktor $b \cdot \cos\varphi + (d - c) \cdot \sin\varphi$. Die Differentiation nach φ gibt

$$-b \cdot \sin\varphi + (d - c) \cdot \cos\varphi = 0.$$

Die grösste Spannung tritt demnach bei

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d - c}{b}$$

auf. Dann ist

$$b \cdot \cos\varphi + (d - c) \cdot \sin\varphi = \sqrt{b^2 + (c - d)^2}.$$

Die Spannung ist $= 0$, wenn

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c - d}.$$

Endlich tritt in dem für Stab IV geltenden Ausdruck für die Spannung der Faktor $(2bc - bd) \cdot \cos\varphi - (c - d)^2 \cdot \sin\varphi$ auf, welcher nach φ differentiiert gibt

$$-(2bc - bd) \cdot \sin\varphi - (c - d)^2 \cdot \cos\varphi = 0.$$

φ ergibt sich also aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(c - d)^2}{2bc - bd}.$$

Der grösste Wert des Faktors ist $\sqrt{(2bc - bd)^2 + (c - d)^4}$.

Die Spannung im Stabe IV ist $= 0$, wenn

$$(2bc - bd) \cdot \cos\varphi - (c - d)^2 \cdot \sin\varphi = 0,$$

d. h. für

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2bc - bd}{(c - d)^2}.$$

Wir stellen in Tabelle 6 die Maximiwerte der Spannungskomponenten und der resultierenden Spannungen zusammen.

Tabelle 6.

Grösste Werte der Spannungskomponenten und der resultierenden Spannungen.

Stab Nr	H_r	V_r	V_r	S
I	$\frac{P}{c}\sqrt{b^2+d^2}$	0	$\frac{P(d-c)}{bc}\sqrt{b^2+d^2}$	$\frac{P}{bc}\sqrt{b^2+(d-c)^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}$
II u. III	$\frac{P}{2c}\sqrt{b^2+(c-d)^2}$	$\frac{Pa}{2bc}\sqrt{b^2+(c-d)^2}$	$\frac{Pd}{2bc}\sqrt{b^2+(cd-)^2}$	$\frac{P}{2bc}\sqrt{a^2+b^2+d^2}\cdot\sqrt{b^2+(c-d)^2}$
IV	0	$\frac{Pa}{2bc^2}\sqrt{(2bc-bd)^2+(c-d)^4}$	0	$\frac{Pa}{2bc^2}\sqrt{(2bc-bd)^2+(c-d)^4}$
V u. VI	0	$\frac{Pa(d-c)}{2bc^2}\sqrt{b^2+d^2}$	$\frac{P(d-c)}{2bc}\sqrt{b^2+d^2}$	$\frac{P(d-c)}{2bc^2}\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}$

Spezialfall. Um eine genauere Vorstellung von der Veränderung der Spannungen mit dem Winkel φ zu erhalten als aus obenstehenden Formeln möglich ist, nehmen wir an, dass $P=$ 1000 kg ist und a, b, c und d folgende Längen haben: $a=1$ m, $b=3$ m, $c=3$ m, $d=4$ m.

Die grösste Spannung in den Stäben I, V und VI tritt dann bei folgenden Winkeln ein:

Stab I, V, VI: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4}{3}$, woraus $\varphi = 53°\ 7'\ 49''$ bzw. $-126°\ 52'\ 11''$,

Stab II, III: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{3}$, » $\varphi = 18°\ 26'\ 6''$ » $-161°\ 33'\ 54''$,

Stab IV: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{6}$, » $\varphi = 170°\ 32'\ 15''$ » $-\ 9°\ 27'\ 45''$.

Die Spannung ist 0 bei folgenden Winkeln

Stab I, V, VI: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}$, woraus $\varphi = -36°\ 52'\ 12''$ bzw. $+143°\ 7'\ 48''$,

Stab II, III: $\operatorname{tg}\varphi = -3$, » $\varphi = -71°\ 33'\ 54''$ » $+108°\ 26'\ 6''$,

Stab IV: $\operatorname{tg}\varphi = +6$, » $\varphi = -99°\ 27'\ 45''$ » $+\ 80°\ 32'\ 15''$.

Wir geben jetzt in Tabelle 7 die Spannungskomponenten und die resultierenden Spannungen für folgende Winkel φ an: 180°, 170° 32′ 15″, 143° 7′ 48″, 108° 26′ 6″, 90°, 80° 32′ 15″, 53° 7′ 49″, 18° 26′ 6″, 0°, −9° 27′ 45″, −36° 52′ 12″, −71° 33′ 54″, −90°, −99° 27′ 45″, −126° 52′ 12″, −161° 33′ 54″ und −180°.

Tabelle 7.

Spannungskomponenten und resultierende Spannungen in kg für $P = 1000$ kg. Resultierende Zugspannungen und ihre Komponenten sind mit positivem Vorzeichen bezeichnet. Die römischen Ziffern geben die Nummer der Stäbe an.

Winkel	Spannungskomponenten							Resultierende Spannungen S			
	I		II u. III			V u. VI		I	II u. III	IV	V u. VI
	H	V	H	Y	V	Y	V	S	S	S	S
180° — —	−1000	−333	+500	+167	+667	−55·6	−167	−1054	+850	−111	−176
170° 32′ 15″	−767	−256	+466	+155	+621	−42·6	−128	−808	+792	−113	−135
143° 7′ 48″	0	0	+300	+100	+400	0	0	0	+510	−100	0
108° 26′ 6″	+949	+316	0	0	0	+52·7	+158	+1000	0	−52·7	+167
90° — —	+1333	+444	−167	−55·6	−222	+74·3	+283	+1405	−283	−18·5	+234
80° 32′ 15″	+1479	+493	−246	−82·2	−329	+82·2	+247	+1559	−419	0	+260
53° 7′ 49″	+1667	+556	−433	−144	−578	+92·6	+278	+1757	−737	+51·9	+293
18° 26′ 6′	+1370	+457	−527	−176	−703	+76·1	+228	+1444	−896	+99·6	+241
0° — —	+1000	+333	−500	−167	−667	+55·6	+167	+1054	−850	+111	+176
− 9° 27′ 45″	+767	+256	−466	−155	−621	+42·6	+128	+808	−792	+113	+135
− 36° 52′ 12″	0	0	−300	−100	−400	0	0	0	−510	+100	0
71° 33′ 54″	−949	−316	0	0	0	−52·7	−158	−1000	0	+52·7	−167
− 90° — —	−1333	−444	+167	+55·6	+222	−74·3	−283	−1405	+283	+18·5	−234
99° 27′ 45″	−1479	−493	+247	+82·2	+329	−82·2	−247	−1559	+419	0	−260
−126° 52′ 12″	−1667	−556	+433	+144	+578	−92·6	−278	−1757	+737	−51·9	−293
−161° 33′ 54″	−1370	−457	+527	+176	+703	−76·1	−228	−1444	+896	−99·6	−241
−180° — —	−1000	−333	+500	+167	+667	−55·6	−167	−1054	+850	−111	−176

Die Variationen der resultierenden Spannungen S werden in Fig. 10 veranschaulicht. Positive Ordinate bedeutet Zug.

Wie die Tabelle 7 und Fig. 10 zeigen, sind die Spannungen am grössten im Stab I, darauf im Stab II und III. Am kleinsten ist die Spannung im Stab IV. Bei den oben angenommenen besonderen Dimensionen der Stabverbindung ist

im Stab I die H-Komponente 94.9 %, die V-Komponente 31.6 % von S_1;

» » II und III die H-Komponente 58.8 %, die Y-Komponente 19.6 %, die V-Komponente 78.5 % von S_2 bzw. S_3,

» » IV die Y-Komponente gleich der resultierenden Spannung S_4,

» » V und VI die Y-Komponente 31.6 %, die V-Komponente 96.6 von S_5 bzw. S_6.

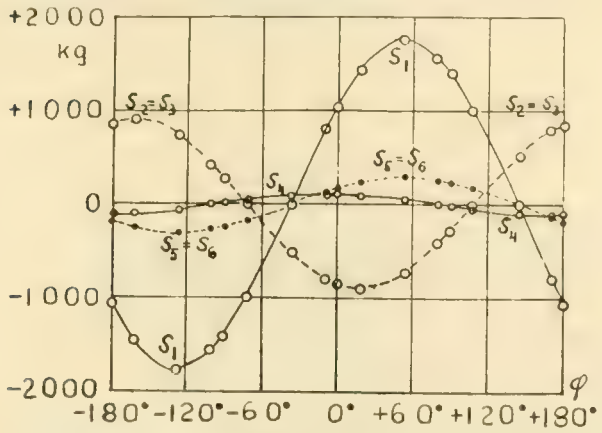


Fig. 10.

Zusammenfassung. Während in der Statik gewöhnlich Stabverbindungen mit unveränderlicher Kraftrichtung behandelt werden, habe ich oben einige Stabverbindungen bei veränderlichem Kraftangriff untersucht: eine ebene Dreiecksverbindung und zwei räumliche Stabverbindungen. Nach Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen und Berechnung der Spannungskomponten und der resultierenden Spannungen im allgemeinen Falle wurden die Berechnungen für einige besondere Fälle durchgeführt. Derartige Untersuchungen haben praktische Bedeutung, z. B. beim Heben von Lasten mittels Kräne.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 9.

UNTERSUCHUNGEN
ZUR
THEORIE DER BELEUCHTUNG DES MONDES AUF GRUND PHOTOMETRISCHER MESSUNGEN

VON
E. SCHOENBERG

UNIV. BIBL. HELSINKI

(Mitgeteilt am 23. Februar 1925 von K. F. Sundman und A. Donner)

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

INHALT.

Seite

I Teil. Die Messungen und ihre Darstellung durch empirische Formeln.

1. Einleitung 5
2. Die Beobachtungen 8
3. Die Winkel i, ε, α 20
4. Diskussion der beobachteten Lichtverteilung 23
5. Die absoluten Helligkeiten des Mondrandes 29
6. Die Helligkeit des Mondrandes in Bezug auf das Zentrum 31
7. Bestimmung der Funktion $\psi(\alpha)$ 31
8. Beobachtungen der Helligkeitsschwankung einzelner Mondgebilde 34
9. Die Deutung der Funktion $\psi(\alpha)$ 38

II Teil. Theorie.

1. Über diffuse Reflexion 41
2. Die Beleuchtung einer mit konischen Erhebungen bedeckten Kugel 43
3. Die Beleuchtung einer mit halbkugelförmigen Erhebungen bedeckten Kugel 47
4. Kalottenförmige Erhebungen 53
5. Der Einfluss der Vertiefungen auf die Beleuchtung einer Kugel. Sphärische Vertiefungen . 56
6. Zylinderförmige Vertiefungen 64
7. Die Beleuchtung einer von runden Öffnungen durchbrochenen Decke 66
8. Übersicht über die Resultate des zweiten Teils. Schlussfolgerung 68
9. Über den Begriff der Albedo uneben begrenzter Körper 69

I Teil. Die Messungen und ihre Darstellung durch empirische Formeln.

1. Einleitung.

Bei meinen in die Jahre 1914—1918 fallenden Untersuchungen über die Lichtverteilung auf den Oberflächen der Planeten habe ich auch den Mond ins Arbeitsprogramm aufgenommen. wesentlich mit der Absicht an ihm in bequemer Weise die Lichtverteilung und das Emanationsgesetz ohne die störende Wirkung einer Atmosphäre zu studieren. Eine vorläufige Berechnung der Beobachtungen zeigte, dass in der Opposition und bis zu 15° Phasenwinkel die Helligkeit der »typischen» Mondoberfläche keine Abhängigkeit vom Einfallswinkel des Lichtes aufweist, also in jedem Momente auf der ganzen Scheibe dieselbe ist, dass aber gleichzeitig die mittlere Helligkeit der Scheibe schon innerhalb des kleinen Phasenintervalls von 15° schnell abnimmt. Diese Tatsache kann am einfachsten durch folgenden Ausdruck für die elementare reflektierte Lichtmenge dargestellt werden

$$ds = G \cos \varepsilon \, ds \, \psi(\alpha) \tag{1}$$

wo G eine Konstante, ε der Emanationswinkel und $\psi(\alpha)$ der Ausdruck für die Lichtabnahme mit dem Phasenwinkel (α) ist. Diese Formel wurde als eine der Hypothesen über die Reflexion des Lichts von Jupiter und Saturn ohne Atmosphäre verwendet und als brauchbar befunden.[1] Als wahrscheinliche Ursache für das Auftreten der Funktion $\psi(\alpha)$ wurden Schattenwirkungen angenommen.

Das nähere Studium meiner Beobachtungen, sowie neuere Arbeiten über die Photometrie des Mondes, insbesondere aber WILSINGS[2] Schrift über die Entwickelungsgeschichte des Mondes, führten mich zu dem Versuche die Eigentümlichkeiten seines photometrischen Verhaltens theoretisch zu erklären, und da dieser Versuch befriedigend ausgefallen ist, und die Wilsingschen Ansichten eine Erweiterung und Bestätigung durch ihn erfahren. so soll er im zweiten theoretischen Teile dieser Arbeit mitgeteilt werden.

[1] Photometrische Untersuchungen über Jupiter und das Saturnsystem Annal. academiae scientiarum Fennicae, Serie A, tom XVI, N:o 5. Helsinki 1921.

[2] Zur Entwicklungsgeschichte des Mondes. Publik. des astrophys. observatoriums zu Potsdam N:o 77. Potsdam 1921.

Entsprechend dem Zwecke dieser Arbeit die allgemeine Lichtverteilung auf der Mondscheibe in Abhängigkeit vom Einfallswinkel des Lichts i, dem Emanationswinkel ε, und dem Phasenwinkel α zu untersuchen, habe ich die Messungen nicht auf besondere, hervortretende Gebilde des Mondes, sondern auf die s. z. s. typische Mondoberfläche bezogen. Je stärker das angewandte Fernrohr ist, desto schwieriger wird die Bestimmung dieser typischen Teile, weil die Menge der sichtbaren Einzelheiten das Urteil stört, während für das blosse Auge die ganze Mondoberfläche mit Ausnahme der maria und einzelner heller Strahlen einen gleichmässigen Helligkeitsverlauf aufweist. Meine Messungen beziehen sich wesentlich auf die Kontinente mit Ausschluss heller Krater und der hellen Strahlen. Die Messungen auf den maria sind nicht zahlreich genug, um eine Diskussion zu gestatten.

Die in den letzten Jahren recht zahlreichen Publikationen über die Photometrie der Mondoberfläche beziehen sich umgekehrt gerade auf einzelne Gebilde (Krater, Strahlen u. a.) derselben. Sie haben den Zweck ihre Lichtkurven und Albedo zu bestimmen und werden vor allem, wenn die Beobachtungen genügend zahlreich und genau für die einzelnen Gebilde vorliegen werden, zu einer genauen Klassifizierung derselben führen. Die Klassifizierung nach der Lichtkurve bedeutet aber eine Einteilung nach der Beschaffenheit der Oberfläche, und diese kann unter Umständen im Verein mit dem Reflexionsvermögen in der Opposition ein wichtiges Merkmal für die Identifizierung der einzelnen Mondgebilde mit irdischen Substanzen abgeben. Zunächst sind die diesbezüglichen Beobachtungen von W. PICKERING,[1] W. F. WISLIZENUS,[2] P. GÖTZ,[3] BARABASCHEV,[4] MARKOW[5] noch nicht genügend zahlreich und genau. Einige von ihnen sollen hier diskutiert werden. Sie bieten eine wertvolle Ergänzung zu meinen Messungen und können teilweise auch nach derselben Theorie erklärt werden. Sie weisen alle trotz grosser Verschiedenheit im Einzelnen den starken Abfall der Lichtkurven mit dem Phasenwinkel auf, wie ihn auch meine Beobachtungen der typischen Mondoberfläche zeigen.

Eine bei der Drucklegung dieser Schrift erschienene Arbeit von. E ÖPIK[6] stellt sich die Aufgabe aus photographischen Helligkeitsmessungen für die Mondkontinente und maria empirische Formeln des Lichtwechsels in Abhängigkeit der drei Variablen i, ε, α zu geben. Diese Formeln können für gewisse praktische Zwecke genügen.[7] Ich habe eine andere Form für die empirische Helligkeitsfunktion $F(i, \varepsilon, \alpha) = f(i)\,\varphi(\varepsilon)\,\psi(\alpha)$ angewandt, doch ist der wirkliche Zusammenhang der Variablen theoretisch für unebene Oberflächen nicht so einfach darstellbar. Bei Planeten mit kleiner Schwankung des Phasenwinkels wie Jupiter und Saturn ist dagegen die Trennung der Helligkeitsfunktion in ein Produkt, sowohl praktisch als theoretisch genügend begründet.

Endlich ist hier noch einer experimentellen Untersuchung des Freiherrn V. U. Z. AUFSESS[8]

[1] Ann. Harw. Coll. observ. 59 (1909).

[2] A. N. Bd 201 p. 290.

[3] Veröffentlichungen der Sternwarte Österberg. Bd 1. Heft 2.

[4] A. N. B. 217, 445.

[5] A. N. N:o 5285.

[6] Publications de l'Observat. astronomique. Tartu. Tome XXVI N:o 1. Photometric measures on the moon and the earthshine.

[7] Der Verfasser bezeichnet übrigens seine Bestimmung der Function $\psi(\alpha)$ als sehr unsicher l. c. pag. 48.

[8] Ergänzungshefte zu den Astr. N. N:o 17.

über das photometrische Verhalten parallel bestrahlter Kugeln Erwähnung zu tun. Die Phasenkurven solcher Kugeln erweisen sich denen der Planeten durchaus unähnlich, indem die Phasenkoeffizienten durchweg bedeutend geringer ausfallen. Unebenheiten von der Grössenordnung der Mondberge haben einen nur sehr geringen Einfluss auf die Phasenkurve und auch Reflexe von Spiegelungen an glatten Teilen herrührend, haben keinen merkbaren Einfluss auf dieselben. Die starken Phasenkoeffizienten des Mondes, der kleinen Planeten und die geringeren aber immerhin noch bedeutenden Phasenkoeffizienten der von Atmosphären umgebenen Planeten, die bekanntlich durch keine Formel für diffuse Reflexion erklärt werden können, müssen ihre Ursache deshalb in einer solchen Oberflächenbeschaffenheit der Planeten haben, wie sie bei den genannten Versuchen von Aufsess ausser Acht gelassen worden sind. Die mittlere Helligkeit der Mondscheibe beträgt nach H. Russel,[1] der die sicherste Phasenkurve des Mondes aus der Gesamtheit der vorliegenden Beobachtungen abgeleitet hat, schon bei 25° Phasenwinkel nur $^2/_3$ derjenigen bei Vollmond, während die bekannten Formeln von Lambert und Seliger eine Abnahme der Flächenhelligkeit von höchstens 5 % ergeben. Russel selbst nimmt als Ursache dafür den Schattenwurf von unzähligen Steinen und Felsstücken an.

Eine solche Beschaffenheit der Mondoberfläche in allen ihren Teilen auch auf den maria in weiter Entfernung von den Kratern erscheint unwahrscheinlich und ist mit den allseitig so wohl begründeten Ansichten Wilsings über die Entwickelungsgeschichte des Mondes schwer vereinbar.

Bedeutend näherliegend ist die Erklärung die J. Wilsing selbst für den starken Lichtabfall der leuchtenden hellen Strahlen des Kraters Kopernikus in der Nähe der Opposition gegeben hat, und diese Erklärung ist für die vorliegende Arbeit von nicht unwesentlichem Einfluss gewesen. Wilsing beobachtete den Lichtwechsel einer mit quadratischen Vertiefungen versehenen Gipsplatte, die bei schrägem Lichteinfall dank dem Schattenwurf der Wände eine bedeutende Lichtabnahme aufwies. Durch eine ähnliche löchrige Beschaffenheit der Lava, aus der die Strahlen des Kopernikus bestehen dürften, wäre dann ihr starker Lichtwechsel zu erklären. Aus meinen Untersuchungen über die Lichtverteilung auf dem Monde und den anderen Planeten hatte ich ebenfalls die Überzeugung gewonnen, dass zwar die gleichmässige Helligkeit in der Opposition und in ihrer Nähe durch Berge und Erhöhungen bedingt sein und bei dieser Annahme auch mit Zugrundelegung des Lambertschen Reflexionsgesetzes erklärt werden kann, dass aber die starke Lichtabnahme mit dem Phasenwinkel nur in einer löchrigen Struktur der Oberfläche eine einfache Erklärung findet. Unter dem Eindruck der Wilsingschen Arbeit habe ich dann die Theorie der Beleuchtung einer solchen Oberfläche, die für die Löcher einer Wolkenhülle vorlag, auch auf die Beobachtungen am Monde angewendet, nachdem ich sie für die Beschaffenheit von erstarrter Lava umarbeitete. Eine neulich von Herrn Barabaschev[2] erschienene Arbeit über denselben Gegenstand ist ein weiterer Beweis für den Eindruck, den die Wilsingschen Ansichten ausgeübt haben. Seine Zahlen sind wegen der fehlerhaften Formeln nicht beweisend.

[1] Astrophys. Journal XVIII, 1916 s. 103 u. 173.

[2] A. N. N:o 5297. Der Verfasser gibt seine ursprüngliche Rillentheorie zu Gunsten der Wilsingschen Poren auf.

2. Die Beobachtungen.

Die Beobachtungen wurden mit meinem Flächenphotometer[1] mit Benutzung der grösseren Öffnung (III) des zweiten Lummer-Brodhunschen Prismas zum grössten Teil an einem kleinen Frauenhoferschen Kometensucher ausgeführt. Derselbe hat eine Fokallänge von 75 cm, ein Objektiv von 80 mm im Durchmesser und ist mit einem Uhrwerk versehen. Die Einstellungen der Spiegelöffnung auf gleiche Helligkeit mit der Umgebung wurden stets in geometrisch bestimmten Punkten der sichtbaren Scheibe ausgeführt, also unabhängig davon, welche Mondgegend oder Formation durch die Öffnung bedeckt wurde. Späterhin wurden Beobachtungen auf den maria und den hellen Strahlen ausgeschieden, und nur diejenigen auf den Kontinenten mit gleichmässigem Verlauf der Helligkeit behandelt. Die Spiegelöffnung deckte eine Kreisfläche mit dem Radius von 36″. Zweierlei Orientierungen wurden angewandt, welche auf der beiliegenden Figur 1 verdeutlicht werden.

Orientierung der Beobachtungen auf der Mondscheibe.

Die eine Orientierung war längs der Begrenzung der sichtbaren Scheibe (römische Ziffern) beginnend mit dem Punkte I auf dem Intensitätsäquator u. weiter am positiven Rande, in den Punkten II und XII, III u. XI, auf dem halben und auf $^3/_4$ des Abstandes zu dem südlichen und nördlichen Endpunkten der Sichel; längs dem negativen Rande — im Punkte VII auf dem Intensitätsäquator, und in den Punkten VI und VIII, V und IX in denselben Abständen von VII. Dabei wurde die kreisrunde Spiegelöffnung immer auf Berührung mit dem Rande eingestellt. Andere Messungen wurden längs dem Intensitätsäquator in der Mitte zwischen den Rändern (Punkt 1), auf halbem Abstande (Punkte 2 u. 3) und in $^3/_4$ Abstand von der Mitte zu den Rändern (Punkt 4 u. 5) ausgeführt. Die Konstanz der elektrischen Viervoltlampe des Photometers wurde am Milliampermeter kontrolliert und ihre Änderungen mit dem Faktor

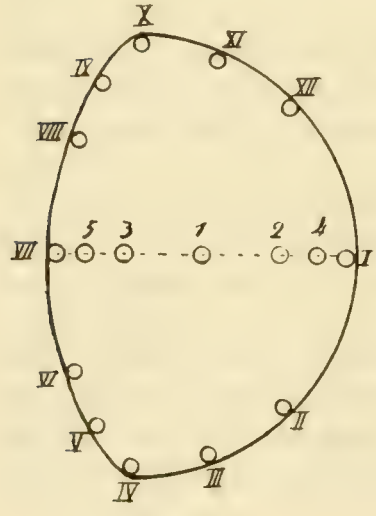


Fig. 1.

$$0.001 \text{ amp.} = 0.027 \text{ m}$$

in Rechnung gezogen.

Eine zweite Beobachtungsreihe im Winter 1918 wurde am alten $9^1/_2$-zölligen Frauenhoferschen Refraktor nach derselben Beobachtungsmethode ausgeführt. Hier wurde ein schwaches Zeisssches Okular angewandt und die grösste Spiegelöffnung (IV) bei den Einstellungen benutzt. Sie deckte einen Kreis mit dem Radius von 25″.1.

Die Beobachtungen wurden symmetrisch zu den Referenzpunkten (I oder 1) ausgeführt und gewöhnlich nach 4 Einstellungen auf den Referenzpunkt und Ablesung des Ampermeters

[1] E. SCHOENBERG "On the illumination of planets." Public. de l'observ. astron. Dorpat Tom. XXIV.

8 Einstellungen auf die anderen Punkte mit einmaliger Ablesung des Ampermeters in der Mitte, dann wieder 4 Einstellungen auf den Referenzpunkt nebst einer dritten Ablesung des Ampermeters gemacht.

Ein Teil der Messungen dieser Reihe, welche im Beobachtungsjournal die Bemerkung hatten, »alles unverändert seit der letzten Beobachtung», wurden als absolute Beobachtungen zur Bestimmung der Veränderlichkeit des Mondrandes mit dem Phasenwinkel verwendet.

In der folgenden Zusammenstellung der Beobachtungen stehen alle Ablesungen des Positionskreises des Photometers nebst ihren Mitteln, sowie die Ablesungen des Ampermeters (A). Wenn diese eine geringe und gleichmässige Veränderung innerhalb der Beobachtungszeit aufweisen, so braucht dieselbe bei der symmetrischen Verteilung der Beobachtungen nicht in Rechnung gezogen zu werden. Die mittleren Beobachtungsmomente für jeden Punkt sind tatsächlich fast durchweg dieselben, wie das aus den unter den Mitteln stehenden Zahlen ersichtlich ist. Bei den Beobachtungen auf dem Intensitätsäquator habe ich statt der Bezeichnung der Punkte 1, 2, 4, 3, 5 oder 1, 3, 5, 2, 4 stets die Bezeichnung M, R_1, R_2, L_1, L_2, also Mitte, Rechts, Links benutzt. Wenn notwendig, wurde die Helligkeit des Himmelsgrundes in nächster Nähe des Mondrandes gemessen. Diese Messungen, die gewöhnlich ebenfalls aus 8 Einstellungen bestanden, sind hier nur mit ihren Mittelwerten in den Bemerkungen angeführt.

Der Einfluss dieses diffusen Lichts auf die relativen Helligkeiten war oft verschwindend; dann war auch seine Messung wegen Schwäche sehr schwierig und wurde unterlassen. Manchmal wurde die Messung durch ein gelbes Filter vor dem Okular ausgeführt, wobei der Himmelsgrund natürlich praktisch verschwand. Diese Fälle sind immer in den Bemerkungen notiert.

Die Beobachtungen der Helligkeiten auf der Mondscheibe.

N:o 1. 1915. Juni 1. $14^h\ 13^m$ m.Z.D.

A=39.9

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
49.5	45.1	24.9	20.6	9.5	11.0	35.8	43.1
51.3	45.4	29.5	13.6	12.5	13.2	38.8	33.8
41.3	44.5	25.8	13.3	6.5	13.1	26.8	31.6
40.6	33.6	32.5	15.8	8.5	19.3	28.5	40.6
41.3	40.1	24.4	16.0	13.4	15.7	22.8	33.4
50.8	40.6	32.8	16.8	13.5	9.0	26.8	33.0
48.6	46.0	34.4	18.6	17.4	11.6	29.1	31.6
36.1	49.8	37.1	13.6	11.5	11.3	19.6	33.1
44.94	43.14	30.18	16.04	11.60	13.03	28.53	34.90

14^h10^m 14 11 14 20 14 15 14 8 14 8 14 25

A=39.9 A=39.9

Farben schlecht abgestimmt. B = 3.

N:o . 1915. Juni 3. $13^h\ 59^m$ m.Z.D.

A=39.75

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
52.8	39.0	21.5	20.5	17.9	9.4	19.3	47.3
46.0	48.5	23.3	14.2	19.8	8.4	21.6	33.0
36.0	49.2	23.5	17.0	12.1	12.4	25.0	39.0
42.0	34.8	26.5	18.2	14.8	5.8	27.6	46.3
64.6	62.8	26.6	20.6	21.0	13.1	26.0	41.5
65.0	50.4	24.2	24.6	12.5	10.2	26.8	46.5
50.8	52.4	28.6	14.6	17.5	7.2	30.1	32.5
52.1	50.1	34.4	20.5	18.8	12.9	23.6	42.6
51.16	48.40	26.08	18.78	16.80	9.93	25.00	41.09

13^h59^m 13 58 13 59 13 59 13 59 13 58 13 59 13 58

A=39.75 A=39.75

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
59.8	53.3	23.0	24.8	21.0	14.4	24.0	46.5
55.7	49.3	31.0	14.8	24.8	15.8	24.9	35.1
47.6	50.6	29.6	19.4	16.8	17.8	25.9	36.1
51.9	45.3	31.9	19.8	20.1	12.0	31.6	44.4
53.75	49.62	28.88	19.70	20.68	15.00	26.60	40.60

Farben gut. B=3.

N:o 3. Juni 4, $13^h\,52^m$ m.Z.D.

A=39.4

37.4	37.8	30.6	18.6	18.5	6.5	20.1	33 5
47 2	39.2	23.6	20.2	14.6	9.2	13.2	36.5
45.3	47.8	25.5	17.6	12.4	7.6	16.8	29.0
37.2	45.4	26.4	17.2	11.2	11.8	14.2	36.3
44.6	52.3	18.2	16.4	13.0	15.2	17.6	33.1
50.5	51.7	23.8	19.7	18.0	9.6	21.8	35.4
53.5	45.3	24.2	22.3	18.5	11.6	19.6	37.5
62.0	47.5	27.5	15.7	14.8	10.6	19.0	29.0
47.1	45.88	24.98	18.46	15.13	10.26	17.79	33.79

13^h54^m 13 58 13 52 13 53 13 51 13 51 13 50 13 50

A=39.4

Gelbes Filter. B=4.

N:o 4. Juni 7, $14^h\,1^m$ m.Z.D.

A=39.25

68.6	57.5	30.2	18.1	20.9	17.7	23.5	45.0
57.2	57.9	34.2	20.1	12.6	20.1	27.0	46.0
57.6	46.6	36.3	22.6	15.2	13.5	28.0	59.0
67.7	49.8	21.7	28.0	17.6	15.4	18.5	57.0
62.78	52.95	30.60	22.20	16.58	16.68	24.25	51.75

14^h1^m 14 1 14 2 14 1 14 1 14 2 14 1 14 1

A=39.25

Helligk. d. Himmelsgrundes 9.24 B=3.

N:o 5. 1915. Juni 8, $14^h\,9^m$ m.Z.D.

A=39.2

42.8	54.5	26.5	19.5	16.1	28.4	28.8	42.1
44.0	43.6	29.5	23.5	18.5	18.5	29.6	48.6
61.0	45.0	20.5	25.5	22.5	17.5	18.0	52.6
65.0	55.0	22.5	18.0	25.5	23.5	23.5	41.0
50.70	49.52	24.88	21.62	20.65	21.98	24.98	46.08
85.0	55.0	27.0	28.4	32.6	28.1	28.4	57.8
77.0	55.0	37.5	33.0	25.6	23.5	32.1	54.8
74.0	64.5	36.5	23.0	23.6	31.5	33.0	47.0
89.0	65.8	27.0	27.0	25.6	29.0	26.5	48.8
80.00	60.08	32.00	27.85	26.85	28.02	30.00	52.10

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
$14^h\,9^m$	14 9	14 9	14 9	14 9	14 9	14 9	14 9

A=39.2 A=39.2

Hell. d. Himmelsgr. Erste Reihe 15.09

Zweite Reihe 24.14. B=3.

N:o 6. 1915. Juni 18, $10^h\,58^m$ m.Z.D.

A=39.15

81.4	77.5	26.4	17.2	10.5
78.5	79.2	32.5	18.8	13.5
70.4	75.6	20.5	22.0	15.5
66.5	63.0	21.0	14.0	18.8
74.20	71.91	25.10	18.00	14.58

10^h52^m 10 55 10 58 11 0 11 4

A=39,15

Hell. d. Himmelsgr. 6.00 B=4.

N:o 7. 1915. Sept. 29, $9^h\,59^m$ m.Z.D.

A=38.25

52.0	49.5	24.4	22.4	16.3	14.5	16.7	43.0
55.3	50.0	27.4	18.3	19.8	14.0	20.5	45.4
52.5	46.6	28.6	20.3	13.4	18.5	27.5	43.5
51.6	47.6	28.7	19.5	17.3	13.0	27.2	39.3
52.85	48.42	27.28	20.12	16.70	15.00	23.26	46.36

$9^h\,49^m$ 9 53 9 55 9 57 9 59 10 1 10 2 10 17

A=38.25

Hell. d. Grundes 3.15. B=4.

N:o 8. 1916 April 7, $8^h\,27^m$ m.Z.D.

A=22.95

56.5	29.5	9.6	23.4	24.8	23.4	8.3	51.3
35.2	55.1	27.0	4.1	3.4	10.0	24.6	34.6
45.0	33.1	11.0	22.6	21.3	26.8	10.6	45.3
31.8	45.2	27.8	5.8	4.2	6.8	27.2	32.8
55.0	33.8	25.8	6.6	23.8	10.5	10.8	42.2
34.3	44.1	13.2	22.5	4.4	24.1	30.5	34.2
46.3	30.5	31.8	5.1	21.0	8.7	10.0	53.3
34.1	52.5	11.0	23.0	5.6	26.9	24.7	36.8
42.34	40.45	19.65	14.14	13.56	17.15	18.54	41.31

8^h26^m 8 26 8 27 8 27 8 27 8 27 8 26 8 28

A=22.95

Hell. d. Grundes 6.84 B=4

N:o 9. 1916 Apr. 8, $9^h\,18^m$ m.Z.D.

A=23.05

49.4	39.5	7.5	19.0	3.2	20.5	6.1	41.5
29.6	29.0	22.5	1.5	19.6	6.8	23.5	27.5

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
40.1	47.5	7.4	17.5	2.0	23.5	8.8	37.8
29.2	27.8	25.8	2.5	18.0	5.4	26.6	31.6
46.8	25.1	20.0	1.5	18.8	6.4	10.8	40.1
28.0	36.8	7.4	18.3	0.5	24.6	27.5	26.8
41.5	26.1	24.7	1.3	17.8	7.4	9.5	46.5
30.5	45.8	5.9	17.5	1.8	24.0	25.6	27.0
36.89	34.70	15.15	9.89	10.21	14.83	17.30	34.85
$9^h\,7^m$	9 18	9 18	9 18	9 18	9 19	9 17	9 19

A=22.90

Hell. d. Grundes 1.99 B=4.5.

I	II	IV	VI	VII	VIII	X	XII
N:o 10. 1917 Mai 1, $11^h\,22^m$ m.Z.D.							
A=22.8							
33.3	31.3	16.8	9.0	7.4	8.0	16.6	35.0
35.4	32.1	18.4	6.2	10.0	7.8	19.4	29.1
29.5	36.4	19.8	6.9	6.7	9.5	18.4	29.5
30.9	28.6	18.7	7.2	8.9	7.7	22.1	33.3
32.20	31.95	18.42	7.32	8.22	8.22	19.12	31.72
11^h14^m	11 15	11 19	11 21	11 24	11 25	11 27	11 30

A=22.8

B=4.

N:o 11. 1917 Mai 2, $10^h\,12.5^m$ m.Z.D.

A=22.65

I	II	III	IV	VI	VII	VIII	X	XI	XII
43.1	45.2	42.0	32.9	12.2	9.0	13.4	28.6	44.5	43.7
53.5	45.7	42.2	39.1	11.1	10.6	10.2	34.1	54.5	46.4
45.1	54.1	41.2	30.0	13.5	9.6	11.7	30.7	45.1	56.6
43.9	44.0	54.5	30.9	11.1	13.8	10.5	29.6	45.1	51.0
42.9	41.8	45.0	34.5	10.6	11.7	10.5	38.3	53.8	46.6
43.6	42.8	53.5	31.3	12.2	10.2	13.5	32.4	44.2	44.2
44.2	56.5	45.8	29.7	11.8	13.4	10.9	32.6	42.4	45.6
54.4	44.5	42.0	32.2	14.8	9.1	12.4	32.0	43 4	51 7
46.34	46.83	45.78	32.58	12.16	10.93	11.53	32.29	46.63	48.23
$10^h\,12^m$	10 12	10 12	10 13	10 12	10 13	10 13	10 12	10 13	10 13

Helligk. des Grundes 2°.51. B=3.

N:o 13. 1917 Mai 31, $9^h\,34.5^m$ m.Z.D.

A=23.60

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
40.4	44.0	42.6	26.3	13.5	14.1	10.5	12.4	14.8	33.6	38.6	42.8
44.5	47.4	44.4	30.0	16.3	10.8	12.2	10.0	16.7	30.4	41.8	42.8
39.0	42.0	48.5	29.6	13.3	12.4	9.3	14.5	14.4	28.0	45.8	50.0
43.2	45.5	43.9	25.6	15.6	10.5	10.8	11.2	15.5	30.3	45.1	45.8
48.5	44.72	44.85	27.88	14 68	11.95	10.70	12.02	15.35	30.58	42.82	45.35
43.2											
46.8											
41.8											
43.43											
$9^h\,34.5^m$	9 25	9 27	9 29	9 32	9 33	935	9 35	9 36	9 39	9 40	9 41

A=23.65

Helligk. des Grundes 3°.60 B=3.

N:o 22 1917. Oktb. 26, $9^h\,58^m$ m.Z.D.

A= 38.05

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
36.1	30.9	33.1	18.0	10.5	7.1	7.5	10.5	14.9	29.5	28.0	26.5
32.0	35.1	33.2	19.8	9.6	9.8	7.3	11.5	13.9	24.5	31.6	30.0
32.8	33.5	28.5	22.8	10.9	9.3	8.8	10.6	15.4	20.0	31.6	33.2
28.5	33.6	31.5	21.5	8.5	8.9	8.0	14.0	15.5	25.8	28.8	31.5
29.4	30.0	28.4	17.9	7.7	8.6	7.8	11.1	14.1	23.1	30.3	30.2
31.7	33.5	29.0	16.4	8.1	8.3	9.4	11.2	13.0	23.3	31.4	31.2
29.2	32.5	28.5	18.6	9 5	9.9	7.4	13.1	13.5	23.6	32.1	33.2
31.4	28.8	27.2	18.7	10.0	7.5	8.5	15.4	15.0	23.4	32.4	32.6
31.39	32.24	29.93	19.21	9.35	8.68	8.09	12.18	14.41	24.15	30.78	31.05
$9^h\,57^m$	—	9 58	—	—	9 58	9 57	9 58	9 58	—	9 58	9 59

A=37.80 A=37.9

B=4.

N:o 24. 1917 Oktb. 27, $10^h\,11^m$ m.Z.D.

A=36.95

36.0	43.5	40.7	23.9	14.4	12.0	12.8	16.6	24.2	31.7	44.0	41.5
37.7	41.9	39.0	29.7	13.1	12.5	12.1	18.8	25.6	34.8	42.0	40.0
38.9	39.5	39.3	29.0	14.8	12.2	12.5	16.8	26.0	35.6	36.2	38.4
39.5	39.2	35.8	28.8	13.9	12.7	10.5	17.2	24.0	38.0	41.4	38.8
39.8	40.9	34.6	25.1	12.9	12.2	11.1	18.4	19.5	33.6	39.4	45.0
37.8	41.1	38.5	25.8	13.9	12.6	13.6	17.0	19.8	33.2	36.4	40 0
37.5	43.0	37.4	25 9	14.1	13.8	12.6	17.8	20.0	37.2	37.6	40.5
45.9	40.7	35.5	27.0	16 0	12.4	11.8	16.9	22.6	37.0	35.6	38.0
39.05	41.23	37.60	26.90	14.14	12.55	12.13	17.44	22.71	35.14	39.08	40.28
$10^h\,11^m$	10 11	10 11	10 10	10 10	10 11	10 9	10 8	10 12	—	—	10 11

A=36.90 A=36.90

B=4

N:o 27. 1917. Oktb. 31, $8^h\,40^m$ m.Z D

A=36.75

33.4	37.0	47.1	34.8	23.4	23.4	30.6	30.4	38.4	45.4	42.4	45 4
32 4	35.5	43.2	36.5	24.1	25.4	28.6	34.0	42.6	45.6	40.6	41.4
31.6	33.5	48.0	37.1	27.4	22.1	30.9	38.0	39.4	49.4	42.0	41.8
34.6	38.8	43.0	35.8	22 4	24.2	30.4	42.5	41.6	43.2	41.4	49.0
35.2	45.5	44.0	38.0	24.7	24.1	26.2	28.4	37.4	56.2	42.4	45.5
38.6	44.8	48.4	31.4	26.0	24.8	30.6	32.4	46.6	53.8	48.2	48.8
37.0	44.8	46.0	35.4	23.2	28.2	27.2	37.2	42.4	50.5	50.6	48.4
38.4	40.0	44.6	32.4	24.5	24.8	30.0	37.5	44.2	47.4	43.2	45.3
35.15	39.99	45.54	35.18	24.91	24.63	29.31	35.05	41.58	48.81	43.85	45.70
$8^h\,40^m$	8 40	8 40	8 40	8 41	8 39	8 40	8 41	8 40	8 40	8 40	8 40

A=36.4 A=36.6

B=4

N:o 30. 1917 Nov. 26, $7^h\,9^m$ m.Z.D.

A=36.5

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
50.4	53.5	52.2	36.4	27.4	19.4	17.4	19.8	27.9	37.1	44.2	43.5
47.6	45.5	47.4	38.2	26.5	20.4	17.0	20.5	29.9	35.3	46.8	42.2
46.4	48.5	40.0	35.6	24.2	19.5	18.0	19.1	21.6	39.8	46.5	48.5
47.6	49.9	48.0	35.4	25.2	21.0	18.6	19.9	22.9	38.5	43.2	44.9
49.5	54.5	47.2	45.5	23.1	18.6	14.2	20,0	22.5	31.2	53.2	43.6
47.3	44.6	47.4	48.5	26.1	20.0	14.0	20.6	26.1	36.8	47.2	46.4
43.2	59.0	50.4	34.0	25.2	19.5	14.4	21.8	23.1	38.2	42.1	40.8
53.4	52.1	53.0	35.5	29.8	17.2	18.4	22.1	22.2	38.8	39.0	48.8
48.18	50.95	48.20	38.39	25.94	19.45	16.50	20.48	24.53	36.96	45.28	44.84
$7^h\,8^m$	7 8	7 9	7 9	7 9	7 8	7 8	7 8	7 9	7 10	7 10	7 10

A=36.2 A=36.5

B=4.

N:o 32. 1917 Nov. 30, $10^h\,13^m.5$ m.Z.D.

A=37.9

33.4	32.0	36.5	33.6	25.0	15.6	20.2	29.8	37.5	38.2	40.0	41.9
30.2	38.7	37.5	32.3	25.0	16.5	19.0	31.1	39.9	34.0	37.8	40.9
30.5	37.6	41.8	31.5	22.4	16.2	23.2	31.5	37.9	36.2	47.1	38.0
30.5	34.5	38.3	36.4	22.6	14.0	20.8	31.0	35.1	38.9	39.6	45.0
31.2	39.5	36.0	28.2	18.0	18.6	22.6	33.3	33.5	39.5	36.8	45.5
31.5	36.1	40.4	29.7	20.0	16.0	27.2	29.0	36.7	41.0	42.9	41.5
30.8	39.0	36.6	32.6	20.0	18.0	25.5	32.3	35.8	45.0	41.7	40.0
35.0	40.0	37.6	28.5	21.5	16.5	22.4	30.5	40.0	38.0	36.7	41.4
31.64	37.18	38.09	31.60	21.81	16.43	22.61	31.06	37.05	38.85	40.32	41.78
10^h15^m	10 13	10 13	10 13	10 13	—	10 11	10 12	10 12	10 12	10 11	10 12

A=37.9 A=37.9

B=4.

N:o 52. 1918 Febr. $12^h\,21^m$ m.Z.D.

A=37.8

45 8	37 1	45 2	43.9	41.2	47.8	41.5	40.9	42.8	41.8	50.0	48.0	37.0
43.8	37.6	41.4	43.2	41.4	44.5	43.2	38.4	45.4	42.0	47.8	40.8	35.7
46.8	39.2	40.8	44.4	40.5	43.0	38.9	39.5	40.3	40.8	40.5	40.5	42.0
43.8	36.7	45.4	40.7	39.1	38.4	44.1	39.5	43.6	42.4	40.8	45.8	41.8
44.9	42.2											
43.2	43.8											
41.6	37.8											
40.4	39.0											
42.76	37.65	42.70	43.05	40.55	43.42	41.92	39.58	43.02	41.75	44.78	43.78	39.12
$12^h\,29^m$	12 13	12 17	12 25	12 22	12 23	12 22	12 21	12 20	12 18	12 17	12 15	12 14

A=37.8

B=4.

I	II	III	XI	XII
N:o 38. 1918. Jan. 19. 11^h16^m				m.Z.D.
A=37.6				
21.9	18.8			17.7
20.6	20.3			18.7
20.1	19.3			17.6
20.3	17.1			18.8
20.73	18.88			18.20
11^h14^m	11 16			11 19
				A=37.6
B=3				

I	II	III	XI	XII
N:o 39. 1918 Jan. 24. 6^h44^m				
A=37.8				
32.7	29.4	26.5	29.1	30.9
28.5	32.3	31.4	26.0	31.3
32.5	37.0	26.4	28.2	27.7
34.8	33.3	28.2	31.8	32.7
31.1	27.9	29.1	27.2	36.6
34.8	33.9	28.0	25.5	31.1
30.4	37.5	30.1	30.6	26.9
26.5	32.5	34.5	36.5	31.7
31.41	32.98	29.28	29.36	31.11
6^h44^m	6 45	6 43	—	6 44
				A=37.75
B=3.5. Alles unverändert seit N:o 38				

I	II	III	XI	XII
N:o 40. 1918. Febr. 15. 6^h18^m				m.Z.D.
A=37.75				
14.6	19.5	13.5	14.4	15.9
18.7	16.3	18.6	13.9	16.9
16.1	15.0	14.5	17.0	17.3
15.4	15.4	13.3	13.8	19.6
19.9	14.7	13.3	18.7	15.7
16.5	15.2	18.5	17.0	16.1
16.7	19.1	14.4	15.9	15.5
17.6	15.9	15.5	19.7	20.5
16.94	16.39	15.20	16.30	17.19
6^h18^m	6 18	6 17	6 18	6 18
A=37.40				A=37.6
B=4. Alles unverändert seit N:o 39. Leicht. Dunst.				

I	II	III	XI	XII
N:o 43. 1918. Febr. 18. 7^h10^m				m.Z.D.
A=38.0				
23.3	23.6	20.2	23.0	23.1
23.3	25.8	20.4	22.7	21.7
24.2	23.9	23.8	20.9	23.5
25.6	24.9	21.8	21.2	22.9
22.6	24.2	24.6	22.5	25.6
21.7	24.3	25.8	25.2	25.1
24.9	21.7	25.4	23.4	24.1
26.9	25.8	23.1	22.8	23.8
24.18	24.28	23.26	22.71	23.73
7^h9^m	7 10	7 10	7 10	7 9
A=37.9				
B=5. Alles unver. seit N:o 40.				

I	II	III	XI	XII
N:o 45. 1918 Febr. 19. 7^h15^m				m.Z.D.
A=38.1				
22.2	23.4			22.4
24.8	25.4			22.1
26.1	26.5			24.1
26.4	26.8			24.8
24.88	25.52			23.35
7^h13^m	7 14			7 18
				A=37.9
B=4. Alles unverändert seit N:o 43.				

I	II	III	XI	XII
N:o 46. 1918. Febr. 46. 10^h28^m				M.Z.D
A=38.0				
24.0	24.4	24.2	22.8	22.5
22.2	23.0	22.9	21.5	24.0
23.1	26.4	22.1	24 8	23 4
25 4	25 8	26 1	24 5	22 8
20.6	24.7	25.6	23.3	20.6
24.5	26.2	24.4	26.3	25.2
22.1	24.6	22.9	21.9	25.3
26.0	23.1	24.4	23.2	22.1
23.49	24.78	24.08	23.54	23.24
10^h28^m	—	—	—	10 28
A=38.0				A=38.0
B=4, Leichter Nebel.				

I	II	III	XI	XII
N:o 47. 1918. Febr. 20 7^h49^m				m.Z.D.
A=38.2				
20.5	23.2	22.6	22.9	19.9
21.4	21.8	22.9	23.2	23.5
21.6	26.9	21.8	22.9	23.6
24.4	26.6	25.8	19 1	23.9
22.8	26.1	23 4	24 4	23.4
23.4	26.7	22.6	23.1	23.3
24.2	25.3	20.7	26.2	24.4
26.1	25.5	24.4	25.3	24.2
23.05	25.64	23.40	23.39	23.28
7^k49^m	—	—	—	7^h49^m
				A=38.1
B=4, Leichter Schleier.				

I	II	III	XI	XII
N:o 48. 1918. Febr. 21. 7^h45^m				m.Z.D.
A=38.2				
20 5	23.9	24.2	20.0	23.2
22.6	23.0	24.9	23.1	24.8
20.2	25.8	26.4	22.5	25.5
22.5	26.1	25.6	23.4	23.4
26.5	25.2	24.8	25.3	28.1
26.3	22.8	23.0	28.6	26.2
24.6	24.8	28.2	25.6	23.9
23.4	27.4	27.2	24.2	28.0
23.83	24.88	25.56	24.09	25.39
7^h45^m	—	—	—	7^h45^m
A=38.0				A=38.1
B=3. Leichter Nebel.				

I	II	III	XI	XII
N:o 49. 1918. Febr. 22. 7^h13^m				m.Z.D.
A=38.1				
21.1	27.1	25.2	21.1	24.2
22.1	27.1	25.7	21.5	24.2
23.4	25.9	24.8	23.0	23.0
22.4	22.8	21.5	23.5	26.4
26.2	26.2	26.1	23.6	23.8
25.7	25.6	26.3	21.1	27.5
23.6	26.8	26.1	23.3	25.5
27.4	23.5	20.6	24.1	23.6
23.99	25.63	24.54	22.65	24.77
7^h13^m	—	—	—	7^h13^m
				A=38.05
B=3. Nebel veränderl. Dichte.				

I	II	III	XI	XII
N:o 50. 1918. Febr. 25. 12^h0^m m.Z.D.				
A=37.8				
31.6	33.6	33.9	29.7	35.0
36.1	31.4	37.8	31.7	32.7
32.5	30.0	31.9	34.6	36.4
30.9	32.9	29.7	33.8	35.1
36.9	30.8	30.7	30.7	34.5
31.9	30.8	31.8	29.2	37.1
31.0	34.7	29.8	28.3	37.0
27.6	33.4	28.4	33.1	33.8
32.31	32.20	31.75	31.39	35.20
12^h0^m	—	—	—	12^h0^m
A=37.70				A=37.75

B=4. Dieselbe Einstellung des Instruments wie bei N:o 45.

N:o 53. 1918. März. 10^h25^m m.Z.D.				
A=37.9				
41.7	42.5	39.5	36.5	42.4
39.1	42.3	42.9	36.8	43.4
39.2	44.4	39.9	36.8	45.5
41.4	42.2	40.8	37.2	41.8
39.1	43.3	36.3	36.4	40.5
39.2	43 6	42 1	40 5	41 2
43 4	44.4	35.8	39.6	42.4
42.5	40.5	39.0	38.9	42.0
40.70	42.90	39.54	37.84	42.40
10^h24^m	10 26	10 26	10 25	10 25.
A=37.8				

B=4. Leichter Dunst.

N:o 54. 1918. März 25. 11^h29^m m.Z.D.				
A=37.8				
48.3	52.2	41.1	41.1	51.1
50.9	53.4	41.8	44.9	51.4
49.3	52.8	40.4	45.6	49.4
52.1	46.2	44.5	47.5	54.0
52.6	52.0	52.4	54.9	50.1
52.6	49.1	52.6	52.2	51.5
56.0	50.1	54.5	52.9	49.7
56.0	46.8	51 0	50.2	52.7
52.23	50.33	47.29	48.66	51.11
11^h29^m	—	—	—	11^h29^m
A=37.2				A=37.5

B=3.5. Leicht dunstig.

N:o 9.

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 12 1917. Mai 2. 10^h38^m m.Z.D.				
A=22.45				
39.5	38.2	37.7	25.7	19.4
34.8	46.0	38.4	26.0	15.5
35.8	37.0	49.0	24.8	19.4
35.4	36.9	38.6	30.4	18.4
36.4	41.7	34.0	26.9	23.0
31.0	34.4	36.4	28.6	16.6
35.1	40.7	47.4	24 5	18.3
34.5	45.6	36.4	23.6	17.8
35.31	40.06	39.84	26.31	18.55
$10^h38^m.5$		10.38	10.37	10.38
A=22.45				

Helligk. d. Grundes 2.51

N:o 14. 1917. Juli 8. 13^h39^m m.Z.D.				
A=27.2				
29.2	31.4	26.6	31.0	29.0
30.8	29.8	28.2	29.1	29.0
26.6	30.4	27.8	32.0	31.3
27.6	31.1	24.6	32.5	29.8
32.1	30.7	24.8	30.4	29.0
32.4	29.5	25.1	31.9	29.0
31.4	30.1	27.6	31.4	30.6
32.0	29.6	25.8	34.5	29.9
30.26	30.32	26.31	31.60	30.95
13^h39^m	—	—	—	13 39
A=27.15				

Helligk. d. Grundes $1^m.25$

B=3. Dunst.

N:o 15. 1917. Juli 8. 14^h2^m				
A=27.0				
31.1	30.5	23.1	31.0	33.5
28.5	31.0	25.3	32.3	28.6
31.8	30.8	25.5	32.8	29.4
28.8	32.5	23.5	34.4	29.6
32.1	30.4	23.1	30.7	33.1
33.3	30.2	23.2	35.2	28.8
29.2	29.3	22.2	32 6	30.4
33.4	26.1	27.0	32.1	29.4
31.03	29.98	24.11	32.64	30.35
14^h2^m	—	—	—	14 2
				A=27.0

B=4. Leichter Nebel.

M	R_1	R_2	L_2	L_2
N:o 16. 1917. Juli 9. 13^h55^m m.Z.D.				
A=22.9				
48.5	37.5	32.2	55.2	50.5
47.0	41.8	35.6	43.8	48.8
40.3	42.6	35.9	49.5	42.8
45.8	34.2	38.9	50.5	48.5
45.6	41.4	35.8	46.8	48.7
42.4	33.4	30.8	48.8	44.9
40.0	39.4	34.1	53.5	40.5
45.5	41.1	35.4	47.8	45.1
44.39	38.93	34.84	49.49	46.19
13^h55^m	13 54	13 55	13 55	13 56
				A=22.9

Helligk. d. Grundes 2.98

B=3. Schleier.

N:o 17. 1917. Sept. 6. 13^h17^m m.Z.D.				
A=37.2				
28.7	31.2	21.2	31.2	32.5
30.7	28.5	22.0	33.8	35.1
30.1	27.5	20.2	37.0	33.7
37.1	26.5	22.0	32.5	30.0
	30.0	24.5	33.1	34.1
	30.8	22.1	35.8	36.8
	30.5	27.0	34.0	36.4
	34.0	22.0	32.5	34.0
31.65	29.88	22.63	33.74	34.08
13^h1^m	13 21	13 20	13 22	13 21
A=37.2				A=36.90

Amperm. unruhig. B=4.

N:o 18. 1917. Oktob. 1. 9^h55^m m.Z.D.				
A=37.6				
54.2	47.6	38.0	52.1	45.0
51.4	44.7	39.4	49.3	48.3
54.0	48.8	48.5	46.3	42.0
55.4	42.0	44.4	55.0	39.4
63.8	47.8	47.9	49.0	42.0
48.0	47.5	49.1	45.6	50.0
49.0	54.8	55.2	50.2	46.4
60.5	52.0	55.6	52.0	42 4
54.54	48.15	47.26	49.94	44.44
9^h54^m	—	—	—	9^h55^m
A= 7.3				A=37.4

B=3.

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 20. 1917. Oktob. 5. 10^h31^m				
A=36.4				
39.3	30.5	19.1	35.5	33.5
37.3	28.4	19.5	36.5	37.0
40.3	27.5	19.6	37.0	39.5
43.0	31.3	17.5	38.0	40.3
38.9	27.5	22.0	40.5	35.9
41 3	27.5	18.2	35.4	37.4
	31.4	18.8	39.8	35.6
	31.8	18.8	32.8	37.8
40.02	29.49	19.19	36.94	37.13
10^h31^m	—	—	—	10^h31^m
A=36.7				A=36.7
		B 3.		

N:o 23. 1917. Oktob 26. 10^h43^m m.Z.D.				
A=37.8				
25.0	21.0	29.0	17.6	12.5
25.0	24.4	27.0	19.5	11.5
28.3	23.0	28.6	15.5	14.6
26.0	24.5	26.4	17.8	11.8
26.6	22.4	25.7	19.1	12.2
26.0	26.5	29.7	18.1	14.0
28.5	25.5	25.7	18.8	15.0
25.5	25.7	25.7	17.0	14.6
26.41	24.13	27.23	17.93	13.28
10^h43^m	—	—	—	10^h43^m
A=37.8				A=37.8
		B=4		

N:o 25. 1917. Oktob. 27. 10^h53^m m.Z.D.				
A=36.85				
34.9	37.1	40 2	27 0	15 5
35 2	35.1	39.9	27.9	16.4
38.8	35.6	40.5	24.7	17.5
37.8	40.3	37.5	25.4	17.5
36.1	31.5	39.8	26.3	18.8
34.0	36 5	37 6	27.4	19.1
38.0	35.8	38.5	25.4	19.8
34.5	36.6	38.6	27.4	18.4
36.16	36.06	39.08	26.44	17.88
10^h53^m	—	—	—	10^h53^m
A=36.8				A=36.8
Helligk. d. Grundes 2.98.				
		B 4.		

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 28. 1917. Oktob. 31. 9^h30^m m.Z.D.				
A=36.3				
45.5	45.2	42.6	44.5	37.4
45.2	47.6	38.8	46.4	37.0
48.2	45.4	38.4	46.4	40.4
46.8	43.5	40.4	43.4	40.0
48.0	47.4	36.2	43.2	39 1
48.4	44.5	38.1	35.5	38.3
45.5	47.4	42.0	39.5	41.2
46.0	41.2	42.4	39.5	41.4
46.70	45 38	39.86	42.30	39.35
9^h28^m	9 30	—	—	9 31
A=36.1				A=36.2
		B=4.		

N:o 31. 1917. Nov. 30. 9^h17^m				
A=36.8				
42.7	39.2	37.1	39.8	38.6
42.1	47.0	35.2	35.0	34.0
40.7	43.2	42.2	34.5	35.6
39.5	39.8	34.0	40.8	34.4
42.8	39 4	35.9	34.6	43.5
37.6	37.4	33.2	40.4	38.7
38.4	43.7	36.0	37.4	39 5
45.8	42.5	34 4	34.0	38.6
41.20	41.53	36.00	37.69	37.86
9^h17^m	—	—	—	9 17
A=36.4				A=36.4
		B=4.		

N:o 34. 1917 Dezember 4. 12^h42^m m.Z.D.				
A=37.85				
19 5	13 4	11 8	18 4	21 0
17.4	16.8	13.4	21.5	19.4
17.8	14.5	12.1	21.0	22.8
16.8	15.5	12.0	21.8	22.0
18.9	15.8	11.6	22.4	19.5
20.8	14.7	13.8	20.6	19.8
23.5	15.9	12.1	20.4	20.4
20.2	16.1	14.1	19.8	22.8
19.26	15.34	12.61	20.74	20.96
12^h41^m	—	—	—	12 43
A=37.7				
		B=4.		

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 41 1918. Febr. 15. 6^h55^m m.Z.D.				
A=38.1				
34.8	31.0	53.3	30.6	17.0
40.1	37.2	37.3	23.4	15.5
33.7	47.4	44.7	20.5	13.8
29.0	40.1	55 7	27.5	15.6
31.0	50.1	47.5	21.1	16.6
44.4	37.1	33.0	25.0	20 8
33 0	29 5	41.4	30.5	12.2
26.2	33.7	58.2	24.1	14.8
34.03	38.26	46.39	25.34	15.79
A=38.0				
6^h55^m	—	—	—	6 55
		B=3.		

N:o 42 1918. Febr 15. 7^h58^m m.Z.D.				
A=38.2				
30.4	34.1	48.8	22.4	16.6
35.5	45.5	32.6	21.9	13.0
31.6	38.1	42.2	23.8	10.8
29.6	54.5	55.5	30.5	12.5
42 4	40 5	42.8	19 5	12 2
32 5	29.5	35.5	23.6	15.8
26.9	34.8	39.5	30.5	11.4
30.0	47.4	56.1	24.4	12.0
32.36	40.55	44.12	24.58	13.04
A=38.05				
7^h58^m	—	—	—	7 58
		B 3.		

N:o 44. 1918. Febr. 18. 7^h28^m m.Z.D.				
A=37.9				
22.6	27.3	25.0	15.1	10.0
20.7	25.7	29.7	17.5	11.3
21.6	25.1	26.0	14.8	13.1
22.0	24.7	26.6	14.8	11.5
21.7	25.6	30.0	14.6	11.8
21.5	28.4	26.9	15.4	11.9
24.1	24.6	28.1	15.7	12.9
21.7	24.4	24.1	18.4	10.5
21.99	25.73	27.05	15.79	11.63
A=37.9				
7^h28^m	—	—	—	7 28
		B 5.		

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 55. 1918. Mai 13. 9^h55^m m.Z.D.				
A=37.3				
34 5	46.2	49.5	24.5	15.2
32.5	40.8	50.3	27.9	17.2
35.3	45.3	45.3	24.3	18.1
35.9	46.8	40.0	23.5	16.9
36.4	36.5	41.6	21.6	14.5
30 0	36.5	47.5	21.6	15.9
32.4	38.5	45.6	18.6	17.9
31.6	42.4	41.4	22 2	16.5
33.58	41.63	45.15	23.03	16.53
9^h55^m	—	—	—	9 55
A=37.3				A=37.2
		B=4.		

M	R_1	R_2	L_1	L_2
N:o 56. 1918. Mai 14. 10^h25^m m.Z.D.				
A=37.8				
35.0	48.0	51.7	25.5	15.5
35.2	40.5	51.2	26.5	18.5
40.5	42.5	49.2	21.4	15.5
41.5	41.4	51.8	24.4	14.4
28.5	39.0	47.6	21.8	15.0
29 8	42.0	44.0	22.5	14.2
30.4	37.6	42.4	26.4	16.6
34.5	34.2	48.5	24.8	15.4
34.43	40.70	48.30	24.16	15.64
10^h23^m	10 25	—	—	10 25
A=37.8				
		B=4.		

Im Folgenden sind die relativen Helligkeiten in Grössenklassen in Bezug auf die Punkte I, resp. 1 zusammengestellt. Die weiterhin nicht verwendeten Beobachtungen auf den maria oder hellen Strahlen sind eingeklammert. In den Bemerkungen ist angegeben, auf welches Gebilde der betreffende Punkt fällt.

Die relativen Helligkeiten am Rande des Mondes.

N:o	Gr. m. Z.	Punkte II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Zahl der Messungen	Güte der Beobacht.	Bemerkungen
	1915														
1	Juni 1. 518	0.07	—	0.74	—	2.04	(2.72)[1]	2.48	—	0.85	-	(0.46)*	8—8	3	[1] Mare Tranqu. * Mare Cris.
2	Juni 3. 508	0.11		1.18	—	(1.91)[1]	(1.97)[1]	(2.87)[2]	—	1.30	—	(0.42)*	12—12	3	[1] Strahlen d. Tycho; [2] M. Ser.
3	Juni 4. 503	0.05	—	1.20	—	(1.83)[1]	2.25	(3.07)[2]	—	1.90		(0.60)*	8—8	4	[1] Strahlen d. Tycho; [2] M. Imbr.
4	Juni 7. 510	0.25	—	1.29	—	(2.04)[1]	(2.85)[2]	(2.83)[3]	—	1.82	—	0.28	4—4	3	[1] M. Hum; [2] Oc. Proc. [3] M. I.
5	Juni 8. 509	0.04	—	1.72	—	2.23	(2.43)[1]	2.16	—	1.70	—	0.80	4—4	3	[1] Oc. Proc;
6	Juni 18. 383	0.03	—	1.84	—	(2.61)[1]	(3.14)[2]	—	—	—	—	—	4—4	4	[1] Strahl. d. Tycho; [2] M. Tranqu.
7	Sept. 29. 342	0.14	—	1.21	—	1.85	(2.25)[1]	(2.49)[2]	—	1.54	—	0.21	4—4	4	[1] M. Tranqu. [2] M. Ser.
	1916														
8	Apr. 7. 278	0.05	—	1.67	—	(1.81)[1]	(2.33)[2]	(2.23)[3]	—	1.52	—	0.08	8—8	4	[1] Str. d. Tycho; [2] M. Tranqu.
9	Apr. 8. 313	0.11	—	1.54	—	(1.87)[1]	(2.73)[2]	(2.76)[3]	—	1.82	—	0.11	8—8	4.5	[1] Str. d. Tycho; [2] M. Tranqu. [3] M. Ser.
	1917														
10	Mai 1. 399	0.03	—	1.06	—	2.86	(2.86)[1]	(3.11)[2]	—	1.14	—	0.02	4—4	4	[1] Oc. Proc. [2] M. Imbr.
11	Mai 2. 351	−0.02	−0.02	0.64	—	(2.72)[1]	(2.96)[2]	(2.84)[3]	-	0.66	−0.01	−0.07	8—8	3	[1] M. Hum. [2] Oc. Proc. [3] M. I.
13	Mai 31. 325	−0.07	0.02	0.66	2.13	(2.69)[1]	(3.11)[2]	(2.70)[3]	2.23	0.85	−0.06	−0.05	8—4	—	[1] M. Hum. [2] Oc. Proc. [3] M. I.
22	Oktob. 26. 341	−0.05	0.09	1.00	2.53	2.69	2.84	1.96	1.60	0.82	0.04	0.02	8—8	4	
24	Oktob. 27. 350	−0.10	0.07	0.73	2.10	2.37	2.45	1.64	1.11	0.20	0.00	−0.06	8—8	4	
27	Oktob. 31. 287	0.16	−0.07	0.40	1.09	1.11	0.76	0.41	0.09	−0.19	−0.01	−0.08	8—8	4	Hellikgeit des Referenzpunkt. um 0.40 m. vergrössert.
30	Nov. 26. 224	−0.09	0.00	0.40	1.16	1.75	2.09	1.64	1.37	0.47	0.10	0.12	8—8	4	
32	Nov. 30. 302	0.09	0.05	0.40	1.15	1.74	1.08	0.44	0.10	0.01	0.06	0.12	8—8	4	Hellikgeit des Referenzpunkt. um 0.40 m. vergrössert.
	1915														
36	Mai 20. 397	0.00	—	1.76	—	—	(2.50)[1]	—	—	1.66	—	−0.18	8—8	4	[1] Mare Foec.
37	Mai 21. 361	−0.08	—	1.74	—	—	(2.56)[1]	—	—	1.58	—	−0.06	8—8	3	» » »

Die relativen Helligkeiten am Mondrande.

(Frauenhoferscher Refraktor).

N:o	Gr. m. Z	II	III	XI	XII	Zahl d. Messung.	Güte d. Beob.	Bemerkungen
	1918							
38	Jan. 19. 395	0.19	—	—	0.27	4—4	—	
39	Jan. 24. 206	0.13	0.02	0.14	−0.09	8—8	3.5	
40	Febr. 15. 188	0.08	(0.03)[1]	0.23	0.07	8—8	4	[1] Heller Strahl.
43	Febr. 18. 224	0.13	0.04	0.08	−0.01	8—8	5	
45	Febr. 19. 225	0.13	—	—	−0.05	4—4	4	
46	Febr. 19. 362	0.00	0.02	−0.05	−0.11	8—8	4	
47	Febr. 20. 251	−0.03	−0.02	−0.03	0.22	8—8	4	
48	Febr. 21. 249	−0.02	−0.13	−0.14	−0.09	8—8	3	
49	Febr. 22. 206	0.12	−0.07	−0.05	−0.13	8—8	2	
50	Febr. 25. 303	0.06	−0.06	0.04	0.01	8—8	4	
53	März. 23. 360	0.13	−0.07	0.05	−0.09	8—8	4	
54	März. 25. 404	0.11	0.03	0.16	0.06	8—8	4	

Die relativen Helligkeiten auf der Scheibe.

N:o	Gr. m. Z.	Punkte 2	Punkte 4	Punkte 3	Punkte 5	Zahl d. Messung.	Güte d. Beob.	Bemerkungen
	1917							
12	Mai 2. 369	−0.23	−0.22	(+0.58)[1]	(+1.31)[2]	8—8	3	[1] u. [2] Ocean. Procell.
14	Juli 8. 495	−0.09	−0.04	0.00	+0.28	8—8	4	
15	Juli 8. 510	+0.04	−0.09	+0.07	+0.51	8—8	4	
16	Juli 9. 506	−0.18	−0.07	+0.23	+0.44	8—8	3	
17	Sept. 6. 479	−0.06	−0.08	+0.17	+0.77	4—8	4	Amperm. unruh. Wolken.
18	Oktob. 1. 339	(+0.14)[1]	(+0.33)[2]	+0.19	+0.22	8—8	4	[1] u. [2] Ocean. Procell.
23	Oktob. 26. 372	+0.18	−0.06	(+0.80)[1]	(+1.44)[2]	8—8	4	[1] u. [2] Ocean. Procell.
25	Oktob. 27. 379	+0.01	−0.15	(+0.62)[1]	(+1.44)[2]	8—8	4	[1] u. [2] Ocean. Procell.
28	Oktob. 31. 321	(+0.17)[1]	(+0.30)[2]	+0.05	+0.28	8—8	4	[1] u. [2] Ocean. Procell.
31	Nov. 30. 312	(+0.16)[1]	(+0.15)[2]	+0.01	+0.25	8—8	4	[1] u. [2] Ocean. Procell.
34	Dez. 4. 455	−0.15	−0.18	+0.48	+0.90	8—8	4	
	1918	Frauenhoferscher Refraktor.						
41	Febr. 15. 214	−0.22	−0.56	+0.58	+1.56	8—8	3	
42	Febr. 15. 258	−0.42	−0.57	+0.55	+1.88	8—8	3	
44	Febr. 18. 237	−0.32	−0.42	+0.69	+1.34	8—8	5	
55	Mai 13. 339	−0.40	−0.54	+0.75	+1.44	8—8	4	
56	Mai 14. 360	−0.31	−0.60	+0.70	+1.61	8—8	4	

3. Die Winkel i und ε in den beobachteten Punkten.

Die Einfalls- und die Reflexionswinkel in der beobachteten Punkten der Scheibe wurden in folgender Weise berechnet. Bezeichnet man durch ψ die Breite, durch ω die Länge eines Punktes der Mondoberfläche in Bezug auf den Intensitätsäquator, letztere von der Mitte der Mondscheibe gerechnet, und weiter durch u und v die linearen Koordinaten auf der Scheibe, so ist

$$u = \cos\psi \sin\omega$$
$$v = \sin\psi.$$

Hier sind u und v in Einheiten des Mondradius ausgedrückt; dann haben wir die bekannten Beziehungen

$$\cos\varepsilon = \cos\psi\cos\omega$$
$$\cos i = \cos\psi\cos(\omega - \alpha).$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen ω und ψ, so erhält man

$$\cos i = \cos\alpha \sqrt{1-(u^2+v^2)} + u\sin\alpha \qquad (1)$$

$$\cos\varepsilon = \sqrt{1-(u^2+v^2)} \qquad (2)$$

als Ausdrücke für i und ε in linearen Koordinaten.

In diese Formeln haben wir für die Beobachtungen am Rande der Scheibe einzusetzen:

für den Punkt		
I	$u = 1-k;$	$v = 0;$
II und XII	$u = (1-k)\cos 45°;$	$v = (1-k)\sin 45°;$
III u. XI	$u = (1-k)\cos 67°.5;$	$v = (1-k)\sin 67°.5;$
IV u. X	$u = 0;$	$v = 1-k;$
V u. IX	$u = \cos 48°.6\cos\alpha - k;$	$v = \frac{3}{4};$
VI u. VIII	$u = \cos 30°\cos\alpha - k;$	$v = \frac{1}{2};$
VII	$u = \cos\alpha - k;$	$v = 0;$

wo k den in Einheiten des sichtbaren Mondradius ausgedrückten Radius der Spiegelöffnung bedeutet, und mit Hilfe des aus den Ephemeriden entnommenen scheinbaren Mondradius berechnet wurde.

Der Phasenwinkel des Mondes wurde nach den Formeln

$$\cos\gamma = \cos(\lambda_s - \lambda_m)\cos\beta_m$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\frac{\Delta}{R} - \cos\gamma}{\sin\gamma}$$

für die mittleren Beobachtungsmomente berechnet. Hier bedeuten Δ und R die geozentrischen Sonnen- und Mondabstände. Bei der unsicheren Orientierung der Messungen war eine topozentrische Berechnung von Phasenwinkel und Durchmesser des Mondes überflüssig. Die folgende Tabelle enthält die für alle einzelnen Beobachtungen berechneten Winkel i, ε und α, sowie auch für die Randbeobachtungen den Mondhalbmesser.

Die Randbeobachtungen am Kometensucher.

N:o	α		Punkte I	II XII	III XI	IV X	V IX	VI VIII	VII	R k
1	56.9	i	18.8	44.8	—	82.2	—	87.9	88.3	16′ 4″
		ε	75.6	75.6		75.6		41.9	31.0	0.0313
2	82.7	i	7.3	44.7	—	88.2	—	88.2	88.2	15 33
		ε	75.4	75.4		75.4	—	30.3	5.4	0.0323
3	93.5	i	18.3	48.2	—	87.5	—	88.1	88.1	15 20
		ε	75.4	75.4	—	75.4	—	30.5	5.5	0.0328
4	127.5	i	52.5	67.3	—	86.3	—	87.5	87.5	14 52
		ε	75.5	75.5	—	75.5	—	48.6	40.0	0.0338
5	138.4	i	63.4	74.9	—	84.9	—	87.0	87.0	14 47
		ε	75.4	75.4	—	75.4	—	57.6	51.4	0.0340
6	−110.9	i	35.5	56.7	—	86.4	—	88.0	88.1	15 27
		ε	75.4	75.4	—	75.4	—	37.2	22.8	0.0325
7	72.9	i	0.9	43.0	—	85.3	—	87.6	87.6	14 48
		ε	73.6	73.6	—	73.6	—	32.9	14.7	0.0405
8	−120.6	i	46.9	63.8	—	85.1	—	87.3	87.3	14 52
		ε	73.3	73.3	—	73.3	—	43.9	33.3	0.0404
9	−109.3	i	35.7	56.8	—	85.6	—	87.5	87.5	14 49
		ε	72.9	72.9	—	72.9	—	36.7	21.8	0.0405
10	— 60.8	i	12.8	43.0	—	82.1	—	87.4	87.5	14 53
		ε	73.7	73.7	—	73.7	—	39.0	26.7	0.0403
11	— 50.3	i	23.5	45.5	62.5	79.7	—	87.1	87.1	14 58
		ε	73.7	73.7	73.7	73.7	—	45.8	36.8	0.0401
13	— 58.2	i	15.6	43.6	62.6	81.5	87.3	87.3	87.3	15 9
		ε	73.8	73.8	73.8	73.8	54.2	40.6	29.1	0.0396
22	— 47.1	i	26.9	47.2	63.2	79.5	87.2	87.2	87.2	16 25
		ε	74.5	74.5	74.5	74.5	58.9	48.3	40.2	0.0365
24	— 33.3	i	41.1	54.0	64.8	77.1	86.5	86.5	86.4	16 27
		ε	74.5	74.5	74.5	74.5	65.5	58.6	53.1	0.0365
27	20.5	i	53.8	60.5	67.5	75.3	84.8	84.7	84.6	16 1
		ε	74.3	74.3	74.3	74.3	71.7	67.1	64.1	0.0375
30	— 26.8	i	47.5	56.8	66.8	76.0	85.7	85.6	85.5	16 6
		ε	74.3	74.3	74.3	74.3	86.7	62.8	58.8	0.0373
32	25.5	i	48.5	57.2	66.0	75.6	85.4	85.3	85.2	15 28
		ε	74.0	74.0	74.0	74.0	69.2	63.6	59.8	0.0388
36	−134.9	i	60.8	—	—	84.6	—	—	86.1	15 53
		ε	74.2	—	—	74.2	—	—	48.1	0.0378
37	−123.6	i	49.1	—	—	85.4	—	—	87.4	16 5
		ε	74.3	—	—	74.3	—	—	36.3	0.0373

Randbeobachtungen am Frauenhoferschen Refraktor.

N:o	α		Punkte I	Punkte II XI	Punkte III XI	R k	N:o	α		Punkte I	Punkte II XII	Punkte III XII	R k
38	85.2	i	7.9	45.1	—	16 24	47	—57.4	i	19.2	45.1	64.0	15 16
		ε	77.3	—	—	0.0255			ε	76.6	—	—	0.0274
39	— 30.8	i	45.8	56.5	65.0	15 16	48	—46.0	i	30.5	48.9	64.5	15 7
		ε	76.6	—	—	0.0274			ε	76.5	—	—	0 0277
40	—120 2	i	43.2	61.1	77.9	16 18	49	—35.5	i	41.3	54.1	66.3	15 0
		ε	77.0	—	—	0.0257			ε	76.8	—	—	0.0279
43	— 81.4	i	4.8	44.4	66.2	15 19	50	— 4.6	i	71.7	73.1	74.6	14 46
		ε	76.6	—	—	0.0273			ε	76.3	—	—	0.0283
45	— 69.4	i	7.2	43.5	—	15 27	53	—41.4	i	35.1	50.9	65.0	14 50
		ε	76.6	—	—	0.0271			ε	76.4	—	—	0.0282
46	— 47.8	i	28.8	46.4	64.4	15 25	54	—19.5	i	56.8	63.1	69.7	14 44
		ε	76.6	—	—	0.0271			ε	76.3	—	—	0.0284

Die Beobachtungen auf der Scheibe.

N:o	α	Punkte 1	2	4	3	5	N:o	α	Punkte 1	2	4	3	5
12	—50.1	10.3	36.1	52.6	—13.4	—25.9	28	20.8	18.9	10.3	28.5	47.6	64.6
		39.8	14.0	2.6	—63.5	76.0			1.9	31.1	49.3	—26.8	—43.9
14	56.6	44.8	19.6	3.4	66.0	77.5	31	25.0	22.3	6.6	24.6	50.4	66.9
		11.8	37.1	53.3	— 9.4	—20.9			2.7	31.6	49.6	—25.5	—41.9
15	56.9	43.8	19.0	3.1	66.1	77.6	34	72.1	51.8	29.8	15.3	71.0	80.4
		13.1	37.8	53.8	— 9.2	—20.7			20.3	42.3	56.8	1.1	— 8.3
16	70.3	50.9	28.9	13.9	70.5	80.1	41	—119.8	71.4	58.8	50.2	81.3	85.8
		13.3	41.3	56.4	— 0.2	— 9.8			48.5	61.0	69.6	38.5	34.1
17	74.0	51.7	31.0	16.7	71.5	80.7	42	—119.8	71.3	58.8	50.2	81.3	85.8
		21.2	42.9	57.2	2.5	— 6.7			48.5	61.0	69.6	38.5	34.5
18	14.5	—13.6	16.0	34.4	43.5	60.8	44	— 81.3	56.2	35.9	22.4	73.4	81.7
		0.9	30.5	48.9	—28.9	—46.2			25.1	45.4	58.9	7.8	— 0.5
20	65.9	48.7	25.5	10.4	69.1	79.3	55	—136.7	76.9	68.0	61.7	84.0	86.1
		17.2	40.4	55.3	— 3.2	—13.4			59.8	68.8	75.0	52.8	49.7
23	—46.6	37.6	11.3	5.5	62.0	75.1	56	—124.2	72.8	61.3	53.2	82.0	86.1
		9.0	35.3	52.1	—15.4	—28.4			51.4	63.0	71.0	42.2	38.1
25	—33.0	28.3	0.3	17.4	55.3	70.5							
		4.6	32.7	50.4	—22.3	—37.5							

4. Die Diskussion der beobachteten Lichtverteilung.

In allen Punkten der Scheibe kann für die Dauer der Beobachtung der Phasenwinkel als konstant angesehen werden. Die vom Flächenelemente ds des Mondes ins Auge des Beobachters gelangende Lichtmenge ist eine Funktion der veränderlichen i, ε, α.

$$ds = \Gamma F(i, \varepsilon, \alpha)\, ds \tag{3}$$

wo Γ eine Konstante bedeutet. Wir haben die Aufgabe die Form der Funktion F aus den Beobachtungen zu bestimmen und machen zunächst den Versuch sie in der Form $F(i, \varepsilon, \alpha) = f(i, \varepsilon)\, \psi(\alpha)$ darzustellen, und $f(i, \varepsilon)$ aus den relativen Helligkeiten auf der Mondscheibe empirisch zu bestimmen. Wegen der Konstanz von α für jede relative Messung müsste das möglich sein, wenn die obige Trennung der Funktionen zulässig ist.

Zunächst wurde der Versuch gemacht auch die Funktion $f(i, \varepsilon)$ in ein Produkt aufzulösen

$$f(i, \varepsilon) = f_1(i) \cdot f_2(\varepsilon), \tag{4}$$

indem für jede der Funktionen $f_1(i)$ und $f_2(\varepsilon)$ eine Fouriersche Reihe mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt wurde. Die Beobachtungen am positiven Rande des Mondes, wo ε konstant ist, können dazu dienen, die Koeffizienten der Funktion $f_1(i)$ zu bestimmen. Ich machte den Ansatz

$$f_1(i) = A \cos i + B \cos 3\, i + C \cos 5\, i + \ldots$$

Nachdem die symmetrischen Punkte II und XII, III und XI, IV und X zu Mitteln vereinigt worden, wurden 44 Gleichungen für die relativen Helligkeiten angesetzt von der Form

$$A_1(\cos 3\, i - m \cos 3\, i_1) + B_1(\cos 5\, i - m \cos 5\, i_1) = m \cos i_1 - \cos i$$

wo m das beobachtete Helligkeitsverhältnis der Punkte des positiven Randes zur Helligkeit des Referenzpunktes I bedeutet. Die Auflösung dieser Gleichungen bei gleichem Gewicht führte zu dem Ausdrucke

$$\begin{gathered} f_1(i) = \cos i - 0.231 \cos 3\, i + 0.141 \cos 5\, i \\ \pm 0.013 \qquad \pm 0.017 \end{gathered} \tag{5}$$

Stellt man diese Gleichung graphisch dar, so erweist es sich, dass die entsprechende Kurve von 0° bis 67.5 nahezu gradlinig paralell zur Abszissenaxe verläuft, um dann wiederum nahezu gradlinig steil bis 0 abzufallen. Sie kann deshalb innerhalb der Genauigkeit ihrer Koeffizienten durch zwei sich schneidende gerade Linien dargestellt werden.

$$\begin{array}{ll} \text{Von } 0° \text{ bis } 67°.5 & \text{von } 67°.5 \text{ bis } 90° \\ f_1(i) = 0.800; & f_1(i) = 0.800 - (i - 67.5) \cdot 0.359. \end{array} \tag{6}$$

Die Darstellung der Beobachtungen ist für die Hörner der Sichel nicht ganz befriedigend, doch kann das auch zum Teil in der Unsicherheit der Bestimmung der Winkel i und ε liegen, die hier schnell veränderlich sind. Die Konstanz der Helligkeit des Mondrandes innerhalb $^3/_4$ des Halbkreises bei allen Phasenwinkeln ist jedenfalls sicher und schon während der Beobachtungen als Merkwürdigkeit aufgefallen.

Das erhaltene Ergebnis könnte unter Umständen für Beobachter von praktischem Werte sein, findet aber hier keine weitere Verwendung, weil faktisch die Trennung der Funktion $f(i, \varepsilon)$ in ein Produkt $f_1(i) f_2(\varepsilon)$ für die ganze Oberfläche des Mondes nicht möglich ist. Es scheint mir aber ausserdem auch theoretisch interessant, indem es den Gedanken nahelegt, dass erst bei 67.5° die Wirkung des Schattenwurfs der Unebenheiten der Mondoberfläche am Mondrande wirksam wird. Denkt man sich die Schatten durch Erhebungen der Oberfläche hervorgerufen, etwa konischer Art, so müssten Schattenwirkungen und ein Ausfall der mittleren Helligkeit erst eintreten bei Sonnenhöhen, die geringer sind, als die Erhebungswinkel der Erhöhungen, während bei grösseren Höhen im Gegenteil am positiven Mondrande die nach dem Lambertschen Gesetze zu erwartende Abnahme der Helligkeit dadurch aufgehoben wird, dass die Einfallswinkel des Sonnenlichts verkleinert werden. Der Bruch in der Helligkeitskurve wäre daher erklärlich, wenn der mittlere Erhebungswinkel der Unebenheiten der Mondoberfläche 23.5° betragen würde.

Verwendet man nur die Beobachtungen auf der Scheibe und am negativen Rande dazu die Funktion $f_2(\varepsilon)$ getrennt zu bestimmen, so erweist es sich unmöglich für sie einen einfachen Ausdruck zu finden, welcher der Gesamtheit der Beobachtungen genügen würde. Legt man dagegen die Seeligersche Form des Reflexionsgesetzes mit einem unbestimmten Koeffizienten

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} \tag{7}$$

den Beobachtungen zugrunde, so ist eine Darstellung der Gesamtheit der Beobachtungen für Phasenwinkel von 4° bis 138° und für Einfallswinkel von 0 bis 85° wohl möglich, wenn man den Koeffizienten λ mit dem Phasenwinkel veränderlich macht. Zunächst wurde versucht, einen mittleren Wert für λ abzuleiten, indem man die Abweichungen der Beobachtungen von der üblichen Form des Lommel-Seeligerschen Gesetzes ($\lambda = 1$) mit Hülfe der Gleichungen behandelt:

$$\Delta\lambda \text{ Mod. } \cos\varepsilon \frac{\cos i_1 - \cos i}{(\cos i + \cos\varepsilon)(\cos i_1 + \cos\varepsilon_1)} = \log a \frac{\cos i_1}{\cos i} \frac{\cos i + \cos\varepsilon}{\cos i_1 + \cos\varepsilon_1}. \tag{8}$$

Hier ist a das nach Seeliger berechnete Helligkeitsverhältnis der Punkte. Der Index 1 bezieht sich auf den Referenzpunkt, als welcher für die Beobachtungen auf dem Intensitätsäquator der mittlere Punkt 1 diente, bei den Beobachtungen am negativen Rande — der Mittelwert $\frac{\text{IV} + \text{X}}{2}$, derselbe welcher am positiven Rande als letzter Vergleichspunkt eingeht. Auf diese Weise wurden die 3 Gruppen von Gleichungen einzeln aufgelöst und als Korrektion des Wertes $\lambda = 1$ erhalten

$$\begin{aligned} \text{Mod. } \Delta\lambda &= 0.205 \pm 0.051 \quad \text{aus den Beobachtungen am positiven Rande} \\ &= 0.341 \pm 0.062 \quad \text{» » » » negativen Rande} \\ &= 0.438 \pm 0.113 \quad \text{» » » auf der Scheibe.} \end{aligned}$$

Als Resultat ergab sich dann mit Rücksicht auf die Gewichte

$$\begin{aligned} \text{Mod. } \Delta\lambda &= 0.279 \pm 0.042 \\ \Delta\lambda &= 0.642 \pm 0.097 \end{aligned}$$

und der Einfachheit halber wurde angenommen

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= 0.666 \\ \lambda &= \mathbf{0.333} = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle enthält unter Hypothese I die Darstellung der beobachteten Helligkeiten nach der Formel

$$\frac{I}{I_1} = \frac{\cos i}{\cos i_1} \cdot \frac{\cos i_1 + \frac{1}{3}\cos \varepsilon_1}{\cos i + \frac{1}{3}\cos i}. \qquad (9)$$

Die übrigbleibenden Fehler der relativen Helligkeiten geordnet nach den Phasenwinkeln.

Die Beobachtungen am Rande der Scheibe.

		½ (II + XII)		½ (III + XI)		½ (IV + X)		½ (V + IX)		½ (VI + VIII)		VII	
N:o	α	Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
50	−4.6	+0.01	*+0.03*	0.05	*−0.01*	—	—	—	—	—	—	—	—
54	−19.5	+0.06	*+0.08*	+0.02	*+0.07*	—	—	—	—	—	—	—	—
27	+20.5	+0.01	*−0.13*	−0.12	*−0.08*	−0.08	*+0.14*	−0.10	*−0.18*	−0.05	*+0.07*	−0.12	*+0.38*
30	−26.8	−0.01	*−0.01*	−0.04	*−0.04*	+0.22	*+0.22*	+0.37	*+0.37*	+0.64	*+0.64*	—	—
32	+25.5	−0.04	*0.03*	−0.08	*−0.06*	0.00	*+0.04*	0.21	*0.59*	+0.10	*0.38*	+0.01	*−0.19*
	Mittel	+0.01	*−0.01*	−0.05	*−0.02*	+0.07	*+0.13*	−0.02	*−0.13*	+0.23	*+0.11*	−0.05	*+0.10*
39	−30.8	−0.01	*−0.01*	+0.01	*0.00*	—	—	—	—	—	—	—	—
49	−35.5	−0.04	*−0.05*	−0.14	*−0.18*	—	—	—	—	—	—	—	—
53	−41.4	−0.01	*−0.03*	−0.09	*−0.17*	—	—	—	—	—	—	—	—
48	−46.0	−0.08	*−0.11*	−0.18	*−0.26*	—	—	—	—	—	—	—	—
24	−33.3	−0.11	*−0.13*	−0.04	*−0.08*	+0.22	*+0.14*	+0.45	*+0.18*	+0.65	*+0.38*	—	—
22	−47.1	−0.04	*−0.07*	−0.02	*−0.11*	+0.43	*+0.17*	+0.53	*−0.10*	+0.60	*−0.06*	—	—
11	−40.3	−0.07	*−0.11*	−0.12	*−0.21*	+0.30	*0.00*	—	—	—	—	—	—
	Mittel	−0.05	*−0.07*	−0.08	*−0.14*	+0.31	*+0.10*	+0.49	*+0.04*	+0.63	*+0.16*	—	—
47	−57.4	−0.15	*−0.17*	−0.13	*−0.19*	—	—	—	—	—	—	—	—
46	−67.8	−0.09	*−0.11*	−0.11	*−0.15*	—	—	—	—	—	—	—	—
45	−69.4	+0.01	*0.00*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	−56.9	+0.04	*+0.02*	—	—	+0.37	*+0.14*	—	—	+0.10	*−0.45*	—	—
10	−60.8	−0.05	*−0.02*	—	—	+0.63	*+0.48*	—	—	+0.87	*+0.49*	—	—
13	−58.2	−0.09	*−0.11*	−0.11	*−0.17*	+0.32	*+0.14*	+0.48	*+0.09*	—	—	—	—
	Mittel	−0.05	*−0.06*	−0.12	*−0.17*	+0.44	*+0.25*	+0.48	*+0.09*	+0.48	*+0.02*	—	—
43	−81.4	+0.03	*+0.02*	−0.05	*−0.09*	—	—	—	—	—	—	—	—
38	+85.1	+0.20	*+0.19*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	+82.7	+0.05	*+0.06*	—	—	−0.08	*−0.37*	—	—	—	—	—	—
3	+99.5	+0.04	*−0.01*	—	—	+0.50	*−0.11*	—	—	—	—	—	—
7	+72.9	+0.14	*+0.12*	—	—	+0.62	*+0.43*	—	—	—	—	—	—
	Mittel	+0.09	*+0.08*	−0.05	*−0.09*	+0.35	*−0.02*	—	—	—	—	—	—

N:o	α	½ (II – XII)		½ (III – XI)		½ (IV – X)		½ (V – IX)		½ (VI – VIII)		VII	
		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
40	—120.2	+0.03	—0.06	+0.01	—0.34	—	—	—	—	—	—	—	—
6	—110.9	—0.03	—0.11	—	—	+1.02	+0.31	—	—	—	—	—	—
8	—120.6	—0.02	—0.14	—	—	+0.90	+0.25	—	—	—	—	—	—
9	—109.3	+0.05	—0.03	—	—	+0.89	+0.28	—	—	—	—	—	—
	Mittel	+0.01	—0.08	+0.01	—0.34	+0.94	+0.28	—	—	—	—	—	—
4	127.5	+0.18	+0.06	—	—	+0.76	+0.04	—	—	—	—	+0.90	—0.14
5	138.4	—0.00	—0.17	—	—	+1.17	+0.55	—	—	+0.77	—0.22	+0.87	—0.14
36	—134.9	—0.20	—0.39	—	—	+1.18	+0.57	—	—	—	—	—	—
37	—123.6	—0.07	—0.26	—	—	+0.97	+0.30	—	—	—	—	—	—
	Mittel	—0.02	—0.19	—	—	+1.02	+0.36	—	—	+0.77	—0.22	+0.89	—0.14

Beobachtungen auf dem Intensitätsäquator.

N:o	α	Punkt 2		Punkt 4		Punkt 3		Punkt 5	
		Hypothese		Hypothese		Hypothese		Hypothese	
		I	II	I	II	I	II	I	II
18	14.5	—	—	—	—	+0.14	+0.17	+0.12	+0.18
28	20.8	—	—	—	—	—0.02	+0.01	+0.12	+0.22
31	25.0	—	—	—	—	—0.08	—0.06	+0.05	+0.09
	Mittel	—	—	—	—	+0.01	+0.04	+0.10	+0.16
25	—32.9	+0.09	+0.11	—0.02	+0.01	—	—	—	—
23	—46.6	+0.29	+0.38	+0.11	+0.27	—	—	—	—
12	—50.1	—0.06	—0.05	—0.03	+0.11	—	—	—	—
	Mittel	+0.11	+0.15	+0.02	+0.13	—	—	—	—
14	56.6	+0.09	+0.13	+0.21	+0.29	—0.20	—0.33	—0.24	—0.50
15	56.9	+0.17	+0.25	+0.12	+0.23	—0.18	—0.27	—0.06	—0.27
16	70.3	—0.01	+0.04	+0.17	+0.25	—0.08	—0.16	—0.36	—0.42
34	72.1	+0.03	+0.07	+0.08	+0.16	+0.17	+0.08	+0.14	+0.02
	Mittel	+0.07	+0.12	+0.14	+0.23	—0.07	—0.17	—0.14	—0.29
17	74.0	+0.11	+0.16	+0.17	+0.25	—0.16	—0.25	—0.01	—0.16
44	81.3	+0.12	0.04	—0.14	—0.05	+0.32	+0.24	+0.48	+0.35
	Mittel	+0.12	+0.06	+0.02	+0.10	+0.08	+0.00	+0.24	+0.09
42	119.8	—0.15	+0.11	—0.19	+0.24	+0.03	0.24	+0.76	+0.33
41	119.8	+0.05	+0.31	—0.17	+0.25	+0.06	—0.29	+0.43	+0.01
56	124.2	+0.17	+0.08	—0.00	+0.25	+0.36	—0.12	+0.78	—0.14
55	136.7	0.11	+0.22	—0.12	+0.40	+0.20	—0.14	+0.46	+0.07
	Mittel	—0.01	+0.18	—0.12	+0.28	+0.16	—0.20	+0.61	+0.07

Betrachtet man die übrigbleibenden Fehler in den Kolumnen Hypothese I, so ergibt sich, dass die Darstellung der Beobachtungen in allen Punkten der Scheibe mit Ausnahme eines Streifens, der dicht an den negativen Rand der Mondsichel anschliesst, befriedigend ist. Es sind dies alles Punkte, in denen der Einfallswinkel grösser ist als 75°, und den hierbei auftretenden Lichtverlusten durch Schattenwurf trägt die Formel (9) somit nicht Rechnung. Die Abweichungen am negativen Rande nehmen mit wachsendem Phasenwinkel zu und erreichen 1 m bei Phasenwinkeln die 120° übersteigen, sie verschwinden ganz bei Phasenwinkeln, die kleiner sind als 30°. Dieses ist auch zu erwarten, weil in der Nähe der Opposition die Schatten durch die Erhöhungen selbst verdeckt sind, während sie bei wachsendem Phasenwinkel immer mehr für das Auge hervortreten.

Der grösste Teil dieser Abweichungen kann zum Verschwinden gebracht werden, wenn man dem Koeffizienten λ in der Seeligerschen Formel mit dem Phasenwinkel veränderliche Werte zuteilt. Ich erhielt dieselben durch Auflösung der Gleichungen (8) für Beobachtungsgruppen mit naheliegenden Werten von α. Die erhaltenen Korrektionen $\Delta\lambda$ wurden dann graphisch ausgeglichen. Als Resultat ergab sich dann folgende Tabelle.

Tafel I.

Werte des Koeffizienten λ.

α	λ	α	λ	α	λ	α	λ
0°	0.00	50°	0.80	90°	0.52	125°	1.39
10	0.05	55	0.72	95	0.63	130	1.51
20	0.10	60	0 50	100	0.80	135	1.63
25	0.22	70	0.50	105	0.96	140	1.75
30	0.38	80	0.50	110	1.06	145	1.87
35	0.52	85	0.50	115	1.16	150	2.00
40	0.64	90	0.52	120	1.26		
45	0.75						

LIBRARY

Die Werte von λ in der Nähe der Opposition sind hier recht willkürlich; der Tatsache, dass die Helligkeit der Kontinente bei Vollmond und bis zu 20° Phasenwinkel überall auf der Scheibe dieselbe ist, kann durch die verschiedensten Werte von λ rechnerisch genügt werden. Die Korrektionen $\Delta\lambda$ wurden erst bei Phasenwinkeln $\alpha > 20°$ einigermassen sicher erhalten. Die Fortsetzung der Kurve vom Werte $\lambda = 0.1$ bis $\lambda = 0.0$ für $\alpha = 0$ ist deshalb willkürlich.

Mit den obigen Werten von λ sind alle relativen Helligkeiten von neuem berechnet und die übrigbleibenden Fehler unter Hypothese II angeführt. Betrachtet man dieselben, so findet man, dass die grossen Abweichungen am negativen Rande der Scheibe verschwunden sind, und somit dem Schattenwurf bei grossen Phasenwinkeln in der Hauptsache Rechnung getragen ist. Die Darstellung der Beobachtungen auf dem Intensitätsäquator ist vielleicht weniger befriedi-

gend, indem systematische Abweichungen auftreten, die den zufälligen Fehler übersteigen. Letzteren habe ich aus den Abweichungen von den Mittelwerten für naheliegende Phasenwinkel berechnet. Es ergab sich als mittlerer Fehler einer Beobachtung

	Am pos. Rande	Am neg. Rande	Auf der Scheibe
Hypothese I	$\varepsilon = \pm 0.058$	± 0.168	± 0.122
Hypothese II	$\varepsilon = \pm 0.074$	± 0.200	± 0.118
Mittel	$\varepsilon = \pm 0.066$	± 0.184	± 0.120

Die Beobachtungen am positiven Rande sind bei weitem die genauesten, die am negativen sind sehr ungenau. Die Ursache für diesen Unterschied ist vor allem die Konstanz der Helligkeit längs dem positiven und ihre schnelle Abnahme am negativen Mondrande. Kleine Einstellungsfehler auf die geschätzten Teilungspunkte haben am positiven Rande gar keinen Einfluss, am negativen — einen sehr grossen. Eine zweite Fehlerquelle ist das verschiedene Reflexionsvermögen der einzelnen Teile der Mondkontinente. Auch der hierdurch bedingte Fehler ist am positiven Mondrande nur gering, weil hier nur wegen der Libration und des Umstandes, dass manchmal der westliche, manchmal der östliche Mondrand »positiv» waren, auf verschiedene Mondpartien eingestellt wurde, während am negativen Rande ständig neue Partien gemessen wurden; da die Phasenwinkel, die zu Mittelwerten vereinigt sind, bis zu 20° von einander abweichen, so sind die Mittelwerte der Helligkeit durch diese topographischen Verschiedenheiten beeinflusst, ebenso wie der mittlere Fehler, der aus den Abweichungen der Einzelmessungen von diesen Mittelwerten berechnet ist. Die Genauigkeit der Beobachtungen auf der Scheibe liegt zwischen der am positiven und am negativen Rande. Hier wechseln ebenfalls, wenn auch in geringerem Masse (wegen der Teilungsmethode) die eingestellten Mondpartien, aber die Helligkeit verändert sich nur langsam. Es wäre leicht aus den oben angeführten mittleren Fehlern in der Weise wie ich es a. a. O.[1] für meine Messungen an Jupiter und Saturn getan habe, den mittleren Einstellungsfehler in Einheiten des Mondradius abzuleiten. Doch erscheint mir diese Untersuchung ohne Bedeutung.

Betrachten wir die systematischen Abweichungen für die einzelnen Punkte, also die Mittelwerte der Helligkeiten für naheliegende Phasenwinkel, so finden wir, dass bei veränderlichem λ (Hypothese II) die grossen Abweichungen am negativen Rande nahezu verschwunden sind. Die Darstellung der Helligkeiten in den übrigen Punkten ist aber nicht genauer, sondern etwas weniger genau als bei konstantem λ. Diese Darstellung ist bei beiden Hypothesen besonders aber bei der Hypothese I durchaus befriedigend. Abweichungen bis zu 0.2 m können bei der hier angewandten Messungsmethode durchaus zum Bereiche der topographischen zufälligen Abweichungen des Reflexionsvermögens der gemessenen Mondpartie gerechnet werden. Es erscheint daher zwecklos durch Einführung anderer empirischen Konstanten in die Reflexionsformel ihre Beseitigung anzustreben.

[1] Photometrische Untersuchungen über Jupiter u. d. Saturnsystem. Seite 19.

5. Die absoluten Helligkeiten des Mondrandes.

Ein Teil der Messungen des Mondrandes am Frauenhoferschen Refraktor ist direkt von Tag zu Tag mit einander vergleichbar, weil, wie das auch jedesmal im Beobachtungsjournal vermerkt wurde, am Instrumente keinerlei diesen Vergleich gefährdende Veränderung oder Verstellung stattgefunden hatte. Solche Veränderungen waren entweder das Auswechseln des benutzten Blauglases vor der elektrischen Lampe des Photometers, des Diaphragmas vor derselben oder vor der Objektivöffnung, endlich Veränderungen an der Akkumulatoren-Batterie oder den Kontakten der Leitung, welche sich durch Schwankungen oder starke Abnahme der Ablesungen des Milliampermeters kundgaben. Wenn keinerlei Verdacht derartiger Veränderungen vorlag, durfte die Helligkeit der Spiegelöffnung des Photometers als einzig von der Lage der Nikolschen Prismen in demselben abhängig gedacht werden. Die Helligkeiten des Mondrandes zu verschiedenen Tagen konnten dann, nach Anbringung der Reduktion auf den Zenit nach den Müllerschen Tafeln der Extinktion, ebenso mit einander verglichen werden, wie die Helligkeiten an verschiedenen Punkten der Scheibe am selben Abend. Es sind nur wenige Beobachtungen, die für diese Vergleiche brauchbar sind, sie umfassen aber das Intervall der Phasenwinkel von 4° bis 120° und schmiegen sich einer einfachen leicht abfallenden Kurve gut an. Man darf sie als von gröberen Fehlern frei ansehen und wird die erhaltene Kurve für die Theorie verwenden dürfen. Die Messungen sind in der folgenden Tabelle enthalten:

Die absoluten Messungen.

No	Gr. m. Z.	α	Gemess. Helligk.	Korrektion wegen Amper.	Korrektion wegen Extinkt.	Korrig. Helligk.	Zahl d. Messung	Bemerkungen
	1918							
38	Jan. 19. 395	85°.2	$3^m.04$	−0.11	+0.45	3.38	4	Beob. 3 Alles unveränd.
39	Jan. 24. 206	— 30.8	3.88	−0.05	+0.13	3.96	8	» 3.5 » »
40	Febr. 15. 188	—120.2	3.62	−0.11	+0.14	2.65	8	» 4 » »
43	Febr. 18. 224	— 81.4	3.36	−0.01	+0.09	3.44	8	» 5 » »
45	Febr. 19. 228	— 69.4	3.42	+0.01	+0.05	3.48	4	» 4 » »
46	Febr. 19. 362	— 67.8	3.30	0.00	+0.10	3.40	8	» 4 » »
50	Febr. 25. 393	— 4.6	3.94	−0.06	+0.17	4.05	8	» 4 » »

Die Korrektionen wegen Extinktion sind gering bis auf einen Fall in No. 38. Hier war der Mond nur 20° über dem Horizonte. Doch ist glücklicherweise eine andere Beobachtung No. 43 bei einem, dem absoluten Betrage nach, naheliegenden Phasenwinkel vorhanden und in guter Übereinstimmung mit No. 38. Es wurden nur die Messungen in der Mitte des positiven Mondrandes (Punkt I) zum Vergleiche benutzt. Die für denselben aus den Einstellungen des Positionskreises von einem willkürlichen Anfangspunkt berechneten Helligkeiten stehen in der Kolumne »Gemessene Helligkeit». Die Korrektionen wegen Ampermeter sind Reduktionen

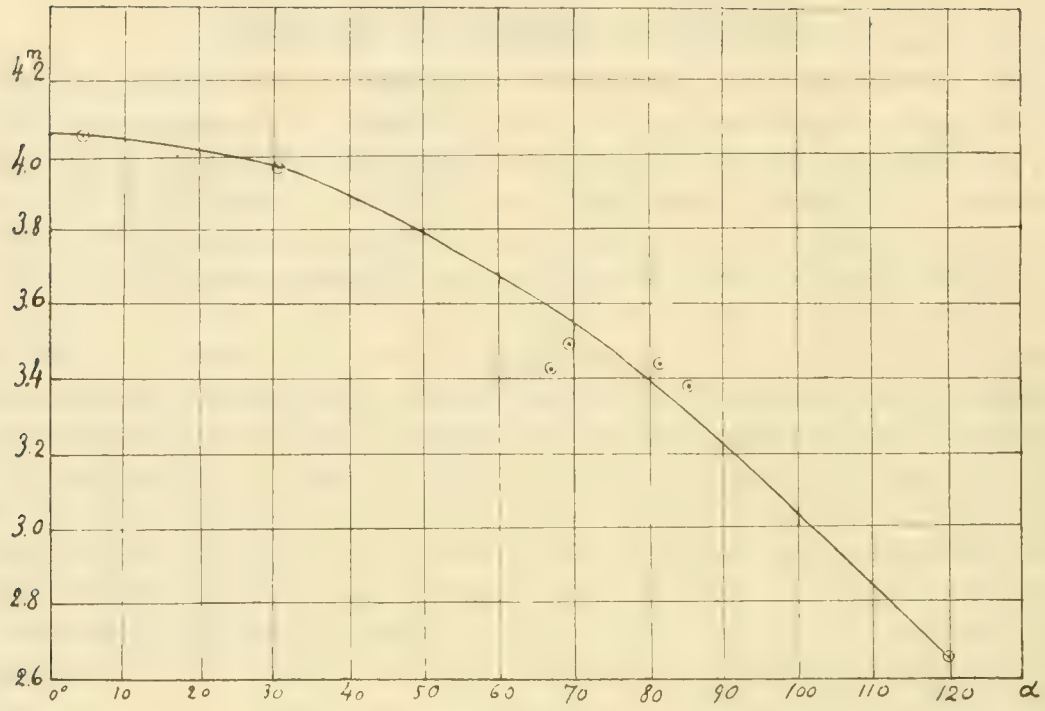


Fig. 2

auf die Ampermeterablesung 38.00, von der die beobachteten immer nur wenig abweichen. Die nebenstehende Kurve veranschaulicht die Abnahme der Helligkeit des Mondrandes (Fig. 2). Ein Unterschied zwischen dem westlichen und östlichen Mondrande kann bei der geringen Zahl der Beobachtungen nicht hervortreten. Doch kann er nicht gross sein, wie das die folgenden Messungen der Helligkeit der Vollmondscheibe beweisen.

Am 25. Febr. 1918 konnte die Helligkeit der Vollmondscheibe (Phasenwinkel 4°) untersucht werden. Das geschah durch Messungen am grossen Refraktor längs dem ganzen Mondrande und im Zentrum der Scheibe. Andere Punkte innerhalb der Scheibe wurden hierbei nicht mitgemessen, weil durch zahlreiche Messungen in der Nähe der Opposition an demselben Abende und auch an verschiedenen anderen festgestellt war, dass die Helligkeit innerhalb der Kontinente auf der typischen Mondoberfläche dieselbe ist wie im Zentrum. Die hier angeführten Messungen sind mit dem grössten Spiegel des Prismas (Halbmesser 25″.1) also in einem Abstande von 0.03 R vom Mondrande ausgeführt. Doch gelten sie unverändert bis zum Rande, da keine merkbare Veränderung der Helligkeit am Mondrande stattfindet.[1]

[1] Manchen Beobachtern erscheint der Vollmond mit blossem Auge am Rande heller als in der Mitte. Es ist das augenscheinlich eine Kontrasterscheinung, die besonders deutlich an den Stellen wirksam ist, wo grosse dunkle Partien (maria) nahe an dem hellen Rand herantreten. Ein ganz geringes Anwachsen der Helligkeit in aller nächster Nähe des Randes kann vielleicht bei meinen Messungen durch Diffraktionswirkung am Objektive verwischt worden sein.

6. Die Helligkeit des Mondrandes in Bezug auf das Zentrum der Mondscheibe bei Vollmond.

N:o 51. 1918 Febr. 25. 408 Gr. m. Z.

				P	U	N	K	T	E			
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
+0.23	+0.16	−0.04	−0.08	+0.04	−0.01	+0.14	+0.03	−0.03	+0.09	−0.01	0.00	

Mittel $+0.04$ m. ± 0.03

Der unmittelbare Eindruck bei Betrachtung des Mondes mit unbewaffnetem Auge, dass der Vollmond in seinem typischen Teile gleichmässig hell ist, ist durch diese Messungen bestätigt.

7. Bestimmung der Funktion $\psi(\alpha)$.

Aus der Phasenkurve. Sieht man von der schmalen Zone am negativen Rande des Mondes mit Einfallswinkeln grösser als 75° ab, so kann für den übrigen Teil die Trennung der Funktionen $f(i, \varepsilon)$ und $\psi(\alpha)$ als gültig angesehen werden und die reflektierte Lichtmenge daher dargestellt werden in der Form

$$dq = I\, ds\, F(i, \varepsilon, \alpha) = I\, ds\, f(i, \varepsilon)\, \psi(\alpha), \tag{10}$$

wo

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \frac{1}{3} \cos \varepsilon}$$

ist.

Der durch die Vernachlässigung der stärkeren Lichtabnahme innerhalb jener schmalen Zone in der Gesamtlichtstärke des Mondes entstehende Fehler kann erst bei Phasenwinkeln grösser als 90° einige Prozent ausmachen.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung von $\psi(\alpha)$. Diese Funktion kann durch Vergleichung der beobachteten Phasenkurve mit der aus dem Integral

$$Q = I \iint f(i, \varepsilon)\, ds$$

über die sichtbare Oberfläche berechneten erhalten werden. Bei den üblichen Variablen, Länge ω, Breite ψ, die mit i und ε durch die Gleichungen verbunden sind

$$\begin{aligned} \cos i &= \cos \psi \cos(\omega - \alpha) \\ \cos \varepsilon &= \cos \psi \cos \omega \end{aligned} \tag{11}$$

und $ds = R^2 \cos \psi\, d\psi\, d\omega$

stellt sich dieses Integral in der Form dar

$$Q = I R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi\, d\psi \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(\omega - \alpha)}{\cos(\omega - \alpha) + \frac{1}{3} \cos \omega}\, d\omega$$

und führt nach ausgeführter Integration zu dem Ausdrucke

$$Q = \frac{\Gamma R^2 \pi}{2}\left\{\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\mu-\frac{\alpha}{2}\right)}{m} + \frac{\sin\mu\sin(\mu-\alpha)}{m}\log\text{nat}\left[\operatorname{cotg}\frac{\alpha-\mu}{2}\operatorname{cotg}\frac{\mu}{2}\right]\right\}, \qquad (12)$$

wo μ und m aus den Gleichungen bestimmt werden.

$$\sin\alpha = m\sin\mu$$
$$0.333 + \cos\alpha = m\cos\mu.$$

Die nach dieser Formel berechnete Lichtkurve ist in der folgenden Tabelle berechnet. In ihrer zweiten Kolumne stehen die Helligkeiten bei verschiedenen Phasen in Einheiten der Oppositionshelligkeit:

$$Q_0 = \frac{3}{4}\Gamma R^2\pi.$$

In der folgenden Kolumne ist die Phasenkurve nach RUSSEL[1] angeführt. Sie muss z. Z. als die sicherste Phasenkurve des Mondes angesehen werden, weil sie aus den gesamten bisher veröffentlichten Beobachtungsreihen nach kritischer Verarbeitung abgeleitet ist. In der letzten Kolumne stehen die Werte der Funktion $\psi(\alpha)$, wie sie sich aus der Division der Zahlen der dritten und zweiten Kolumne ergeben.

Tafel II.

Funktion $\psi(\alpha)$.

α	$\frac{Q}{Q_0}$ nach (12)	$\frac{Q}{Q_0}$ beobacht.	$\psi(\alpha)$	α	$\frac{Q}{Q_0}$ nach (12)	$\frac{Q}{Q_0}$ beobacht.	$\psi(\alpha)$
0°	1.000	1.000	1.000	80°	0.472	0.149	0.315
10	0.979	0.816	0.834	90	0.392	0.108	0.274
20	0.936	0.654	0.699	100	0.317	0.075	0.235
30	0.871	0.523	0.599	110	0.247	0.050	0.202
40	0.793	0.412	0.519	120	0.185	0.032	0.170
50	0.722	0.326	0.451	130	0.132	0.019	0.140
60	0.643	0.267	0.403	140	0.085	0.010	0,112
70	0.555	0.199	0.359	150	0.051	0.004	0.078

Die Funktion $\psi(\alpha)$ zeigt einen sehr scharfen Fall in der Nähe der Opposition, zwischen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 30°$. Macht man den Versuch die Phasenkurve mit Hilfe der Seeligerschen Formel mit veränderlichem λ darzustellen, so ist es schwierig diese Werte von λ mit denen der Tafel I in Einklang zu bringen, wenn auch ihr Verlauf ähnlich ist. Zum Studium der Eigentümlichkeiten der Mondoberfläche erscheint daher die Untersuchung des Verlaufes der Funktion $\psi(\alpha)$, wie sie in der vorigen Tabelle für ein konstantes $\lambda = 0.333$ erhalten worden ist, zweckmässiger zu sein, da mit diesem Werte von λ die Lichtverteilung innerhalb eines grossen Phasenbereichs bis auf die erwähnte schmale Zone fast vollkommen dargestellt wird. Freilich gilt das nur für die typische Mondoberfläche, also nicht für die maria, die hellen Strahlen, das Innere der Krater. Berechnen wir daher den Verlauf der Funktion $\psi(\alpha)$ aus unseren absoluten Messungen des Mond-

[1] Astrophys. Journal XLIII, pag. 114.

randes, so können wir eine Übereinstimmung mit dem $\psi(\alpha)$ der vorigen Tabelle nur dann erwarten, wenn für diese Teile der Oberfläche die Funktion $F(i, \varepsilon, \alpha)$ einen ähnlichen Verlauf hat. In Bezug auf die maria hat das neuerdings E. Öpik festgestellt, und wir wollen selbst weiterhin andere Bestätigungen dieser Annahme liefern.

Aus den absoluten Messungen des Mondrandes. Bei den absoluten Beobachtungen des Mondrandes war der Reflexionswinkel nahezu konstant und gleich

$$\varepsilon = 76.5^\circ; \quad \cos \varepsilon = 0.233.$$

Die Funktion $\psi(\alpha)$ wird daher aus den absoluten Messungen durch folgende einfache Rechnung gefunden

$$\psi(\alpha) = \frac{I_\alpha}{I_0} \frac{1 + 0.078 \sec i}{1.333}.$$

Folgende Tafel enthält den so berechneten Verlauf der Funktion $\psi(\alpha)$ in der dritten Kolumne. Die zweite Kolumne enthält das $\psi(\alpha)$ der vorhergehenden Tafel und die vierte dieselben Werte dividiert durch 0.72. In der letzten Kolumne stehen die Abweichungen. Der Verlauf der Funktion $\psi(\alpha)$ in der dritten Kolumne zeigt einen weniger starken Fall in der Nähe der Opposition. Die typische Mondoberfläche nimmt langsamer an Helligkeit ab, als die Gesamtoberfläche. Es gibt also Gebilde auf dem Monde, die in der Nähe der Opposition viel schneller an Helligkeit verlieren. Die beiden Kurven $\psi(\alpha)$ fallen zusammen, wenn man die aus der Phasenkurve abgeleiteten Werte von $\psi(\alpha)$ durch 0.72 dividiert, was der Annahme entspricht, dass der Wert von $\psi(\alpha)$ nicht bis 1.00, sondern bis 0.72 in der Opposition ansteigt. Der scharfe Abfall der Helligkeiten jener besonderen Gebilde liegt aber, wie man aus der Tabelle ersieht, dann wesentlich zwischen 0° und 30°. In diesem Gebiete fällt dann die Funktion $\psi(\alpha)$ die durch Überlagerung der Kurven $\psi(\alpha)$, wie sie für die betreffenden Gebilde und die typische Mondoberfläche gelten, auch stärker ab, während sie für den weiten Umfang der Phasenkurve zwischen 30° und 120° mit der aus den absoluten Messungen erhaltenen vollkommen übereinstimmt. Beobachtungen des Mondrandes über diesen Bereich heraus liegen nicht vor, auch wäre ein Vergleich ausserhalb dieses Gebietes schon wegen des Gültigkeitsbereichs der Funktion $f(i, \varepsilon)$ nicht möglich.

Tafel III.

Funktion $\psi(\alpha)$.

α	Aus d. Phasenkurve	Aus den abs. Messungen	$\psi(\alpha):0.72$	Δ	α	Aus d. Phasenkurve	Aus den abs. Messungen	$\psi(\alpha):0.72$	Δ
0°	1.00	1.00	1.39	−0.39	70	0.36	0.50	0.50	0.00
10	0.83	0.89	1.17	−0.28	80	0.32	0.44	0.44	0.00
20	0.70	0.83	0.96	−0.13	90	0.27	0.38	0.38	0.00
30	0.60	0.78	0.83	−0.05	100	0.24	0.32	0.32	0.00
40	0.52	0.70	0.72	−0.02	110	0.20	0.27	0.28	−0.01
50	0.45	0.64	0.62	+0.02	120	0.17	0.22	0.24	0.02
60	0.40	0.57	0.56	+0.01					

8. Beobachtungen der Helligkeitsschwankung einzelner Mondgebilde.

Die vorhergehende Untersuchung hat gezeigt, dass nicht alle Mondgebilde dem Beleuchtungsgesetz folgen, welches wir für die typische Mondoberfläche abgeleitet haben. Beobachtungsreihen über die Veränderlichkeit solcher Gebilde sind deshalb von besonderem Werte. Ausser der ausgedehnten, aber wenig genauen Beobachtungen von WISLIZENUS[1], die WIRTZ bearbeitet und veröffentlicht hat, sind in neuerer Zeit flächenphotometrische Beobachtungen der maria von BARABASCHEW[2] in Charkow und einzelne Reihen verschiedener Mondpartien von A. MARKOW[3] bekannt geworden. Letztere sind ohne Photometer nach der Pickeringschen Methode gemessen. Die während der Drucklegung dieser Arbeit erschienene photographische Beobachtungsreihe von E. ÖPIK[4] kann hier nicht mehr diskutiert werden. Erwähnt sei nur, dass er für die *maria* einen ähnlichen Verlauf der Intensitätskurve findet, wie für die Kontinente. Dieses Resultat finden wir auch in den Beobachtungen der beiden russischen Beobachter bestätigt.

Betrachtet man die von WIRTZ in A. N. Band 201 gegebenen graphischen Darstellungen der Veränderlichkeit von zwanzig Mondgebilden während der Lunation, so fällt sofort die grosse Amplitude der Lichtschwankung für die allermeisten derselben auf. WIRTZ wählt als Argument den »photometrischen Faktor»

$$F = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

und trägt als Ordinaten direkt die beobachteten Helligkeiten auf. Das Maximum des photometrischen Faktors, das WIRTZ als »photometrischen Mittag» bezeichnet, tritt ein, wenn $i = \varepsilon$, oder $\alpha = 0$, das heisst bei Vollmond. Die Wirtzschen Kurven haben alle ihr Maximum nahezu im photometrischen Mittag, also für den Vollmond, unabhängig von der Lage der Punkte auf der Mondoberfläche. Sie enthalten deshalb die von Herrn MARKOW als »Phénomène Barabaschew» bezeichnete Tatsache der starken Abhängigkeit der Lichtkurven vom Phasenwinkel, wobei $\psi(\alpha)$ bei $\alpha = 0$ ihr Maximum hat. Dieselbe Tatsache, mir auch bei anderen Planeten wohl bekannt, und als Grundlage der Theorie angenommen,[5] tritt ja mit grösster Deutlichkeit auch in meinen Beobachtungen des Mondes hervor und gilt somit sowohl für die typische Mondoberfläche, als für alle Einzelheiten derselben. Kleine Verschiebungen des Maximums der Wirtzschen Lichtkurven gegen den photometrischen Mittag sind hierbei ohne Bedeutung; sie sind leicht schon durch eine Neigung der beobachteten Gebilde gegen den Horizont erklärt, können auch andere naheliegende Erklärungen finden, wie wir weiterhin zeigen werden. Ich übergehe hier die Versuche von Herrn MARKOW und BARABASCHEW eine physikalische Deutung der Funktion $\psi(\alpha)$ zu geben, weil davon im zweiten Teile dieser Arbeit eingehend die Rede sein wird und will nur einige Beobachtungen der genannten Autoren dazu verwenden, um aus ihnen den Verlauf der Funktion

[1] A. N. 201, 289.

[2] A. N. 217, 445.

[3] A. N. 221, 66

[4] Photometric measures of the moon and the earthshine. Publications de l'observatoire astronomique Tartu. Tome, XXVI, N:o 1.

[5] Photometrische Untersuchungen über Jupiter u. das Saturnsystem.

$\psi(\alpha)$ für einzelne Mondgebilde abzuleiten, und mit demjenigen für die typische Mondoberfläche zu vergleichen. Die Beobachtungen von WISLIZENUS, so wertvoll sie auch für uns sind, durch die Bestätigung der oben erwähnten Tatsachen, und den Nachweis der Verschiedenheit der Lichtkurven für verschiedene Mondgebilde, sind doch zu ungenau und zu wenig zahlreich, um eine Klassifizierung derselben zu ermöglichen, was erst nach Wiederholung der Messungen an denselben Gebilden möglich sein wird. Die Beobachtungen der russischen Autoren sind freilich für den obengenannten Zweck auch noch ungenügend. Die hier folgende Rechnung ist deshalb auch nur ein vorläufiger Versuch, der angeführt wird, um einen Typus der Kurven hervortreten zu lassen, der geeignet ist die Zahlen der Tafel 3 zu erklären.

Wir müssen bei der Ableitung der Funktion $\psi(\alpha)$ für die Funktion $f(i, \varepsilon)$ auch hier dieselbe Form annehmen, wie für die typische Mondoberfläche, weil sonst die abgeleiteten Funktionen $\psi(\alpha)$ nicht mit einander vergleichbar sind. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass diese Form physikalisch begründet ist. Bei der Berechnung ist dabei aber auf dem Gültigkeitsbereich der Funktion

$$f(i, \varepsilon) = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \frac{1}{3} \cos \varepsilon}$$

auf der Mondoberfläche Rücksicht genommen.

Maria. Für die in dem Markowschen Aufsatze angeführten Zahlen, die sich auf *Mare Crisium*, *Mare Foecunditatis* und *Mare Humorum* beziehen und die Originalwerte der beobachteten Helligkeiten nebst der Längendifferenz der beobachteten Mondpunkte gegen die Sonne enthalten, wurde dieselbe dem Phasenwinkel gleichgesetzt. Weiter wurden die Winkel i und ε berechnet und die Helligkeiten nach den Argumenten α und i graphisch dargestellt und durch Kurven verbunden. Mit grösster Deutlichkeit trat dabei die Erscheinung auf, dass die maximale Lichtstärke bei $i = \varepsilon$ eintritt und scharf nach beiden Seiten abfällt. Die Lichtstärke bei $i = \varepsilon$ wurde dann abgelesen und die beobachteten Helligkeiten durch dieselbe dividiert. Bezeichnet man den Wert der Funktion $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ mit 1 so folgt

$$I_\alpha = G \frac{\cos i}{\cos i + \frac{1}{3} \cos \varepsilon} \cdot \psi(\alpha); \quad I_0 = \frac{3}{4} G$$

und

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \frac{4}{3} \frac{\cos i}{\cos i + \frac{1}{3} \cos \varepsilon} \psi(\alpha)$$

woraus $\psi(\alpha)$ bestimmt wird.

Für die von MARKOW nicht gemessenen *Mare Tranquillitates* und *Oceanus Procellarum* wurden die Helligkeitswerte BARABASCHEW's ausgeglichenen Kurven entnommen und da die Beobachtungen hier nahe dem Intensitätsäquator des Mondes liegen, so wurde hier ε gleich der Länge l der beobachteten Punkte angenommen, und dadurch jede weitere Rechnung erspart, da BARABASCHEW's Kurven nach dem Argument i geordnet sind. Nach Anbringung der Korrektion wegen der Funktion $f(i, \varepsilon)$ wurde $\psi(\alpha)$ in derselben Weise wie oben bestimmt. Für die zwei genannten Gruppen wurden die Werte von $\psi(\alpha)$ einzeln graphisch ausgeglichen und den erhaltenen Kurven folgende Werte entnommen.

Tafel IV.

Die Funktion $\psi(\alpha)$ für die maria.

α	Gr. I	Gr. II	Mittel	Aus der Phasenkurve	$0.35\ \psi_m + 0.65\ \psi_k$	α	Gr. I	Gr. II	Mittel	Aus der Phasenkurve	$0.35\ \psi_m + 0.65\ \psi_k$
0°	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	50°	0.30	0.45	0.37	0.45	0.54
10	0.65	0.87	0.76	0.83	0.84	60	0.27	0.36	0.32	0.40	0.48
20	0.52	0.75	0.63	0.70	0.76	70	0.24	0.27	0.26	0.36	0.42
30	0.43	0.65	0.54	0.60	0.70	80	0.22	0.23	0.23	0.32	0.37
40	0.37	0.55	0.46	0.52	0.62	90	0.21	0.17	0.19	0.27	0.30

Hiernach haben die maria einen etwas stärker abfallenden Verlauf der Funktion $\psi(\alpha)$ als die mittlere Mondoberfläche. Will man diesen Unterschied, der nicht gesichert ist, als reell auffassen, so hat man entsprechend dem prozentualen Anteil der maria an der Gesamtoberfläche, die Funktion $\psi(\alpha) = 0.35\ \psi_m(\alpha) + 0.65\ \psi_k(\alpha)$ zu bilden und diese dann mit $\psi(\alpha)$ für die Gesamtoberfläche zu vergleichen. Die entsprechenden Zahlen stehen in der letzten Kolumne der Tafel IV. Man sieht, dass die aus der Phasenkurve für die mittlere Mondoberfläche abgeleitete Funktion $\psi(\alpha)$ immer noch schärfer abfällt; es gibt also noch Gebilde der Mondoberfläche mit einer schnelleren Abnahme der Helligkeit in der Nähe der Opposition.

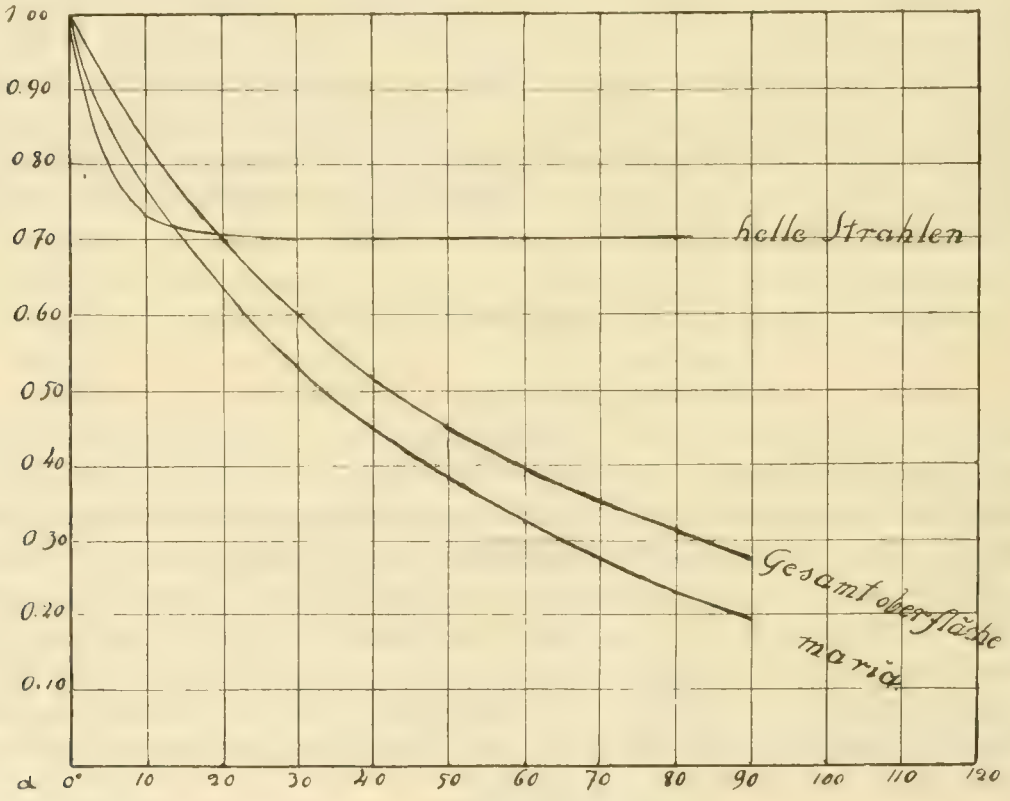


Fig. 3.

Die hellen Strahlen. Eine interessante Ergänzung des Vorigen finden wir bei der Berechnung der Funktion $\psi(\alpha)$ für die Beobachtungen Markow's der Helligkeitsschwankung eines hellen Strahls, der vom Krater Kopernikus ausgeht, und die vom Inneren eines kleinen Kraters. Behandelt man die von Markow angeführten Zahlen für die Helligkeiten dieser Gebilde in derselben Weise wie die Beobachtungen Barabaschew's, so ergibt sich für die Funktion $\psi(\alpha)$ im Mittel aus beiden ganz ähnlich verlaufenden Kurven folgender Verlauf.

Tafel V.

Die Funktion $\psi(\alpha)$ für die hellen Strahlen.

α	$\psi(\alpha)$	α	$\psi(\alpha)$
0°	1.00	30°	0.70
5	0.80	40	0.70
10	0 73	50	0.70
15	0.72	60	0.70
20	0.70	70	0.70

So ungenau die Beobachtungen auch sein mögen, so lassen sie doch bei der guten Übereinstimmung der beiden Kurven für den hellen Strahl und den Krater und dank ihrer grossen Anzahl keinen Zweifel über den eigentümlichen in den Zahlen dieser Tabelle hervortretenden Verlauf der Kurve, die von 0° bis 15° scharf abfällt, und von 20° an parallel zur Abszissenaxe verläuft. Unter den von Wirtz gegebenen Kurven verraten einige, wenn auch schwächer ausgeprägt, einen ähnlichen Charakter. Die Beobachtungen sind eine Bestätigung der schon von W. H. Pickering gemachten Beobachtung über die Sichtbarkeit der hellen Strahlen in der Nähe der Opposition. Unabhängig von ihrer Lage auf der Mondoberfläche verschwinden diese Strahlen bei grösseren Phasenwinkeln auf dem Hintergrunde, ihre Helligkeit nimmt also stark zu, wenn der einfallende und reflektierte Strahl in ihrer Richtung zusammenfallen. Es ist zunächst nicht bekannt, auf welche andere Gebilde ausser dem Inneren kleiner Krater sich diese Erscheinung noch erstreckt, und auch die Helligkeit dieser Gebilde in der Opposition im Vergleich zu der mittleren Helligkeit der Kontinente und der maria ist nicht genügend bekannt. Es ist deshalb schwierig den Einfluss ihrer Helligkeitskurven auf die Phasenkurve des Mondes zu berechnen. Photographische Helligkeitsbestimmungen sind für diesen Zweck unbrauchbar und die optischen Messungen der Helligkeitsverhältnisse auf der Vollmondscheibe von W. Pickering und Wislizenus stimmen sehr schlecht mit einander überein. Da Wislizenus' Beobachtungen aber eine bessere Übereinstimmung mit der photographischen von Goetz aufweisen, will ich sie hier zu einer Abschätzung des genannten Einflusses benutzen. Auf der Mondkarte in Nasmyth's Buch »The moon» habe ich mit Hilfe von durchsichtigem Wachspapier die Begrenzungen der hellen Strahlen des Tycho, Kopernikus und anderer Krater, sowie auch die maria und Kontinente eingezeichnet, dann auf Millimeterpapier die Anzahl der Quadratmillimeter für die genannten Gebilde abgezählt; so fand ich für die Kontinente 0.58 für die maria 0.35 und für die hellen Strahlen

nebst einigen angrenzenden hellen Partien 0.07 der Mondoberfläche. Für die mittlere Helligkeit der maria erhielt ich aus WIRTZ's Zahlen eine um 1.97 m (Mittel aus 7 maria) geringere Helligkeit, als die grösste von WISLIZENUS gemessene Helligkeit des Aristarch. Diese setze ich aus Mangel an genaueren Daten der Helligkeit der hellen Strahlen gleich, und für die mittlere Helligkeit der Kontinente nehme ich eine um 1 m. geringere Helligkeit, als die der hellsten Punkte an. Dann setzt sich die Vollmond-Helligkeit zusammen aus

Kontinente	$0.58 \times 0.40 = 0.232$
maria	$0.35 \times 0.16 = 0.056$
helle Strahlen	$0.07 \times 1.00 = 0.070$
	Summe 0.358

Die Helligkeit der Strahlen und anderer hellen Partien beträgt somit 0.20 der Gesamthelligkeit des Vollmondes und wenn sie alle den in der vorigen Tabelle angegebenen Verlauf der Funktion $\psi(\alpha)$ aufweisen sollten, mit einer Abnahme derselben um 30 % zwischen 0° und 20° Phasenwinkel, so könnten damit die Abweichungen im Verlaufe der Funktion $\psi(\alpha)$, wie sie aus der Totalhelligkeit (Phasenkurve) und meinen absoluten Messungen für die Kontinente sich in Tabelle No. 3 ergeben, teilweise erklärt werden.

Ein näheres Studium der Lichtkurven der einzelnen Mondgebilde wird sicherlich viele andere interessante Eigentümlichkeiten zutage treten lassen und die Klassifizierung der betreffenden Gebilde ermöglichen.

9. Die Deutung der Funktion $\psi(\alpha)$.

Die hier für die Gesamtoberfläche des Mondes und auch für ihre Einzelheiten als charakteristisch eingeführte Funktion $\psi(\alpha)$ würde einen anderen Verlauf aufweisen, wenn die Funktion $f(i, \varepsilon)$ anders gewählt wäre. Es ist aber sicher, dass die Einführung einer Funktion des Phasenwinkels in die Reflexionsformel zur Darstellung der beobachteten Helligkeit notwendig ist, denn keine der bekannten Formeln für diffuse Reflexion gibt auch nur annähernd die starke Lichtabnahme bei kleinen Phasenwinkeln wieder, wie sie die Beobachtung aufweist. Die spezielle Form der Funktion $f(i, \varepsilon)$, die in dieser Abhandlung auftritt, hat natürlich keine andere als rein praktische Bedeutung. Es wäre möglich gewesen, den Einfluss des Phasenwinkels durch einen veränderlichen Koeffizienten λ in der Seeligerschen Form des Reflexionsgesetzes zum Ausdruck zu bringen, wie es hier bei Darstellung der relativen Helligkeiten auch versucht worden ist. Doch wird die Analyse der Beobachtungen dadurch nur weniger durchsichtig und, wie die Praxis beweist, die Darstellung derselben weniger genau. Herr ÖPIK versucht in seiner Arbeit die relativen Helligkeiten durch einen veränderlichen Exponenten k der Funktion $\cos i$ in der Lambertschen Reflexionsformel darzustellen, kann aber dann der Phasenkurve nicht genügen und muss ausserdem eine Funktion $\psi(\alpha)$ einführen, welche die Tageskorrektionen seiner Platten darstellen soll.

Das Studium der Funktion des Phasenwinkels ist von grösster Bedeutung für die Beurteilung der Oberflächenbeschaffenheit, denn es kann wohl kaum einem Zweifel unterliegen, dass ihre

physikalische Deutung in dem Lichtverluste zu suchen ist, welcher durch Schattenwurf der Unebenheiten der Mondoberfläche hervorgerufen wird.

Eine andere Erklärung, die in letzter Zeit für das Auftreten der Funktion $\psi(\alpha)$ in den Phasenkurven der Mondgebilde von Herrn Markow [2] versucht worden ist, kann m. E. nicht als stichhaltig angesehen werden.

Ausgehend von der Annahme, dass die Lichtzerstreuung bei diffuser Reflexion nicht gleichmässig in allen Richtungen erfolgt, sondern nach der Rayleighschen Formel, leitet Herr Fessenkow [1] eine neue Formel für diffuse Reflexion ab, welche bei Berücksichtigung der Reflexionen höherer Ordnung eine äusserst verwickelte Form hat, bei Beschränkung auf die Reflexion erster Ordnung sich nur durch den Faktor $1 + \cos^2 \alpha$ von dem Lommel-Seeligerschen Gesetz unterscheidet.

$$F(i, \varepsilon) = (1 + \cos^2 \alpha) \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}.$$

Es ist begreiflich, dass der Faktor $(1 + \cos^2 \alpha)$, zwischen 0° und 90° vom Werte 2 bis zum Werte 1 abnehmend, einen stärkeren Fall der Phasenkurve in diesem Bereiche ergibt und den Beobachtungen hier besser genügt, als die Seeligersche Formel. Die Differenzen wachsen aber zwischen 90° und 180°, in welchem Bereiche die Flächenhelligkeit nach Fessenkow wachsen muss, sehr stark an, weil tatsächlich eine weitere Abnahme derselben stattfindet, wie das sowohl die Phasenkurve als auch unsere absoluten Messungen der Flächenhelligkeit der Kontinente beweisen. Ausserdem trägt die Formel in keinerweise dem scharfen Fall der Funktion $\psi(\alpha)$ in der Nähe der Opposition Rechnung.

Auch die Beobachtungen im Laboratorium an zerstreut reflektierenden Substanzen bestärken die Fessenkowsche Formel nicht. Der Verfasser selbst leitet (l. c. pag. 80) zur Darstellung der Beobachtungen von K. Ångström [1] über die Diffusion der strahlenden Wärme von ebenen Flächen eine andere rein empirische Formel ab, weil dieselben nicht zur Bestärkung seiner Formel dienen können, also auch kein mit dem Phasenwinkel abnehmendes Glied von der Form $1 + \cos^2 \alpha$ enthalten. Ebensowenig haben andere Beobachtungen über diffuse Reflexion von K. Messerschmitt u. a. die genannte Abhängigkeit aufgedeckt; man kann daher sagen, dass die anderen Ursachen, die das Emanationsgesetz an rauhen Flächen beeinflussen, so vor allem die Reflexion an der Oberfläche selbst von solcher Bedeutung sind, dass auch die Laboratoriumsversuche mit besonders präparierten rauhen Flächen nicht darüber entscheiden können, ob die innere Diffusion nach dem Rayleighschen oder einem anderen Gesetze vor sich geht. Um so weniger können das die Beobachtungen an der unebenen Mondoberfläche, wo für das Auftreten der Funktion $\psi(\alpha)$ eine andere Ursache herangezogen werden muss. Dass diese Ursache in erster Linie der Schattenwurf der Unebenheiten der Mondoberfläche sein muss, ist schon verschiedentlich hervorgehoben worden. H. N. Russel [3] schreibt die scharfe Abnahme der Helligkeit dem Schattenwurf unzähliger Felsenbruchstücke zu, die, dem Auge auch durch das stärkste Fernrohr unsichtbar, die Oberfläche des Mondes dicht bedecken.

[1] Bulletin de la Société astronom. de Russie. Livraison XXII. Mai 1916.

[2] Astr. Nachr. N:o 5285.

[3] Astrophys. Journal 43, p. 192.

J. WILSING[1] führte spektralphotometrische Beobachtungen an Gipsplatten aus, welche mit halbkugelförmigen Vertiefungen bedeckt waren und an Platten mit Vertiefungen quadratischen Durchschnitts, und fand, dass bei schräger Beleuchtung solcher Platten der durch Schattenwurf entstehende Lichtausfall bedeutend ist. Diese Beobachtungen sollen dazu dienen, die schnelle Veränderlichkeit der hellen Strahlen des Mondes zu erklären. Endlich hat auch Herr BARABASCHEW anfangs Spaltenöffnungen und später die halbkugelförmigen Wilsingschen Poren zur Erklärung der von ihm beobachteten Flächenhelligkeiten auf der Mondoberfläche herangezogen. Er entscheidet sich für die Wilsingsche Hypothese, welche er von den Strahlen auch auf die Oberfläche der *maria* ausdehnt. Auch unsere Beobachtungen der Kontinente weisen die schnelle Abnahme der Helligkeit in der Nähe der Opposition auf wie die Beobachtungen der maria, und der Charakter der Lichtabnahme ist für beide Gebilde derselbe, während für die hellen Strahlen ein anderes Gesetz zu gelten scheint.

Es entsteht nun die Frage, ob bei der Unsicherheit über das Reflexionsgesetz die aufgeworfenen Hypothesen über die Beschaffenheit der Mondoberfläche in jenen Teilen, die im Fernrohr keine Konturen aufweisen, überhaupt geprüft werden können. Eine nähere Untersuchung zeigt nun, dass bei dem besonderen Charakter der Oberfläche, bei der der Schattenwurf eine so überwältigende Rolle spielt, dieses in gewissen Grenzen wohl möglich ist, und dass somit dieser Weg neben den anderen Mitteln der Astrophysik die physikalische Natur der Mondoberfläche zu erforschen eine gewisse Bedeutung gewinnt.

Übersicht über die Resultate des ersten Teils.

Die Tatsachen, welche bei der Analyse der Beobachtungen über die veränderliche Intensität der Mondkontinente, *maria*, und anderer Gebilde festgestellt worden sind, und die im zweiten Teile theoretisch behandelt werden, sollen hier noch einmal kurz zusammengefasst werden.

1) Die Helligkeit auf der Vollmondscheibe ist für die typische Oberfläche dieselbe im Zentrum und den übrigen Punkten bis zum Rande.

2) Die Helligkeit des positiven Mondrandes auf einem Streifen von 0.03 R Breite, die in weitem Umfange ($^3/_4$ des Halbkreises) bei gegebenem Phasenwinkel dieselbe ist, fällt mit wachsendem Phasenwinkel stark ab.

3) Die scharfe Abnahme der mittleren Flächenhelligkeit der Mondscheibe zwischen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 20°$, wie sie sich aus der Phasenkurve ergibt, ist nicht der typischen Mondoberfläche und den maria, sondern, besonderen Gebilden (helle Strahlen und das Innere kleiner Krater) zuzuschreiben, welche in diesem Bereiche des Phasenwinkels sehr stark (cirka 30 %) an Helligkeit einbüssen.

4) Eine Trennung der für die Mondoberfläche charakteristischen Funktion $F(i, \varepsilon, \alpha)$ in ein Produkt $f(i, \varepsilon)\, \psi(\alpha)$ ist annähernd durchführbar, wenn man für $f(i, \varepsilon)$ die Seeligersche Form annimmt mit $\lambda = 0.333$; die relativen Helligkeiten auf der Mondscheibe werden durch die Funktion $f(i, \varepsilon)$ in weitem Umfange dargestellt; die Funktion $\psi(\alpha)$ wird hier in erster Näherung als Charakteristik der besonderen Oberflächenbeschaffenheit der Mondgebilde eingeführt.

[1] l. c. pag. 64.

II Teil. Theorie.

1. Über diffuse Reflexion.

Sieht man von der völlig unbrauchbaren Eulerschen Formel für diffuse Reflexion ab, so hat man für die Beleuchtungstheorie des Mondes zwischen zwei einfachen Ausdrücken für die von einem ebenen Flächenelement ds reflektierte Lichtmenge dq zu wählen:

$$dq = G \cos i \cos \varepsilon ds \quad \ldots \text{ nach LAMBERT}$$

und

$$dq = G_1 \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon} \quad \ldots \text{ nach SEELIGER.}$$

Nach dem Lambertschen Gesetze ist bei einer vollbeleuchteten Kugel eine Abnahme der Helligkeit vom Zentrum nach den Rändern proportional mit $\cos i$ zu erwarten. Nach dem Seeligerschen dagegen gleichmässige Helligkeit auf der vollbeleuchteten Scheibe. Letzteres entspricht freilich den Beobachtungen, aber die Phasenkurve weicht in so hohem Masse von der nach der Seeligerschen Formel bei konstantem λ berechneten ab, dass die Beobachtungen des Mondes keineswegs als eine Stütze der Seeligerschen Formel angesehen werden können.

Die Resultate der Beobachtungen im Laboratorium an diffus reflektierenden Substanzen, lassen keinen Zweifel darüber, dass die Lambertsche Formel, der eine theoretische Begründung fehlt, der Natur bei weitem näher kommt, als irgend eine andere einfache Formel, und dass die Korrektur der Lambertschen Formel die viele Beobachtungen erfordern, jedenfalls nicht in der Richtung der Seeligerschen liegt. Wir wollen hier eine kurze Übersicht über die genannten Versuche anführen, die wir teilweise LIEBENTAL's Praktischer Photometrie (Braunschweig 1907) entnehmen konnten.

BOUGUER's Messungen an mattem Silber, Gips und holländischem Papier ergaben, dass bei nahezu übereinstimmender Einfalls- und Sehrichtung, also bei $i = \varepsilon$ die Flächenhelle nicht proportional $\cos i$ ist, sondern schneller abnimmt. Auch KONONOWITSCH[1] findet stärkere Abweichungen. Die Beobachtungen von MESSERSCHMITT[2] an einem Glanschen Spektralphotometer ergeben für Porzellan Übereinstimmung mit dem Lambertschen Gesetz, für andere Substanzen Abweichungen. WIENER[3] untersuchte Gips in verschiedenen Azimuten und fand, dass bis

[1] Fortschr. der Physik **35**, 430 (1879).

[2] Wied. Annalen. **34**, 867 (1888)

[3] Wied Annal. **47**, 638 (1892).

$\varepsilon = 60°$ die Intensität der Beleuchtung proportional mit cos ε ist, aber durchschnittlich schneller abnimmt, als mit cos i.

WRIGHT[1] untersucht Platten aus Englisch Rot, Kaliumchromat, Zinkgrün, Ultramarin, kohlensaurer Magnesia und Gips, die nicht gegossen, sondern in Stahlstempeln gestampft sind. Es gelingt ihm regelmässige Reflexionen dadurch ganz zu vermeiden. Seine Versuche ergeben auch eine bessere Übereinstimmung mit der Lambertschen Formel. Er findet die Intensität der Beleuchtung streng proportional mit cosε, also eine völlige Widerlegung des Lommel-Seeligerschen Gesetzes dagegen nicht ganz proportional mit cos i, doch übersteigen die Abweichungen niemals 10 %.

Nach PEGRAM[2] befolgt feines Gipspulver, das man aus der Luft in Staubform auf eine geeignete Glasplatte hat fallen lassen, genau das Lambertsche Gesetz.

MATTHEWS[3] findet für einen Gips- und zwei Papierschirme bei konstantem ε die Helligkeit innerhalb der Grenzen $0 - 50°$ proportional mit cos i, während bei $i = 75°$ die Abweichung etwa 5 % beträgt.

THALER[4] findet für Gipsplatten, mattierte Glasplatten und Platten von Magnesiumoxyd, die noch stark regelmässig reflektieren, merkliche Abweichungen vom Lambertschen Gesetz. Von späteren Untersuchungen ist noch zu nennen die von HUTCHINS[5], der an feinem Papier nochmals das einfache cos i Gesetz für kleine Winkel bestätigt fand. Für grössere Winkel fand er erhebliche Abweichungen. Wie von verschiedener Seite hervorgehoben worden ist, spielt bei den Beobachtungen an matten Substanzen die niemals ganz zu vermeidende regelmässige Reflexion an kleinen dem Auge nicht mehr bemerkbaren glatten Flächen eine bedeutende Rolle. Sie überlagert sich mit der diffusen Reflexion und macht die Resultate der Messungen unübersichtlich. Bei Pulvern, wie sie ÅNGSTRÖM[6] bei seinen Beobachtungen der Diffusion strahlender Wärme verwandt hat, fand GODARD[7] stets reguläre Reflexion. Bei der grossen Wellenlänge der Wärmestrahlen kommen die Beobachtungen dieser Art für uns weniger in Betracht. Sie weisen übrigens auch durchaus keine Übereinstimmung auf. DE LA PROVOSTAYE und DESSAINS[9] fanden das Lambertsche Gesetz für $i = 0$ bei einer Bleiweiszplatte vollständig bestätigt, nur annähernd bei einer Zinnober- und Chrombleiplatte und garnicht für pulverisiertes Silber. MACQUENNE[8] fand eine Bestätigung des Lambertschen Gesetzes für kleine Inzidenzwinkel. GODARD fand ebenfalls für $i = 0$ das cos ε streng gültig für hinreichend dicke Schichten, während ÅNGSTRÖM keine Übereinstimmung findet; die Abweichungen sind aber auch bei seinen Versuchen geringer als vom Seeligerschen Gesetz.

Dieser Überblick über die Literatur zeigt einerseits, dass die diffuse Reflexion durch keine einfache Formel darstellbar ist, dass aber von den einfachen Formeln der Reflexion die Lambertsche

[1] Annal. d. Physik **1**, p. 17 (1900).
[2] Science (N. S.) **13**, 148 (1901).
[3] Transactions Amer. Inst. Electr. Eng. **20**, 59, (1902).
[4] Annal. d. Physik. (4) **11**, 996 (1903).
[5] American Journal of Science, Nov. 1898.
[6] Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handl. **13**, 1 N:o 4 1887.
[7] Annal. chim. et phys. **10**, p. 354. 1887. Journ. de Phys. **7**, p. 435. 1888.
[8] Thèses presentées à la Faculté des Sciences de Paris 1880.
[9] Pogg. Annal. 74, 147. 1898.

vor allen anderen den Vorzug verdiene; keine der untersuchten Substanzen würde in Kugelform bei voller Beleuchtung durch parallele Strahlen gleichmässige Helligkeit auf der Scheibe aufweisen, eher würde noch eine stärkere Abnahme nach den Rändern zu erwarten sein, als es Lamberts Gesetz fordert. Die Ursache der gleichmässigen Helligkeit der Vollmondscheibe haben wir daher in der besonderen Oberflächenbeschaffenheit des Mondes zu suchen. Im Folgenden wollen wir verschiedene Hypothesen über die mögliche Beschaffenheit dieser Oberfläche unter Zugrundelegung des Lambertschen Gesetzes durchrechnen und an das sich aus ihnen ergebende modifizierte Reflexionsgesetz die Forderung stellen, dass es sowohl die Lichtverteilung bei allen Phasenwinkeln, als auch die beobachtete Abnahme der Helligkeit des Mondrandes erklärt.

2. Die Beleuchtung einer mit konischen Erhebungen bedekten Kugel.

Es ist naheliegend, die gleichmässige Helligkeit der Vollmondscheibe Erhöhungen seiner Oberfläche zuzuschreiben, infolge welcher die Einfallswinkel des Lichtes auf die Randpartien des Mondes verkleinert werden. Die nächstliegende ideale Form solcher Erhöhungen, die eine mathematische Behandlung zulässt, und auf der Erdoberfläche sehr verbreitet ist, ist die Form des geraden Kegels.

Wir nehmen an, dass die Mondoberfläche mit geraden Kegeln gleichen Öffnungswinkels gleichmässig bedeckt ist und untersuchen die Lichtverteilung auf einer solchen Kugel. Bezeichnen wir die Höhe des Kegels durch H, den Halbmesser der Basis mit R, den halben Öffnungswinkel durch γ, die Seitenlinie durch l.

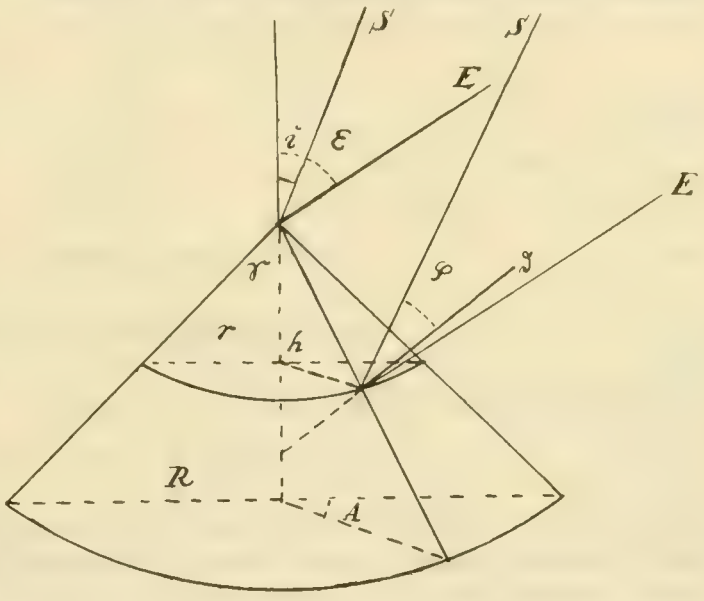


Fig. 4.

Es sei weiter ds ein Flächenelement der Oberfläche, A das Azimut dieses Elements mit der Ebene des einfallenden und reflektierten Strahls, welche mit der Ebene der Zeichnung zusammenfällt, φ, ϑ der Einfalls- und der Reflexionswinkel des Lichts in ds, i und ε dieselben Winkel mit der Normalen zur Oberfläche oder der Kegelaxe, endlich r, h Halbmesser und Höhe des zum Elemente ds gehörigen Kegels. Wir haben dann

$$\frac{h}{r} = \frac{H}{R} = \operatorname{cotg} \gamma$$

$$ds = dl\, r\, dA; \quad dl = dh \sec \gamma$$

$$ds = h \operatorname{tg} \gamma \sec \gamma\, dh\, dA$$

$$\cos \varphi = \cos i \sin \gamma + \sin i \cos \gamma \cos A$$

$$\cos \vartheta = \cos \varepsilon \sin \gamma \pm \sin \varepsilon \cos \gamma \cos A$$

Die vom Flächenelement ds reflektierte Lichtmenge $dq = G\cos i\cos\varepsilon\, ds$ wird

$$dq = Gh\,\mathrm{tg}\,\gamma\sec\gamma\, dh\, dA\,[\sin^2\gamma\cos i\cos\varepsilon \pm \cos^2\gamma\cos^2 A\sin i\sin\varepsilon + \sin(i\pm\varepsilon)\sin\gamma\cos\gamma\cos A],$$

wo das untere Zeichen in dem Falle angewandt wird, wenn i und ε zu verschiedenen Seiten der Normalen, oder der Kegelaxe liegen ($\varepsilon < 0$). Nach Integration über die sichtbare Oberfläche erhalten wir für $i < \gamma$ und $|\varepsilon| < \gamma$

$$Q = 2GH\,\mathrm{tg}\,\gamma\sec\gamma\int_0^H h\,dh\Big[\int_0^{\bar\pi}\sin^2\gamma\cos i\cos\varepsilon\, dA \pm \int_0^{\bar\pi}\cos^2\gamma\,\mathrm{sn}\,i\,\mathrm{sn}\,\varepsilon\cos^2 A +$$

$$+\int_0^{\bar\pi}\sin(i\pm\varepsilon)\sin\gamma\cos\gamma\cos A\, dA\Big] = GH^2\sin\gamma\,\pi\left(\cos i\cos\varepsilon\,\mathrm{tg}^2\gamma \pm \tfrac{1}{2}\sin i\sin\varepsilon\right) \qquad (13)$$

Ist $i > \gamma$, so ist die eine Hälfte des Kegels unbeleuchtet und bei $|\varepsilon| < \gamma$ erhalten wir dann

$$Q = GH^2\sin\gamma\left[\tfrac{\pi}{2}\cos i\cos\varepsilon\,\mathrm{tg}^2\gamma \pm \sin i\sin\varepsilon\,\tfrac{\pi}{4} + \sin(i\pm\varepsilon)\,\mathrm{tg}\,\gamma\right]. \qquad (14)$$

Dieselbe Formel gilt auch, wie leicht zu ersehen, für

$$\begin{array}{ll} i < \gamma \text{ und bei } \varepsilon > 0 & i > \gamma \\ |\varepsilon| > \gamma & \text{auch für } \varepsilon > \gamma \end{array}$$

Bei $i > \gamma$
$|\varepsilon| > \gamma$ und $\varepsilon < 0$ ist $\qquad Q = 0. \qquad (15)$

Bei $i = \varepsilon$; $\alpha = 0$ wird

für $i < \gamma$ $\qquad Q_0 = GH^2\pi\sin\gamma\left(\cos^2 i\,\mathrm{tg}^2\gamma + \tfrac{1}{2}\sin^2 i\right) \qquad (13)'$

für $i > \gamma$ $\qquad Q_0 = GH^2\pi\sin\gamma\left(\tfrac{1}{2}\cos^2 i\,\mathrm{tg}^2\gamma + \tfrac{1}{4}\sin^2 i + \tfrac{\sin 2i}{2\pi}\,\mathrm{tg}\,\gamma\right). \qquad (14)'$

Für das Zentrum der Vollmondscheibe ist

$$Q_0 = GH^2\pi\sin\gamma\,\mathrm{tg}^2\gamma = G\pi R^2\sin\gamma. \qquad (13)''$$

Die von einem geraden Kegel, der in seiner Axenrichtung beleuchtet ist, in derselben Richtung reflektierte Lichtmenge ist somit im Verhältnis des sinus des halben Öffnungswinkels gegen diejenige verkleinert, welche von der ebenen Fläche seiner Basis senkrecht zurückgestrahlt werden würde, ein Resultat dass sich ohne Rechnung voraussehen liess.

Bezeichnet n die Anzahl der Kegel pro Quadrateinheit der Mondoberfläche, so ist der ebene Teil derselben $1 - n\pi R^2$. Bei Reflexionswinkeln $\varepsilon > \gamma$ ist noch ein Teil der ebenen Fläche durch die Projektionen der Kegel verdeckt. Wir haben in diesem Fall als sichtbare ebene Fläche

$$1 - \tfrac{1}{2}n\pi H^2\,\mathrm{tg}^2\gamma - nH^2\,\mathrm{tg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\varepsilon = 1 - n\pi H^2\,\mathrm{tg}^2\gamma\left(\tfrac{1}{2} + \frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon\,\mathrm{cotg}\,\gamma}{\pi}\right);$$

es sei

$$n\pi H^2\,\mathrm{tg}^2\gamma = n\pi R^2 = k \qquad (16)$$

dann ist der ebene Teil, wenn wir uns auf den Fall $\alpha = 0$, $i = \varepsilon$ beschränken

$$\text{für } \varepsilon < \gamma \quad 1 - k$$
$$\varepsilon > \gamma \quad 1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{cotg}\gamma}{\pi}\right).$$

Die Flächenhelligkeit der Einheitsfläche wird daher

für $i = \varepsilon < \gamma$

$$J = Gk \sin\gamma \left(\cos^2\varepsilon + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon \operatorname{cotg}^2\gamma\right) \sec\varepsilon + G\cos\varepsilon\,(1-k) \tag{17}$$

und für $i = \varepsilon > \gamma$

$$J = Gk \sin\gamma\left(\frac{1}{2}\cos^2\varepsilon + \frac{1}{4}\sin^2\varepsilon \operatorname{cotg}^2\gamma + \frac{\sin 2\varepsilon \operatorname{cotg}\gamma}{\pi}\right)\sec\varepsilon + G\left[1 - k\left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}\right)\right]\cos\varepsilon. \tag{17'}$$

Die letzte Formel (17)′ hat nur solange Gültigkeit, als die Projektionen der Kegelspitzen nicht auf die benachbarten Kegeloberflächen fallen.

Geht man von verschiedenen Annahmen über den Öffnungswinkel γ der Kegel aus (etwa $\gamma = 67.5°$ und $45°$) und berechnet aus den Gleichungen (12), bei welcher Dichte der Kegel die Vollmondscheibe gleichmässig hell erscheint, so erweist es sich, was leicht vorauszusehen war, dass es eine solche Dichte überhaupt nicht gibt. Wir begnügen uns deshalb mit der Berechnung der Intensitätsverteilung bei Vollmond für $\gamma = 67.5°$ und innerhalb der Einfallswinkel $i = 0$ bis $i = 67.5°$, da hier keinerlei Überdeckungen der Kegel vorkommen können. Dabei nehmen wir die grösste mögliche Dichte der Kegel, also Berührung ihrer Grundflächen, an. Die Berechnung geschah nach der Formel

$$\frac{J}{J_0} = \frac{k\sin\gamma\,(\cos\varepsilon + \frac{1}{2}\sin\varepsilon\operatorname{cotg}^2\gamma\operatorname{tg}\varepsilon) + \cos\varepsilon\,(1-k)}{k\sin\gamma + 1 - k} \tag{18}$$

Bei Berührung der Kegelgrundflächen ist annähernd

$$k = \frac{n\pi R^2}{4nR^2} = 0.78.$$

Wir erhalten folgende Helligkeiten auf dem Vollmondäquator

Tafel VI.

ε	0°	20°	40°	60°	67°.5
Abst. v. Zentr.	0.00	0.34	0.64	0.87	0.92
$J : J_0$	1.000	0.948	0.801	0.599	0.529
nach Lambert	1.000	0.939	0.766	0.500	0.383

Die letzte Zeile enthält die Helligkeiten, wie sie sich ohne Erhöhungen nach Lambert ergeben. Die Lichtabnahme ist durch die konischen Erhebungen verlangsamt.

Wir berechnen noch einen Fall geringerer Dichte der Kegel, mit einem Abstande der Basiszentren von $3R$. Dieses ergibt für k den Näherungswert $k = 0.44$. Die Kegel nehmen wir spitzer an, $\gamma = 45°$. Zwischen $\varepsilon = 45°$ und $\varepsilon = 63.5°$ ist dann mit der scheinbaren Bedeckung der ebenen Fläche zwischen den Kegeln zu rechnen (17)′, und die relativen Helligkeiten sind dann

$$\frac{J}{J_0}=\frac{k\sin\gamma\left(\frac{1}{2}\cos\varepsilon+\frac{1}{4}\sin\varepsilon\operatorname{cotg}^2\gamma\operatorname{tg}\varepsilon+\frac{2}{\pi}\sin\varepsilon\operatorname{cotg}\gamma\right)+\left[1-k\left(\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}\right)\right]\cos\varepsilon}{k\sin\gamma+1-k} \qquad (18)'$$

Bei $\varepsilon > 63.5$ treten Überdeckungen der Kegelflächen ein, und daher ist der letzte Wert $J:J_0$ der folgenden Tafel nach einer weiter abzuleitenden Formel berechnet. Wir haben für die Lichtverteilung auf der Vollmondscheibe:

Tafel VII.

ε	0°	20°	40°	50°	60°	63°.5	76° 5
Abst. v. Zentr.	1.00	0.34	0.64	0.77	0.87	0.89	0.97
$J:J_0$	1.00	0.962	0.863	0.822	0.733	0.699	0.698
nach Lambert	1.00	0.939	0.766	0.643	0.500	0.446	0.233

Die Lichtabnahme ist noch mehr verlangsamt. Wenn auch keine gleichmässige Helligkeit zu erreichen ist bei strengen Gültigkeit des Lambertschen Gesetzes, so ist doch eine Annäherung an die Wirklichkeit erreicht. Es steht zu prüfen, wie sich die Helligkeit des Mondrandes bei zunehmendem Phasenwinkel bei konischen Erhöhungen verhält.

Für den Rand des Mondes überdecken sich die sichtbaren Kegelflächen derart, dass der ebene Boden zwischen ihnen unsichtbar wird. Zur Berechnung der Flächenhelligkeit brauchen wir hier die Dichte der Kegel nicht mehr in Betracht zu ziehen, weil die Flächenhelligkeit unabhängig davon, wie gross der von der Kegelspitze aus gerechnete sichtbare Teil sein wird, einfach der mittleren Flächenhelligkeit des sichtbaren Kegelmantels gleich gesetzt werden kann; diese ist für verschiedene senkrechte Schnitte des Kegels dieselbe.

Um dieselbe zu erhalten haben wir die nach Formel (14) ($|\varepsilon| > \gamma$) berechnete reflektierte Lichtmenge durch die scheinbare Fläche derselben zu dividieren;
letztere ist

$$\left(\frac{1}{2}\pi H^2\operatorname{tg}^2\gamma+H^2\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\varepsilon\right)\cos\varepsilon=\frac{1}{2}\pi H^2\operatorname{tg}^2\gamma\left(1+\frac{\operatorname{cotg}\gamma\operatorname{tg}\varepsilon}{2\pi}\right)\cos\varepsilon$$

und für ein bestimmtes ε konstant. Das Verhältnis der Helligkeiten eines bestimmten Punktes $(i_1\ \varepsilon_1)$ des Mondrandes bei verschiedenen α ist daher von ihr unabhängig. Wir haben daher für die Helligkeit des positiven Mondrandes im Verhältnis zur Randhelligkeit bei Vollmond

$$\left.\begin{aligned}\frac{J_\alpha}{J_0}&=\frac{\cos i_1\cos\varepsilon_1+\frac{1}{2}\sin i_1\sin\varepsilon_1\operatorname{cotg}^2\gamma+\sin(i_1+\varepsilon_1)\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}}{\cos^2 i_1+\frac{1}{2}\sin^2 i_1\operatorname{cotg}^2\gamma+\sin 2i_1\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}} \qquad \text{von } \alpha=0 \text{ bis } \alpha=\varepsilon_1\\ \text{und}\\ \frac{J_\alpha}{J_0}&=\frac{\cos i_1\cos\varepsilon_1-\frac{1}{2}\sin i_1\sin\varepsilon_1\operatorname{cotg}^2\gamma+\sin(i_1-\varepsilon_1)\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}}{\cos^2 i_1+\frac{1}{2}\sin^2\operatorname{cotg}^2\gamma+\sin 2i_1\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\pi}} \qquad \text{bei } \alpha>\varepsilon_1\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Zum Vergleich der Helligkeit des Randes mit der Helligkeit des Zentrums in Opposition muss die sichtbare Fläche in Betracht gezogen werden. Wir haben

$$J_k^0 : J_z^0 = \frac{\sin\gamma\left(\frac{1}{2}\cos^2\varepsilon + \frac{1}{4}\sin^2\varepsilon\,\mathrm{cotg}^2\gamma + \frac{\sin 2\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{cotg}\,\gamma\right)}{\left(1 + \frac{\mathrm{cotg}\,\gamma\,\mathrm{tg}\,\varepsilon}{2\pi}\right)\cos\varepsilon\,(k\sin\gamma + 1 - k)}. \qquad (20)$$

Diese Formel diente zur Berechnung des letzten Wertes $J : J_0$ in der Tafel N:o VII. Nach den Formeln (19) wurde für die zwei Fälle $\gamma = 67.5$ und $\gamma = 45$ die Helligkeit des Mondrandes für den Reflexionswinkel $\varepsilon = 76.5$, wie er unseren Beobachtungen entspricht, für wachsende Phasenwinkel berechnet. Es ergaben sich folgende Zahlen.

Tafel VIII.

Helligkeit des Mondrandes im Abstande $0.03\,R$.

α	0°	20°	40°	60°	75°	80°	90°	120°
$\gamma = 67.5$; $J_\alpha : J_0$	1.00	1.51	1.84	1.94	1.86	1.81	1.66	1.06
$\gamma = 45.0$; $J_\alpha : J_0$	1.00	1.15	1.15	1.02	0.82	0.76	0.59	0.05
$J_\alpha : J_0$ beobacht.	1.00	0.97	0.86	0.71	0.58	0.55	0.47	0.28
nach Lambert	1.00	2.36	3.44	4.11	4.28	4.27	4.16	3.11

Die mit kegelförmigen Erhöhungen bedeckte Kugel nimmt am Rande anfangs an Helligkeit zu. Diese Zunahme dauert bis zu Phasenwinkeln, bei welchen die Sonne in den Zenit des sichtbaren Kegelmantels kommt, und ist ihrem Betrage nach stark abhängig von der Zenitdistanz im Momente der Opposition, und damit von der Nähe des beobachteten Punktes zum Mondrande. Weiter nimmt die Helligkeit wieder ab und sinkt schnell zu 0 herab, wenn die Sonne nur noch die Rückseiten der Kegel beleuchtet. Die Beobachtung weist, wie die Tafel zeigt, eine anfangs langsame, später schnellere Lichtabnahme, widerspricht somit der Hypothese kegelförmiger Erhöhungen. Die letzte Zeile, welche die Helligkeit des Mondrandes nach Lambert ohne Erhöhungen enthält, zeigt, dass die Beleuchtungsverhältnisse durch die Erhöhungen des Bodens, über deren Grösse gar keine Voraussetzungen gemacht waren, vollkommen verändert werden.

Selbstverständlich können Erhöhungen konischer Art, bei denen Schattenwirkungen erst auftreten, wenn die Zenitdistanz der Sonne den halben Öffnungswinkel der Kegel übersteigt, auch nicht die scharfe Lichtabnahme einzelner Mondgebilde in der Nähe der Opposition erklären.

3. Die Beleuchtung einer mit halbkugelförmigen Erhebungen bedeckten Kugel.

Wir wollen jetzt den Einfluss von Erhöhungen einer anderen Art, die ebenfalls einem Typus von auf der Erde vorkommenden Unebenheiten entspricht, untersuchen. Wir nehmen an, die Oberfläche der Kugel sei gleichmässig dicht mit Halbkugeln gleichen Durchmessers bedeckt.

deren Radius gegen den der Kugel verschwindend klein ist, und fragen uns, in welcher Weise diese Erhöhungen die Lichtverteilung auf der parallelbestrahlten Kugel beeinflusst. Auch hier genügt es, die Helligkeit auf der Vollmondscheibe und die Abnahme der Helligkeit des Mondrandes zu berechnen, um den Vergleich mit den Beobachtungen auszuführen.

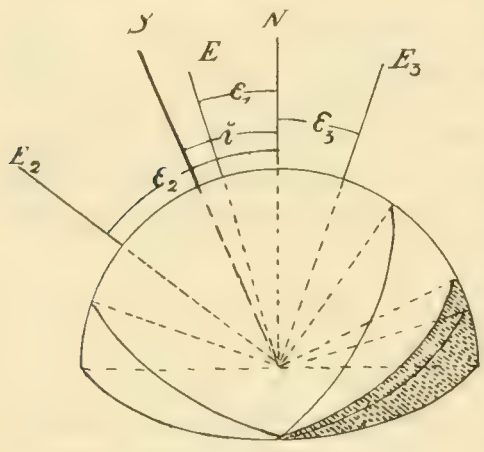


Fig. 5.

Betrachten wir zunächst eine einzelne Halbkugel auf dem Intensitätsäquator des Mondes. Der Radius der Kugel sei r, das Flächenelement ds. Wir führen die üblichen sphärischen Koordinaten in Bezug auf die Ebene des einfallenden und reflektierten Strahls ein: ω — die Länge, gerechnet vom Gegenpunkte der Erde von 0 bis $\pm 90°$, positiv in der Richtung nach der Sonne zu, und ψ die Breite vom Äquator nach beiden Seiten bis 90° anwachsend. Es ist dann die elementare reflektierte Lichtmenge

$$dq = G\cos\varphi\cos\vartheta\,ds = G\cos\varphi\cos\vartheta\,r^2\cos\psi\,d\psi\,d\omega$$

Hier ist

$$\cos\varphi = \cos\psi\cos(\omega-\alpha)$$
$$\cos\vartheta = \cos\psi\cos\omega$$

Die Integrationsgrenzen nach ψ sind $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$, die nach ω bezeichnen wir mit a und b. Die gesamte reflektierte Lichtmenge ist daher

$$Q = Gr^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,d\psi\int_b^a\cos\omega\cos(\omega-\alpha)\,d\omega = \tfrac{4}{3}Gr^2\int_b^a\cos\omega\cos(\omega-\alpha)\,d\omega.$$

Bei der Bestimmung der Integrationsgrenzen nach ω sind 3 Fälle zu unterscheiden, die durch die nebenstehende Figur veranschaulicht sind.

Diese Grenzen sind bei

		a	b
I	$i > \varepsilon$	$\frac{\pi}{2}-\varepsilon$	$-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$
II	$i < \varepsilon$	$\frac{\pi}{2}$	$-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$
III	$i \gtrless \varepsilon$, $i < 0$	$+\frac{\pi}{2}$	$-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Wir erhalten nach Ausführung der Integration

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I} & i > \varepsilon & Q = \frac{2}{3}Gr^2\left[\cos\alpha\left(\pi - i + \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\right) + \sin\alpha\cos^2\varepsilon\right] \\ \text{II} & i < \varepsilon & Q = \frac{2}{3}Gr^2\left[\cos\alpha\left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2}\sin 2\varepsilon\right) + \sin\alpha\sin^2\varepsilon\right] \\ \text{III} & i \gtrless \varepsilon,\ i < 0 & Q = \frac{2}{3}Gr^2\left[\cos\alpha\left(\pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + \sin^3\alpha\right] \end{array}\right\} \quad (21)$$

bei $i = \varepsilon$, $\alpha = 0$ wird

$$Q = \frac{2}{3} G r^2 \left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon\right)$$

ist n die Zahl der Erhöhungen pro Quadrateinheit der Fläche, so ist der ebene Teil

$$1 - n\pi r^2 = 1 - k.$$

Davon ist aber bei $\varepsilon \neq 0$ ein Teil durch die Projektionen $\frac{1}{2}\pi r^2 \sec \varepsilon$ verdeckt, sodass der sichtbare Teil der ebenen Fläche wird

$$1 - \frac{1}{2} n\pi r^2 - \frac{1}{2} n\pi r^2 \sec \varepsilon = 1 - \frac{1}{2} k (1 + \sec \varepsilon).$$

Da dieser Teil nach dem Lambertschen Gesetze reflektiert, so ist die von ihm herrührende Lichtmenge

$$Q_1 = G\left[1 - \frac{1}{2} k (1 + \sec \varepsilon)\right] \cos i \cos \varepsilon.$$

Die Gesamtlichtmenge wird für den Fall $\alpha = 0$, $i = \varepsilon$

$$Q + Q_1 = \frac{2}{3} G n r^2 \left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon\right) + G\left(1 - \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} k \sec \varepsilon\right) \cos^2 \varepsilon. \tag{22}$$

Die Helligkeit

$$J = \frac{2}{3} G \frac{k}{\pi} \left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon\right) \sec \varepsilon + G\left(1 - \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} k \sec \varepsilon\right) \cos \varepsilon. \tag{23}$$

Im Zentrum der Vollmondscheibe ist

$$J_0 = \frac{2}{3} Gk + G(1 - k) = G\left(1 - \frac{1}{3} k\right). \tag{23'}$$

Die relativen Helligkeiten sind

$$\frac{J}{J_0} = \frac{\frac{2k}{3\pi}\left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon\right) \sec \varepsilon + \left[1 - \frac{k}{2}(1 + \sec \varepsilon)\right] \cos \varepsilon}{1 - \frac{k}{3}} \tag{24}$$

Diese Formel ist solange richtig, als keine Überdeckungen der Halbkugeln für das Auge eintreten. Versucht man einen Wert für k zu bestimmen, bei dem sich gleichmässige Helligkeit vom Zentrum bis zum Rande der Scheibe ergeben würde, so erweist sich das für gleichmässige Dichte der Kugeln als unmöglich, wenn auch die Lichtabnahme nach dem Rande zu durch die Anwesenheit der Erhöhungen im Vergleich zum Lambertschen Gesetze verringert wird. Die Ausgleichung der Helligkeiten ist um so grösser, je dichter die Halbkugeln stehen. Wir führen hier die Berechnung für den Fall $k = 0.44$ an, was einer Entfernung der Halbkugelzentren voneinander von $3r$ entspricht und wobei bis $\varepsilon = 60°$ keine Überdeckungen vorkommen.

Tafel IX.

ε	0°	20°	40°	60°	76°.5
Abst. von Zentrum .	0.00	0.34	0.64	0.87	0.97
$J : J_0$	1.00	0.96	0.86	0.75	0.70
Nach Lambert	1.00	0.94	0 77	0.50	0.23
$J : J_0$ für die Halbkugeln allein	1.00	1.02	1.06	1.07	0.90

In der letzten Zeile sind die Helligkeiten ohne Berücksichtigung des zwischen den Halbkugeln liegenden ebenen Bodens berechnet nach der Formel

$$J_\alpha = \frac{4\,G\left(\pi - \varepsilon + \frac{1}{2}\sin 2\,\varepsilon\right)}{3\,\pi\,(1 + \sec\varepsilon)\cos\varepsilon}\,. \tag{25}$$

Die Zahlen für $\varepsilon = 76.5°$ in der ersten und dritten Zeile sind nach einer anderen weiter abzuleitenden Formel erhalten.

Wir sehen, dass die Lichtabnahme auf der vollbeleuchteten Scheibe bedeutend geringer ist als nach dem Lambertschen Satze ohne Erhebungen. Wir folgern weiter aus den Zahlen der dritten Zeile, die nahezu gleiche Helligkeit der Erhebungen allein bis dicht an den Rand ergeben, dass die Abnahme der Helligkeit wesentlich dem ebenen Boden zwischen den Erhebungen zuzuschreiben ist und desto geringer sein wird je dichter letztere verteilt sind.

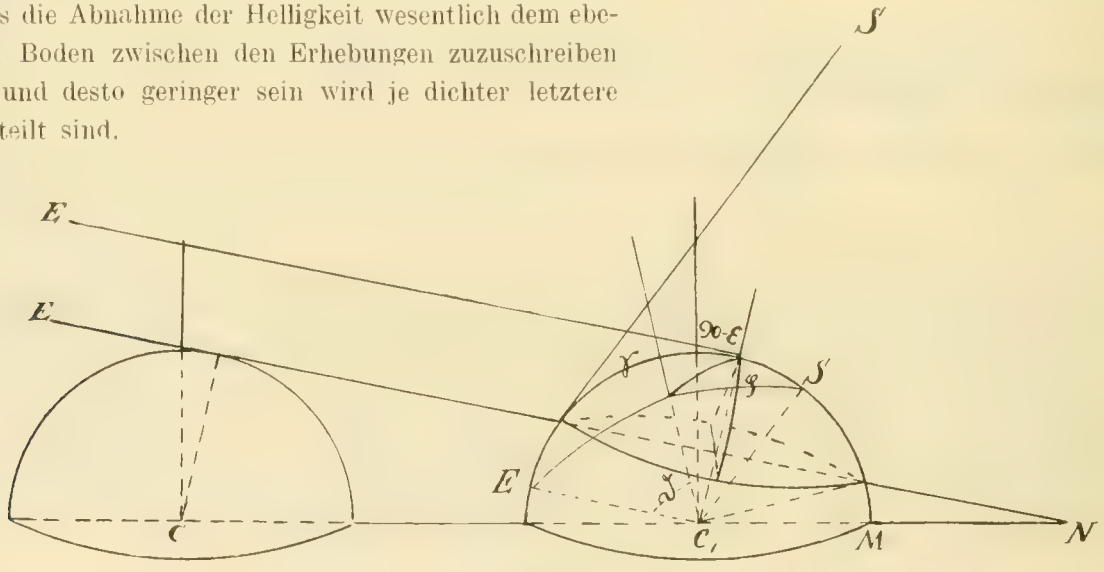


Fig. 6.

Für die Nähe des Mondrandes müssen die Überdeckungen der hinteren Halbkugeln durch die vorderen in Betracht gezogen werden, weil hier auch bei geringer Dichte dem Auge nur die Scheitelkalotten der Halbkugeln sichtbar sind. Die mittlere Helligkeit der Kalotten ist aber

verschieden für verschiedene Höhen derselben. Es muss deshalb auch eine Hypothese über die Dichte der Halbkugeln gemacht werden.

Die vorderen Halbkugeln werden in ihrer Gesamtheit wie eine Bergkette gleicher Höhe, die längs einem Meridiane verläuft, wirken, und wir haben bei der Berechnung der mittleren Helligkeit nur die Lichtmengen in Betracht zu ziehen, die von den sichtbaren Teilen solcher durch zum Horizonte geneigten Schnitte entstandenen Kalotten reflektiert werden. Wie aus der Figur ersichtlich, sind diese sichtbaren Teile Halbkalotten. Schattenwirkungen kommen zwischen $\alpha = 0°$ und 90° nicht in Frage, weil von der Opposition bis zum ersten Viertel die Sonne über dem Horizont des Mondrandes immer höher steigt und erst bei $i = \pi - (\gamma + \varepsilon)$, wo γ den Zentriwinkel der sichtbaren Halbkalotte bedeutet, treten die ersten Schatten auf. Wir brauchen diesen Fall hier nicht zu verfolgen.

Wir bezeichnen durch ψ den Polabstand vom Scheitelpunkte der Kalotte und durch A das Azimut des Flächenelementes ds, φ, ϑ Einfalls- und Reflexionswinkel, dann ist

$$ds = r^2 \sin\psi \, d\psi \, dA$$
$$\cos\varphi = \cos\psi \sin\alpha + \sin\psi \cos\alpha \cos A$$
$$\cos\vartheta = \sin\psi \cos A$$
$$dq = G \cos\varphi \cos\vartheta \, ds = G r^2 \, d\psi \, dA \, (\cos\psi \sin^2\psi \sin\alpha \cos A + \sin^3\psi \cos\alpha \cos^2 A)$$

und die gesamte reflektierte Lichtmenge

$$q = 2 G r^2 \left[\sin\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos A \, dA \int_0^{\gamma} \cos\psi \sin^2\psi \, d\psi + \cos\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 A \, dA \int_0^{\gamma} \sin^3\psi \, d\psi \right]$$

Nach Ausführung der Integration

$$q = 2 G r^2 \left[\frac{\sin\alpha}{3} \sin^3\gamma + \frac{\pi}{4} \cos\alpha \left[\frac{3}{4}(1 - \cos\gamma) + \frac{1}{12}(\cos 3\gamma - 1) \right] \right] \tag{26}$$

In Opposition bei $\varepsilon = i$, $\alpha = 0$ ist

$$q_0 = 2 G r^2 \frac{\pi}{4} \left[\frac{3}{4}(1 - \cos\gamma) + \frac{1}{12}(\cos 3\gamma - 1) \right] \tag{27}$$

Die Helligkeit finden wir hieraus nach Division durch die scheinbare Fläche, die ein Segment $r^2(\gamma - \cos\gamma \sin\gamma)$ ist zu

$$J_0 = \frac{G\pi \left[\frac{3}{4}(1 - \cos\gamma) + \frac{1}{12}(\cos 3\gamma - 1) \right]}{2\gamma - \sin 2\gamma} \tag{28}$$

Diese Formel diente zur Berechnung der letzten Zahlen $J : J_0$ der Tafel IX.

Bezeichnet man durch f den Abstand MN und durch m den Abstand der Zentren CC, so findet sich der Winkel γ aus den Gleichungen

$$\frac{r+f}{r} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \gamma\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varepsilon\right)} = \frac{\cos\gamma}{\cos\varepsilon}$$

$$r + f = r \cos\gamma \sec\varepsilon;$$

und

$$m + r + f = r \sec \varepsilon$$

hieraus folgt

$$m = r \sec \varepsilon (1 - \cos \gamma).$$

Bezeichnet man $m = nr$, so ist

$$n = \sec \varepsilon (1 - \cos \gamma)$$

$$\cos \gamma = 1 - n \cos \varepsilon \tag{29}$$

Bei Berührung der Halbkugeln ist $n = 2$. Wir untersuchen ausserdem noch den Fall, wo $n = 3$. Die Halbkalotten sind vollbeleuchtet, solange i dem absoluten Betrage nach kleiner ist, als $\pi - (\gamma + \varepsilon)$. Wir erhalten aus Gleichung (29) für die 2 genannten Fälle

$$n = 2 \qquad n = 3$$
$$\gamma = 57°.8 \quad \text{und} \quad \gamma = 72°.5$$

Die Grenzwinkel der vollen Beleuchtung bei $\varepsilon = 76°.5 \sin d$

$$i = -45.7 \cdot \quad \text{und} \quad i = -31.0$$

Für den Punkt des Intensitätsäquators mit $\varepsilon = 76°.5$ entspricht das den Phasenwinkeln

$$\alpha = 122.2 \quad \text{und} \quad \alpha = 107.5$$

Innerhalb dieser Grenzen können wir die Formel (26) zur Berechnung der Veränderlichkeit des Mondrandes anwenden. Wir erhalten für die relativen Intensitäten, die den Verhältnissen der reflektierten Lichtmengen gleich sind

$$\frac{J}{J_0} = \frac{q}{q_0} = \frac{\frac{1}{3}\sin\alpha \sin^3\gamma + \frac{\pi}{4}\cos\alpha\left[\frac{3}{4}(1-\cos\gamma) - \frac{1}{12}(1-\cos 3\gamma)\right]}{\frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{4}(1-\cos\gamma) - \frac{1}{12}(1-\cos 3\gamma)\right]} = \frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{b} \tag{30}$$

Es ergeben sich hiernach folgende Zahlen für die 2 Dichten der Halbkugeln.

Tafel X.

α	0°	20°	40°	60°	80°	90°	120°
$n = 2$; $J : J_0$ . . .	1.00	1.42	1.54	1.71	1.55	1.40	0.71
$n = 3$; $J : J_0$ . . .	1.00	1.28	1.40	1.35	1.14	0.98	—
Nach Lambert . .	1.00	2.36	3.44	4.11	4.27	4.16	3.11
Beobachtet	1.00	0.97	0.86	0.71	0.55	0.47	0.28

Bei beiden Hypothesen über die Dichte der Halbkugeln haben wir ein Anwachsen der Helligkeit. das freilich gegenüber dem Anwachsen, welches die Lambertsche Formel ohne Erhebungen fordert, mehr als um das Doppelte abgeschwächt ist. Die zweite Hypothese bei der grössere Teile der Halbkugeln sichtbar sind, ergibt ein geringeres Anwachsen der Helligkeit, weil bei steigender Sonne die unteren Teile derselben, sehr schräg beleuchtet, die mittlere Helligkeit der Kalotte verringern

Im Gegensatz zu kegelförmigen Erhebungen muss sich die Abnahme der Helligkeit bis zum Werte 0 bei Kugeln langsam und stetig vollziehen, weil die beschatteten Teile der Kalotten allmählich sichtbar werden. Unsere Tafel reicht nicht so weit um das zu verfolgen.

4. Kalottenförmige Erhebungen.

Halbkugelförmige Erhebungen sind auf der Erdoberfläche Ausnahmefälle, kalottenförmige dagegen recht gewöhnlich; es soll deshalb auch dieser Fall der Vollständigkeit halber hier untersucht werden.

Wir nehmen den Zentriwinkel der gleichmässig auf der Oberfläche verstreuten Kalotten zu 120° an. Die Polaraxe *ON* richten wir senkrecht zur Mondoberfläche und zur Basisebene der Kalotte und rechnen die Polarabstände ψ vom Pole bis $\gamma = 60°$, die Azimute von der Ebene des Hauptmeridianes, in welcher die Richtungen zur Sonne und zur Erde liegen von 0° bis $\pm 180°$. Wir lassen die Richtungen nach Sonne und Erde zusammenfallen (*os*), beschränken uns also auf die Untersuchung der Lichtverteilung bei Vollmond. Bezeichnet man durch A_0 das Azimut des Punktes M, in welchem die Schattengrenze die Grundfläche schneidet, so ist

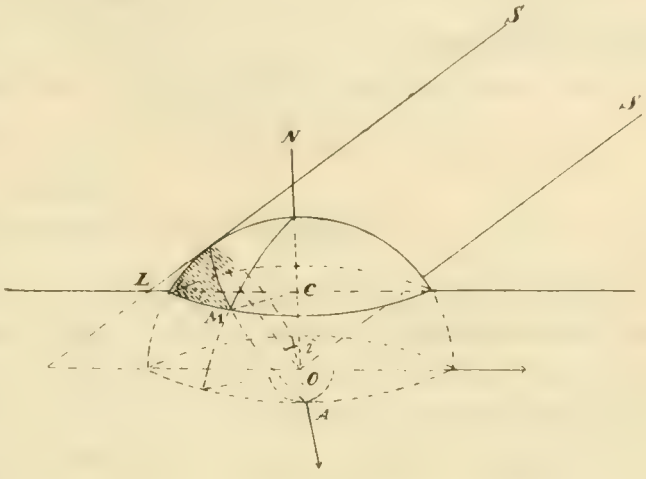


Fig. 7.

$$\cos(\pi - A_0) = \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{cotg} i \tag{31}$$

und überhaupt hat man für die Azimute der Punkte der Schattengrenze die Beziehung

$$\cos(\pi - A) = \operatorname{cotg}\psi \operatorname{cotg} i \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{cotg} i \sec(\pi - A)$$

$$\psi = \operatorname{arctg}[\operatorname{cotg} i \sec(\pi - A)] \tag{32}$$

Wir haben weiter für das Flächenelement ds der Oberfläche und für die Einfalls- und Reflexionswinkel des Lichts φ, ϑ, wenn R den Radius der Kugel bedeuten folgende Beziehungen

$$ds = R^2 \sin\psi \, d\psi \, dA$$
$$\cos\vartheta = \cos\varphi = \cos i \cos\psi + \sin i \sin\psi \cos A$$

Daher ist die von ds reflektierte Lichtmenge

$$dq = G \cos\varphi \cos\vartheta \, ds = G R^2 \sin\psi (\cos^2 i \cos^2\psi + \sin^2 i \sin^2\psi \cos^2 A + \sin 2i \sin\psi \cos\psi \cos A).$$

Bei der Integration sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist $i < 90 - \gamma$, oder

$i < 30°$, so treten keine Schatten auf und die Integrationsgrenze nach A ist von 0° bis π und von 0 bis $-\pi$. Wir haben dann für die reflektierte Lichtmenge

$$q = 2\,GR^2\,(\cos^2 i \int_0^{\gamma} \sin\psi\cos^2\psi d\psi \int_0^{\bar{\pi}} dA + \sin^2 i \int_0^{\gamma} \sin^3\psi d\psi \int_0^{\bar{\pi}} \cos^2 A\,dA +$$

$$\sin 2i \int_0^{\gamma} \sin^2\psi\cos\psi d\psi \int_0^{\bar{\pi}} \cos A\,dA) = \tag{33}$$

$$= 2\,GR^2\left[\frac{\cos^2 i\,\pi}{3}(1-\cos^3\gamma) + \sin^2 i\,\frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\cos\gamma) - \frac{1}{12}(1-\cos 3\gamma)\right]\right]$$

Ist $i > 30°$, so integrieren wir zunächst bis A_0, wobei die Integrationsgrenze für ψ konstant ist wie oben, und dann weiter von A_0 bis π, wobei die Integrationsgrenze für ψ eine Funktion von A wird, die aus der Gleichung (32) bestimmt ist. Wir haben somit nach Ausführung der möglichen Integrationen

$$q = 2\,GR^2\left\{\frac{\cos^2 i}{3}\left(\pi - A_0\cos^3\gamma - \int_{A_0}^{\bar{\pi}} \cos^3\psi\,dA\right) + \right.$$

$$+ \sin^2 i\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}\sin 2A_0\right)\left(\frac{3}{4}\cos\gamma - \frac{1}{12}\cos 3\gamma\right) - \int_{A_0}^{\pi}\left(\frac{3}{4}\cos\psi - \frac{1}{12}\cos 3\psi\right)\cos^2 A\,dA\right] + \tag{34}$$

$$\left. + \frac{\sin 2i}{3}\left(\sin A_0\sin^3\gamma + \int_{A_0}^{\pi}\sin^3\psi\cos A\,dA\right)\right\} = 2\,GR^2\,F(i)$$

Die in dieser Formel vorkommenden Integrale, in denen ψ durch die Gleichung (32) bestimmt ist, wurden nach der Gaussschen Formel für eine Reihe fortschreitender Winkel i von 0° bis 75° numerisch ausgerechnet. Es ergaben sich auf diese Weise folgende von den sichtbaren Kalottenteilen reflektierten Lichtmengen, die der Formel (34) bis auf den Faktor $2\,GR^2$ entsprechen

i	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°
$F(i)$	0.916	0.899	0.847	0.769	0.673	0.567	0.456	0.346	0.296

Bezeichnen wir die Anzahl der Kalotten pro Quadrateinheit der Oberfläche mit n, so ist der ebene Teil derselben

$$1 - n\pi r^2 = 1 - k$$

Davon ist ein Teil verdeckt und wir können ihn hier, wo es sich um eine Überschlagsrechnung handelt, ebenso berechnen, wie im Falle von Halbkugeln, indem wir die schräge Projektion der Kalotte auf die Ebene gleichsetzen einem Halbkreise $\frac{1}{2}\pi r^2 +$ eine Halbellipse $\frac{1}{2}\pi r l$, wo $l = CL$. Aus der Figur (7) finden wir leicht die Beziehung

$$l = r\,\mathrm{cosec}\,\gamma\,\sec\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\sin\varepsilon\right) = 1.1547\,r\sec\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)$$

Der unverdeckte Teil der ebenen Fläche zwischen den Kalotten ist somit

$$1 - \frac{1}{2}k\left[1 + 1.155\sec\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)\right].$$

Wenn dieser Teil nach Lambert reflektiert, so ist die gesammte von der Flächeneinheit reflektierte Lichtmenge

$$q = 2\,GR^2\,nF(i) + G\left\{1 - \frac{1}{2}k\left[1 + 1.155\sec\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)\right]\right\}\cos^2\varepsilon = \frac{2.666\,k}{\pi}\,GF(i) + GF_1(i)\cos^2\varepsilon \tag{35}$$

wo $F_1(i)$ zur Abkürzung für den Klammernausdruck eingeführt ist.

Für das Zentrum der Mondscheibe ergibt sich

$$q_0 = G(1 - 0.300\,k) \tag{36}$$

und für die relativen Helligkeiten

$$J : J_0 = \frac{2.666\,k}{\pi} \cdot \frac{F(i)\sec\varepsilon + F_1(i)\cos\varepsilon}{1 - 0.3\,k} \tag{37}$$

Für die relativen Helligkeiten der Kalotten allein erhalten wir

$$\frac{J}{J_0} = \frac{F(i)}{F(0)} \cdot \frac{2.155}{\left[1 + 1.155\sec\varepsilon\left(1 + \frac{1}{2}\sin\varepsilon\right)\right]\cos\varepsilon} \tag{38}$$

Nach diesen Formeln sind die relativen Helligkeiten der Tafel XI berechnet, wobei $k = 0.44$ angenommen ist, was einer durchschnittlichen Entfernung der Basiszentren von $3\,r$ entspricht. Bis zum Winkel $\varepsilon = 75°$ treten dann keine Überdeckungen der Kalotten ein.

Tafel XI.

$i = \varepsilon$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	75°
$J : J_0$	1.00	1.00	0.99	0.94	0.87	0.78	0.69	0.61	0.57
Nach Lambert .	1.00	0.98	0.94	0.87	0.77	0.64	0.50	0.34	0.26
Kalotten allein .	1.00	1.03	1.05	1.04	1.02	0.98	0.93	0.85	0.81

Die Tabelle zeigt, wie zu erwarten war, eine ähnliche Lichtabnahme vom Zentrum aus, wie bei halbkugelförmigen Erhöhungen. Diese ist bedeutend geringer als sie das Lambertsche Gesetz ohne Erhebungen ergibt. Sie zeigt weiter, dass die Lichtabnahme sich bis zu einer weiteren Grenze erstreckt, als bei Halbkugeln, weil die Überdeckungen später eintreten. Endlich zeigt die letzte Zeile, welche die Helligkeiten der Kalotten allein angibt, in Übereinstimmung mit der Tafel IX fast gleichmässige Helligkeit in weiten Grenzen. Die Lichtabnahme in der ersten Zeile, die am Rande selbst auch hier einem neuen Anstieg platzmachen würde, ist somit durch das ebene Terrain zwischen den Erhöhungen bedingt und wird um so geringer sein, je dichter die Erhöhungen stehen. Diese Lichtabnahme muss noch durch eine andere hier nicht in Betracht gezogene Ursache in Wirklichkeit verringert werden, nämlich durch die Reflexionen zweiter Ordnung von den Abhängen der Erhöhungen, die stärker beleuchtet sind, auf das ebene Terrain; auch diese Wirkung wird um so stärker sein, je dichter die Erhöhungen stehen.

Die Veränderlichkeit des Mondrandes folgt bei kalottenförmigen Erhebungen demselben Gesetz wie bei halbkugelförmigen, weil von den Halbkugeln am Mondrande auch nur Kalotten sichtbar sind. Die diesbezüglichen Rechnungen können deshalb nur denselben Widerspruch mit der Beobachtung ergeben, wie er in den Zahlen der Tafel X hervortritt.

Zusammenfassung. Die drei Hypothesen über die Form der Erhebungen auf der Mondoberfläche, die hier diskutiert worden sind, führen zu dem übereinstimmenden Ergebnis, dass bei strenger Giltigkeit des Lambertschen Gesetzes und ohne Rücksicht auf Reflexionen zweiter Ord-

nung bei gleichmässiger Verteilung dieser Erhebungen eine gleichmässige Helligkeit auf der Vollmondscheibe nicht zu erreichen ist, dass aber diese Helligkeit sehr bedeutend ausgeglichen wird im Vergleich zu der, welche die Lambertsche Formel ohne Erhebungen ergibt. Die übrigbleibende Lichtabnahme, die sich nicht ganz bis zum Rande des Mondes erstreckt, ist wesentlich durch die Lichtabnahme des zwischen den Erhebungen liegenden ebenen Bodens bedingt, während die halbkugelförmigen und kalottenförmigen Erhebungen in weiten Grenzen nahezu gleich hell erscheinen. Je dichter die Erhebungen neben einander stehen, desto gleichmässiger wird die resultierende Gesamthelligkeit.

Die Annahme von Erhebungen ist aber ganz ungeeignet, die Veränderlichkeit des Mondrandes und überhaupt der mittleren Flächenhelligkeit der Scheibe mit dem Phasenwinkel zu erklären, da sie ein Anwachsen der Helligkeit des Mondrandes statt einer Abnahme nach der Opposition bis zu bedeutenden Phasenwinkeln verlangt.

5. Der Einfluss von Vertiefungen in der Oberfläche auf die Beleuchtung einer Kugel.

Sphärische Vertiefungen. Nach den Wilsingschen Ansichten über die Entwickelungsgeschichte des Mondes müsste ein grosser Teil der Mondoberfläche aus vulkanischer Lava bestehen. Eine sehr gewöhnliche Form von Lava ist der Bimstein, dessen löcherige Oberfläche mit halbkugelförmigen Löchern dicht besät ist. Wir wollen den Einfluss solcher Vertiefungen auf die Beleuchtung der verschiedenen Phasen untersuchen. Auch hier beschränken wir uns auf den Fall, wo der einfallende und reflektierte Strahl in einer Ebene liegen, also auf die Lichtverteilung auf dem Intensitätsäquator des Mondes bei verschiedenen Phasen und die Veränderlichkeit des Mondrandes.

Im Zentrum der Vertiefung liegt der Anfangspunkt eines rechtwinkeligen koordinatensystems (Fig. 8), dessen Z-Axe nach unten gerichtet ist. Wir führen die üblichen sphärischen Koordinaten des Flächenelementes ds ein, die Breite ψ, die von der xy Ebene aus gerechnet wird, stets positiv ist, und von $0°$ bis $90°$ anwächst, und ω die Länge von der X-Axe aus von 0 bis $180°$ wachsend und positiv in der Richtung nach der positiven Y-Axe; letztere Richtung legen wir immer in den beleuchteten Teil der Halbkugel. Die Grenze des beleuchteten Teils beginnt stets, auch bei $i < 45°$ auf dem zur Richtung der Beleuchtung senkrechten Durchmesser der Kugel, also auf der X-Axe und schneidet den Hauptmeridian (yz-Ebene) in der Breite $\psi = \pi - 2\,i$, wie das aus der Figur ersichtlich ist.

Um den Verlauf der Grenzkurve auf der Halbkugel zwischen den genannten Punkten zu bestimmen, lesen wir folgende Gleichungen aus der Zeichnung ab.

Der kleine Kreis ABD ist ein zum Hauptmeridian paralleler Schnitt der Halbkugel und die gerade AD ein den Grenzpunkt A treffender Strahl; $AE = z = r \sin \psi$

$$z = (CD - EC) \operatorname{cotg} i = r\,(\sqrt{1 - \cos^2 \psi \cos^2 \omega} + \cos \psi \sin \omega) \operatorname{cotg} i = r \sin \psi$$

Nach einfachen Transformationen erhalten wir hieraus die Gleichung der Grenzkurve:

$$\operatorname{tg} \psi = -\sin \omega \operatorname{tg} 2\,i = \sin \omega \operatorname{tg} (\pi - 2\,i)$$

setzt man

$$\operatorname{tg} (\pi - 2\,i) = n, \tag{39}$$

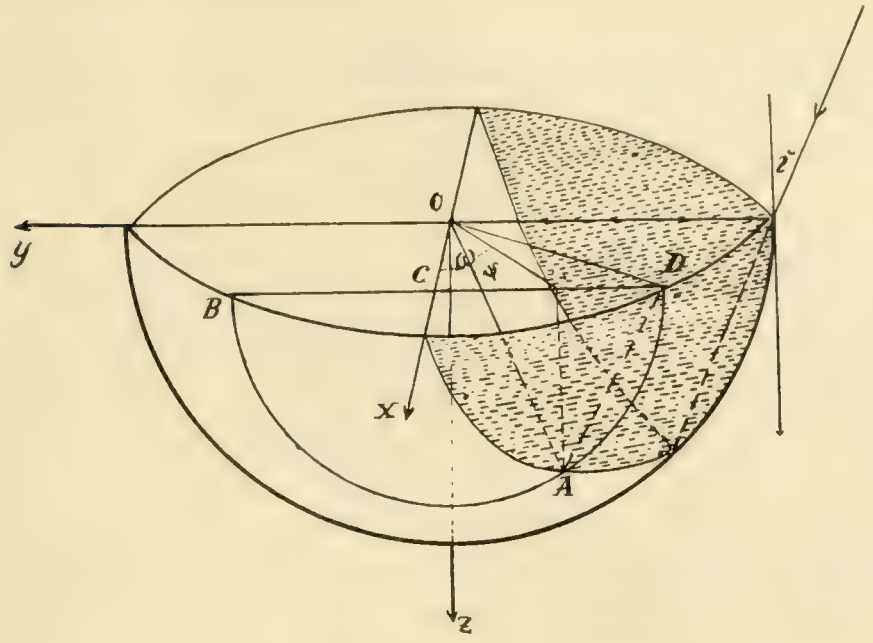


Fig. 8.

so ist

$$\psi = \operatorname{arctg}(n \sin \omega) = p \tag{40}$$

Bezeichnet man Einfalls- und Reflexionswinkel auf das Element der Halbkugel ds durch φ u. ϑ, so ist $\cos \varphi = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1$ wo α, β, γ die Winkel des einfallenden Strahles mit den Axen xyz bedeuten, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ — die Winkel der Normalen oder des Radius im Elemente ds mit denselben Axen. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0; & \cos \alpha_1 &= \cos \psi \cos \omega \\ \cos \beta &= \sin i; & \cos \beta_1 &= \cos \psi \sin \omega \\ \cos \gamma &= \cos i; & \cos \gamma_1 &= \sin \psi \end{aligned}$$

Ersetzt man hier i durch ε, so erhält man die entsprechenden Gleichungen für den reflektierten Strahl. Es ist daher

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \sin i \cos \psi \sin \omega + \sin \psi \cos i \\ \cos \vartheta &= \sin \varepsilon \cos \psi \sin \omega + \sin \psi \cos \varepsilon \end{aligned}$$

$$dq = G ds \cos \varphi \cos \vartheta; \quad \text{wo} \quad ds = r^2 \cos \psi \, d\psi \, d\omega$$

$$dq = G r^2 \, d\psi \, d\omega \, [\cos^3 \psi \sin^2 \omega \sin i \sin \varepsilon + \sin^2 \psi \cos \psi \cos i \cos \varepsilon + \cos^2 \psi \sin \psi \sin (i + \varepsilon)]$$

$$q = 2 G r^2 \Big[\sin i \sin \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \, d\omega \int_0^{p} \cos^3 \psi \, d\psi + \cos i \cos \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{p} \cos \psi \sin^2 \psi d\psi +$$

$$+ \sin (i + \varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega \, d\omega \int_0^{p} \cos^2 \psi \sin \psi \, d\psi \Big] = 2 G r^2 \Big[\sin i \sin \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega \, d\omega \left(\frac{3 \sin p}{4} + \frac{\sin 3 p}{12} \right) +$$

$$+ \cos i \cos \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \frac{\sin^3 p}{3} - \sin (i + \varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega \, d\omega \left(\frac{\cos^3 p}{3} - 1 \right) \Big] \tag{41}$$

Diese Formel kann nach Einsetzung von p aus Gleichung (40) nur numerisch ausgewertet werden; sie gilt für den Fall, dass der einfallende und der reflektierte Strahl auf derselben Seite der Normalen liegen, und dabei $\varepsilon < i$. Ist $\varepsilon > i$, so liegt die Grenze des sichtbaren Teiles der Halbkugel oberhalb der Schattengrenze. Die Integration ist in diesem Falle bis zur Grenzkurve

$$\psi = \operatorname{arctg}\left[\sin\omega \operatorname{tg}(\pi - 2\varepsilon)\right] = \operatorname{arctg}(n_1 \sin\omega) = p_1 \qquad (42)$$

auszuführen.

Bei der numerischen Integration ist weiter in Betracht zu ziehen, dass die Schattengrenze bei kleinen Einfallswinkeln ($i < 45°$) innerhalb des 3. und 4. Quadranten liegt. Es ist bei $i < 45$ $\operatorname{tg}(\pi - 2i) < 0$ und da ψ nur positiv sein kann, so folgt aus der Gleichung (39), dass $\sin\omega < 0$. Die Integration nach ω hat also die Grenzen $-\pi$ bis 0, da aber der erste und zweite Quadrant auch beleuchtet sind, so nehmen unsere Doppelintegrale jetzt die Form an

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\omega\, d\omega \int_p^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi$$

und hieraus erhält man nach einfachen Transformationen

$$I = \frac{\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4}\sin p + \frac{1}{12}\sin 3p\right) d\omega,$$

$$II = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi \cos\psi\, d\psi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\omega \int_p^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi \cos\psi\, d\psi$$

und hieraus

$$II = \frac{1}{3}\pi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 p}{3}\, d\omega,$$

$$III = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\omega\, d\omega \int_p^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega \cos^3 p\, d\omega$$

Liegen der einfallende und der reflektierte Strahl zu verschiedenen Seiten der Normalen, so ist von der beleuchteten Halbkugel nur der Teil sichtbar, der zwischen den Grenzkurven

$$\psi = \operatorname{arctg}(n \sin\omega); \quad \text{wo} \quad n = \operatorname{tg}(\pi - 2i)$$

und

$$\psi = \operatorname{arctg}(n_1 \sin\omega); \quad \text{wo} \quad n_1 = \operatorname{tg} 2\varepsilon \quad \text{liegt.}$$

In diesem Falle ist

$$\cos\varphi = \sin i \cos\psi \sin\omega + \sin\psi \cos i$$
$$\cos\vartheta = -\sin\varepsilon \cos\psi \sin\omega + \sin\psi \cos\varepsilon$$

und der Ausdruck für die reflektierte Lichtmenge daher

$$q = 2Gr^2\Big[-\sin i \sin\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\, d\omega \int_{p_1}^{p} \cos^3\psi\, d\psi + \cos i \cos\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_{p_1}^{p} \sin^2\psi \cos\psi\, d\psi +$$

$$+ \sin(i-\varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, d\omega \int_{p_1}^{p} \cos^2\psi \sin\psi\, d\psi\Big].$$

$$q = 2\,Gr^2 \left\{ -\sin i \sin \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega\, d\omega \left[\tfrac{3}{4} (\sin p - \sin p_1) + \tfrac{1}{12} (\sin 3\,p - \sin 3\,p_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \cos i \cos \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\, \tfrac{1}{3} (\sin^3 p - \sin^3 p_1) + \sin (i - \varepsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega\, d\omega\, \tfrac{1}{3} (\cos^3 p - \cos^3 p_1) \right\} \qquad (43)$$

Die drei Integrale der Formeln (41, 43) wurden nach dem Simpsonschen Regel numerisch ausgewertet, nachdem Tabellen der zu integrierenden Funktionen von 5 zu 5° berechnet worden waren. Bezeichnet man den Ausdruck in den Klammern durch $f(i, \varepsilon)$, so ist also die von der Halbkugel reflektierte Lichtmenge

$$q = 2\,Gr^2 f(i, \varepsilon)$$

und die Helligkeit der kreisrunden Öffnung

$$J = \frac{2\,G}{\pi} f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon \qquad (44)$$

In den hier folgenden Tafeln sind die Werte von $f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon$ zusammengestellt für die beiden Fälle: einfallender und reflektierter Strahl auf derselben Seite und auf verschiedenen Seiten der Normalen.

Tafel XII.

$f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon$

Einfallender und reflektierter Strahl auf derselben Seite der Normalen.

ε \ i	0°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
0°	1.047	1.099	1.131	1.133	1.101	1.033	0.938	0.826	0.710	0.606	0.510	0.413	0.319	0 231	0.153	0.088	0.040	0.010	0.000
5	1.103	1 164	1.198	1.199	1 163	1.193	0.994	0.879	0.762	0.659	0.563	0 465	0.367	0.274	0.190	0.117	0.060	0.020	0.000
10	1.149	1.212	1.265	1.266	1.227	1.153	1.050	0.933	0.815	0.713	0.617	0.517	0.416	0.318	0.227	0.147	0.080	0.031	0.000
15	1.173	1.237	1.291	1 335	1.293	1.215	1.109	0.989	0.870	0.768	0.673	0.571	0.467	0.363	0.266	0.177	0 101	0.041	0.000
20	1.171	1.233	1.286	1.330	1.362	1.280	1.170	1.049	0.928	0.827	0.731	0.629	0.520	0.411	0.306	0 208	0.123	0.052	0.000
25	1.107	1.201	1.253	1.295	1.327	1.336	1.235	1.110	0.989	0.888	0 794	0.688	0.577	0.462	0.349	0.242	0.146	0 064	0.000
30	1.083	1.143	1.194	1.237	1 270	1.293	1.306	1.178	1.056	0.956	0.861	0.754	0.638	0.517	0.395	0.279	0.171	0.077	0.000
35	1.008	1.069	1.122	1.167	1.203	1.228	1.246	1.253	1.129	1.030	0.936	0.826	0.706	0.578	0.447	0 319	0.199	0.091	0.000
40	0 928	0.991	1.048	1.097	1 138	1.170	1.194	1.208	1.213	1.144	1.020	0.908	0.782	0.646	0.505	0.365	0.230	0.107	0.000
45	0.857	0.926	0 993	1.049	1.098	1.139	0.170	1.193	1.207	1.212	1.118	1.003	0.871	0.726	0.573	0.418	0.267	0 126	0.000
50	0.794	0.873	0.946	1.011	1.069	1.119	1.160	1.192	1 220	1.230	1.235	1.116	0.977	0.821	0 653	0.481	0.310	0.148	0.000
55	0.720	0.807	0.888	0.962	1.030	1.088	1.138	1.180	1.213	1.237	1.251	1.256	1.108	0.938	0.753	0.559	0.364	0.175	0 000
60	0.638	0.732	0.820	0.902	0.977	1.045	1.104	1.156	1.199	1.232	1.256	1.271	1.275	1.089	0.880	0.653	0.433	0.210	0.000
65	0.546	0.646	0.742	0.830	0.914	0.990	1.059	1.119	1.171	1 215	1.248	1.273	1.288	1.293	1.054	0.795	0.526	0 257	1.000
70	0.447	0.552	0 653	0.750	0.840	0.924	1.001	1.070	1.132	1.184	1.228	1.263	1 287	1.302	1.307	0.994	0.665	0.327	0.000
75	0.341	0.450	0.558	0.659	0.756	0.847	0.932	1.010	1.080	1.141	1.194	1.239	1.273	1.298	1.313	1.318	0.886	0.441	0 000
80	0.230	0 343	0.454	0.560	0.663	0.761	0.852	0.938	1.016	1.086	1.148	1.202	1.246	1.281	1.306	1.321	1 326	0.665	0.000
85	0.116	0.231	0 344	0.454	0.562	0.666	0.763	0.856	0.941	1.020	1.090	1.152	1.206	1 249	1.284	1.309	1 325	1.330	0 000
90	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0 000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0 000	0.000

Tafel XIII.

$f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon$

Einfallender und reflektierter Strahl zu verschiedenen Seiten der Normalen.

ε \ i	0°	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
0°	1.047	1.099	1 131	1.133	1.101	1.004	0.938	0.826	0 711	0.606	0.510	0.413	0.319	0.231	0.153	0.088	0.040	0.010	0.000
5	1.103	1.035	1.064	1 067	1.037	0.947	0.882	0.772	0.659	0.553	0.457	0 361	0.270	0.187	0.116	0.059	0.020	0.000	—
10	1.149	1.077	0.995	0.999	0.971	0.912	0.824	0.716	0.604	0.449	0 402	0.308	0.221	0.143	0.078	0.030	0.000	—	—
15	1.173	1.101	1.018	0.925	0.901	0.846	0.761	0.657	0.546	0.439	0.344	0.252	0.169	0.097	0.040	0.000	—	—	—
20	1.171	1.100	1.018	0.926	0.824	0.773	0.693	0.592	0.482	0.355	0.282	0.192	0.115	0.049	0.000	—	—	—	—
25	1.107	1.071	0.991	0.901	0 802	0.695	0 618	0.521	0.415	0.310	0.216	0.131	0 058	0.000	—	—	—	—	—
30	1.083	1.014	0.937	0.849	0.752	0.647	0.535	0.444	0.341	0.238	0.147	0.067	0.000	—	—	—	—	—	—
35	1.008	0.939	0.861	0.774	0.679	0.577	0.469	0.347	0.261	0.162	0.074	0.000	—	—	—	—	—	—	—
40	0.928	0.857	0.777	0.689	0.593	0.491	0.386	0.280	0.177	0.082	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—
45	0.857	0.779	0.695	0.600	0.501	0.397	0.292	0.187	0.089	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—
50	0.794	0.708	0.615	0.517	0.412	0.305	0 198	0.095	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
55	0.720	0.628	0.529	0.425	0.315	0.207	0.100	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60	0 638	0.539	0.435	0.326	0.215	0.105	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
65	0.546	0.442	0.334	0.221	0.108	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
70	0.447	0 338	0.225	0.112	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
75	0.341	0.230	0.114	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
80	0.230	0.116	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
85	0.116	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
90	0.000	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Verfolgen wir die Zahlen der ersten Tabelle längs der Diagonale, die gleichem Einfalls- und Reflexionswinkel, also der Lichtverteilung längs dem Intensitätsäquator in Opposition entsprechen, so sehen wir, dass sie nahezu konstante Helligkeit für alle Punkte ergeben. Nur in allernächster Nähe des Zentrums ist ein kleiner Anstieg zu bemerken. Dagegen zeigen die horizontalen Zeilen, welche den Helligkeitsverlauf bei konstanten ε angeben, vom Werte $\varepsilon = i$ an starke Abnahme der Helligkeit.

Um zu prüfen, wie weit die poröse Beschaffenheit der Oberfläche die beobachtete Lichtverteilung auf der Mondscheibe erklären kann, müssen wir zunächst eine Hypothese über die Reflexionsformel für den übrigen nicht porösen Teil der Oberfläche machen, denn sogar bei Berührung der kreisförmigen Poren bleiben 22 % ebener oder anders geformter Oberfläche nach. Lava ist oft derart dicht mit Löchern besät, dass sogar die Wände zwischen den Poren vielfach zerstört sind und die Form der übrigen Oberfläche ist dann schwer bestimmbar, jedenfalls aber nicht eben, weil auch bei diesen kleinen Löchern, wie bei den grossen Kratern bei Entweichen der Gase ein Aufreissens und Aufwölben des umgebenden Bodens stattfindet. Man wird deshalb schwer erwarten können, dass für den nicht porösen Teil der Oberfläche die Lambertsche Reflexionsformel unverändert gültig sein wird. Wir bezeichnen die bestimmende

Funktion allgemein durch $G_1 \varphi(i, \varepsilon)$. Den Anteil der nicht porösen Fläche, der auf eine Pore kommt durch $n^2 r^2$, dann ist die Helligkeit der Oberfläche proportional mit

$$\frac{2Gr^2}{\pi} f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon + G_1 n^2 r^2 \varphi(i, \varepsilon) \sec \varepsilon$$

oder

$$f_1(i, \varepsilon) + k \varphi_1(i, \varepsilon)$$

wo $f_1 = f \sec \varepsilon$, $\varphi_1 = \varphi \sec \varepsilon$ und

$$k = \frac{n^2 \pi}{2} \cdot \frac{G_1}{G} \tag{45}$$

die relative Helligkeit zweier Punkte der Oberfläche ist

$$J : J_1 = \frac{f_1(i, \varepsilon) + k \varphi_1(i, \varepsilon)}{f_1(i_1 \varepsilon_1) + k \varphi_1(i_1 \varepsilon_1)} \tag{46}$$

Aus den Beobachtungen auf dem Intensitätsäquator bei verschiedenen Phasen zeigte sich sofort, dass wenn man für die Funktion $f(i, \varepsilon) \sec \varepsilon$ die Werte aus den vorigen Tabellen entnimmt, der Gleichung nur bei einem nahezu konstanten oder mit dem Winkel i sehr langsam abnehmenden Ausdruck für $\varphi_1(i, \varepsilon)$ genügen kann. Dasselbe Resultat ergab sich bei der vorläufigen Prüfung der Randbeobachtungen. Es wurde deshalb für die Funktion $\varphi_1(i, \varepsilon)$ die Seeligersche Form angenommen

$$\varphi_1(i, \varepsilon) = G_1 \frac{\cos i}{\cos i + \lambda \cos \varepsilon}$$

Dem Koeffizienten λ wurden versuchsweise verschiedene Werte gegeben und für jeden von ihnen der entsprechende Wert für k abgeleitet. Da jede zwei Beobachtungen zur Bestimmung von k dienen können, kam hier auch die Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung freilich nicht in strenger Form, da die benutzten Gleichungen zur Bestimmung des besten Wertes für k, für ein gegebenes λ

$$lg \frac{J}{J_1} - lg \frac{f_1(i, \varepsilon) + k_0 \varphi_1(i, \varepsilon)}{f_1(i_1 \varepsilon_1) + k_0 \varphi_1(i_1 \varepsilon_1)} = \Delta k \text{ Mod.} \left(\frac{\varphi_1(i, \varepsilon)}{f_1(i, \varepsilon) + k_0 \varphi_1(i, \varepsilon)} - \frac{\varphi_1(i_1 \varepsilon_1)}{f_1(i_1 \varepsilon_1) + k_0 \varphi_1(i_1 \varepsilon_1)} \right) \tag{47}$$

nicht unabhängig von einander sind. Als Referenzpunkt $(i_1 \varepsilon_1)$ diente wie früher der Punkt 1 in der Mitte des Intensitätsäquators und es wurden nur Mittelwerte aus 2—4 Beobachtungen mit naheliegenden Werten von α bei der Ausgleichung benutzt. Schon die erste Probe mit $\lambda = \frac{1}{3}$ gab eine gute Annäherung, der Wert $\lambda = 0.1$ führte aber zur besten Übereinstimmung. Es konnten nur die Beobachtungen mit $\alpha < 90$ zur Prüfung der Porentheorie benutzt werden, weil bei $\varepsilon - i > 90°$ kein Licht mehr aus den Poren ins Auge gelangt. Die folgende Tabelle veranschaulicht das Resultat der Rechnungen für die zwei Hypothesen $\lambda = 0.3$ und $\lambda = 0.1$.

Zu oberst stehen die beobachteten Helligkeitsverhältnisse, unter ihnen die Differenzen Beobachtung — Rechnung in Grössenklassen für die beiden Hypothesen (Hypothese 2 in kursiv).

Die Werte für k sind

Hypothese 1 $\lambda = 0.3$; $k = 1.4$
» 2 λ 0.1; $k = 1.0$

Der Hypothese 2 gebührt zweifellos der Vorzug. Eine Prüfung derselben können wir erhalten, wenn wir die Gleichungen (47) auf die Randbeobachtungen anwenden, die sich bei keiner der früher untersuchten Annahmen auch nur annähernd darstellen liessen. Der Kurve auf Seite 26 wurden für jede 10° des Phasenwinkels die Helligkeiten entnommen und auf die Helligkeit bei

Tafel XIV.

Beobachtungen N:o	α	Punkte 2	Punkte 4	Punkte 3	Punkte 5
18, 28, 31 . . .	20.1	—	—	0.929	0.795
		—	—	-0.07 -0.05	-0.01 $+0.03$
25, 23, 12 . . .	43.2	1.028	1.143	—	—
		$+0.11$ $+0.08$	-0.01 -0.01	—	—
14, 15	56.8	1.025	1.062	0.969	0.699
		$+0.18$ $+0.13$	$+0.21$ $+0.16$	-0.30 -0.19	-0.33 -0.10
17, 34, 16 . . .	72.1	1.128	1.108	0.769	0.532
		$+0.08$ $+0.01$	$+0.19$ $+0.08$	$+0.10$ $+0.05$	-0.16 $+0.18$

$\alpha = 0$ bezogen. Es wurden dann einige Hypothesen über den Wert des Koeffizienten λ gemacht. Noch deutlicher, als bei der vorigen Untersuchung, trat aber die Erscheinung auf, dass der porenfreie Teil der Oberfläche seine Helligkeit nur sehr wenig verändert. Es wurde deshalb $\lambda = 0.1$ angenommen, wenn auch $\lambda = 0.0$ also das Reflexionsgesetz $q\,(i, \varepsilon) = G_1 \cos \varepsilon$ ebenso gut oder noch besser genügt hätte.

Die Anwendung der Gleichungen (47) bei konstantem $\varepsilon = 76.5$ auf die Werte $J_\alpha : J_0$ ergibt für k den Wert $k = 0.94$. Für $\lambda = 0.3$ ist keine genügende Übereinstimmung zu erhalten. Wir bleiben deshalb bei Hypothese 2. Die Übereinstimmung der erhaltenen Werte für k, und das aus der folgenden Tabelle einzusehende fast vollkommene Zusammenfallen der beobachteten und nach Formel (46) berechneten Veränderlichkeit des Mondrandes bestärkt die in diesem Kapitel behandelte Hypothese. Die Berechnung geschah mit den Werten $k = 1.0$, $\lambda = 0.1$.

Tafel XV.

α	$m_\alpha - m_0$	$f_1\,(i, \varepsilon)$	$\varphi_1\,(i, \varepsilon)$	$m_\alpha - m_0$	$B - G$
0°	0.00	1.320	0.909	0.00	0.00
10	0.01	1.299	0.944	-0.01	$+0.02$
20	0.03	1.239	0.959	$+0.02$	$+0.01$
30	0.08	1.141	0.967	$+0.06$	$+0.02$
40	0.17	1.010	0.971	$+0.13$	$+0.04$
50	0.27	0.847	0.974	$+0.22$	$+0.05$
60	0.38	0.659	0.976	$+0.34$	$+0.04$
70	0.51	0.451	0.976	$+0.48$	$+0.03$
80	0.65	0.230	0.976	$+0.67$	-0.02
90	0.83	0.000	0.976	$+0.88$	-0.06

Eine bessere Übereinstimmung anzustreben scheint bei der Unsicherheit der beobachteten Kurve überflüssig. Die Funktion $f(i, \varepsilon)$ kennzeichnet die Lichtmengen, die aus dem porösen Teile der Oberfläche zu uns gelangen, die Funktion $q(i, \varepsilon)$ jene des übrigen Teiles. Diese Trennung kann freilich nicht als ganz streng angesehen werden, wegen der bei der Theorie gemachten Vernachlässigungen.[1] Das aus den Löchern zurückgestrahlte Licht wird wegen der Reflexionen zweiter Ordnung innerhalb der halbkugelförmigen Höhlung geringere Schwankungen aufweisen, als es sich in den Zahlen unserer Tabellen 12 und 13 ausdrückt, wenn auch der Unterschied bei dem geringeren Reflexionsvermögen (Albedo) der Lava nicht bedeutend sein wird.

Der prozentuale Anteil der porösen Fläche kann unter diesen Umständen nicht sicher bestimmt werden. Für den Wert $k = 1.0$ erhalten wir nach (45)

$$k = \frac{G_1 n^2 \pi}{2G} = 1 \qquad n^2 = \frac{2G}{G_1 \pi} = 0.64 \frac{G}{G_1}.$$

G ist die Konstante des Lambertschen Reflexionsgesetzes, oder die bei senkrechter Bestrahlung von der Flächeneinheit senkrecht reflektierte Lichtmenge, $0.9\, G_1$ die unter denselben Bedingungen nach der Seeligerschen Formel bei $\lambda = 0.1$ reflektierte Lichtmenge. Die Betrachtungen der vorigen Kapitel haben aber gelehrt, dass die Seeligersche Formel bei kleinen λ, mit der gleichmässigen Helligkeit in Opposition und geringen Veränderlichkeit in der Nähe derselben sich als Resultat der Wirkung halbkugelförmiger oder kalottenförmiger Unebenheiten der Oberfläche angesehen werden kann, wobei jedes ebene Flächenelement nach Lambert reflektiert. Wir können diese Hypothese hier weiter verfolgen und einen Grenzwert für das Verhältnis $G : G_1$ aus folgender Überlegung ableiten. Denken wir uns im Zentrum der Vollmondscheibe ein Flächenelement πr^2, die von ihm reflektierte Lichtmenge ist nach Lambert $G\pi r^2$. Haben wir dagegen über πr^2 eine halbkugelförmige Wölbung, so ist die reflektierte Lichtmenge $\frac{2}{3} G\pi r^2$. Es wäre daher

$$0.9\, G_1 \pi r^2 = \frac{2}{3} G\pi r^2$$
$$G_1 : G = 0.74.$$

Man darf diesen Wert als untere Grenze des wahren Wertes ansehen, weil bei schwächeren Wölbungen (kalottenförmigen Erhöhungen), wie leicht ersichtlich, sich grössere Werte ergeben, die aber immer kleiner bleiben, als die Einheit. Bei diesem Werte ergibt sich

$$n^2 = 0.864$$

Der Anteil poröser Fläche wäre dann

$$\frac{\pi r^2}{\pi r^2 + n^2 r^2} = 0.78.$$

Dieser freilich sehr unsichere Wert entspricht zufälliger Weise genau einer direkten Berührung der Poren, der zwischen den Poren übrig bleibende Teil müsste dann gewölbt sein und für den Bereich der Phasenwinkel von 0 bis 90° am Rande der Scheibe nahezu unveränderliche Helligkeit haben. Da derselbe aber nicht mehr halbkugelförmig oder kalottenförmig sein kann, so können wir dieses Resultat nicht weiter prüfen. Die Lavastücke, die mir zugänglich waren, weisen bei dicht anliegenden Poren zwischen denselben nichts weniger als ebenen Boden auf; vielmehr ist er

[1] Ein geringer Teil der Poren wird zur Normalen geneigte Axen haben. Daher wird es Poren geben, die über $\alpha = 90°$ hinaus zur Beleuchtung beitragen werden, und unteralb dieser Grenze wird die Funktion $f(i, \varepsilon)$ durch ihre Mitwirkung einwenig ausgeglichen werden.

unregelmässig aufgeworfen, Gebirgsgraten vergleichbar, und leuchtet stark bei grossen Einfallswinkeln, wie das am Schluss abgebildete Lavastück zeigt.

Wenn die zwischen den Poren liegende Fläche Rundungen aufweist, so sind bei grösseren Phasenwinkeln $\alpha > 90$ am Rande der Scheibe nur diese Wölbungen sichtbar und für die grösseren Phasenwinkel müsste das Reflexionsgesetz hier von den Poren ganz unabhängig sein. Unsere Kurve für die Helligkeit des Mondrandes erstreckt sich bis $\alpha = 120°$. Entnimmt man ihr die Helligkeiten I_{120} und I_{90}, so ist

$$I_{120} : I_{90} = 0.59$$

während unsere Tabelle No. 10 für die Helligkeit der am Rande der Scheibe allein sichtbaren Kalotten bei $n = 2$ ergibt

$$I_{120} : I_{90} = 0.51$$

Diese Übereinstimmung ist bei der Unsicherheit der Kurve in diesem Gebiete, sowie auch der Unsicherheit der über die Wölbung des Bodens als genügend zu betrachten.

Die Annahme dicht verteilter halbkugelförmiger Poren mit Rundungen des Bodens zwischen ihnen erklärt sowohl die Lichtverteilung auf der Scheibe als die absoluten Helligkeiten des Mondrandes bei verschiedenen Phasenwinkeln auch bei strenger Gültigkeit der Lambertschen Formel.

6. Zylinderförmige Öffnungen.

Es soll hier noch der Vollständigkeit halber die Beleuchtung schmaler zylinderförmiger Poren untersucht werden. Die Tiefe der Öffnungen wird im Verhältnis zum Durchmesser als unendlich gross angenommen. Ein rechtwinkeliges Koordinatensystem wird in das Zentrum der Öffnung gelegt und die Z-Axe in die Zylinderaxe nach unten verlegt. Die Schattengrenze beginnt auch hier bei allen Einfallswinkeln des Lichtes auf dem zu der Ebene des einfallenden und reflektierten Strahles senkrechten Durchmesser, der mit der x-Axe zusammenfällt. Die Gleichung der Schattengrenze erhalten wir, wenn wir die Koordinaten des Schnittpunktes des Lichtstrahles SA mit der Zylinderfläche bestimmen. Wir haben

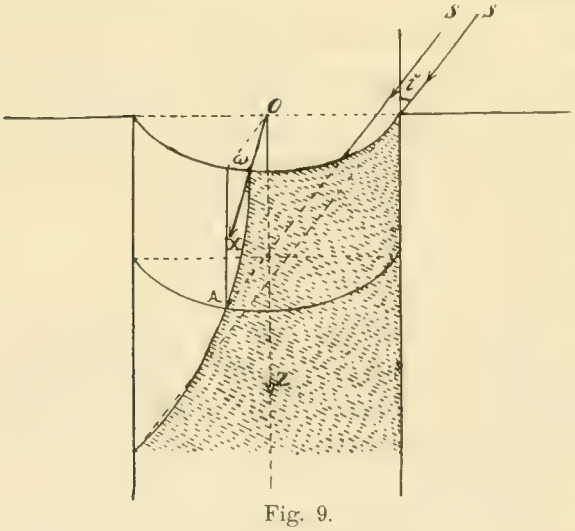


Fig. 9.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und}$$
$$\begin{cases} x = r\cos\omega \\ y = z\,\mathrm{tg}\,i - r\sin\omega \end{cases}$$

Hieraus folgen die Gleichungen für die Koordinaten des Schnittpunktes

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = \frac{2r\sin\omega}{\mathrm{tg}\,i} = 2r\sin\omega\,\mathrm{cotg}\,(i) \tag{48}$$

Auf ähnliche Weise kann die Grenze für den sichtbaren Teil der Zylinderfläche bestimmt werden

Man braucht nur in der obigen Gleichung i durch ε zu ersetzen. Man ersieht leicht, dass wenn der einfallende und reflektierte Strahl zu verschiedenen Seiten der Normalen liegen, die beiden Grenzkurven auf verschiedenen Seiten des Zylinders liegen, und daher überhaupt kein Licht ins Auge gelangt.

Bezeichnet man durch φ und ϑ Einfalls- und Reflexionswinkel vom Elemente der Oberfläche ds, so findet man

$$\cos\varphi = \sin\omega \sin i$$
$$\cos\vartheta = \sin\omega \sin\varepsilon$$

Die reflektierte Lichtmenge ist daher

$$dq = G\cos\varphi\cos\vartheta\, ds = Gr\sin\varepsilon\sin i\sin^2\omega\, d\omega\, dz$$

Solange $\varepsilon < i$ haben wir bis zur Schattengrenze zu integrieren, daher

$$q = 2Gr\sin i\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\omega\, d\omega\int_0^{2r\sin\omega\,\mathrm{cotg}\,i} dz = 2Gr\sin i\sin\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\omega\, d\omega\,\frac{2r\sin\omega}{\mathrm{tg}\,i} = \frac{4}{3}Gr^2\cos i\sin\varepsilon. \quad (49)$$

Ist ε grösser als i, so ist die Integrationsgrenze nach $z = \frac{2r\sin\omega}{\mathrm{tg}\,\varepsilon}$ und wir haben dann

$$q = \frac{4}{3}Gr^2\sin i\cos\varepsilon \quad (50)$$

Die Helligkeiten der Öffnungen sind

$$J = \frac{4}{3\pi}G\cos i\,\mathrm{tang}\,\varepsilon; \quad \text{und} \quad J = \frac{4}{3\pi}G\sin i \quad (51)$$

Die folgende Tabelle enthält diese Helligkeiten für verschiedene Winkel i und ε von 0° bis 90° ohne den Konstanten Faktor $\frac{4}{3\pi}G$.

Tafel XVI.

Die Helligkeiten zylindrischer Öffnungen.

ε \ i	0°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0°	*0.000*	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10	0.000	*0.173*	0.165	0.152	0.134	0.113	0.088	0.060	0.031	0.000
20	0.000	0.174	*0.342*	0.315	0.278	0.234	0.182	0.124	0.063	0 000
30	0.000	0.174	0.342	*0.500*	0.442	0.371	0.289	0.197	0.100	0.000
40	0.000	0.174	0.342	0.500	*0.643*	0.539	0.420	0.287	0.146	0.000
50	0.000	0.174	0.342	0.500	0.643	*0.766*	0.596	0.408	0.207	0.000
60	0.000	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	*0.866*	0.592	0.301	0.000
70	0.000	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	*0.940*	0.478	0.000
80	0.000	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	*0.987*	0.000
90	0.000	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.987	*0.000*

Betrachten wir die Zahlen auf der Diagonale der Tafel, welche gleichen Winkeln i und ε entsprechen, so sehen wir, dass die Helligkeiten der Öffnungen, vom Zentrum der Vollmondscheibe aus, wo sie 0 sind, proportional zum sinus des Einfallswinkels anwachsen. Da die Helligkeit des ebenen Bodens zwischen den Öffnungen mit dem cosinus desselben Winkels abnimmt, so ist ohne weiteres klar, dass bei gleicher Dichte der Öffnungen gleichmässige Helligkeit der Vollmondscheibe unmöglich ist. Nimmt man dagegen zwischen den Öffnungen gewölbten Boden an, der für sich allein nahezu gleichmässige Helligkeit ergeben würde, so wäre die Gesamtwirkung ein Anwachsen der Helligkeit nach dem Rande zu. Das Zentrum der Mondscheibe müsste demnach bedeutend dunkler erscheinen als die Ränder. Die Helligkeit des Randes würde ein scharfes Aufleuchten mit nachfolgendem langsamem Abfall der Helligkeit aufweisen. Für die typische Mondoberfläche kommt deshalb diese Hypothese nicht in Betracht, wenn auch einzelne Mondgebilde ähnliche Helligkeitsschwankungen aufweisen können. Wir brauchen diese Hypothese hier nicht weiter zu verfolgen, weil unser Beobachtungsmaterial keine Handhabe dazu bietet.

7. Die Beleuchtung einer von runden Öffnungen durchbrochenen Decke.

Die eigentümliche Form der Phasenkurve, welche einzelne Gebilde des Mondes, wie die hellen Strahlen des Kopernikus, das Innere kleiner Krater, aufweisen mit dem äusserst schnellen Abfall der Helligkeit in der Nähe der Opposition (siehe Fig. 2), legt die Erklärung nahe, dass hier nur in nächster Nähe Teile der Oberfläche sichtbar werden, welche bei grösseren Phasenwinkeln unverändert dunkel erscheinen. Das führt zu der Hypothese einer durchlöcherten Decke, wie sie bei glasurartiger Lava manchmal beobachtet worden ist. Hier ist die Dicke der Wände der Decke verschwindend im Vergleich zu ihrer Erhebung über dem Boden, und es ist deshalb bei der Berechnung des Beleuchtungseffekts dieselbe zu vernachlässigen, dagegen die Beleuchtung des Bodens in Rechnung zu ziehen. Ähnliche Beleuchtungseffekte können übrigens auch auf ganz andere Weise etwa in Anhäufungen lose liegender flacher unregelmässig geformter Blättchen entstehen.

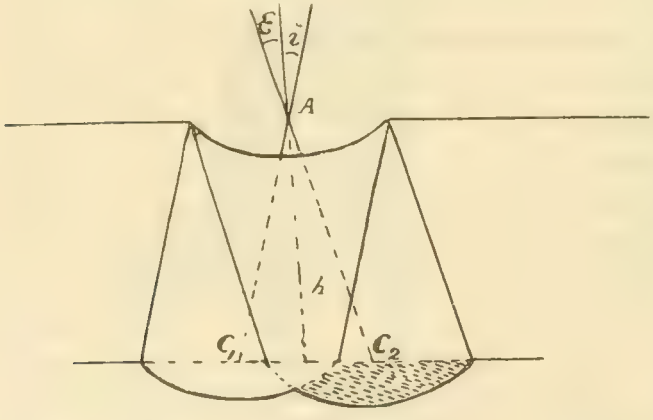


Fig. 10.

Da die Beobachtungen MARKOWS die in Fig. 2 dargestellt sind, noch einer Bestätigung bedürfen, so soll dieser Fall hier nur kurz behandelt werden.

Wir denken uns die Öffnungen kreisförmig, bezeichnen ihre Höhe über dem Boden durch h, ihren Radius durch r. In der Figur 9 sind C_1 und C_2 die Zentren der Projektionen der Öffnung von der Sonne und von der Erde aus. Solange diese beiden Projektionen einen gemeinsamen Teil haben, dringt noch Licht aus ihnen zum Beobachter. Vom Momente an, wo die beiden Kreise

sich berühren, erscheint die Öffnung schwarz. Bei Überdeckung ist der gemeinsame Teil ein Doppelsegment, dessen Fläche gleich ist mit

$$F = r^2 (2\beta - \sin 2\beta),$$

wo 2β der Zentriwinkel zwischen den Schnittpunkten der Kreise ist. Wir bezeichnen

$$\cos\beta = \frac{C_1 C_2}{2r} = u;$$

Dann ist

$$F = 2r^2 (\arccos u - u\sqrt{1-u^2}) \tag{52}$$

Dieser Ausdruck kann noch durch eine Reihenentwickelung, ausgehend vom Momente der Opposition, in welchem $u = 0$ ist, in die Form gebracht werden

$$F = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2u + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^4}{1.2.4.} - \cdots\right). \tag{53}$$

Die Kurve in Fig. 2 ist viel zu unsicher, als dass eine Anwendung der obigen Formel für sie statthaft wäre. Vielleicht darf sie dazu benutzt werden, um einen Näherungswert für die Grösse der Öffnungen im Verhältnis zur Höhe der Decke abzuleiten. Wir haben aus der Fig. 10.

$$AC_1 = h\sec i; \quad AC_2 = h\sec\varepsilon;$$
$$C_1 C_2^2 = h^2\sec^2 i + h^2\sec^2\varepsilon - 2h^2\cos\alpha\sec i\sec\varepsilon$$

Mit Hilfe der Beziehungen zwischen sphärischen Koordinaten auf der Scheibe und den Winkeln i und ε,

$$\cos i = \cos\psi\cos(\omega - \alpha)$$
$$\cos\varepsilon = \cos\psi\cos\omega$$

verwandelt sich diese Gleichung in folgende

$$C_1 C_2 = \frac{h\sin\alpha}{\cos\psi\cos\omega\cos(\omega-\alpha)} \tag{54}$$

Bei $C_1 C_1 = 2r$ tritt kein Licht mehr aus der Öffnung ins Auge. Wir sehen, dass mit Ausnahme des Gegenpunktes der Erde für alle anderen Punkte des Mondes der Verlauf der Helligkeitsabnahme durch Verdeckung vor und nach der Opposition unsymmetrisch verläuft. In den Beobachtungen von Markow eines hellen Strahles von Kopernikus und eines kleinen Kraters tritt diese Unsymmetrie auch hervor, doch ist sie unbedeutend, weil die Länge der Gebilde vom Zentralmeridian nicht gross ist ($\omega = 19°$); sie ist deshalb bei der Ableitung der Kurve für $\psi(\alpha)$ (Fig. 2) nicht beachtet worden. Diese Kurve ist dazu als Mittel für beide Gebilde erhalten worden, weil der Unterschied zwischen ihnen gering war. Setzen wir in die Formel

$$\frac{h}{2R} = \frac{\cos\psi\cos\omega\cos(\omega-\alpha)}{\sin\alpha}$$

für ψ und ω die mittleren Koordinaten der beiden unweit von einander liegenden Punkte ein: $\alpha = 19°$, $\psi = 31.5°$, und für α den Wert, bei dem die Kurve $\psi(\alpha)$ ihren Bruch hat, $\alpha = 15°$, so erhält man $\frac{h}{2r} = 3.1$.

Auch über den Teil der Fläche k, welcher innerhalb einer □ Einheit von Öffnungen bedeckt

st, kann aus dem Verhältnis der minimalen zur maximalen Helligkeit ein Schluss gezogen werden. Dieses Verhältnis ist gleich dem Verhältnis des unbeschatteten Teils der Fläche zur ganzen, also nach Fig. 2

$$\frac{I\,\text{min}}{I\,\text{max}} = 0.70 = \frac{1-k}{1}$$

woraus $k = 0.30$ folgt.

8. Übersicht über die Resultate des zweiten Teils. Schlussfolgerung.

Ausgehend von der Annahme, dass, die Lambertsche Reflexionsformel, welche den Versuchen im Laboratorium über diffuse Reflexion irdischer Substanzen, doch noch am besten genügt, auch für die ebene Mondoberfläche annähernd gültig ist, sind verschiedene Hypothesen über die besondere Beschaffenheit der typischen Mondoberfläche gemacht worden, um die Beobachtungstatsachen über die Lichtverteilung und Lichtabnahme mit dem Phasenwinkel, wie sie im ersten Teile dieser Arbeit festgestellt sind, zu erklären.

Diese Tatsachen: gleichmässige Helligkeit der Vollmondscheibe, gleichmässige Helligkeit des Mondrandes innerhalb $^3/_4$ der Mondsichel bei allen Phasen, starke Veränderlichkeit der mittleren Helligkeit der Scheibe mit dem Phasenwinkel, welche alle in der empirischen Formel

$$dq = G_1 \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \frac{1}{3}\cos \varepsilon} \psi(\alpha)\, ds$$

ihren Ausdruck fanden, können bei einer Annahme über die Beschaffenheit der typischen Mondoberfläche auch eine theoretische die Beobachtungen quantitativ befriedigende Erklärung finden.

Dies e Oberfläche ist dicht besät mit halbkugelförmigen Vertiefungen, wobei der zwischen denselben liegende Boden konvex nach oben gewölbt ist. Löchrige Lava, wie sie das beigefügte Bild zeigt, entspricht am besten solcher Beschaffenheit. Demnach wäre die Oberfläche des Mondes überall dort, wo das Fernrohr keine Details mehr aufweist, von derselben Beschaffenheit im Kleinen wie sie im Grossen in den kraterreichen Gegenden für das Fernrohr ist. Da die maria ein nahezu gleiches Reflexionsgesetz haben, wie die Kontinente, so gilt dieses Resultat auch für die maria.

Loses Gestein, dicht an einander gedrängt, könnte durch die Rundungen der hervorstehenden Teile und die Löcher, die zwischen den Steinen entstehen, als Resultat ein ähnliches Beleuchtungsgesetz bedingen, wie die löchrige Lava. Dann müsste aber die ganze Mondoberfläche auch auf den maria in weiter Entfernung von den Kratern mit dicht an einander liegenden Steinen besät sein. Da diese Annahme im hohen Grade unwahrscheinlich erscheint, die erste aber mit der Entwickelungsgeschichte des Mondes wie sie E. WILSING durch viele Gründe überzeugend gestützt hat, in gutem Einklange steht, so dürften die Resultate dieser Untersuchung nicht unwesentlich zur Bekräftigung der Wilsingschen Ansichten beitragen.

Diese Schlussfolgerungen bedürfen freilich wegen der Unsicherheit des Reflexionsgesetzes noch einer experimentellen Bestätigung, welche durch Beobachtungen im Laboratorium über

das photometrische Verhalten poröser Lava leicht erhalten werden kann. Diese vorausgesetzt wird man sich des Schlusses nicht entziehen können, dass die Mondoberfläche auch in ihren tiefer liegenden Teilen niemals die ausgleichende Wirkung einer Flüssigkeit oder einer dichten, staub tragenden Atmosphäre erfahren haben kann. Beide hätten in kurzer Zeit die Löcher des Bodens mit feinen Teilchen gefüllt und somit denselben wesentlich geebnet.

Ein Nebenresultat dieser Untersuchung ist die besonders starke Lichtabnahme in nächster Nähe der Opposition einzelner heller Gebilde der Mondoberfläche (helle Strahlen das Innere kleiner Krater), welche auch die Gesamthelligkeit des Mondes in Opposition bedeutend vergrössert. Diese Erscheinung kann ebenfalls durch eine löchrige Struktur dieser Gebilde aber von besonderer Art erklärt werden. Es wären das Löcher in einer dünnen Decke oder überhaupt Löcher, aus denen das Licht nur bei kleinen Phasenwinkeln herausdringen kann, wenn der sichtbare Teil des Bodens beleuchtet ist, und bei denen die Beleuchtung der Wände nicht in Betracht kommt.

9. Über den Begriff der Albedo uneben begrenzter Körper.

Bonds Definition der Albedo eines Planeten, als des Verhältnisses der gesamten vom Planeten zerstreuten zur gesamten auffallenden Lichtmenge ist vorzüglich geeignet die Strahlungsverhältnisse einer Planetenoberfläche zu bestimmen, umsomehr als man zur Bestimmung dieser Konstanten nur der Oppositionshelligkeit des Planeten und der Phasenkurve bedarf, nicht aber des Reflexionsgesetzes. Es ist die Albedo

$$A = pq, \quad \text{wo } p \text{ die Oppositionshelligkeit, und}$$

$$q = 2\int_0^\pi \varphi(\alpha)\sin\alpha\, d\alpha, \quad \text{wo } \varphi(\alpha) \text{ die Phasenkurve.}$$

Will man diese Beziehung aber auch zur Identifizierung irdischer und planetarischer Substanzen verwenden, so wird man folgendes zu beachten haben. Die Phasenkurve ist in hohem Grade von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängig, wie das aus den Ausführungen der vorigen Kapitel hervorgeht.

Aber auch die Oppositionshelligkeit ist nicht unabhängig von ihr. Für eine poröse Oberfläche mit halbkugelförmigen angrenzenden Poren und unebenem aufgeworfenem Boden zwischen ihnen kann das rechnerisch verfolgt werden.

Von den Poren kommt $^2/_3$ der Lichtmenge welche bei ebenem Boden reflektiert werden würde, von den Wölbungen zwischen ihnen, welche 0.22 der Gesamtfläche einnehmen ein grösserer Bruchteil ($^2/_3$ entspräche halbkugelförmigen Erhöhungen). Wir können ihn zu 0.8 schätzen. Es ist dann die in der Bestrahlungsrichtung reflektierte Lichtmenge

$$0.78 \times 0.667 + 0.22 \times 0.80 = 0.696$$

derjenigen die von ebenem Boden reflektiert werden würde.

Da die Helligkeit einer Kugel mit solcher Oberfläche in Opposition gleichmässig hell erscheint, so ist die gesamte Lichtmenge von ihr $0.696\, G\pi r^2$, während von einer Kugel ohne

Unebenheiten $\frac{2}{3} G\pi r^2$ reflektiert wird, somit nur um 4.4 % weniger. Die Helligkeit des Zentrums ist bedeutend verkleinert, diejenige der Ränder durch die Unebenheiten erhöht. Die aus der Oppositionshelligkeit berechnete Grösse p wäre somit direkt mit dem Reflexionsvermögen, das im Laboratorium für $i = \varepsilon$ für einen Körper bestimmt ist, vergleichbar.

Er gilt augenscheinlich allgemein folgende Gesetzmässigkeit. Die nach LAMBERTS Satz reflektierende Kugel hat voll beleuchtet nahezu dieselbe mittlere Flächenhelligkeit, wenn sie keine Unebenheiten aufweist, und wenn sie mit gleichartigen Unebenheiten gleichmässig bedeckt ist.

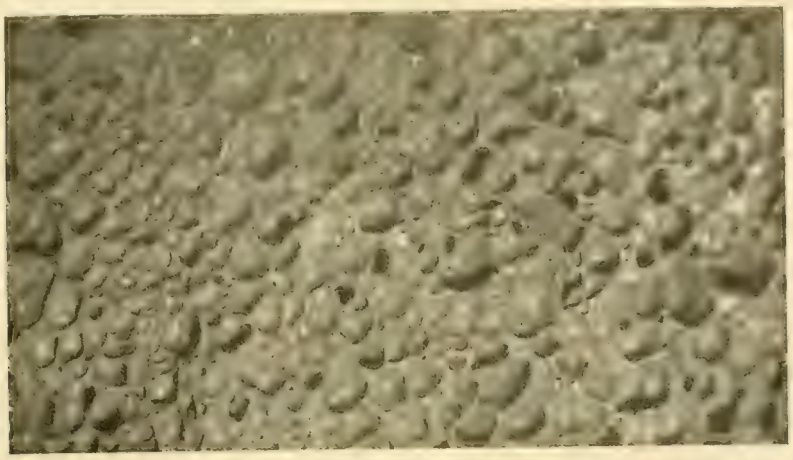
Bei konischen und kalottenförmigen Erhöhungen über ebenem Boden zwischen ihnen ist die Helligkeit des Zentrums weniger abgeschwächt, dafür aber die Helligkeit der Ränder auch geringer, als im oben berechneten Falle.

Bei Unebenheiten, die keine gleichmässige Helligkeit der Kugel ergeben, ist aber das Reflexionsvermögen für $i = \varepsilon = 0$ nicht mehr mit der Oppositionshelligkeit des Planeten vergleichbar. Hier ist es dann angemessen die Flächenhelligkeit des Zentrums in Opposition zum Vergleich heranzuziehen.

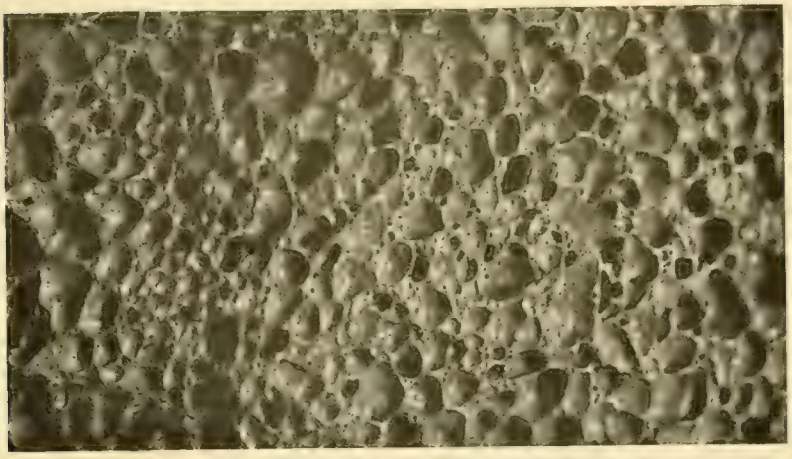
Ein Vergleich der Phasenkurven einzelner Gebilde auf der Oberfläche des Planeten mit derjenigen für irdische Körper beobachteten wird unter Umständen die Identifizierung wesentlich sicherer machen.

Bimsteintara unter verschiedenen Winkeln (α) zur Beleuchtungsrichtung photographiert.

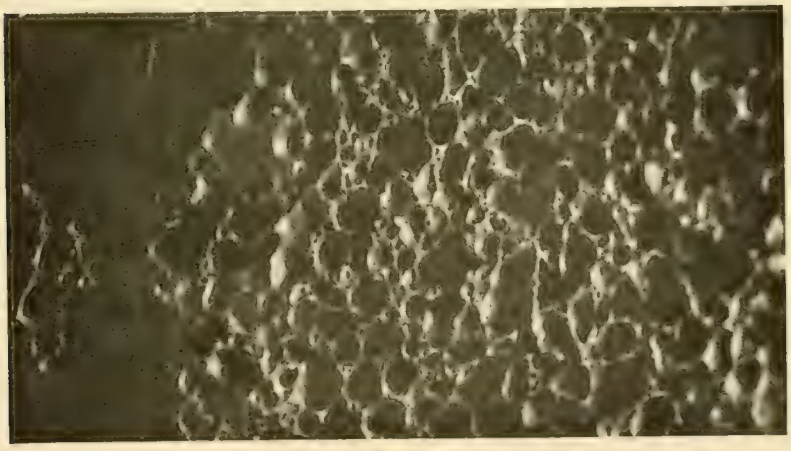
$\alpha = 10°$



$\alpha = 40°$



$\alpha = 70°$



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:O 10.

ÜBER DAS LEITVERMÖGEN DER MISCHUNGEN VON STARKEN ELEKTROLYTEN

UNTERSUCHUNGEN BEI SEHR KLEINEN KONZENTRATIONEN

VON

J. E. RENHOLM

(Mitgeteilt am 23. Februar 1925 von L. W. Öholm und Osc. V. Johansson)

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

Diese Arbeit ist im Physikalischen Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule zu Zürich ausgeführt worden. Es ist mir eine angenehme Pflicht hiermit meine Dankbarkeit den Herren Professoren Dr. P. SCHERRER und P. DEBYE zu bezeugen, die mir die Anregung zu dieser Arbeit gegeben und zu meiner Verfügung alles, was zu den experimentalen Untersuchungen erforderlich war, gestellt sowie meine Arbeit während ihres Fortganges mit Interesse umfasst haben.

Zuletzt bitte ich noch meinen Dank an International Education Board aussprechen zu dürfen für ein Stipendium, das mich in die Lage gesetzt hat diese Untersuchung zu Ende zu bringen und sie über die Grenzen dieser Arbeit weiter zu führen.

1. Theoretisches über das Leitvermögen bei starken Elektrolyten.

Wir wollen das Problem des Leitvermögens erst von einem ganz elementaren Standpunkt aus betrachten. Darunter verstehen wir folgendes. Wir wollen ein Ion aus der Lösung herausgreifen und die Bewegung dieses Ions so behandeln, als ob die anderen Ionen nicht da wären. Man könnte dieses auch so formulieren: Wir wollen keine Rücksicht auf die gegenseitige Einwirkung der Ionen auf einander nehmen.

Die Ladung des herausgegriffenen Ions sei e, die Geschwindigkeit v und die Feldstärke an dem betreffenden Orte sei E. Dann gilt

$$eE = \varrho v,$$

wo ϱ die Bedeutung der Reibungskonstante hat. Als spezifische Stromstärke i definieren wir die Ladung, die durch eine zur Stromrichtung senkrechte Fläche, von der Grösse von 1 cm² während 1 Sek. hindurchgeht. Dann ist, wenn n die Anzahl Ionen in 1 cm³ bedeutet

$$i = env.$$

Aus diesen Gleichungen bekommen wir

$$i = \frac{ne^2}{\varrho} E.$$

Wenn Ionen verschiedener Art vorhanden sind, bekommt man die allgemeine Gleichung

$$i = \sum \frac{n_i e_i^2}{\varrho_i} E.$$

Die spezifische Leitfähigkeit λ wird definiert durch die Gleichung

$$i = \bar{\lambda} E.$$

Also hier

$$\bar{\lambda} = \sum \frac{n_i e_i^2}{\varrho_i}.$$

Wird das elektrische Elementarquantum mit ε bezeichnet und die Wertigkeit der Ionen mit $z_1, z_2 \ldots z_s$, hat man

$$e_i = z_i \varepsilon,$$

und

$$\bar{\lambda} = \varepsilon^2 \sum \frac{n_i z_i^2}{\varrho_i}.$$

Sind weiter in 1 cm³ n gelöste Moleküle vorhanden, und zerfällt jedes Molekül in ν_s Ionen s-ter Art, hat man

$$n_s = n\nu_s,$$

und

$$\bar{\lambda} = n\varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}. \tag{1}$$

Man könnte auch von dem »Leitvermögen pro Molekül» sprechen. Für dieses würde man dann bekommen

$$\frac{\bar{\lambda}}{n} = \varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}.$$

Gewöhnlich wird von dem molaren Leitvermögen gesprochen; darunter versteht man das Leitvermögen pro Mol in 1 cm³ der Lösung. Wird die Avogadrosche Zahl N genannt, und multiplizieren wir diese Gleichung mit N, bekommen wir

$$N \cdot \frac{\bar{\lambda}}{n} = N\varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}.$$

Wird die linke Seite der Gleichung in der Form $\frac{\bar{\lambda}}{n/N}$ geschrieben, sieht man sofort, dass dieser Ausdruck das Leitvermögen pro Mol in 1 cm³ der Lösung repräsentiert.

Das molare Leitvermögen bezeichnen wir mit $\bar{\Lambda}$, und bekommen

$$\bar{\Lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{n/N},$$

und

$$\bar{\Lambda} = N\varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten in sich das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen. Aus der Gleichung (2) folgt, dass jede Ionensorte gewissermassen ihren Beitrag zu der molaren Leitfähigkeit der Elektrolytlösung liefert. Wir führen deshalb eine neue Grösse $\bar{L}_i$ ein, die durch die Gleichung

$$\bar{L}_i = N\frac{\varepsilon^2 z_i^2}{\varrho_i}, \tag{3}$$

(oder

$$\bar{L}_i = N\frac{e_i^2}{\varrho_i}. \tag{3'}$$

definiert ist. Die Grösse $\bar{L}_i$ können wir die ionale Leitfähigkeit (DEBYE nennt sie Beweglichkeit) der Ionen i-ter Art nennen. Dann ist

$$\bar{\Lambda} = \Sigma \nu_i \bar{L}_i. \tag{4}$$

Gewöhnlich wird die Leitfähigkeit nicht in elektrostatischen, sondern in praktischen Einheiten Ohm^{-1} cm²) angegeben. Werden die Grössen in diesem System mit Λ und L bezeichnet, hat man

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \bar{\Lambda}, \\ L = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \bar{L}. \end{cases}$$

Es fragt sich jetzt, inwiefern die so entwickelte elementare Theorie der Leitfähigkeit der Elektrolytlösungen mit der Erfahrung übereinstimmt. Zuerst ist zu beachten, dass die Gleichung (1) fordert, dass σ der Konzentration proportional sein soll. Die Erfahrung widerspricht diesem vollständig. Schon bei sehr grosser Verdünnung zeigt sich eine Abweichung. Die jetzt entwickelte Theorie ist deshalb ein Grenzgesetz, dessen Gültigkeit nur für $\lim n = o$ postuliert werden kann. Wir setzen $\lim \Lambda = \Lambda_0$ und nennen Λ_0 den Grenzwert für die molare Leitfähigkeit. Als Definitionsgleichung für Λ_0 bekommen wir dann

$$\Lambda_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} N \varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}, \tag{2'}$$

oder

$$\Lambda_0 = \Sigma \nu_i L_i. \tag{4'}$$

Die Gleichung (4') drückt aus, dass die Grenzleitfähigkeit eine additive Eigenschaft der Ionen ist.

Wie lässt sich nun die experimentell gefundene Abweichung von der elementaren Theorie erklären? Zur Erklärung bieten sich zwei Wege. Man kann sagen: Das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen ist immer richtig, aber für $\lim n = o$ und nur für diesen Wert sind alle Moleküle dissoziert, für alle anderen Werte aber von n nur ein Bruchteil, α. Man bekommt dann

$$\Lambda = \alpha N \varepsilon^2 \sum \frac{\nu_i z_i^2}{\varrho_i}.$$

Die Grösse α ist der Dissoziationsgrad und muss eine Funktion der Konzentration sein.

Oder man könnte sagen: Bei starken Elektrolyten sind alle Moleküle dissoziert, aber die Ionen wirken gegenseitig auf einander und zwar so, dass die Konzentration dadurch scheinbar vermindert wird.

Schliesslich könnte man auch noch die Hypothesen zweckmässig kombinieren.

Schon 1907 hat W. Sutherland [1] die Theorie der starken Elektrolyte auf der Annahme einer vollkommenen Dissoziation aufbauen wollen. Zwei Jahre später hat N. Bjerrum [2] die Hypothese der vollständigen Dissoziation ausgesprochen. Er wurde dazu geführt durch Studien über das optische Verhalten von gefärbten Salzlösungen. In einer Arbeit von 1918 betont S. R. Milner [3], dass jede Theorie der Dissoziation, welche die Verringerung der molaren Leitfähigkeit bei zunehmender Konzentration durch die Verringerung der Zahl der freien Ionen und nicht durch die Wirkung der interionischen Kräfte auf ihre Beweglichkeit erklären will, auf unüberwindliche Hindernisse stossen müsse.

Wir bemerken, dass in der Tat das Massenwirkungsgesetz bei starken Elektrolyten versagt. Daraus würde unter anderem folgen, dass für alle Elektrolyte, deren Moleküle in mehr als zwei Ionen zerfallen, die molare Leitfähigkeitskurve, als Funktion der Konzentration aufgetragen, für lim Konz. = 0 eine Tangente parallel mit der Konzentrations-Achse hätte. Das stimmt aber nicht mit der Erfahrung.

[1] W. Sutherland: Phil. Mag. 1907, Bd. 14, S. 1.

[2] N. Bjerrum: Proc. 7 Internat. Congr. Applied Chemistry, Sect. X. London 1909.

[3] Milner, S. R.: Phil. Mag. 1918, Bd. 35, S. 214 u. 352. Trans. Faraday Soc. 1919, Vol. 15, S. 148.

Milner hat zuerst das Leitfähigkeitsproblem lösen wollen, indem er die Wirkung aller Ionen der Lösung auf jedes einzelne in Rechnung stellte. Später betrachtete er nur die Wirkung eines Paares zweier Ionen auf einander. Aber schon früher erschienen die Arbeiten von I. CH. GHOSH. [1]

Auch er postuliert, dass wenn ein Salz in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, es sich vollständig in Ionen aufspaltet. Er begründet diese Hypothese durch die Ergebnisse der Röntgenstrahlenanalyse, die gezeigt haben, dass selbst in einem festen Salzkristall nur Ionen, aber keine Moleküle sich finden. Alle Ionen in der Lösung sind jedoch nicht als »vollständig frei» anzusehen. Zwischen den geladenen Ionen bestehen elektrische Kräfte. Infolge dessen besteht im Innern einer Lösung ein charakteristisches Potential. Für die Leitfähigkeit berücksichtigt Ghosh nur die Wirkung der nächstgelegenen entgegengesetzt geladenen Ionen auf einander, indem er annimmt, dass die Ionen eines Moleküls ein elektrisches Dublett bilden. Mit A wird die Arbeit bezeichnet, die erforderlich ist, um die Ionen eines Mols vollkommen von einander zu trennen. Die Zahl der »freien Ionen» in einem Mol des Salzes wäre dann, nach dem Boltzmann-Maxwellschen Gesetz

$$nN \cdot e^{-\frac{A}{nRT}},$$

wo n die Zahl der Ionen bedeutet, in die ein Molekül zerfällt. Der »Dissoziationsgrad» α, wenn ein solcher Ausdruck hier gestattet wird, ist dann

$$\alpha = e^{-\frac{A}{nRT}}.$$

Wenn r den Abstand der Ionen eines Dubletts, ε die Elementarladung und D die Dielektrizitätskonstante bedeutet, würde nach der Annahme von Ghosh die Trennungsarbeit eines Ionenpaares bei 1—1 wertigen Elektrolyten (Typus KCl) $\frac{\varepsilon^2}{Dr}$ sein. In 2—1 wertigen Salzen (Typus $BaCl_2$), entsprechen jedem Molekül zwei elektrische Dubletten Cl- Ba- Cl. Die Trennungsarbeit wäre demnach $\frac{3\,\varepsilon^2}{Dr}$. Auf die Wirkung aller anderen Ionen auf ein hervorgehobenes Ion wird keine Rücksicht genommen. Das ist die erste recht kühne Annahme von Ghosh. Um die Grösse r zu bestimmen wird eine zweite gemacht. Er nimmt an, dass die Ionen bei 1—1 wertigen Salzen (Typus KCl) abwechselnd die Ecken eines einfachen kubischen Raumgitters einnehmen. Wenn v (cm³) das Lösungsvolumen für ein Mol ist, bekommt er dann

$$r = \sqrt[3]{\frac{v}{2N}}.$$

Für 2—1 wertige Salze berechnet er unter der Annahme des für Fluss-spat CaF_2 durch Röntgenanalyse gefundenen Krystallgitters (flächenzentriertes kubisches Raumgitter mit den F-Atomen in den Mittelpunkten der acht kleinen Elementarwürfel)

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{v}{2N}}.$$

Somit ergibt sich für ein Mol eines binären Salzes (Typus KCl) die Trennungsarbeit

$$A = \frac{N\sqrt[3]{2N}}{D\sqrt[3]{v}}\varepsilon^2,$$

[1] GHOSH, I. CH.: Journ. Chem. Soc. 1918, Vol. 113, S. 449, 627, 707, 790. Zeitschrift f. phys. Chemie 1921, Bd. 98, S. 211.

und für ein Mol eines ternären Salzes (Typus $BaCl_2$)

$$\Lambda = \frac{2\sqrt{3}\,N\sqrt[3]{2\,N}}{3\,D\sqrt{v}}\varepsilon^2.$$

Also bekommt man bei den 1—1-wertigen Salzen

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{N\sqrt[3]{2\,N}}{20\,DRT}\varepsilon^2\sqrt[3]{C}.$$

Würde man diese Gleichung auf Lösungen von sehr kleinen Konzentrationen anwenden, bekäme man

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0} = \frac{N\sqrt[3]{2\,N}}{20\,DRT}\varepsilon^2\sqrt[3]{C},$$

und bei ternären Salzen

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0} = \frac{2\sqrt{3}\,N\sqrt[3]{2\,N}}{30\,DRT}\varepsilon^2\sqrt[3]{C}.$$

Da bedeutet C die Konzentration der Lösung in Mol pro Liter. Wir wollen noch die konstanten Faktoren bei 18° Celsius berechnen. Wir benutzen folgende Werte: $N = 6.06 \cdot 10^{23}$, $\varepsilon = 4.77 \cdot 10^{-10}$ elektrostat. Einh., $D = 81.29$, $R = 8.315 \cdot 10^7$ erg/grad, $T = 291$. Dann bekommt man bei 1—1 wertigen Salzen

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0} = 0.374\sqrt[3]{C},$$

und bei 2—1 wertigen

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0} = 0.863\sqrt[3]{C}.$$

Für unserem Zweck genügt es vorläufig zu bemerken, dass die Theorie von *Ghosh* die individuellen Eigenschaften der Salze von gleichem Typus gar nicht berücksichtigt (allerdings vermeidet *Ghosh* seine Gleichung als Grenzgesetz anzuwenden, indem er für die Berechnung Λ_0 aus der Gleichung eliminiert und die Exponentialfunktion nicht entwickelt). Wenn

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = f_\lambda$$

gesetzt wird, würde man für alle 1—1 wertigen Elektrolyten dasselbe Grenzgesetz

$$1 - f_\lambda = 0.374\sqrt[3]{C}$$

finden, was jedoch der Erfahrung widerspricht. Übrigens kann man auch sagen, dass diese Theorie in dem Grenzfalle bei unendlicher Verdünnung wenigstens nicht explicite das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen gibt.

Wenn eine Theorie der Leitfähigkeit starker Elektrolyte aufgestellt werden soll, muss zuerst klargelegt werden, was diese Theorie leisten soll. Man kann dann sagen:

1:o. Die Theorie soll die Abhängigkeit der molaren Leitfähigkeit von der Konzentration erklären können. Die molare Leitfähigkeit soll also eine Funktion von der Anzahl Mol des Elektrolyten in 1 Liter der Lösung sein.

2:o. Wenn man die Äquivalentleitfähigkeitskurven, so wie sie z. B. bei KOHLRAUSCH und HOLBORN[1] gezeichnet sind, studiert, bekommt man den Eindruck, dass die Wertigkeiten der Ionen einen Einfluss auf die Neigung der Leitfähigkeitskurve haben und zwar so, dass die Neigung mit steigender Wertigkeit wächst. Über die Art der Zunahme dieser Neigung lässt sich noch etwas Bestimmteres sagen. Zuerst wollen wir die Bemerkung machen, dass hier nur von dem Verhalten der Elektrolytlösungen bei grosser Verdünnung die Rede ist. Bildet man jetzt $\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0}$, was dem entspricht, dass alle »molaren Leitfähigkeitskurven» so transformiert werden, dass sie einander in dem Punkte $\Lambda = 1$ auf der Λ-Achse schneiden, so ist die Neigung dieser Kurven auch eine Funktion der Wertigkeit und zwar so, dass mit steigender Wertigkeit der Ionen auch die Neigung wächst. Das ist die zweite Forderung, die wir an die Theorie stellen müssen.

3:o. Muss die Theorie auf die charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Ionen Rücksicht nehmen. Als solche kommen in Betracht die Grössen L_i, weil die Theorie für lim Konz. $= 0$ das Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen geben muss. Wenn auch Reibungskräfte im Sinne von *Stokes* bei der Bewegung des Ions durch die Lösung auftreten, sollen auch die »Ionenradien» in die Theorie eingehen.

Hieraus ist zu schliessen dass die Theorie eine Formel von dem Typus

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda} = f(\Gamma, z_1, z_2, .., z_s, L_1, L_2, .., L_s, b_1, b_2 .. , b_s)$$

geben soll. Dabei bedeutet Λ die molare Leitfähigkeit, Λ_0 den Grenzwert der molaren Leitfähigkeit, z_i die Wertigkeit, L_i die »ionale Leitfähigkeit» und b_i den Radius des Ions i-ter Art. Schliesslich bedeutet Γ die Konzentration der Elektrolytlösung, in Mol pro Liter angegeben. Über die Art der Funktion f lässt sich a priori sehr wenig Bestimmtes sagen. Bekanntlich haben einige Forscher den Schluss gezogen, dass die Potenz $^1/_2$ der Konzentration für die molare Leitfähigkeit bestimmend sei, während andere die Vermutung ausgesprochen haben, dass die Potenz $^1/_3$ massgebend sei.[2]

Die *Debye'sche* Lösung des Leitfähigkeitsproblems erfüllt all die oben aufgestellten Forderungen.

Die Aufgabe dieser Arbeit soll später genauer formuliert werden; zunächst genügt es zu sagen, dass wir das Leitfähigkeitsproblem bei Gemischen von starken Elektrolyten näher studieren wollen und uns fragen, zu welchen Resultaten wir, wenn wir die *Decye'sche* Theorie auf Mischungen von starken Elektrolyten entwickeln und anwenden, kommen würden.

Wir werden hier zuerst die *Debye'sche* Theorie für die Leitfähigkeit einer einheitlichen Elektrolytlösung eines starken Elektrolyten näher auseinandersetzen, um einen genauen Ausgangspunkt für die Behandlung des Problems bei Mischungen zu bekommen und das Entstehen aller Begriffe, die wir später verwenden wollen, näher verfolgen zu können. Weiter soll die Theorie hier etwas breiter auseinandergesetzt werden, als das in der ausgezeichneten aber ziemlich konzentrierten Arbeit von DEBYE und HÜCKEL,[3] der Fall ist.

Wir machen die Voraussetzung, dass bei starken Elektrolyten alle Moleküle dissoziert sind. Dann müssen wir eine gegenseitige Einwirkung der Ionen auf einander postulieren. Wie lässt sich eine solche Einwirkung erklären und behandeln? Betrachten wir die Sache zuerst ganz qualitativ.

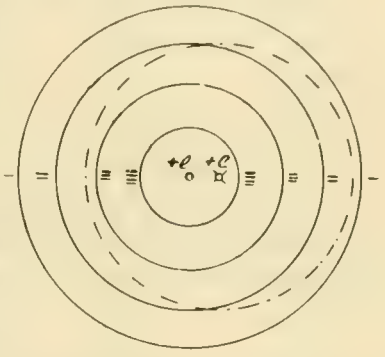
[1] F. KOHLRAUSCH u. L. HOLBORN: Das Leitvermögen der Elektrolyte. Leipzig u. Berlin 1916.

[2] Man vergleiche F. KOHLRAUSCH: Gesamm. Abhandl. II, S. 1127, S. 1132 ff.

[3] P. DEBYE und E. HÜCKEL: Zur Theorie der Elektrolyte. II, Phys. Zeitschr. Bd. 24, 1923.

Wenn wir ein Ion in Ruhe betrachten und um das Ion als Mittelpunkt eine Kugelfläche konstruieren, müssen wir annehmen, dass die Ionen sich auf diese Fläche symmetrisch verteilen, wobei sich eine in allen Richtungen symmetrische Ionenatmosphäre bildet. Wie verhält sich die Sache nun, wenn das Ion in Bewegung ist? Dass das Ion in Bewegung ist, können wir so deuten, dass wir sagen: eine Ladung verschwindet an einem Ort und entsteht an einem anderen.

Wir betrachten ein Ion mit positiver Ladung. In der nächsten Umgebung von diesem Ion ist dann ein Überschuss von negativen Ionen. In grosser Entfernung von dem hervorgehobenen positiven Ion hört seine Wirkung auf. Da müssen wir eine gleichmässige Verteilung von positiven und negativen Ionen haben. Auf konzentrischen Kugeloberflächen um das hervorgehobene Ion muss also der Überschuss von negativen Ionen mit zunehmender Entfernung sich vermindern. Die stark gezeichneten Kreise dienen zu einer anschaulichen Vorstellung von der Ionenverteilung um ein ruhendes positives Ion. Verschwindet jetzt die positive Ladung von ihrem Ort und entsteht an einem anderen (mit Kreuz bezeichneten), so hat man durch den gestrichelten Kreis sofort ein anschauliches Bild davon, wie die symmetrische Verteilung durch die Bewegung des hervorgehobenen Ions gestört wird. Auf einer Kugeloberfläche, die mit der neuen Lage des Ions als Mittelpunkt gezeichnet wird, sind auf der Hinterseite mehr, auf der Vorderseite aber weniger negative Ionen vorhanden, als dies der Fall bei gleichmässiger Verteilung wäre. Der Effekt ist dann eine bremsende Einwirkung auf die Ionenbewegung. In Wirklichkeit sind die Verhältnisse nicht so einfach, wie sie hier auseinandergesetzt sind. Die Ionenatmosphäre ist nicht starr, sondern folgt in ihrer Ausbildung dem Ion nach, bleibt aber immer zurück. Wir drücken dies so aus, dass wir sagen: Die Ionenatmosphäre hat eine endliche Relaxationszeit.



Wir wollen jetzt die Ladungsverteilung um ein bewegtes Ion untersuchen. Das Bolzmann-Maxwellsche Prinzip ist nicht unmittelbar anwendbar, weil hier kein statischer Fall mehr vorliegt. Um die Verteilungsfunktion zu finden, greifen wir deshalb auf die Einsteinsche Theorie für die Brownsche Bewegung zurück.

Wir betrachten ein Raumelement dS in der Lösung und fragen nach der Veränderung der Anzahl der Teilchen innerhalb dS. Die einzelnen Individuen innerhalb dS werden sich dann im Laufe der Zeit verändern und im allgemeinen auch ihre Anzahl. Wir greifen auch ein in der Nähe befindliches anderes Raumelement dS' heraus. Die Anzahl der Teilchen in jedem Raumelement wird durch den momentanen Wert einer Verteilungsfunktion $f\ (x, y, z, t)$, definiert, so dass die Anzahl Teilchen innerhalb dS in einem bestimmten Zeitmoment durch den Ausdruck fdS definiert ist. Es sind zwei Ursachen für die Veränderung der Teilchen innerhalb dS vorhanden:

1:o) die elektrischen Kräfte,

2:o) die »Wärmebewegung».

Bei der letzteren haben wir anzunehmen, dass alle Richtungen gleichwertig sind. Infolge der »Wärmebewegung» werden die innerhalb dS ursprünglich vorhandenen Teilchen während einer kleinen Beobachtungszeit τ auswandern (bis auf einen Betrag von kleinerer Grössenordnung

Während der Zeit τ hat das Raumelement dS dann $f\,dS$ Teilchen verloren. Diese Veränderung der Anzahl der in dS ursprünglich (für $t=o$) befindlichen Teilchen wird also angegeben durch

$$\Delta_1 = -f dS.$$

Während derselben Zeit ist aber eine Anzahl Teilchen von dS' in dS eingewandert. Diese Anzahl wird bestimmt durch die Grösse des Raumelements dS, durch die Anzahl der in dS' ursprünglich befindlichen Teilchen, welche angegeben wird durch den Ausdruck $f'\,dS'$ (wo f' der Wert von f am Orte des Raumelements dS' bedeutet) und durch eine gewisse Wahrscheinlichkeitsfunktion w. Die Anzahl von dS' in dS eingewanderter Teilchen wird dann angegeben durch den Ausdruck

$$\Delta_2 = f'dS' \cdot w'dS.$$

Wir können sagen, dass w' die Wahrscheinlichkeit dafür misst, dass ein Teilchen aus dS' nach dS gelangt. Die Zunahme der Teilchenanzahl in dS infolge der »Wärmebewegung» beträgt daher in der Zeit τ

$$\Delta = -f dS + \int f' dS w' dS',$$

wo das Integral über die ganze Lösung zu erstrecken ist.

Die Verteilungsfunktion f werden wir als eine kontinuierliche, differenzierbare Funktion von den Raumkoordinaten x, y, z ansehen. Denken wir uns, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems sich am Orte des Raumelements dS befindet, so bekommen wir nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$f' = f + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \ldots\right)\ldots$$

Denken wir uns, dass die Zeit τ genügend klein gewählt wird, so kommt nur die nähere Umgebung von dS in Betracht und die folgenden Glieder der Reihe können vernachlässigt werden. Die Ableitungen sind am Orte des Raumelements dS gebildet und sind also bei der Integration als konstant anzusehen. Wir bekommen dann

$$\Delta = -f dS + dS\Big[f\int w'dS' + \frac{\partial f}{\partial x}\int x w' dS' + \ldots + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int x^2 w' dS' + \ldots$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\int yz w' dS' + \ldots\Big].$$

Gemäss der Definition der Funktion w haben wir

$$\int w' dS' = 1.$$

Weil die »Wärmebewegung» ganz ungeordnet ist, haben wir

$$\int x w' dS' = 0,\ \int y w' dS' = 0,\ \int z w' dS' = 0,\ \int yz w' dS' = 0,\ \int zx w' dS' = 0,\ \int xy w' dS' = 0,$$
$$\int x^2 w' dS' = \int y^2 w' dS' = \int z^2 w' dS' = s^2,$$

wobei s vorläufig unbestimmt bleibt.

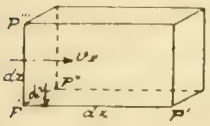
Wir bekommen dann

$$\Delta = \frac{s^2}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right] dS.$$

Vorläufig haben wir keine elektrische Kraft eingeführt. Wir wollen jetzt annehmen, dass auf die Teilchen eine elektrische Kraft wirkt und den Teilchen eine Geschwindigkeit v gibt gemäss der Gleichung

$$K = \varrho v,$$

wo die ϱ die Reibungskonstante ist. Welche Veränderung bringt nun während der Zeit τ die Kraft K hervor in Bezug auf die Anzahl Teilchen in dS? Wir können dieses Problem identifizieren mit der Strömung einer Flüssigkeit von variabler Dichte f. Als Raumelement wählen wir hier ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten dx, dy und dz. In der Zeiteinheit ist dann die Strömung nach innen durch die Fläche $P\,P''\,P'''$ angegeben durch den Ausdruck



$$q_1 = (f v_x)\,dy\,dz,$$

und durch die gegenüberliegende Fläche

$$q_2 = -\Big[(f v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(f v_x)\,dx\Big]\,dy\,dz.$$

Durch die mit der x-Achse parallele Geschwindigkeitskomponente ändert sich die Zahl der Teilchen innerhalb dS mit

$$-\frac{\partial}{\partial x}(f v_x)\,dS.$$

Die ganze durch die Kraft K bedingte Veränderung der Anzahl von Teilchen innerhalb dS während der Zeit τ ist also gegeben durch

$$A' = -\tau\Big[\frac{\partial}{\partial x}(f v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f v_z)\Big]\,dS.$$

Wenn man beachtet, dass

$$v = \frac{K}{\varrho},$$

bekommt man

$$A' = -\tau\,\mathrm{div}\Big(f\,\frac{K}{\varrho}\Big)\,dS.$$

Die Gesamtzunahme der Teilchenanzahl in dS' wird andererseits angegeben durch

$$\tau\,\frac{\partial f}{\partial t}\,dS.$$

Man hat dann die Gleichung

$$\tau\,\frac{\partial f}{\partial t}\,dS = \frac{s^2}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Big)\,dS - \tau\,\mathrm{div}\Big(f\,\frac{K}{\varrho}\Big)\,dS.$$

Also

$$\tau\,\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{s^2}{2}\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f - \tau\,\mathrm{div}\Big(f\,\frac{K}{\varrho}\Big),$$

$$\tau\,\frac{\partial f}{\partial t} = \mathrm{div}\Big[\frac{s^2}{2}\,\mathrm{grad}\,f - \tau f\,\frac{K}{\varrho}\Big].$$

Im statischen Falle, das heisst für $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, muss die Boltzmann-Maxwellsche Verteilungsfunktion

$$f = \mathrm{const}\cdot e^{-\frac{U}{kT}},$$

wo U die Energie und k die Boltzmannsche Konstante ist, eine Lösung zu dieser Differentialgleichung für f sein. Weiter ist

$$K = -\,\mathrm{grad}\,U,$$

und unsere Differentialgleichung gibt im statischem Falle als spezielle Lösung

$$\frac{s^2}{2}\operatorname{grad} f + \frac{\tau f}{\varrho}\operatorname{grad} U = 0.$$

Aus der Boltzmann-Maxwellschen Gleichung erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{kT}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\cdot f.$$

Folglich wird

$$-\frac{s^2}{2kT} f\cdot\operatorname{grad} U + \frac{\tau f}{\varrho}\operatorname{grad} U = 0,$$

oder

$$\frac{s^2}{2kT} = \frac{\tau}{\varrho}.$$

Diese Gleichung entspricht der berühmten Einsteinschen Formel für die Brownsche Bewegung. Daraus bekommen wir

$$s^2 = \frac{2kT}{\varrho}\tau.$$

Wird dieser Wert in die Differentialgleichung für f eingeführt, so bekommen wir

$$\varrho\frac{\partial f}{\partial t} = \operatorname{div}[kT\operatorname{grad} f - fK]. \tag{5}$$

Diese Gleichung wollen wir auf eine einheitliche Elektrolytlösung eines Elektrolyten anwenden. In dieser Lösung seien Ionen vorhanden von den Sorten: 1, 2 . . . s, mit den Ladungen e_1, $e_2 \ldots e_s$ und deren Anzahl pro cmm Lösung n_1, $n_2 \ldots n_s$ sei. In dem Raumelement dS werden sich dann im Mittel die Ionenzahlen $n_1\, dS, \ldots n_s\, dS$ vorfinden.

Die Lösung sei von einem Strom durchflossen, entstanden unter der Einwirkung einer konstanten elektrischen Feldstärke E in der x-Richtung. Ein Ion der Sorte i greift dann eine äussere Kraft

$$K' = e_i E$$

an.

Um das hervorgehobene Ion wird sich eine solche Verteilung einstellen, dass die Ionen entgegengesetzter Ladung da überwiegend sind. Es wird eine Ionenatmosphäre ausgebildet, die im Mittel am Orte des hervorgehobenen Ions zur Erzeugung eines elektrischen Potentials ψ Anlass gibt. Dieses Potential bedingt, dass auf das betrachtete Ion ausser der oben erwähnten äusseren Kraft noch eine andere hinzukommt, von der Grösse

$$-e_i\operatorname{grad}\psi.$$

Wird die allgemeine Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion f auf die Ionen der Sorte i angewandt, hat man f mit n_i und K mit $e_i E - e_i \operatorname{grad}\psi$ zu identifizieren. Man bekommt dann, wenn die Zeit mit t' bezeichnet wird

$$\varrho_i\frac{\partial n_i}{\partial t'} = \operatorname{Div}[kT\operatorname{Grad} n_i - n_i e_i E + n_i e_i \operatorname{Grad}\psi]. \tag{6}$$

Die Grösse ϱ_i stellt hier die dem Ione der Sorte i zukommende Reibungskonstante dar. Div und Grad bezeichnen, dass die Operationen in einem starren Koordinatensystem zu bilden sind; auch $\frac{\partial n_i}{\partial t'}$ ist in diesem Koordinatensystem gebildet.

Für jede Ionensorte gilt eine solche Differentialgleichung. Im ganzen bekommt man also s solche Differentialgleichungen. Wäre das Potential bekannt, dann wäre auch, wenigstens theo-

retisch die Ladungsverteilung bestimmt. Jetzt aber kennen wir a priori das Potential ψ nicht. Was wir jedoch sicher sagen können ist, dass für das Potential die Poinssonsche Gleichung

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi}{D}\sum n_i e_i \tag{7}$$

gilt, wo D die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels bedeutet.

Wir haben jetzt $(s+1)$ Gleichungen für $(s+1)$ Unbekannte $n_1, n_2 \ldots n_s$ und ψ.

Wir wollen nun Lösungen zu diesen $(s+1)$ Gleichungen suchen. Wir schicken gleich die Bemerkung voraus, dass wir nur eine approximative Lösung suchen und zwar unter der Voraussetzung, dass Grad ψ klein ist, was um so genauer mit den Verhältnissen übereinstimmt, je kleiner die Konzentration ist. Und hier ist nur die Rede von sehr kleinen Konzentrationen. Die Feldstärke E ist sicher klein. Wir wollen jetzt den Ausdruck

$$-n_i e_i E + n_i e_i \operatorname{Grad}\psi$$

nach Potenzen von n_i entwickeln und die Entwicklung bei den Werten von n_i abbrechen, die sich im statischen Falle einstellen. Dann ist sicher $E=0$ und auch $\frac{\partial n_i}{\partial t'}=0$. Eine spezielle Verteilung wird dann definiert durch die Gleichung

$$kT\operatorname{Grad} n_i + \bar{n}_i e_i \operatorname{Grad}\psi = 0,$$

wo $\bar{n}_i$ die mittlere Dichte der Ionen i-ter Sorte bedeutet. Ein Ansatz, der diese Gleichung befriedigt, ist

$$n_i = A - \frac{\bar{n}_i e_i}{kT}\psi,$$

wo A eine Konstante bedeutet.

Dieses Resultat stimmt in der Tat überein mit dem Werte, der sich aus dem Boltzmann-Maxwellschen Prinzip für die Verteilung ergibt. Bekanntlich gibt dieses Prinzip in dem statischen Falle

$$n_i = \bar{n}_i e^{-\frac{e_i\psi}{kT}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von ψ, erhält man

$$n_i = \bar{n}_i\left(1 - \frac{e_i\psi}{kT} + \ldots\right).$$

Wenn man die Entwicklung bei der ersten Potenz von ψ abbricht, bekommt man

$$n_i = \bar{n}_i\left(1 - \frac{e_i\psi}{kT}\right),$$

was genau mit unserem Ansatz übereinstimmt, wenn wir A mit $\bar{n}_i$ identifizieren.

Bis jetzt sind alle Betrachtungen für ein raumfestes Koordinatensystem x', y', z', t' gemacht. Wir werden jetzt ein mit dem hervorgehobenen Ion mitbewegtes Koordinatensystem x, y, z, t einführen und zwar so, dass die x-Achse in der Richtung der elektrischen Feldstärke liegt. Zwischen den beiden Systemen gelten dann folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x + vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Für die Operationen div und grad in dem neuen System gelten

$$\text{div} = \text{Div},$$
$$\text{grad} = \text{Grad}.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial n_i}{\partial t'} = \frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial n_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Jetzt ist aber

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

und man bekommt

$$\frac{\partial n_i}{\partial t'} = -v\frac{\partial n_i}{\partial x}.$$

Die Differentialgleichungen für die Verteilung werden dann

$$-\varrho_i v\frac{\partial n_i}{\partial x} = \text{div}\left[kT\,\text{grad}\,n_i - \bar{n}_i\left(1 - \frac{e_i\psi}{kT}\right)e_i E + \bar{n}_i\left(1 - \frac{e_i\psi}{kT}\right)e_i\,\text{grad}\,\psi\right].$$

Werden hier die Glieder zweiten Grades ψE und $\psi\,\text{grad}\,\psi$ gemäss der Voraussetzung vernachlässigt, bekommen wir, wenn wir noch beachten, dass $\text{div}\,E = 0$

$$-\varrho_i v\frac{\partial n_i}{\partial x} = \text{div}\,[kT\,\text{grad}\,n_i + \bar{n}_i e\,\text{grad}\,\psi], \qquad (s \text{ Gleichungen}),$$

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi}{D}\sum n_i e_i.$$

Hätten wir den statischen Fall, wäre die Verteilung der Ionen i-ter Art gegeben durch den Ausdruck

$$n_i = \bar{n}_i - \frac{n_i e_i}{kT}\psi.$$

Dieser Ansatz vermag aber jetzt unsere Differentialgleichungen nicht mehr zu befriedigen, weil das statische Feld nunmehr von einem zweiten, das von der endlichen Relaxationszeit der Ionenatmosphäre herrührt, überlagert ist. *Debye* macht deshalb gemäss der Voraussetzung einer additiven Superposition, den Ansatz

$$n_i = \bar{n}_i - \frac{n_i e_i}{kT}\psi + \mu_i,$$

wobei die noch unbestimmte Funktion μ_i von der Wirkung der endlichen Relaxationszeit herrührt.

Dann wird

$$kT\,\text{grad}\,n_i = -\bar{n}_i e_i\,\text{grad}\,\psi + kT\,\text{grad}\,\mu_i.$$

Also

$$kT\,\text{grad}\,n_i + \bar{n}_i e_i\,\text{grad}\,\psi = kT\,\text{grad}\,\mu_i,$$

und

$$-\varrho_i v\frac{\partial n_i}{\partial x} = \varrho_i v\frac{\bar{n}_i e_i}{kT}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \varrho_i v\frac{\partial\mu_i}{\partial x}.$$

Das Produkt $v\frac{\partial\mu_i}{\partial x}$ ist von höherer Ordnung in v und kann deshalb vernachlässigt werden. Wir bekommen dann

$$\varrho_i v\frac{\bar{n}_i e_i}{kT}\frac{\partial\psi}{\partial x} = kT\,\text{div}\,\text{grad}\,\mu_i. \qquad (8) \qquad (s \text{ Gleichungen})$$

Die Poissonsche Gleichung wird

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi}{D}\sum \bar{n}_i e_i + \frac{4\pi}{DkT}\sum \bar{n}_i e_i^2 \psi - \frac{4\pi}{D}\sum e_i \mu_i.$$

Wir beachten noch, dass gemäss der Definition von $\bar{n}_i$

$$\Sigma \bar{n}_i e_i = 0.$$

Wir setzen formal

$$\frac{4\pi}{DkT}\sum \bar{n}_i e_i^2 = \varkappa^2. \tag{9}$$

Die Grösse $\varkappa$ hat dann die Dimensionen einer reziproken Länge.

Die Poissonsche Gleichung können wir dann in der Form

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = -\frac{4\pi}{D}\sum e_i \mu_i \tag{10}$$

schreiben.

Was uns vor allem interessiert, ist nicht so sehr die von den Grössen n_i bedingte Konzentration, als vielmehr das Potential ψ. Die Gleichung (8) kann geschrieben werden

$$\varrho_i v \frac{\bar{n}_i e_i}{kT}\frac{\partial\psi}{\partial x} = kT\,\Delta\mu_i. \tag{8'}$$

Aus der Poissonschen Gleichung bekommen wir

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\frac{4\pi}{D}\sum e_i \Delta\mu_i.$$

Man findet dann

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\frac{4\pi}{D}\sum \frac{\bar{n}_i e_i^2}{kT}\frac{\varrho_i v}{kT}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Wir setzen jetzt

$$\varrho\,\Sigma \bar{n}_i e_i^2 = \Sigma \bar{n}_i e_i^2 \varrho_i, \tag{11}$$

wo ϱ gewissermassen eine mittlere Reibungskonstante ist, und

$$\omega = \frac{\varrho v}{kT}, \tag{12}$$

wo ω die Dimension einer reziproken Länge hat. Wir bekommen dann

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\frac{4\pi}{DkT}\cdot\omega\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\Sigma \bar{n}_i e_i^2.$$

Mit Benutzung der Gleichung (9) finden wir

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\varkappa^2\omega\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{13}$$

Es wird jetzt unsere Aufgabe sein, diese Differentialgleichung zu lösen. Wir brauchen dabei keine exakte Lösung zu suchen, sondern können uns mit einer approximativen bis zur ersten Ordnung in v, d. h. in ω begnügen.

Die nullte Näherung bekommen wir, indem wir die rechte Seite $= 0$ setzen. Der entsprechende Wert von ψ ist dann eine Lösung der Gleichung

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = 0.$$

Als Lösung kommt hier in Betracht

$$\psi = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + B\frac{e^{\varkappa r}}{r}.$$

Die Konstante B muss $= 0$ sein, denn sonst wäre $\lim_{r=\infty} \psi = \infty$, was natürlich unmöglich ist. Wir haben also die Lösung

$$\psi = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r},$$

wo die Konstante A noch unbestimmt ist, und r den Abstand von dem hervorgehobenen Ion bedeutet. Wenn wir diesen Wert in die rechte Seite der Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\varkappa^2\omega\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right). \tag{14}$$

Wir bemerken, dass $A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ das Potential im statischen Fall darstellt. Gemäss der Einführung der Funktion $A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$, wissen wir, dass

$$\Delta\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) = \varkappa^2 A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}.$$

Wir haben also

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2\psi) = -\omega\frac{\partial}{\partial x}\left[\Delta\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\right].$$

Eine spezielle Lösung zu dieser Gleichung erhält man also aus der Gleichung

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = -\omega\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right).$$

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d}{dr}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\cos\vartheta,$$

wo ϑ den Winkel zwischen x-Achse und Radiusvektor bedeutet. Unsere Differentialgleichung können wir dann schreiben

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = -\omega\frac{d}{dr}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Ohne die Lösung dieser Gleichung zu kennen, können wir aus physikalischen Gründen erwarten, dass die Lösung achsiale Symmetrie um die x-Achse haben muss. Wir können also die gesuchte Lösung in der Form

$$\psi = R(r)\cos\vartheta$$

schreiben, wobei $R(r)$ eine Funktion von r allein ist. Wenn wir dies wissen, können wir unsere Differentialgleichung etwas vereinfachen, indem wir $\Delta\psi$ transformieren. Dazu könnte man die allgemeinen Transformationsgleichungen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten[1] benutzen, oder man könnte den Satz von Gauss auf ein Raumelement, das zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, zwei Breitekreisen und zwei Meridianebenen liegt, anwenden. Man bekommt dann

$$\Delta\psi = \left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2}\right)\cos\vartheta. \tag{15}$$

[1] Man vergleiche z. B.: R. GANS: Einführung in die Vektoranalysis. 1909, S. 56 ff.

Die Differentialgleichung für die betrachtete spezielle Lösung wird also

$$\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{2R}{r^2}-\varkappa^2 R\right)\cos\vartheta=-\omega\frac{d}{dr}\left(A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right)\cos\vartheta,$$

oder

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{2R}{r^2}-\varkappa^2 R=\omega\varkappa A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}+\omega A\frac{e^{-\varkappa r}}{r^2}.$$

Um diese Gleichung zu lösen, machen wir den Ansatz

$$R=k\,e^{-\varkappa r}.$$

Diese Funktion ist eine Lösung für

$$k=-\frac{\omega A}{2}.$$

Unsere spezielle Lösung zu der betrachteten Differentialgleichung ist also

$$\psi=-\frac{\omega A}{2}e^{-\varkappa r}\cos\vartheta. \tag{16}$$

Dieser Lösung können wir noch eine Lösung der Gleichung

$$\Delta(\Delta\psi-\varkappa^2\psi)=0$$

hinzufügen. Wir setzen

$$\Delta\psi=\varphi$$

und suchen eine Lösung zu der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi-\varkappa^2\varphi=0.$$

Indem wir auch hier eine Lösung suchen, die der Forderung der achsialen Symmetrie genügt, setzen wir wieder

$$\varphi=q(r)\cos\vartheta,$$

wo $q(r)$ eine Funktion von r allein ist. Unsere Differentialgleichung wird dann

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{2\varphi}{r^2}-\varkappa^2\varphi=0. \tag{a}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, betrachten wir die Gleichung

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF}{dr}-\varkappa^2F=0, \tag{b}$$

und setzen voraus, dass $F=F(r)$ eine Lösung zu dieser Gleichung ist. Indem wir differenzieren und $\frac{dF}{dr}=F'$ setzen, finden wir

$$\frac{d^2F'}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dF'}{dr}-\frac{2}{r^2}F'-\varkappa^2F'=0.$$

Wenn wir die Gleichung (b) gelöst haben, bekommen wir also durch blosse Differentiation eine Lösung zu der Gleichung (a). Eine Lösung zu der Gleichung (b) ist

$$F=A'\frac{e^{-\varkappa r}}{r}+A''\frac{e^{\varkappa r}}{r}.$$

Also ist die gesuchte Lösung

$$\varphi=\left(A'\frac{d}{dr}\frac{e^{-\varkappa r}}{r}+A''\frac{d}{dr}\frac{e^{\varkappa r}}{r}\right)\cos\vartheta.$$

Zu dieser Lösung können wir noch eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta \psi = 0$$

hinzufügen. Soll auch diese Lösung der Bedingung der achsialen Symmetrie genügen, können wir wieder setzen

$$\psi = f(r) \cos \vartheta .$$

Gemäss der schon früher gemachten Transformation bekommen wir in diesem Falle die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} - \frac{2f}{r^2}\right)\cos\vartheta = 0,$$

oder

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r\frac{df}{dr} - 2f = 0.$$

Um die Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$f = r^n,$$

wo n vorläufig noch ganz unbestimmt ist. Die Grösse n muss dann der Gleichung

$$n^2 + n - 2 = 0$$

genügen. Man bekommt daraus

$$n_1 = -2,$$

$$n_2 = 1.$$

Die zuletzt gesuchte Lösung ist dann

$$\psi = \left(\frac{B'}{r^2} + B'' r\right)\cos\vartheta .$$

Wenn alles zusammengefasst wird, können wir sagen: Die Funktion, welche die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta(\Delta\psi - \varkappa^2 \psi) = 0$$

und zu gleicher Zeit proportional mit $\cos\vartheta$ ist, ist

$$\psi = \left[A' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) + A'' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{\varkappa r}}{r}\right) + \frac{B'}{r^2} + B'' r\right]\cos\vartheta . \tag{17}$$

Unmittelbar klar ist, dass solche Glieder, die bedingen, dass

$$\lim_{r=\infty} \psi = \infty$$

wird, zu verwerfen sind. Daraus folgt

$$\begin{cases} A'' = 0, \\ B'' = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Zu dem Potential im statischen Falle

$$\psi_0 = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$$

kommen also noch die von der Ionenbewegung bedingten Zusätze

$$\psi_1 = -\frac{\omega A}{2} e^{-\varkappa r}\cos\vartheta,$$

und

$$\psi_2 = \left[A' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) + \frac{B'}{r^2}\right] \cos\vartheta .$$

Also bekommen wir für ψ den Ausdruck

$$\psi = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \left[-\frac{\omega A}{2} e^{-\varkappa r} + A' \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-\varkappa r}}{r}\right) + \frac{B'}{r^2}\right] \cos\vartheta . \tag{19}$$

Das zweite mit $\cos\vartheta$ proportionale Glied stellt die durch die Bewegung des Ions infolge der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre hervorgerufene Änderung des Potentials vor. Debye ersetzt diesen Ausdruck in unmittelbarer Nähe des Nullpunktes bei sehr kleinen Konzentrationen durch

$$\left[\frac{B'-A'}{r^2} + \frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{2} + \left(\frac{\omega A}{2} - \frac{\varkappa^2 A'}{3}\right)\varkappa r\right] \cos\vartheta . \tag{20}$$

Für das ganze Potential bekommen wir dann den Ausdruck

$$\psi = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \left[\frac{B'-A'}{r^2} + \frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{2} + \left(\frac{\omega A}{2} - \frac{\varkappa^2 A'}{3}\right)\varkappa r\right] \cos\vartheta .$$

Das Glied $\frac{B'-A'}{r^2}\cos\vartheta$ hat den Charakter des Potentials eines Dipols, welches bekanntlich proportional $\frac{\cos\vartheta}{r^2}$ ist. Da wir die Existenz eines solchen Dipols am Orte des hervorgehobenen Ions hier ablehnen wollen, ist zu setzen

$$B' = A' . \tag{21}$$

Wir wollen jetzt das zweite Glied der Klammer $\frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{2}\cos\vartheta$ betrachten und nach der Ladungsdichte, die davon herrührt, fragen. Dazu benutzen wir die Poissonsche Gleichung

$$\frac{4\pi}{D}\sigma = -\Delta\psi ,$$

wo σ die Raumdichte der Ladung angibt. Wenn wir $R = \frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{2}$ setzen, können wir die Transformation für $\Delta\psi$ (15) benutzen, und bekommen dann

$$\Delta\psi = -\frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{2} \cdot \left(\frac{2}{r^2}\right) \cos\vartheta .$$

Wir haben also

$$\frac{4\pi}{D}\sigma = \frac{\varkappa^2 A' - \omega A}{r^2} \cos\vartheta .$$

Wenn r gegen Null konvergierte, so würde die Raumdichte σ der Ladung gegen ∞ konvergieren. Dieses müssen wir ablehnen und setzen deshalb

$$\varkappa^2 A' = \omega A . \tag{22}$$

Hieraus erhalten wir

$$A' = \frac{\omega}{\varkappa^2} A ,$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung (21)

$$B' = \frac{\omega}{\varkappa^2} A .$$

Für das Potential ψ finden wir dann

$$\psi = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \left(\frac{\omega A}{2} - \frac{\omega A}{3}\right)\varkappa r \cos\vartheta .$$

Es bleibt noch die Aufgabe übrig, die Konstante A zu bestimmen. Wir erinnern daran, dass

$$\psi_0 = A\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$$

das Potential im statischen Falle bedeutet. Wie schon hervorgehoben ist, werden wir das Problem nur bei sehr verdünnten Lösungen behandeln. Wenn wir uns auf die nächste Umgebung des Ions beschränken, wo $\varkappa r << 1$ ist, können wir deshalb $e^{-\varkappa r} = 1 - \varkappa r + \frac{\varkappa^2 r^2}{2} \ldots$ einfach durch 1 ersetzen und bekommen

$$\psi_0 = A \cdot \frac{1}{r}.$$

Ist die Ladung des hervorgehobenen Ions e_j, gilt anderseits in der nächsten Umgebung des Ions bei grosser Verdünnung

$$\psi_0 = \frac{e_j}{Dr}.$$

Also ist

$$A = \frac{e_j}{D}.$$

Für das Potential ψ bekommen wir dann den Ausdruck

$$\psi = \frac{e_j}{D}\frac{e^{-\varkappa r}}{r} + \frac{\omega}{6}\frac{e_j}{D}\varkappa r\cos\vartheta. \tag{23}$$

Gemäss einer Bemerkung, die wir schon früher gemacht haben, geht aus dieser Gleichung hervor, dass das Feld durch eine Superposition von zwei Feldern zustande gekommen ist. Das eine Feld ist das statische mit dem Potential $\psi_0 = \frac{e_j}{D}\cdot\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$, das zweite rührt von der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre her. Das davon herrührende Potential ist

$$\psi_r = \frac{\omega}{6}\frac{e_j}{D}\varkappa x.$$

Dieses Potential entspricht einer Feldstärke

$$E = -\frac{\partial\psi_r}{\partial x} = -\frac{\omega\varkappa}{6}\frac{e_j}{D},$$

und einer auf das Ion wirkenden Kraft

$$K_r = e_j E = -\frac{\omega\varkappa}{6}\frac{e_j^2}{D}. \tag{24}$$

Wir wollen ein physikalisches Bild zu diesem Resultate suchen. Wenn vor dem Ion im Abstande l eine Ladung $+e_j$ und hinter dem Ion eine Ladung $-e_j$ auch im Abstande l sich bewegen, so ist die Wirkung, die von diesen Ladungen auf die hervorgehobene Ladung $+e_j$ ausgeübt wird durch den Ausdruck $-\frac{2e_j^2}{Dl^2}$ bestimmt. Wenn man die beiden Wirkungen identifiziert, bekommt man

$$l = \sqrt{\frac{12}{\omega\varkappa}}. \tag{25}$$

Diese Kraft ist also stets bremsend (entsprechend dem negativen Vorzeichen) und von einer Grösse, als würden sich vor dem Ion eine gleich grosse und ähnliche Ladung, hinter dem Ion eine gleich grosse aber entgegengesetzte Ladung, beide im Abstande $\sqrt{\frac{12}{\omega\varkappa}}$, bewegen. Je grösser

die Geschwindigkeit, die Konzentration und die Reibung sind, desto kleiner ist l, und desto grösser die von der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre herrührende Kraft. Das alles entspricht genau dem, was man schon qualitativ erwarten dürfte.

Dadurch ist der Einfluss der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre bestimmt. Es besteht aber nach DEBYE noch eine andere, die Bewegung des Ions bremsende Kraft. Qualitativ können wir das verstehen, wenn wir uns das Resultats von *Stokes*, gemäss dem eine Kugel, die sich in einer Flüssigkeit bewegt, eine bremsende Kraft erfährt, die durch den Ausdrucke $6\pi\eta v b$, wo v die Geschwindigkeit, b der Radius der Kugel und η der Reibungskoeffizient sind, bestimmt wird, erinnern. Allerdings ist das Problem hier komplizierterer Art. Das Ion nimmt bei der Bewegung gewissermassen ein Ionenatmosphäre mit sich und es ist zu erwarten, dass während das Ion sich in der Lösung bewegt, nicht nur reine Reibungskräfte, sondern auch Kräfte elektrischer Art auftreten können. Die Bewegung des Ions mit der Geschwindigkeit v findet statt unter Einwirkung der Feldstärke X in der x-Richtung. Die äussere Feldstärke erzeugt so eine Volumkraft

$$K = \sigma X,$$

wo σ die Raumdichte der Ladung ist. Nach der Poissonschen Gleichung ist

$$\frac{4\pi}{D}\sigma = -\Delta\psi.$$

Wenn wir die Potentialverteilung kennen, kann σ nach der Poissonschen Gleichung berechnet werden. Bis auf Glieder höherer Ordnung können wir hier das Potential für den statischen Fall

$$\psi = \frac{e_j e^{-\varkappa r}}{D\, r}$$

nehmen, welcher Ansatz, wie schon früher auseinandergesetzt wurde, eine Lösung zu der Differentialgleichung

$$\Delta\psi - \varkappa^2\psi = 0$$

im statischem Falle bei grosser Verdünnung ist. Dann ist

$$K = -\frac{DX}{4\pi}\varkappa^2\psi. \tag{26}$$

Wir wollen das so entstandene Problem derart behandeln, dass wir annehmen, das Ion ruhe, und die Flüssigkeit bewege sich, und zwar so, dass die Geschwindigkeit in grosser Entfernung v ist. Wir werden also zuerst die Bewegungsgleichung für das Lösungsmittel aufstellen und dann die von der Bewegung auf die Ionenoberfläche ausgeübten Druckkräfte berechnen.

Bekanntlich lauten die Bewegungsgleichungen für eine zähe, inkompressibile Flüssigkeit, deren Dichte, wie hier für sehr verdünnte Lösungen der Fall ist, gleich 1 gesetzt werden kann

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{dv_x}{dt} = K_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\mathrm{div\,grad}\, v_x, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{array}\right. \tag{27}$$

Gemäss der Vektorrechnung ist

$$\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}\, v) = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{rot}_z v - \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{rot}_y v,$$

oder

$$\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}\, v) = -\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Hieraus bekommen wir, wenn wir ausserdem die Inkompressibilitätsgleichung benutzen

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, v_x = -\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}\, v).$$

Die Bewegungsgleichung kann dann folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{dv_x}{dt} = K_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \eta\,\mathrm{rot}_x(\mathrm{rot}\, v),$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = K - \mathrm{grad}\, p - \eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, v.$$

Nun ist noch zu beachten, dass

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\,\mathrm{grad})\, v.$$

Ist die Strömung stationär, so haben wir $\frac{\partial v}{\partial t} = o$. Ist die Geschwindigkeit klein, so dass man, — was wir immer vorausgesetzt haben — die quadratischen Glieder vernachlässigen kann, so können wir $(v\ \mathrm{grad})\ v = 0$ setzen. Wir bekommen dann als Bewegungsgleichung

$$\eta\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, v = K - \mathrm{grad}\, p. \tag{28}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir p als Funktion des Potentials ψ bestimmen. Bilden wir div für diese Gleichung, bekommen wir

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, p = \mathrm{div}\, K = \frac{\partial K_x}{\partial x}.$$

Benutzen wir die Gleichung (26), bekommen wir

$$\Delta p = -\frac{DX}{4\pi}\,\Delta\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{29}$$

Eine spezielle Lösung dieser Gleichung ist natürlich

$$p = -\frac{DX}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Zu dieser Lösung können wir noch eine beliebige Lösung der Gleichung

$$\Delta p = 0$$

hinzufügen. Wir können uns in Übereinstimmung mit den vorigen Betrachtungen die Lösung aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, von denen der erste p_1 sphärische Symmetrie, und der zweite p_2 achsiale Symmetrie besitzt. Für Δp_1 haben wir dann

$$\Delta p_1 = \frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dp_1}{dr}.$$

Zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 p_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dp_1}{dr} = 0$$

finden wir leicht die Lösung

$$p_1 = A_0 + \frac{B_0}{r},$$

wo A_0 und B_0 vorläufig unbestimmte Konstanten bedeuten. Für p_2 gilt (man vergleiche (15))

$$\Delta p_2 = \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2}\right)\cos\vartheta,$$

und also

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2} = 0.$$

Eine Differentialgleichung dieser Art haben wir früher gelöst. Wir finden

$$p_2 = \left(\frac{B_1}{r^2} + A_1 r\right)\cos\vartheta.$$

Beachten wir noch, dass

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dr}\cos\vartheta,$$

bekommen wir

$$p = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} - \frac{D\Lambda}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\right)\cos\vartheta. \tag{30}$$

Die Grössen A_1 und B_1 sind vorläufig noch unbestimmte Konstanten.

Wir gehen jetzt zu der Bewegungsgleichung des Lösungsmittels zurück und setzen

$$\text{rot } v = w. \tag{31}$$

Die Grösse p wird aus unserer Gleichung eliminiert, indem wir rot bilden. Wir erhalten dann

$$\eta \text{ rot rot } w = \text{rot } K. \tag{32}$$

In dieser Gleichung werden wir das Cartesiansche Koordinatensystem gegen ein anderes austauschen, das ebenfalls orthogonal, aber für unsere Aufgabe zweckmässiger ist. Wir denken uns eine Kugel mit dem Mittelpunkt am Orte des hervorgehobenen Ions und wählen die x-Richtung als hervorgehobene Achse dieser Kugel. Die Lage eines Punktes P im Raume ist dann bestimmt durch den Radiusvektor r, den Polabstand ϑ und die geographische Länge φ. Der Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Koordinaten ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta, \\ y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ z = r\sin\vartheta\sin\varphi. \end{cases}$$

Wir suchen zuerst die Komponenten von w in dem neuen System. (Wir bemerken inzwischen dass w die Bedeutung der Wirbelstärke hat). Die Komponenten von w in dem neuen System sind gemäss der Gleichung (31) bestimmt durch

$$\begin{cases} w_r = \text{rot}_r\, v, \\ w_\vartheta = \text{rot}_\vartheta\, v, \\ w_\varphi = \text{rot}_\varphi\, v. \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen x, y, z und u, v, w sei gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = x\ (u,\ v,\ w), \\ y = y\ (u,\ v,\ w), \\ z = z\ (u,\ v,\ w); \end{cases}$$

dann gilt nach einer allgemeinen Gleichung in der Vektoranalysis, wenn beide systeme orthogonal sind

$$\begin{cases} \mathrm{rot}_u A = \dfrac{1}{e_2 e_3}\left(\dfrac{\partial (e_3 A_w)}{\partial v} - \dfrac{\partial (e_2 A_v)}{\partial w}\right), \\ \mathrm{rot}_v A = \dfrac{1}{e_3 e_1}\left(\dfrac{\partial (e_1 A_u)}{\partial w} - \dfrac{\partial (e_3 A_w)}{\partial u}\right), \\ \mathrm{rot}_w A = \dfrac{1}{e_1 e_2}\left(\dfrac{\partial (e_2 A_v)}{\partial u} - \dfrac{\partial (e_1 A_u)}{\partial v}\right), \end{cases}$$

wobei

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2}, \\ e_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}, \\ e_3 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)^2}. \end{cases}$$

Hier entsprechen sich

$$\begin{matrix} u & v & w \\ r & \vartheta & \varphi . \end{matrix}$$

Also ist

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = r, \qquad e_3 = r \sin \vartheta .$$

Wir bekommen dann

$$\begin{aligned} w_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin \vartheta\, v_\varphi) - \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi}, \\ w_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi), \\ w_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\vartheta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen können wir sagen, dass die Strömung in jeder Meridianebene die gleiche ist und keine Komponente in der φ-Richtung haben kann. Also haben wir $v_\varphi = 0$, $\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} w_r &= 0, \\ w_\vartheta &= 0, \\ w_\varphi &= w_\varphi . \end{aligned}$$

Physikalisch bedeutet dieses, dass die Wirbellinien Kreise um die x-Achse bilden.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der Bewegungsgleichung

$$\eta \ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ w = \mathrm{rot}\ K$$

in unserem neuen System über. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_r w &= \frac{1}{r \sin \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin \vartheta\, w_\varphi), \\ \mathrm{rot}_\vartheta w &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r w_\varphi), \\ \mathrm{rot}_\varphi w &= 0. \end{aligned}$$

Diese Resultate bekommen wir ohne weiteres aus den allgemeinen Definitionsgleichungen für rot. Man bildet nun zuerst

$$\mathrm{rot}_r\,(\mathrm{rot}\,w) = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin\vartheta\,\mathrm{rot}_\varphi w) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(r\,\mathrm{rot}_\vartheta w)\right\} = 0,$$

$$\mathrm{rot}_\vartheta\,(\mathrm{rot}\,w) = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathrm{rot}_r w) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathrm{rot}_\varphi w)$$

$$= \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}\right) = 0,$$

und

$$\mathrm{rot}_\varphi\,(\mathrm{rot}\,w) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\mathrm{rot}_\vartheta w) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\mathrm{rot}_r w)$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r w_\varphi) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, w_\varphi)\right\}. \tag{33}$$

Es erübrigt noch, rot K zu bilden. Da K in der Richtung der Achse fällt, sieht man ebenso wie oben, dass

$$\mathrm{rot}_r\ K = 0,$$
$$\mathrm{rot}_\vartheta\ K = 0.$$

Rot K hat also nur eine φ-Komponente. Man kann setzen

$$K_r = F(r)\cos\vartheta,$$
$$K_\vartheta = -F(r)\sin\vartheta,$$
$$K_\varphi = 0.$$

Also

$$\mathrm{rot}_\varphi K = -\frac{dK}{dr}\sin\vartheta.$$

mit Hilfe der Gleichung (26) bekommen wir

$$\mathrm{rot}_\varphi K = \varkappa^2\frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\sin\vartheta.$$

Die Bewegungsgleichung können wir dann schreiben

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r w_\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, w_\varphi)\right] = -\varkappa^2\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\sin\vartheta. \tag{34}$$

Die Art des Problems deutet darauf hin, dass es vernünftig wäre, eine Lösung zu suchen, die proportional mit $\sin\vartheta$ ist. Wir setzen deshalb

$$w_\varphi = R(r)\sin\vartheta.$$

Hier ist

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r w_\varphi) = \left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right)\sin\vartheta,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, w_\varphi)\right] = -\frac{2R}{r^2}\sin\vartheta.$$

Weiter haben wir für das Potential

$$\varkappa^2\psi = \Delta\psi.$$

Wir machten die Voraussetzung, dass wir bei der Behandlung unseres Problems mit dem Potential im statischen Falle rechnen könnten. In diesem Falle hat ψ sicher Rotationssymmetrie und wir haben

$$\varkappa^2\psi = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}.$$

Durch Differentiation erhalten wir

$$z^2 \frac{d\psi}{dr} = \frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{d\psi}{dr}.$$

Unsere Differentialgleichung (34) können wir also schreiben

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2} = -\frac{DX}{4\pi\eta}\left(\frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{d\psi}{dr}\right).$$

Eine spezielle Lösung zu dieser Differentialgleichung ist

$$R = -\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}.$$

Ausserdem kann noch eine allgemeine Lösung zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{2R}{r^2} = 0$$

gefügt werden. Diese Differentialgleichung haben wir schon früher gelöst. Wir finden

$$R = C_1 r + \frac{D_1}{r^2}.$$

Für unsere Differentialgleichung bekommen wir also folgende Lösung

$$w_\varphi = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\right)\sin\vartheta, \tag{35}$$

wobei C_1 und D_1 vorläufig unbestimmte Konstanten sind.

Bei der Lösung der Bewegungsgleichungen für das Lösungsmittel sind sechs vorläufig unbestimmte Konstanten aufgetreten. Es müssen jetzt die Werte von w_φ und p in die undifferenzierte Grundgleichung eingesetzt werden, um zu sehen, ob die Lösungen mit einander verträglich sind, bzw. welche Beziehungen zwischen den Konstanten bestehen müssen, damit dies der Fall ist. Wir wollen deshalb die Gleichung (28) als Komponentengleichungen schreiben. Gemäss ihrer Definition ist

$$w = \operatorname{rot} v.$$

Die Gleichung (28) lautet dann mit Hilfe der Gleichung (26)

$$\eta \operatorname{rot} w = -\operatorname{grad} p - \frac{DX}{4\pi} z^2 \psi.$$

Wir bestimmen zuerst die Komponenten von rot w, wenn w durch die Gleichung (35) bestimmt ist. Wir bekommen

$$\operatorname{rot}_r w = \frac{2\cos\vartheta}{r}\left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\right),$$

$$\operatorname{rot}_\vartheta w = \sin\vartheta\left[-2C_1 + \frac{D_1}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right],$$

$$\operatorname{rot}_\varphi w = 0.$$

Dann bestimmen wir die Komponenten von grad p, wenn p durch die Gleichung (30) definiert ist. Wir finden

$$\operatorname{grad}_r p = -\frac{B_0}{r^2} + \left(A_1 - \frac{2B_1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi}\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos\vartheta,$$

$$\operatorname{grad}_\vartheta p = -\left(A_1 + \frac{B_1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\sin\vartheta,$$

$$\operatorname{grad}_\varphi p = 0.$$

Wenn wir die Gleichung (28) in Komponentengleichungen zerspalten, bekommen wir also

$$(36)\quad \begin{cases} \left(2\eta C_1 + 2\eta\frac{D_1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi}\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\cos\vartheta = \frac{B_0}{r^2} - \left(A_1 - \frac{2B_1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi}\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\cos\vartheta - \frac{DX}{4\pi}z^2\psi\cos\vartheta, \\ \left[-2\eta C_1 + \eta\frac{D_1}{r^3} + \frac{DX}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right]\sin\vartheta = \left(A_1 + \frac{B_1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi}\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)\sin\vartheta + \frac{DX}{4\pi}z^2\psi\sin\vartheta. \end{cases}$$

Die dritte Komponentengleichung resultiert in die Identität $0=0$. Diese Gleichungen sollen für alle Werte von ϑ und r gelten. Wir schliessen daraus, dass

$$B_0 = 0, \quad A_1 + 2\eta C_1 = 0, \quad B_1 - \eta D_1 = 0.$$

Die X enthaltenden Glieder heben sich mit Rücksicht auf die für ψ geltende Differentialgleichung gegenseitig auf. Wir haben also

$$B_0 = 0, \quad C_1 = -\frac{A_1}{2\eta}, \quad D_1 = \frac{B_1}{\eta}.$$

Wir können also die Lösungen der Bewegungsgleichung der Flüssigkeit in folgender Form schreiben

$$\begin{cases} p = A_0 + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\right)\cos\vartheta, \\ w_r = 0, \\ w_\vartheta = 0, \\ w_\varphi = \left(-\frac{A_1}{2\eta}r + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\right)\sin\vartheta. \end{cases}$$

Nachdem w nunmehr bekannt ist, wollen wir die Geschwindigkeit v bestimmen, wobei natürlich die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt werden muss. Für die Bestimmung von v, haben wir die Gleichung

$$\mathrm{rot}_\varphi v = w_\varphi,$$

oder

$$(37)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\vartheta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}v_r = \left(-\frac{A_1}{2\eta}r + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}\right)\sin\vartheta.$$

Jetzt wollen wir untersuchen, wie sich die Inkompressibilitätsgleichung

$$\mathrm{div}\, v = 0$$

in den neuen Koordinaten schreiben lässt. Wenn wir dieselbe Bezeichnungen wie früher bei Einführung der krummlinigen orthogonalen Koordinaten anwenden, gilt allgemein

$$\mathrm{div}\, A = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(e_2 e_3 A_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e_3 e_1 A_v\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(e_1 e_3 A_w\right)\right\}.$$

Hier bekommen wir also

$$(38)\quad \mathrm{div}\, v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, v_\vartheta) = 0.$$

Wir haben also die beiden Gleichungen (37) und (38) zur Bestimmung der zwei Unbekannten v_r und v_ϑ. Wir setzen

$$\begin{cases} v_r = R_1\cos\vartheta, \\ v_\vartheta = R_2\sin\vartheta, \end{cases}$$

wobei R_1 und R_2 zwei noch zu bestimmende Funktionen von r allein bedeuten. Werden diese Werte in die Gleichung (37) eingesetzt, erhalten wir

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r R_2) + \frac{R_1}{r} = -\frac{A_1}{2\eta} r + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta}\frac{d\psi}{dr}, \tag{37'}$$

und

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 R_1) + 2\frac{R_2}{r} = 0. \tag{38'}$$

Nehmen wir den Wert von R_2 aus der zweiten Gleichung und setzen diesen Wert in die erste ein, bekommen wir

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2 R_1) - \frac{2}{r^2}(r^2 R_1) = \frac{A_1}{\eta} r^2 - \frac{2 B_1}{\eta}\frac{1}{r} + \frac{DX}{2\pi\eta} r \frac{d\psi}{dr}. \tag{39}$$

Wir suchen zuerst spezielle Lösungen zu dieser Differentialgleichung. Wir können uns diese Gleichung aus drei Teilen zusammengesetzt denken, die den Gliedern rechts entsprechen. Zuerst haben wir dann eine Differentialgleichung folgender Art zu lösen

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} - \frac{2 Y}{r^2} = r^2$$

wobei wir anstatt $r^2 R_1$ die Grösse Y geschrieben haben. Wir suchen eine spezielle Lösung, indem wir setzen

$$Y = k r^n,$$

wo k und n vorläufig unbestimmte Konstanten sind. Wir bekommen dann

$$k n (n-1) r^{n-2} - 2 k r^{n-2} = r^2.$$

Wenn unser Ansatz eine Lösung sein soll, muss man haben

$$n - 2 = 2,$$

$$n = 4.$$

Dann wird

$$k = \frac{1}{10}.$$

Eine spezielle Lösung, die dem ersten Glied entspricht, ist also

$$r^2 R_1 = \frac{A_1}{\eta}\frac{r^4}{10}.$$

Ganz ähnlich findet man eine spezielle Lösung, die dem zweiten Glied entspricht

$$r^2 R_1 = \frac{B_1}{\eta} r.$$

Schliesslich betrachten wir die dem letzten Glied entsprechende Differentialgleichung der Art

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} - \frac{2 Y}{r^2} = r\frac{d\psi}{dr}.$$

Um diese Gleichung zu lösen, greifen wir auf die Differentialgleichung für ψ zurück

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} = \varkappa^2 \psi.$$

Wenn wir differenzieren, erhalten wir

$$\varkappa^2 \frac{d\psi}{dr} = \frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{d\psi}{dr}$$

oder

$$r\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{\varkappa^2}\left\{r\frac{d^3\psi}{dr^3} + 2\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right\}.$$

Die betrachtete Differentialgleichung lautet dann, wenn $\frac{1}{\varkappa^2}$ weggelassen wird

$$\frac{d^2Y}{dr^2} - \frac{2Y}{r^2} = r\frac{d^3\psi}{dr^3} + 2\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}.$$

Der Versuch liegt nahe, das Glied $\frac{2Y}{r^2}$ mit dem Glied $\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}$ zu identifizieren. Wenn wir

$$Y = r\frac{d\psi}{dr}$$

setzen, bekommen wir durch Differentiation

$$\frac{d^2Y}{dr^2} = r\frac{d^3\psi}{dr^3} + 2\frac{d^2\psi}{dr^2}.$$

Unser Ansatz genügt also in der Tat der Differentialgleichung.

Eine spezielle dem dritten Glied entsprechende Lösung unserer Differentialgleichung ist also

$$r^2 R_1 = \frac{DX}{2\pi\eta\varkappa^2} r\frac{d\psi}{dr}.$$

Wenn wir die Resultate zusammenfassen, erhalten wir die spezielle Lösung

$$r^2 R_1 = \frac{A_1}{\eta}\frac{r^4}{10} + \frac{B_1}{\eta} r + \frac{DX}{2\pi\eta\varkappa^2} r\frac{d\psi}{dr}.$$

Dazu kann noch eine allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2 R_1) - \frac{2}{r^2}(r^2 R_1) = 0$$

gefügt werden. Die Lösung dieser Gleichung ist ganz einfach und wird gefunden, indem wir setzen

$$r^2 R_1 = r^n.$$

Wir erhalten dann

$$n_1 = 2,$$

$$n_2 = -1.$$

Die ganze Lösung zu der Differentialgleichung (39) wird dann

$$r^2 R_1 = \frac{A_1}{\eta}\frac{r^4}{10} + A_3 r^2 + \frac{B_1}{\eta} r + B_3\frac{1}{r} + \frac{DX}{2\pi\eta\varkappa^2} r\frac{d\psi}{dr}, \tag{40}$$

wo A_3 und B_3 vorläufig unbestimmte Konstanten sind, die bei der letzten Integration eingeführt sind. Aus der Gleichung (38′)

$$r R_2 = -\frac{1}{5}\frac{A_1}{\eta} r^3 - A_3 r - \frac{B_1}{2\eta} + \frac{1}{2} B_3\frac{1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi\eta\varkappa^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right). \tag{41}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten v_r, v_ϑ und den Druck p erhalten wir also folgende Gleichungen

$$\begin{cases} v_r = \left[\frac{1}{10}\frac{A_1}{\eta} r^2 + A_3 + \frac{B_1}{\eta}\frac{1}{r} + B_3\frac{1}{r^3} + \frac{DX}{2\pi\eta\varkappa^2}\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right]\cos\vartheta, \\ v_\vartheta = \left[-\frac{1}{5}\frac{A_1}{\eta} r^2 - A_3 - \frac{B_1}{2\eta}\frac{1}{r} + \frac{1}{2} B_3\frac{1}{r^3} - \frac{DX}{4\pi\eta\varkappa^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right]\sin\vartheta, \\ v_\varphi = 0, \\ p = A_0 + \left[A_1 r + B_1\frac{1}{r^2} - \frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr}\right]\cos\vartheta. \end{cases} \tag{42}$$

Die Konstante A_0 ist nur für die absolute Bestimmung des Druckes massgebend und darf hier deshalb ohne Beschränkung gleich 0 gesetzt werden. Weiter muss $A_1 = 0$ sein, denn sonst würde die Geschwindigkeit in grosser Entfernung sehr gross werden. Gemäss unserer Annahme und dem Bild, das wir uns von dem Vorgang gemacht haben, dass die Geschwindigkeit in grosser Entfernung parallel der x-Achse gerichtet sein und den Betrag $-v$ haben soll, müssen mit wachsendem r die Grössen v_r und v_ϑ sich asymptotisch den Werten $v_r = -v\cos\vartheta$ und $v_\vartheta = v\sin\vartheta$ nähern. Dann muss $A_3 = -v$ sein.

Weiter müssen an der Kugeloberfläche sowohl v_r wie v_ϑ verschwinden. Wird der Ionenradius mit b bezeichnet, muss also

$$\text{für } r = b, \quad v_r = 0, \quad \text{und } v_\vartheta = 0$$

sein. Das gibt folgende Bedingungen

$$(43)\qquad \begin{cases} -v + \dfrac{B_1}{\eta}\dfrac{1}{b} + B_3\dfrac{1}{b^3} + \dfrac{DX}{2\pi\eta x^2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d\psi}{dr}\right)_{r=b} = 0, \\ +v - \dfrac{B_1}{2\eta}\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2}B_3\dfrac{1}{b^3} - \dfrac{DX}{4\pi\eta x^2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d\psi}{dr}\right)\right]_{r=b} = 0. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{B_1}{\eta}\frac{1}{b} = \frac{3}{2}v - \frac{DX}{4\pi\eta x^2}\left\{\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right)\right\}_{r=b}.$$

Bei unserer Voraussetzung über das Potential ist der innerhalb der Klammer sich befindende Ausdruck $= x^2\psi$. Also ist

$$\frac{B_1}{\eta}\frac{1}{b} = \frac{3}{2}v - \frac{DX}{4\pi\eta}\left(\psi\right)_{r=b},$$

und

$$B_3\frac{1}{b^3} = -\frac{1}{2}v + \frac{DX}{4\pi\eta x^2}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)_{r=b}.$$

Hiermit sind alle Konstanten bestimmt.

Wir können jetzt die Spannungen berechnen, die auf das Ion durch die Oberfläche übertragen werden. Diese übertragene Kraft wird in der x-Richtung gerichtet sein und wirkt auf ein Oberflächenelement der Kugel, dessen Normale stets r ist. Wir suchen deshalb die Spannungskomponenten, welche nach der üblichen Bezeichnungsweise mit p_{rx} bezeichnet werden.

Es ist

$$p_{rx} = p_{xx}\frac{x}{r} + p_{yx}\frac{y}{r} + p_{zx}\frac{z}{r}.$$

Weiter haben wir nach den Gesetzen für eine zähe, inkompressibile Flüssigkeit

$$p_{xx} = -p + 2\eta\frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$p_{yx} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

$$p_{zx} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten findet man leicht die Transformationsgleichungen

$$v_x = v_r\cos\vartheta - v_\vartheta\sin\vartheta,$$

$$v_y = (v_r\sin\vartheta + v_\vartheta\cos\vartheta)\cos\varphi,$$

$$v_z = (v_r\sin\vartheta + v_\vartheta\cos\vartheta)\sin\varphi.$$

Erinnern wir uns noch, dass wir die Bezeichnung

$$v_r = R_1 \cos\vartheta,$$
$$v_\vartheta = R_2 \sin\vartheta$$

eingeführt haben, bekommen wir

$$v_x = R\cos^2\vartheta - R_2,$$
$$v_y = \frac{1}{2} R \sin 2\vartheta \cos\varphi,$$
$$v_z = \frac{1}{2} R \sin 2\vartheta \sin\varphi,$$

wobei

$$R = R_1 + R_2.$$

Wenn wir beachten, dass

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\vartheta,\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -\frac{\sin\vartheta}{r},\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\vartheta\cos\varphi,\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r},\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial r}{\partial z} = \sin\vartheta\sin\varphi,\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r},\end{array}\right.$$

und

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{r} = \cos\vartheta,\\ \frac{y}{r} = \sin\vartheta\cos\varphi,\\ \frac{z}{r} = \sin\vartheta\sin\varphi,\end{array}\right.$$

so finden wir nach ziemlich langen Rechnungen, die hier nicht reproduziert werden sollen,

$$p_{rx} = -p\cos\vartheta + \eta\left\{\left(2\frac{dR}{dr} - \frac{dR_2}{dr} - \frac{R}{r}\right)\cos^2\vartheta - \left(\frac{dR_2}{dr} - \frac{R}{r}\right)\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (42) bekommen wir

$$2\frac{dR}{dr} - \frac{dR_2}{dr} - \frac{R}{r} = -\frac{2B_1}{\eta}\frac{1}{r^2} - \frac{9B_3}{r^4} - \frac{DX}{4\pi\eta\varkappa^2}\left\{\frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{4}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{4}{r^2}\frac{d\psi}{dr}\right\},$$

und

$$-\left(\frac{dR_2}{dr} - \frac{R}{r}\right) = 3B_3\frac{1}{r^4} + \frac{DX}{4\pi\eta\varkappa^2}\frac{d^3\psi}{dr^3},$$

Wenn man diese Werte und den Wert von p aus der Gleichung (42) einsetzt, findet man

$$p_{rx} = +3B_3\eta\frac{1}{r^4} + \frac{DX}{4\pi\varkappa^2}\frac{d^3\psi}{dr^3}$$
$$+\left\{-3B_1\frac{1}{r^2} - 9B_3\eta\frac{1}{r^4} + \frac{DX}{4\pi}\frac{d\psi}{dr} - \frac{DX}{4\pi\varkappa^2}\left(\frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{4}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{4}{r^2}\frac{d\psi}{dr}\right)\right\}\cos^2\vartheta.$$

Wenn wir die Differentialgleichung für ψ

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} = \varkappa^2\psi$$

differenzieren, lässt sich der Ausdruck für p_{rx} in folgender Form schreiben

$$p_{rx} = 3B_3\eta\frac{1}{r^4} + \frac{DX}{4\pi\varkappa^2}\frac{d^3\psi}{dr^3}$$
$$+\left\{-3B_1\frac{1}{r^2} - 9B_3\eta\frac{1}{r^4} - \frac{3DX}{2\pi\varkappa^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2}\right)\right\}\cos^2\vartheta.$$

Um die auf das Ion wirkende Kraft zu bestimmen, müssen wir $\int p_{rx}\, d\sigma$ über die ganze Oberfläche nehmen. Dabei ist natürlich r als eine Konstante $= b$ anzusehen. Als Oberflächenelement $d\sigma$ empfiehlt es sich hier eine Kugelzone zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ zu nehmen. Dann wird

$$d\sigma = 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Wir finden also

$$\int p_{rx} d\sigma = 4\pi \left\{ -B_1 + \frac{DX}{4\pi\varkappa^2} r^2 \left(\frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{2}{r^2}\frac{d\psi}{dr} \right) \right\}_{r=b}.$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung von ψ können wir schreiben

$$\int p_{rx} d\sigma = 4\pi \left\{ -B_1 + \frac{DX}{4\pi} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=b} \right\}.$$

Benutzen wir jetzt den Wert von B_1

$$B_1 = \frac{3}{2} vb\eta - \frac{DX}{4\pi} b\,(\psi)_{r=b},$$

bekommen wir

$$\int p_{rx} d\sigma = 4\pi \left\{ -\frac{3}{2} vb\eta + \frac{DXb}{4\pi} \left(\psi + r\frac{d\psi}{dr} \right)_{r=b} \right\},$$

oder

$$\int p_{rx} d\sigma = 4\pi \left\{ -\frac{3}{2} vb\eta + \frac{DXb}{4\pi} \frac{d}{dr} (r\psi)_{r=b} \right\}.$$

Für kleine Konzentrationen können wir den Ausdruck für das Potential $\psi = \frac{e_j}{D} \frac{e^{-\varkappa r}}{r}$ in der Nähe von dem Ion, das die Ladung e_j haben möge, entwickeln, oder

$$r\psi = \frac{e_j}{D} e^{-\varkappa r},$$

durch

$$r\psi = \frac{e_j}{D}(1 - \varkappa r)$$

ersetzen und die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Wir bekommen dann

$$\int p_{rx} d\sigma = 4\pi \left\{ -\frac{3}{2} vb\eta - \frac{Xb\varkappa}{4\pi} e_j \right\},$$

oder

$$\int p_{rx} d\sigma = -6\pi\eta vb - e_j X\varkappa b.$$

Bei der Bewegung erfährt das Ion j-ter Art durch das Lösungsmittel eine Bremsung K, die gegeben ist durch

(45) $$K = -6\pi\eta vb - e_j X\varkappa b.$$

Zu der *Stokeschen* Kraft $-6\pi\eta vb$ kommt noch eine elektrophoretische Kraft hinzu, die gegeben ist durch den Ausdruck $-e_j X\varkappa b$. Diese ist stets der Ionenbewegung entgegen gerichtet und wächst mit der Konzentration. Bei einer unelektrischen Kugel, die sich in dem reinen Lösungsmittel bewegt, fällt diese Kraft weg.

Da wir nun im Besitz von diesen Resultaten sind, können wir das Problem des Leitvermögens jetzt theoretisch behandeln.

Es liege folgender Fall vor: Wir haben eine einheitliche Elektrolytlösung eines Elektrolyten, wo jeder ccm. Lösung enthält

n_1 Ionen mit der Ladung e_1,
n_2 » » » » e_2,
. . . . . .
n_s » » » » e_s.

Wir betrachten ein Ion j-ter Art in dieser Lösung. Die Bewegung dieses Ions findet unter Einwirkung von folgenden Kräften statt: die äussere elektrische Feldstärke X gibt den Anteil $e_j X$; infolge der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre kommt eine Kraft

$$-\frac{\omega_j \varkappa}{6}\frac{e_j^2}{D}$$

hinzu, wo

$$\omega_j = \frac{\varrho v_j}{kT}.$$

Dazu kommt eine durch das Lösungsmittel bedingte Einwirkung

$$-6\pi\eta b_j v_j - e_j X \varkappa b_j.$$

Die beiden letzten Effekte sind bremsend.

Bei einer gleichförmigen Bewegung muss man also haben

$$e_j X - \frac{\omega_j \varkappa}{6}\frac{e_j^2}{D} - 6\pi\eta b_j v_j - e_j X \varkappa b_j = 0,$$

wobei $\varkappa$ durch die Gleichung (9) und ϱ durch die Gleichung (11) definiert sind.

Für unendlich kleine Konzentrationen können die Glieder die $\varkappa$ enthalten. vernachlässigt werden. Wir bekommen so als Grenzgesetz

$$e_j X - 6\pi\eta b_j v_j = 0.$$

Wir sind also berechtigt $6\pi\eta b_j$ als eine Reibungskonstante aufzufassen und wie früher wird diese hier mit ϱ_j bezeichnet. Wir können daher unsere Gleichung folgendermassen schreiben

$$\varrho_j v_j + \frac{\varrho\varkappa}{6DkT} e_j^2 v_j = e_j X(1 - \varkappa b_j).$$

Hieraus bekommen wir

$$v_j = \frac{e_j X}{\varrho_j} \cdot \frac{1 - \varkappa b_j}{1 + \frac{\varrho}{\varrho_j}\frac{\varkappa e_j^2}{6DkT}}.$$

Das Glied $\frac{\varrho}{\varrho_j}\frac{\varkappa e_j^2}{6DkT}$ ist sicher klein. Folglich finden wir

$$v_j = \frac{e_j X}{\varrho_j}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_j}\frac{\varkappa e_j^2}{6DkT} - \varkappa b_j\right).$$

Die spezifische Stromstärke i wird bestimmt durch die Gleichung

$$i = \Sigma n_j e_j v_j.$$

Man findet hier

$$i = \sum \frac{n_j e_j^2 X}{\varrho_j}\left\{1 - \frac{\varrho}{\varrho_j}\frac{\varkappa e_j^2}{6DkT} - \varkappa b_j\right\}.$$

Die spezifische Leitfähigkeit (im elektrostatischen System) ist bestimmt durch die Formel

$$\lambda = \frac{i}{X}.$$

Hier ist also

$$\bar{\lambda} = \sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j} - \varkappa \left\{ \sum \frac{n_j e_j^4}{6 DkT} \frac{\varrho}{\varrho_j^2} + \sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j} b_j \right\}.$$

Wir sind schon früher dem Ausdruck $\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}$ begegnet und fanden, dass dieser den Grenzwert der spezifischen Leitfähigkeit bei unendlicher Verdünnung bedeutet. Wird diese λ_0 genannt, hat man

$$\bar{\lambda}_0 = \sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}. \tag{46}$$

Weiter definieren wir einen Leitfähigkeitskoeffizienten f_λ durch die Gleichung

$$\lambda = f_\lambda \cdot \bar{\lambda}_0. \tag{47}$$

Die Grösse f_λ spielt hier offenbar dieselbe Rolle wie der früher eingeführte Dissoziationsgrad.

Wir bekommen jetzt, wenn die molare Leitfähigkeit eingeführt wird

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = 1 - \varkappa \left\{ \frac{\varrho}{6 DkT} \cdot \frac{\sum \frac{n_j e_j^4}{\varrho_j^2}}{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}} + \frac{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j} b_j}{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}} \right\}.$$

Wenn die Werte von $\varkappa$ und ϱ eingesetzt werden, findet man die DEBYEsche Gleichung

$$f_\lambda = 1 - \sqrt{\frac{4\pi}{DkT}} \sqrt{\sum n_j e_j^2} \left\{ \frac{1}{6 DkT} \cdot \frac{\sum n_j e_j^2 \varrho_j}{\sum n_j e_j^2} \cdot \frac{\sum \frac{n_j e_j^4}{\varrho_j^2}}{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}} + \frac{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j} b_j}{\sum \frac{n_j e_j^2}{\varrho_j}} \right\} \tag{48}$$

Es wird jetzt unsere Aufgabe sein, diese Formel auf eine Mischung von zwei Elektrolyten anzuwenden. Gegeben sei eine Lösung, enthaltend γ Mol eines ersten Salzes und γ' Mol eines zweiten Salzes pro Liter Lösung. Die Gesamtkonzentration Γ wird dann definiert durch die Gleichung

$$\gamma + \gamma' = \Gamma. \tag{49}$$

Wir setzen

$$x = \frac{\gamma}{\Gamma}, \text{ und } x' = \frac{\gamma'}{\Gamma}. \tag{50}$$

Jedes Molekül des ersten Salzes zerfalle in

ν_1 Ionen von der Wertigkeit z_1,
ν_2 » » » » z_2.

Jedes Molekül des zweiten Salzes zerfalle in

ν_1' Ionen von der Wertigkeit z_1',
ν_2' » » » » z_2'.

In der Lösung befinden sich dann $\gamma N = x \Gamma N$ Moleküle des ersten Salzes und $\gamma' N = x' \Gamma N$ Moleküle des zweiten Salzes. Da bedeutet N die Avogadrosche Zahl $6.06 \cdot 10^{23}$. Die Konzentrationen der Ionen in der Lösung sind dann

$$\gamma_1 = x\nu_1\Gamma,\ \gamma_2 = x\nu_2\Gamma,\ \gamma_1' = x\nu_1'\Gamma,\ \gamma_2' = x\nu_2'\Gamma.$$

Die Anzahl der Ionen pro cm³ der Lösung ist

$$n_1 = \frac{x\nu_1\Gamma N}{10^3},\ n_2 = \frac{x\nu_2\Gamma N}{10^3},\ n_1' = \frac{x'\nu_1'\Gamma N}{10^3},\ n_2' = \frac{x'\nu_2'\Gamma N}{10^3},$$

und ihre Ladungen

$$e_1 = z_1\varepsilon,\ e_2 = z_2\varepsilon,\ e_1' = z_1'\varepsilon,\ \varepsilon_2' = z_2'\varepsilon.$$

Dann wird

$$\sum n_i e_i^2 = \frac{\Gamma N\varepsilon^2}{10^3}[(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2)x'].$$

Nach Lewis[1] führen wir die Ionenstärke I ein und definieren diese durch die Gleichung

$$I = \sum \frac{\gamma_i z_i^2}{2}.$$

Im vorliegenden Fall bekommen wir

$$I = \frac{1}{2}[(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2)x']\Gamma. \tag{51}$$

Wir erhalten also

$$\sum n_i e_i^2 = \frac{2N\varepsilon^2}{10^3} I.$$

Die Gleichung (48) können wir dann wenn die Ionenradien b_1, b_2, b_1' und b_2' sind, schreiben

$$1 - f_\lambda = \left\{ \frac{\varepsilon^3}{6DkT}\sqrt{\frac{8\pi N}{DkT\,10^3}} \cdot \frac{(\nu_1 z_1^2\varrho_1 + \nu_2 z_2^2\varrho_2)x + (\nu_1' z_1'^2\varrho_1' + \nu_2' z_2'^2\varrho_2')x'}{(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2')x'} \right.$$
$$\cdot \frac{\left(\frac{\nu_1 z_1^4}{\varrho_1^2} + \frac{\nu_2 z_2^4}{\varrho_2^2}\right)x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^4}{\varrho_1'^2} + \frac{\nu_2' z_2'^4}{\varrho_2'^2}\right)x'}{\left(\frac{\nu_1 z_1^2}{\varrho_1} + \frac{\nu_2 z_2^2}{\varrho_2}\right)x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^2}{\varrho_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^2}{\varrho_2'}\right)x'}$$
$$\left. + \varepsilon\sqrt{\frac{8\pi}{DkT}}\frac{N}{10^3} \cdot \frac{\left(\frac{\nu_1 z_1^2}{\varrho_1}b_1 + \frac{\nu_2 z_2^2}{\varrho_2}b_2\right)x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^2}{\varrho_1'}b_1' + \frac{\nu_2' z_2'^2}{\varrho_2'}b_2'\right)x'}{\left(\frac{\nu_1 z_1^2}{\varrho_1} + \frac{\nu_2 z_2^2}{\varrho_2}\right)x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^2}{\varrho_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^2}{\varrho_2'}\right)x'} \right\}\sqrt{I}.$$

Wir haben früher (3) die ionale Leitfähigkeit $\bar{L}_i$ eingeführt durch die Gleichung

$$\bar{L}_i = N\varepsilon^2\frac{z_i^2}{\varrho_i},$$

Wir bekommen also

$$\varrho_i = N\varepsilon^2\frac{z_i^2}{\bar{L}_i}.$$

Gehen wir noch zu dem in praktischen Einheiten gemessenen L_i über, so finden wir

$$1 - f_\lambda = \left\{ \frac{\varepsilon^3}{6DkT}\sqrt{\frac{8\pi N}{DkT\,10^3}} \cdot \frac{\left(\frac{\nu_1 z_1^4}{L_1} + \frac{\nu_2 z_2^4}{L_2}\right)x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^4}{L_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^4}{L_2'}\right)x'}{(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2)x'} \right.$$
$$\left. \cdot \frac{(\nu_1 L_1^2 + \nu_2 L_2^2)x + (\nu_1' L_1'^2 + \nu_2' L_2'^2)x'}{(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2)x + (\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2')x'} + \varepsilon\sqrt{\frac{8\pi}{DkT}}\frac{N}{10^3} \cdot \frac{(\nu_1 L_1 b_1 + \nu_2 L_2 b_2)x + (\nu_1' L_1' b_1' + \nu_2' L_2' b_2')x'}{(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2)x + (\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2')x'} \right\}\sqrt{I}.$$

Aus der Gleichung sieht man, dass $1-f_\lambda$ eine lineare Funktion aus der Quadratwurzel von I ist. Die Gleichung lässt sich also in folgender allgemeinen Form schreiben:

[1] G. N. Lewis and Randall: Journ. of the Americ. chem. soc. 63, S. 1112, 1921.

(52) $$1 - f_\lambda = k\sqrt{I}.$$

Die Konstante k setzt sich additiv zusammen aus zwei Teilen

(53) $$k = k_r + k_e.$$

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein. Wir setzen

(54) $$\alpha = \frac{\varepsilon^3}{6DkT}\sqrt{\frac{8\pi}{DkT}\frac{N}{10^3}},$$

(55) $$\beta = \varepsilon\sqrt{\frac{8\pi}{DkT}\frac{N}{10^3}}\cdot 10^{-8}.$$

Sowohl α wie β sind bei gegebener Temperatur und gegebenem Lösungsmittel konstante Zahlenfaktoren. Der Faktor 10^{-8} ist eingeführt, um die Ionenradien b sofort in Ångström-Einheiten angeben zu können. Die Zerlegung von k in zwei Teile hat nicht nur eine formale Bedeutung sondern auch eine physikalische. Diese entspricht der Tatsache, dass die Bremsung bei der Ionenbewegung sich aus der Wirkung der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre und aus der elektrophoretischen Kraft zusammensetzen lässt, welche sich beide bis auf Glieder höherer Ordnung ungestört auf einander superponieren. Wir finden hier

(56) $$k_r = \alpha\frac{\left[x\left(\frac{\nu_1 z_1^4}{L_1}+\frac{\nu_2 z_2^4}{L_2}\right)+x'\left(\frac{\nu_1' z_1'^4}{L_1'}+\frac{\nu_2' z_2'^4}{L_2'}\right)\right]\left[x(\nu_1 L_1^2+\nu_2 L_2^2)+x'(\nu_1' \bar{L}_1'^2+\nu_2' \bar{L}_2'^2)\right]}{\left[x(\nu_1 z_1^2+\nu_2 z_2^2)+x'(\nu_1' z_1'^2+\nu_2' z_2'^2)\right]\left[x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')\right]},$$

welches die Wirkung der Relaxationszeit der Ionenatmosphäre bestimmt. Weiter ist

(57) $$k_e = \beta\frac{x(\nu_1 L_1 b_1+\nu_2 L_2 b_2)+x'(\nu_1' L_1' b_1'+\nu_2' L_2' b_2')}{x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')},$$

was die Wirkung der elektrophoretischen Kraft beschreibt.

Wenn man für jedes Salz einen mittleren Ionenradius b_0 und b_0' einführt, folgendermassen definiert

$$b_0(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2) = \nu_1 L_1 b_1+\nu_2 L_2 b_2,$$
$$b_0'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2') = \nu_1' L_1' b_1'+\nu_2' L_2' b_2',$$

wobei b_0 und b_0' berechnet werden können aus der Beobachtung der einzelnen einheitlichen Elektrolytlösungen der Elektrolyten, so bekommt man

$$k_r = \beta\frac{x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)b_0+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')b_0'}{x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')}.$$

Wenn man, was hier berechtigt sein dürfte, von einem mittleren Ionenradius b für die Mischung spricht und diesen durch die Gleichung

(58) $$b = \frac{x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)b_0+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')b_0'}{x(\nu_1 L_1+\nu_2 L_2)+x'(\nu_1' L_1'+\nu_2' L_2')}$$

definiert, wird die Wirkung der elektrophoretischen Kraft einfach durch den Ausdruck

(59) $$k_e = \beta b$$

beschreibt.

Es erübrigt noch die Zahlenwerte der Konstanten α und β anzugeben, wenn das Lösungsmittel reines Wasser ist. Für die Dielektrizitätskonstante D können wir dabei die DRUDEsche[1] Interpolationsformel

[1] P. DRUDE: Ann. d. Phys. 1896, Bd. 9, S. 61.

$$D = 88.23 - 0.4044\, t + 0.001035\, t^2,$$

wo t die Temperatur in Celsius darstellt, benutzen. Alle Beobachtungen sind bei genau 18° gemacht. Für diese Temperatur sollen dann die Werte von α und β angegeben werden. Dabei ist

$$D = 81.29.$$

Für den anderen Konstanten haben wir hier folgende Werte angenommen

$$\varepsilon = 4.77 \cdot 10^{-10},\ k = 1.371 \cdot 10^{-16} \text{ (die Boltzmannsche Konstante)},$$
$$N = 6.06 \cdot 10^{23}.$$

Man bekommt dann bei 18° Celsius

$$\alpha = 0.382,$$
$$\beta = 0.327.$$

Hiermit ist die Konstante k in der Gleichung (52) vollständig definiert.

Es bleibt noch übrig festzustellen, was sich über den Grenzwert $\lim_{\Gamma=0} \Lambda = \Lambda_0$ der Mischung sagen lässt. Für den Grenzwert der spezifischen Leitfähigkeit, elektrostatisch gemessen, fanden wir

$$\bar{\lambda}_0 = \sum \frac{n_i e_i^2}{\varrho_i}.$$

Wir erinnern daran, dass auch die elementare Theorie dieses Resultat gibt, was auch ganz natürlich ist, da im Zustand der unendlich grossen Verdünnung von einer gegenseitigen Einwirkung der Ionen auf einander keine Rede mehr sein kann. Wenn man die Werte für die Grössen n_i und e_i einführt, bekommt man

$$\bar{\lambda}_0 = \frac{\Gamma N \varepsilon^2}{10^3} \left\{ \left(\frac{\nu_1 z_1^2}{\varrho_1} + \frac{\nu_2 z_2^2}{\varrho_2} \right) x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^2}{\varrho_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^2}{\varrho_2'} \right) x' \right\}.$$

Als die molare Leitfähigkeit definierten wir die spezifische Leitfähigkeit durch molare Konzentration pro cmm oder

$$\bar{\Lambda} = \frac{10^3 \bar{\lambda}}{\Gamma}.$$

Wir bekommen also als Grenzwert für die molare Leitfähigkeit, elektrostatisch gemessen

$$\bar{\Lambda}_0 = N \varepsilon^2 \left\{ \left(\frac{\nu_1 z_1^2}{\varrho_1} + \frac{\nu_2 z_2^2}{\varrho_2} \right) x + \left(\frac{\nu_1' z_1'^2}{\varrho_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^2}{\varrho_2'} \right) x' \right\}.$$

Wir führen jetzt die ionale Leitfähigkeit $\bar{L}_i$ (die Beweglichkeit) der einzelnen Ionensorten gemäss der Gleichung (3) ein und erhalten

$$\bar{\Lambda}_0 = (\nu_1 \bar{L}_1 + \nu_2 \bar{L}_2)\, x + (\nu_1' L_1' + \nu_2' \bar{L}_2')\, x'.$$

Man identifiziert hier unmittelbar $\nu_1 \bar{L}_1 + \nu_2 \bar{L}_2$ und $\nu_1' \bar{L}_1' + \nu_2' \bar{L}_2'$ gemäss der Gleichung (4) als die Grenzwerte der molaren Leitfähigkeit des einzelnen Salzes, d. h.

$$\bar{\Lambda}_0^{(1)} = \nu_1 \bar{L}_1 + \nu_2 \bar{L}_2,$$
$$\bar{\Lambda}_0^{(2)} = \nu_1' L_1' + \nu_2 L_2',$$

und bekommt

$$\bar{\Lambda}_0 = \bar{\Lambda}_0^{(1)} x + \bar{\Lambda}_0^{(2)} x',$$

oder praktisch gemessen

(60) $$\Lambda_0 = \Lambda_0^{(1)} x + \Lambda_0^{(2)} x'.$$

Der Grenzwert für die molare Leitfähigkeit einer Mischung ist also eine lineare Funktion von x und lässt sich aus den Grenzwerten ihrer Bestandteile nach der elementaren Mischungsregel berechnen.

Die Gleichung (52) stellt ein Grenzgesetz dar, das, streng genommen, nur für die Tangente im Punkte $I = 0$ gelten soll. In der Tat zeigen die Leitfähigkeitskurven bei manchen Salzen eine gewisse Krümmung, die im Allgemeinen mit der Wertigkeit des Hauptions wächst. Diese Krümmung soll hier unaufgeklärt bleiben und unser Interesse wendet sich hauptsächlich der Tangente zu. Da die Beobachtungen aus praktischen Gründen - weil hier das Leitvermögen des benutzten Wassers anfängt eine erhebliche Rolle zu spielen (bei einer Konzentration von 10^{-4} Mol pro Liter ist bei unseren Messungen der Beitrag des Leitvermögens des Wassers zu dem gemessenen Wert schon etwa 7—9 %) — sich über ein Gebiet erstrecken müssen, wo die Krümmung der Kurven, wenn auch nur als kleiner Korrektionsbetrag, zur Geltung kommt, wollen wir empirisch die Gleichung (52) erweitern und setzen

(61) $$\Lambda = \Lambda_0 - A\sqrt{I} + BI.$$

Unser Interesse wird sich dann hauptsächlich der Bestimmung von $\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda_0}$ zuwenden

Weiter werden wir untersuchen:

1:o. Inwieweit die theoretische Formel (52) mit den Beobachtungen vereinbar ist.

2:o. Inwiefern die elementare Mischungsregel für die Grenzwerte der molaren Leitfähigkeit der Mischung gilt.

3:o. Inwiefern dieses einfache Mischungsgezetz bei kleinen Konzentrationen Gültigkeit hat

Bei den Untersuchungen werden wir — und das ist wichtig — zu einem Begriff der Rolle kommen, die der Wertigkeit der Ionen und deren individuellen Eigenschaften bei der Neigung der Leitfähigkeitskurve zukommt.

Wir werden auch zu der Frage kommen, ob die Beobachtungen mit dem Gesetz mit $^1/_2$ Potenz — was unsere Gleichung (52) fordert — vereinbar sind. Ferner werden wir in einem einzelnen Fall einen Vergleich mit dem Gesetz mit $^1/_3$ Potenz ausführen um zu sehen, wie dieses mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Damit haben wir die schon anfangs versprochene, bestimmte Formulierung unserer Aufgabe gegeben.

2. Die Messapparatur.

Bei den elektrischen Widerstandsmessungen wurde eine Widerstandsbrücke mit einem Telephon als Nullinstrument benutzt. Bei dem Gebrauch von Wechselstrombrücken müssen besondere Vorsichtsmassregeln getroffen werden, damit die vier Brückenzweige sich nicht gegenseitig durch Induktion beeinflussen und auch die Stromleitungen keine Induktion ausüben. Als nötige Bedingungen wollen wir formulieren:

1:o Der Wechselstrom muss einen möglichst reinen Sinuscharakter haben.

2:o Die Vergleichswiderstände müssen möglichst induktions- und kapazitätsfrei sein.

3:o Grosse Induktionsflächen sind zu vermeiden.

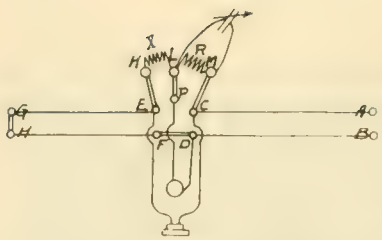
Bekanntlich wird bei den Präzisionsmessungen der Leitfähigkeit von Elektrolyten nach dem Verfahren von F. Kohlrausch und Maltby, die eine grosse Anzahl von solchen Leitfähigkeiten mit sehr grosser Genauigkeit gemessen haben, eine Walzenbrücke benutzt. Die Walzenbrücke wurde bei den vorliegenden Untersuchungen vermieden. Wenn auch der Draht der Walzenbrücke als ausreichend induktions- und kapazitätsfrei angesehen werden kann — wenigstens wenn die Messungen bei symmetrischer Brücke gemacht werden — so bietet die Walzenbrücke selbst eine nicht ganz unwesentliche Induktionsfläche dar; ausserdem ist bekanntlich die Herstellung eines gut definierten und gut arbeitenden Kontaktes bei der Walzenbrücke ziemlich schwierig.

Bei der Durchbildung und Aufstellung der Apparatur sind bei Beachtung der oben angegebenen Bedingungen und der Entwicklung der elektrischen Messtechnik neue Gesichtpunkte zur Anwendung gekommen.

Wie bekannt hat der mittels einer Elektronenröhre zu Schwingungen angeregte Kreis aus Selbstinduktivität und Kapazität eine völlige Umwälzung auf dem Gebiet der Wechselstromtechnik hervorgerufen und bietet derselbe ein sehr bequemes Mittel um ungedämpfte Schwingungen von grosser Konstanz der Frequenz zu erzeugen. Bei nicht zu starker Inanspruchnahme der Röhre sind die Oberschwingungen kaum merklich. Als Generator wurde deshalb eine Senderröhre benutzt. Die Anodenspannung war etwa 600 Volt. Der Heizstrom wurde von einer Akkumulatorenbatterie von sieben Zellen geliefert und war von einer Stärke von 2.6 Ampere. Die Schwingungsfrequenz konnte mit Hilfe eines Stöpselkondensators stufenweise geändert werden. Gewöhnlich wurden Schwingungen, derer Frequenz akustisch auf etwa 700 geschätzt wurden, benutzt. Die Schaltung in dem Schwingungskreise war eine Rückkopplungsschaltung, wie sie in »Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen» von Dr Hans Georg Möller, 1922, Seite 63, Fig. 71 angegeben ist. Aus diesem Primärkreise wurde der Strom für die Brücke durch induktive Kopplung herausgenommen.

Die Messbrücke war eine bifilare, von etwa ähnlichem Typus, wie die von Giebe[1] eingeführte. Die beiden Brückenzweige bestanden aus parallel aufgespannten, blanken Manganindrähten, die sehr sorgfältig ausgewählt wurden. Der Durchmesser betrug 0.34 mm. Der Abstand zwischen den parallelen Drähten war überall 8 mm. Der kürzere Zweig hatte eine Länge von 786 mm und wurde bei $G\,H$ durch eine Kupferlamelle kurzgeschlossen. Ebenso waren bei $D\,F$ die beiden Brückenzweige mittels einer Kupferlamelle mit einander verbunden. Der längere Zweig hatte

[1] E. Giebe, Ztschr. f. Instrumentenk. 31, S. 6, und S. 33; 1911.



eine Länge von etwa 970 mm. Die fünf Punkte der Brücke F, D, C, P und E wurden einander sehr nahe angeordnet, um störende Induktionseinflüsse zu vermeiden. Von E, P und C führten Kupferlamellen zu den Klemmen K, L und M. Zwischen K und L wurde das Widerstandsgefäss eingeschaltet, zwischen L und M die Vergleichswiderstände. Da das Widerstandsgefäss eine wenn auch kleine Kapazität besitzt, lässt sich durch einen reinen Widerstand allein kein gut bestimmtes Minimum erreichen, weil der Phasenwinkel dann niemals gleich Null ist. Desshalb wurde parallel mit den Vergleichswiderständen ein kleiner Drehkondensator eingeschaltet. Der Zweig $DBAC$ wurde bei den Versuchen durch einen verschiebbaren Kontakt kurzgeschlossen. Die Lage des Kontaktes wurde auf einer bei D B befestigten Skala abgelesen. Wird die korrigierte Ablesung auf dieser Skala a genannt, bestimmt sich der gesuchte Widerstand X durch die Gleichung

$$\frac{X}{R} = \frac{786}{a}.$$

Auf die Herstellung eines guten Schleifkontaktes wurde besonders grosse Sorgfalt verwendet. Der Kontakt wurde in folgender Weise hergestellt: In der unteren Seite eines rechtwinkligen Marmorparallelepipeds wurde eine zylindrische Rinne ausgehöhlt und zwar so, dass das Parallelepiped, wenn es auf der Brücke liegt die Brückendrähte in keinem Punkte berührt. (Vorbereitende Versuche hatten gezeigt, dass Goldsilber in jeder Hinsicht als Kontaktmaterial Neusilber weit überlegen ist.) Der Kontakt wurde deshalb aus einem in spitzem Winkel gebogenen Goldsilberblatt hergestellt. Die so gebildete Kante wurde schwach abgerundet um den Draht nicht zu verletzen. Das Goldsilberblech wurde dann an eine der kurzen Seitenflächen des Marmorparallelepipeds mittels Schrauben, die, da sie nicht festgespannt waren, in vertikaler Richtung eine gewisse Bewegungsfreiheit gestatteten, befestigt. An die Basalfläche in der Nähe der zweiten Kurzseite des Parallelepipeds wurde ein unten abgerundeter Marmorstift angebracht. Das Marmorparallelepiped wurde dann auf die Brücke gelegt, das Goldsilberblech genau einjustiert und mittels der Schrauben endgültig befestigt. Das Marmorparallelepiped ruhte so auf drei Punkten: auf den Berührungspunkten des Bleches mit den Drähten und auf dem Marmorstift. Der Kontakt wurde dadurch mathematisch definiert und erfüllte sämtliche von F. KOHLRAUSCH und L. HOLBORN angegebenen Bedingungen.

Es ist noch zu erwähnen, dass bei den Punkten D und P der Generatorstrom angeschlossen war. Ein Doppelkabel diente dazu um die Störungen nach aussen zu vermeiden. Die Punkte E und C waren nicht direkt mit dem Telephon, sondern mit einem Niederfrequenzverstärker und dieser wiederum mit dem Telephon verbunden. Als Leitungen dienten wieder Doppelkabel. Der Niederfrequenzverstärker arbeitete gewöhnlich mit drei, bisweilen mit vier Röhren. Ein Punkt der Brücke war geerdet. Dem Brückendraht wurde dadurch ein künstliches Alter gegeben, dass vor dem Gebrauch ein elektrischer Strom längere Zeit durch die Brücke gesandt wurde. Aus der Konstruktion der Brücke folgt, dass die Korrektionstabelle der Brücke öfter erneuert werden musste als bei einer gewöhnlichen oder einer Walzenbrücke, was natürlich ein, wenn auch belangloser, Nachteil war.

Die Benutzung eines Niederfrequenzverstärkers stellt natürlich sehr grosse Ansprüche an das Minimum. Bei Widerständen von gewöhnlicher Konstruktion von einigen hundert Ohm war kein gutes Minimum mehr zu erreichen. Hier sollten nun aber bei reinem Wasser Widerstände von der Grössenordnung von 10^5 Ohm gemessen werden und bei den kleineren Konzentrationen solche von einer Grössenordnung von 10^3 bis 10^4 Ohm. Es bestand also die Aufgabe, möglichst induktions- und kapazitätsfreie Widerstände herzustellen. Die Herstellung induktionsfreier Widerstände bietet keine sehr grosse Schwierigkeit. Anders gestaltet sich aber die Sache, wenn grosse, ebenfalls kapazitätsfreie Widerstände hergestellt werden sollen. Bekanntlich sind mehrere Versuche gemacht worden, diese Aufgabe zu lösen. Der bekannteste ist von Chaperon angegeben. Nach den Versuchen von H. L. Curtis und F. W. Grover[1] hat es sich jedoch gezeigt, dass die von den genannten Forschern angegebene Methode, für die Herstellung induktions- und kapazitätsfreier Wechselstromwiderstände, viel bessere Ergebnisse liefert als diejenige von Chaperon. Nach dem Prinzip von Curtis und Grover wurde zuerst ein Widerstand von c:a 1,000 Ohm und ein zweiter von 2,000 hergestellt. Ein Marmorzylinder von 4 cm Länge und 2.8 cm Durchmesser wurde längs eines Durchmessers mit einem feinen Schlitz versehen, der sich über $^3/_4$ der Zylinderlänge erstreckte. Die Wicklung wurde darauf in der Weise ausgeführt, dass der Draht einmal um den Zylinder geschlungen und dann durch den Schlitz hindurchgeführt wurde. Dann wurde er in entgegengesetzter Richtung einen ganzen Umlauf weitergeführt, wieder durch den Schlitz geführt und so weiter. Der Draht bestand aus Konstantan von 0.05 mm Diameter und war mit Seide umsponnen. Die ganze Spule wurde dann in geschmolzenes Paraffin eingetaucht und so mit Paraffin überzogen. Nachdem sich diese Widerstände bei vorbereitenden Messungen mit Wechselstrom ausgezeichnet bewährt hatten, wurden mehrere solche Widerstandsspulen hergestellt. Die grösste von diesen hatte einen Widerstand von über 17,000 Ohm. Auf die Herstellung von weiteren sehr grossen Spulen wurde verzichtet, weil bekanntlich die Störungen, besonders der Kapazität bei mehreren kleinen Spulen kleiner sind, als bei einer grossen bei gleicher Gesamt-Ohmzahl. Dabei wurde immer darauf geachtet, dass der Durchmesser so gewählt wurde, dass die Wicklungsbreite nicht viel den Durchmesser überschritt.[2] Auch den Widerständen wurde in ähnlicher Art wie dem Brückendraht ein künstliches Alter gegeben.

Die oben beschriebene Apparatur hat sich sehr gut bewährt und lieferte bei Messungen bis hinab zu den kleinsten Konzentrationen und sogar bei sehr reinem Wasser von einer Leitfähigkeit der Grössenordnung 10^{-6} ein sehr gutes und scharfes Minimum, wenn der Niederfrequenzverstärker mit drei Röhren arbeitete und der »Nullstrom» also etwa 200 Mal verstärkt wurde.

Um den störenden Einfluss, der davon herrührt, dass Glas sich ein wenig in Wasser löst, zu vermeiden, wurde als Material für das Widerstandsgefäss undurchsichtiger Quarz benutzt. Das Widerstandsgefäss hatte die Form eines Zylinders mit 9 cm Durchmesser und 16 cm Höhe und war von der »Quarzhütte Silectra» in Uster hergestellt. Vor dem Gebrauch wurde es sorgfältig ausgeglüht. Die Elektroden bestanden aus 0.2 mm dickem Platinblech und wurden von starken Platinstiften getragen. Bekanntlich lässt sich Platin in Quarz nicht einschmelzen, deshalb wurde das Prinzip der Quecksilberlampe benutzt und die Platinstifte in durchsichtigen Quarz eingeschliffen. Jedes

[1] H. L. Curtis und F. W. Grover, Bull. Bur. Stand., Washington, 8. 495, 1912 und Elektrotechn. Zeitschrift 33, S. 1221, 1912.

[2] Man vergleiche: F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik 1923. S. 611.

von diesen durchsichtigen Quarzstücken wurde dann an eine Quarzröhre angeschmolzen, die den Zuleitungsdraht enthielt . Der Deckel wurde aus Hartgummi gemacht und zwar so, dass er in einer — und nur einer — Lage eingepasst werden konnte. Die oben erwähnten Quarzröhren wurden durch diesen Deckel geführt und daselbst mit einem Gummiring und Wachskolophonium befestigt. Um eine ganz feste und konstante Lage der Elektroden gegen einander zu erzielen wurden zwischen den beiden Quarzröhren zwei Querröhren aus Quarz angeschmolzen. Die Elektroden waren kreisförmig und hatten einen Durchmesser von 20 mm. Da die Messungen sich über einen Bereich von etwa $5 \cdot 10^{-5}$ bis zu etwa $2 \cdot 10^{-3}$ Mol pro Liter erstrecken sollten, schien es zweckmässig, die Widerstandskapazität etwa von der Grösse 0.1 zu wählen. Das entspricht, wenn auch das reine Wasser gemessen werden soll, einem Widerstandsbereich von etwa 10^5 bis 10^2 Ohm, was für die Apparatur günstig war. Die Elektroden wurden deshalb in einer Entfernung von etwa 8 mm von einander einmontiert.

Die Elektrodenflächen wurden zuerst mit einer Lösung von Kaliumbichromat und Schwefelsäure gründlich gereinigt, sorgfältig mit destilliertem Wasser abgespült und dann platiniert Nach dem Rezept von Lummer und Kurlbaum[1] wurde eine Lösung von 5 gr Platinchlorid und 40 mg Bleiacetat in 150 gr Wasser hergestellt. Bei einer Stromstärke von etwa 0.1 Ampere (die richtige Stromstärke erkennt man an einer Gasentwicklung von mässiger Stärke) erhält man ohne Schwierigkeit einen sehr schönen Niederschlag von Platinschwarz. Die Anode wird nicht angegriffen. Die beiden Elektroden wurden deshalb abwechselnd als Anode und Katode benutzt. Nach dem Platinieren wurden die Elektroden längere Zeit mit destilliertem Wasser ausgewässert, weil beim Entstehen des Platinmohrs Teile aus der Lösung eingeschlossen und hartnäckig festgehalten wurden, die im Laufe der Zeit aber wieder in Flüssigkeiten, mit denen die Elektroden in Berührung kamen, heraustraten und diese verunreinigten. Der Zweck der Platinierung ist ja bekanntlich die Störung, die von der Polarisation herrührt, zu vermindern. Empirisch ist die untere Grenze des Widerstandes, bei der man ein scharfes Minimum bekommt, festgestellt.[2] Bei den hier vorliegenden Untersuchungen gestattete dieses Widerstandsgefäss mit den derart platinierten Elektroden noch bei Lösungen von einer Konzentration von etwa $3 \cdot 10^{-3}$ Mol pro Liter ein scharfes Minimum zu erreichen. Schliesslich sei noch erwähnt, dass das Widerstandsgefäss einen Ringrührer aus gut ausgeglühtem Quarz enthielt. Die Messungen wurden immer, mit Ausnahme der Bestimmung des Leitvermögens des reinen Wassers, bei ziemlich symmetrischer Brücke gemacht, weil dabei alle Störungen so weit wie möglich vermieden werden.

Die Zuleitungen von der Brücke zu dem Widerstandsgefäss und den Vergleichswiderständen waren nahe an einander gespannte, parallele Drähte.

Es fragt sich noch, inwiefern die Kapazitäten die Bestimmung des Widerstandes beinflussen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Frage rechnerisch bei einer einfachen Brückenanordnung behandeln. In dem ersten Zweige soll ein unbekannter kapazitiver Widerstand vorhanden sein, in dem zweiten ein ohmscher Widerstand R_2 und parallel damit eine Kapazität C_2. Die beiden anderen Zweige sollen aus induktions- und kapazitätsfreien Widerständen R_3 und R_4 bestehen. Der kapazi-

[1] F. Kohlrausch: Lehrbuch der praktischen Physik, 1923, S. 40.

[2] Kohlrausch und Holborn: Das Leitvermögen der Elektrolyte 1916, S. 10.

tive Widerstand lässt sich bekanntlich als ein ohmscher Widerstand X mit parallel geschaltener Kapazität C_1 auffassen. Der Widerstandsoperator für diesen Zweig ist

$$W = \frac{X}{1 + i\omega X C_1} = \frac{X(1 - i\omega X C_1)}{1 + \omega^2 X^2 C_1^2}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

wo ω die Frequenz des Wechselstromes ist. Die Bedingung der Stromlosigkeit lautet dann, wenn die Kapazitäten und die Frequenz so klein sind, dass die Glieder von dem Typus $\omega^2 X^2 C^2$ vernachlässigt werden können

$$\frac{X(1 - i\omega X C_1)}{R_2(1 - i\omega R_2 C_2)} = \frac{R_3}{R_4},$$

oder

$$\frac{X[1 + \omega^2 X R_2 C_1 C_2 + i\omega(R_2 C_2 - X C_1)]}{R_2(1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2)} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Aus der genannten Annahme der Kleinheit der Kapazitäten und der Frequenz folgt

$$\frac{X[1 + i\omega(R_2 C_2 - X C_1)]}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Daraus ergibt sich als Bedingungen für die Stromlosigkeit

$$\begin{cases} \frac{X}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}, \\ X C_1 = R_2 C_2. \end{cases}$$

Man sieht daraus, dass unter den erwähnten Voraussetzungen, bei der Bestimmung von X die Kapazität nicht hineinkommt. Die Ausgangsgleichung zeigt weiter, dass wenn die Messungen bei symmetrischer Brücke gemacht werden, die Voraussetzung dass R_3 und R_4 induktions- und kapazitätsfrei sein sollen, wegfällt. Es wird nur gefordert, dass sie gleiche Kapazität und Induktivität besitzen. In der Tat ist auch bei früheren Messungen des Leitvermögens der Elektrolyte die Kapazität nicht berücksichtigt worden.

Das Leitvermögen der Elektrolyte hat bekanntlich einen ziemlich grossen Temperaturkoeffizienten (bei verdünnten Lösungen der Salze 0.020 bis 0.026). Bei den Messungen über die Leitfähigkeiten muss man also bei jeder Messung eine Temperaturmessung oder auch ein für alle Mal ein konstantes Temparaturbad herstellen. Der letztere Weg erschien in jeder Hinsicht sicherer und zweckmässiger. Dabei muss beachtet werden, dass die Temperaturbestimmung der durch die vorliegende Apparatur sonst zu erreichenden Genauigkeit entspricht; bei vorliegenden Untersuchungen also etwa 0.01 Grad. Ein konstantes Temperaturbad wurde hier durch einen Doppelthermostat erreicht.

Dass durch Verwendung eines Thermostats das Minimum in Folge von störenden Kapazitätseinflüssen verschlechtert würde,[1] wie in der Litteratur erwähnt wird, konnte hier nicht beobachtet werden. Der Thermostat bestand aus einem äusseren grossen Behälter aus Kupferblech und einem inneren Glasgefässe. Hierzu wurde ein grosses Akkumulatorgefäss benutzt. Durch den äusseren Behälter floss ein beständiger Wasserstrom. Die Geschwindigkeit des Wasserstromes wurde immer so eingestellt, dass in dem äusseren Behälter eine Temperatur von 17.8° -18° erreicht wurde. Die Heizung in dem inneren Behälter geschah mit Hilfe einer 32-kerzigen Metallfadenlampe. Der Heizstrom wurde mittels eines Temperaturregulators automatisch ein- und ausgeschaltet.

[1] Kohlrausch: Gesammelte Abhandlungen II.

Der Temperaturregulator bestand aus einem Glasbehälter von etwa 100 cm³ Inhalt, der unten in Verbindung mit einer U-förmigen, dünnen, gebogenen Glasröhre stand, die oben zu einem kleinen zylindrischen Trichter erweitert war und seitlich in Verbindung mit einem anderen Trichter stand. Diese Verbindung konnte mittels eines Glashahnes geschlossen und geöffnet werden. Als eigentliche Thermoregulatorflüssigkeit wird gewöhnlich Toluol benutzt. Nach vorbereitenden Versuchen schien es mir jedoch zweckmässiger Olivenöl zu benutzen. Olivenöl hat nämlich eine geringere Neigung das als Kontaktflüssigkeit dienende Quecksilber zu verschmieren als Toluol. Olivenöl hat allerdings einen kleineren Ausdehnungskoeffizienten (0.00072) als Toluol (0.00109) und eine grössere spez. Wärme [Olivenöl (0.47) Toluol (0.41)]. Jedoch ist dies nicht so wesentlich. Deshalb wurde der 100 cm³ Behälter mit Olivenöl gefüllt. Die Glasröhren wurden mit Quecksilber gefüllt und zwar so, dass das Quecksilber auch den untersten Teil des 100 cm³ Behälters einnahm. Der Quecksilberfaden in der dünnen Glasröhre konnte mit Hilfe des oben erwähnten Glashahnes am Seitentrichter genau auf eine gewünschte Höhe eingestellt werden. In der Glasröhre unterhalb der oberen Quecksilberoberfläche war noch ein Platinstift eingeschmolzen und mit dem einem Pol eines Akkumulators verbunden. Mit Hilfe einer Schraube, die in einer Fassung, welche in einem Hartgummideckel des erst erwähnten Trichters, ihre Führung hatte, konnte ein zweiter zentrierter Platinstift in Berührung mit der oberen Quecksilberfläche gebracht werden. Dieser Stift stand in Verbindung mit dem zweiten Pol des Akkumulators. Dadurch wurde ein Elektromagnet in Tätigkeit gesetzt, der den Heizstrom der Lampe ein- und ausschaltete. Wenn die Quecksilberoberfläche sank, wurde automatisch der Heizstrom eingeschaltet.

Der Rührer des inneren Thermostates wurde in folgender Weise gebaut: An eine unten offene Röhre aus Messing wurden in der Nähe des unteren Endes drei schräge Schaufeln angebracht, ähnlich wie bei einem Propeller und oben seitlich etwas unterhalb der Wasseroberfläche drei Seitenröhren, die in Verbindung mit der erstgenannten Messingröhre standen, angelötet. Die Messingröhre mit ihren Seitenarmen wurde von einem kleinen Motor in Rotation versetzt. Dieser Rührer arbeitete in folgender Weise: Erstens wurde das Wasser durch die Schaufeln in Bewegung gesetzt, zweitens wurde das Wasser durch die Rotationsbewegung durch die Seitenarme oben herausgeschleudert, während anderes Wasser von unten herein- und herausströmte. Dadurch wurde ein Transport von Wasser von unten nach oben erreicht. Mit der gewöhnlichen Schaltung liess sich die Tourenzahl des kleinen Motors für die Versuche nicht klein genug machen; der Motor war stehengeblieben. Deshalb wurde hier eine von Barkhausen angegebene Schaltung gewählt.[1]

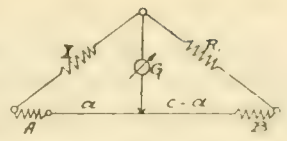
Die Bestimmung der Vergleichswiderstände.

Die Grösse des Widerstandes der oben erwähnten Widerstandsspulen wurde mit Hilfe einer gewöhnlichen Wheatstoneschen Brücke mit einem empfindlichen Galvanometer als Nullinstrument bestimmt. Bekanntlich existieren Methoden, mit Hilfe von Interpolation der Galvanometer-Ablesungen Präzisionsmessungen zu machen.[2] Auch gibt es eine Methode die Empfindlichkeit der Messung durch Vorschalten von Widerständen zu erhöhen — sogenannte Ballast-Wider-

[1] Barkhausen: Phys. Zeitschrift 1912, S. 1131.

[2] Man vergleiche z. B. W. Jaeger: Elektrische Messtechnik 1922, S. 315.

stände — deren Verhältnis zu demjenigen des Drahtes bekannt ist.[1] Ich habe eine Substitutionsmethode benutzt, die nicht eine genaue Kenntnis der Ballast-Widerstände erfordert ebensowenig wie die des Verhältnises dieser Widerstände zu demjenigen des Drahtes und durch welche die Empfindlichkeit sehr bedeutend erhöht werden kann. Diese Methode ist besonders bei Bestimmung von grossen Widerständen verwendbar und beruht auf folgender Überlegung:



A und B seien zwei beliebige Vorschaltwiderstände von ungefähr gleicher Grösse, a die korrigierte Ablesung der Brücke, c die ganze Brückenlänge, X der unbekannte und R_1 der Vergleichswiderstand, G der Galvanometer. Der Widerstand pro Längeneinheit des Drahtes soll mit σ bezeichnet werden. Bei Stromlosigkeit des Galvanometers hat man dann

$$\frac{X}{R_1} = \frac{a\sigma + A}{(c - a)\sigma + B}. \tag{1}$$

Wird dann X anstatt R_1 eingeschaltet, muss man einen Widerstand R_2 in den zweiten Zweig einschalten um dieselbe Ablesung a bei Stromlosigkeit auf der Brücke zu erhalten. Man bekommt dann

$$\frac{R_2}{X} = \frac{a\sigma + A}{(c - a)\sigma + B}. \tag{2}$$

Dadurch erhält man

$$X^2 = R_1 R_2,$$

$$X = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Ein solcher Widerstand R_2 steht aber gewöhnlich nicht zur Verfügung. Dagegen lassen sich ohne Schwierigkeit zwei Widerstände R_2' und R_2'' finden, so dass

$$R_2' < R_2 < R_2'' \text{ und } R_2'' - R_2' << R_2.$$

Anstatt der Gleichung (2) bekommt man dann

$$\frac{R_2'}{X} = \frac{a'\sigma + A}{(c - a')\sigma + B},$$

$$\frac{R_2''}{X} = \frac{a''\sigma + A}{(c - a'')\sigma + B},$$

wobei $a' < a < a''$. Von diesen Gleichungen leitet man ab

$$\frac{R_2' - R_2}{X} = \frac{a'\sigma + A}{(c - a')\sigma + B} - \frac{a\sigma + A}{(c - a)\sigma + B},$$

$$\frac{R_2'' - R_2'}{X} = \frac{a''\sigma + A}{(c - a'')\sigma + B} - \frac{a'\sigma + A}{(c - a')\sigma + B}.$$

Nehmen wir jetzt an, dass A und B einander beinahe gleich und gross im Verhältnis zu dem Widerstand des Drahtes sind und ausserdem $R_2'' - R_1'$ sehr klein im Verhältnis zu X ist, erhält man mit grosser Genauigkeit

$$\frac{R_2' - R_2}{X} = \frac{2(a' - a)\sigma}{2(c - a)\sigma + B},$$

$$\frac{R_2'' - R_2'}{X} = \frac{2(a'' - a')\sigma}{2(c - a)\sigma + B}.$$

Daraus folgt

[1] F. Kohlrausch und L. Holborn: Das Leitvermögen der Elektrolyte 1916, S. 43.

$$\frac{R_2' - R_2}{R_2'' - R_2'} = \frac{a' - a}{a'' - a'},$$

oder

$$R_2 = R_2' + \frac{a - a'}{a'' - a'}(R_2'' - R_2'). \tag{3}$$

Setzt man dann diesen Wert in die Gleichung $X = \sqrt{R_1 R_2}$ ein, so lässt sich der unbekannte Widerstand berechnen.

Die Ballastwiderstände wurden immer so gewählt, dass die Vergrösserung von R_2' mit 1 ‰ auf der Brücke 15—40 mm entsprach. Die Empfindlichkeit der Brücke lässt sich in dieser Weise sehr stark erhöhen und gleichzeitig werden die meisten Fehler von Bedeutung eliminiert, die auf nicht genau bekannten Widerständen der Zuleitungsdrähte und auf ungenauer Kenntnis der Korrektionstabelle der Brücke beruhen. Die von Thermoströmen im Galvanometer herrührenden Fehler berücksichtigt man durch Kommutieren der Stromrichtung bei jeder Lage von X und Mittelnahme der Brückenablesungen.

Als Vergleichswiderstände bei der Messung der Widerstandsspulen wurden in Petroleumbad eingetauchte Normalwiderstände benutzt. Zu diesen wurden noch einige kleine Widerstände eines Präzisionsrheostats (von Wolff) zugeschaltet, die vorher mit Hilfe von Normalwiderständen kontrolliert waren. Als Ballast-Widerstände dienten einfache Stöpselrheostate.

Gewöhnlich wurden die Beobachtungen so ausgeführt, dass bei der ersten Lage des unbekannten Widerstandes X drei oder vier Beobachtungen gemacht wurden, in denen der Widerstand R_1 um einen kleinen Betrag geändert wurde. In der zweiten Lage wurde dann in entsprechender Weise verfahren.

Es wurden im ganzen elf Wechselstromwiderstände der oben erwähnten Konstruktion bei den Messungen der Leitfähigkeiten der Elektrolyten benutzt und vorher mit Hilfe der oben beschriebenen Methode bestimmt. Die Spulen wurden nummeriert. Als Beispiel sollen hier die Messungsresultate bei einer Spule N:o 1 ausführlich angegeben werden.

Widerstand N:o 1.

Erste Bestimmung.

$A = 120.1$ Ohm,
$B = 120$ Ohm.

(A und B sind die direkten Ablesungen der Stöpselrheostate)

1) In der ersten Lage:

Beobachtung	R_1	a
I	2069	891.37
II	2070	858.16
III	2071	823.82
IV	2072	787.53

2) In der zweiten Lage:

Beobachtung	R_2', (R_2'')	a', (a'')
V	2072	907.92
VI	2071	873.93
VII	2070	838.50
VIII	2069	804.26

R_1 bedeutet die Grösse des Vergleichswiderstandes in der ersten Lage, R'_2, (R''_2) in der zweiten, a ist der wahre Mittelwert der Ablesungen auf der Brücke in der ersten Lage, a', (a'') in der zweiten. Diese Beobachtungen wurden in der oben beschriebenen Weise zusammengestellt und daraus bei jeder Zusammenstellung der Wert von R_2 berechnet. Man bekommt in dieser Art folgende einander entsprechende Werte für R_1 und R_2 und den aus jeder Zusammenstellung berechneten Wert von X:

R_1	R_2	X
2069	2071.51	2070.25
2070	2070.58	2070.29
2071	2069.57	2070.28
2072	2068.51	2070.28

Der Wert 2068.51 ist extrapoliert.

Zweite Bestimmung.

$A = 100$ Ohm,

$B = 100$ Ohm.

1) In der ersten Lage:

Beobachtung	R_1	a
I	2069	872.51
II	2070	902.09
III	2071	931.52

2) In der zweiten Lage:

Beobachtung	R'_2, (R''_2)	a', (a'')
IV	2072	861.66
V	2071	890.62
VI	2070	920.37
VII	2069	949.08

Hieraus bekommt man ähnlich wie oben, folgende einander entsprechende Werte

R_1	R_2	X
2069	2071.63	2070.31
2070	2070.61	2070.30
2071	2069.61	2070.30

Man findet als Mittelwert

$$X = 2070.28(7) \text{ Ohm},$$
$$\varepsilon = \pm 0.015,$$
$$E = \pm 0.006,$$

wobei ε der mittlere Fehler der einzelnen Messung und E der des Mittelwertes ist

Es folgt jetzt eine Zusammenstellung der so bestimmten Widerstände X der Widerstandsspulen

Spule	X	$\pm\varepsilon$	$\pm E$
N:o 1	2070.28(7)	0.015	0.006
N:o 2	1976.16(5)	0.020	0.009
N:o 3	1995.74(4)	0.033	0.012
N:o 4	1951.88(5)	0.011	0.005
N:o 5	4953.20(0)	0.032	0.016
N:o 6	508.78(6)	0.003	0.001
N:o 7	1025.91(1)	0.068	0.026
N:o 8	11556.06(0)	—	—
N:o 9	100.068	0.001	0.000
N:o10	99.797	0.005	0.002

Der Widerstand N:o 8 wurde nur bei Messungen der Leitfähigkeit des reinen Wassers benutzt Für die Bestimmung dieses Widerstandes wurden deshalb nur drei Beobachtungen gemacht. Hierbei ergab sich

11556.06, 11556.04, 11556.08.

Ausserdem wurde bei Messung der Leitfähigkeit des reinen Wassers eine noch grössere Widerstandsspule benutzt. Der Widerstand dieser Spule wurde bestimmt zu 17625.1 Ohm.

Die Messkolben, Pipetten und der Thermometer.

Die Art der Herstellung der nötigen Lösungen soll in jedem einzelnen Falle näher beschrieben werden. Als allgemeines Prinzip mag hier nur erwähnt werden, dass hierbei zuerst eine konzentrierte Lösung und aus dieser mit Hilfe von Pipetten verdünnte Lösungen hergestellt wurden. Dabei wurden immer nur zwei Pipetten benutzt, die eine vom Inhalt von etwa 50 cm³, die zweite von etwa 5 cm³. Auf die Benutzung von kleineren Pipetten wurde hier, grösserer Genauigkeit wegen, verzichtet. Da die Messungen einen relativen Charakter haben, indem die Bestimmung der Widerstandskapazität des Elektrolytgefässes in ganz ähnlicher Weise wie die eigentlichen Messungen gemacht wurde, garantiert auch die Benutzung von immer denselben Pipetten eine grössere Genauigkeit. Die Benutzung der Pipette als Präzisionsinstrument hängt wesentlich davon ab, dass die Pipette immer genau in der gleichen Art behandelt wird. Sorgfältig wurde darauf geachtet, dass jede Spur von Fett in der Pipette vermieden wurde. Sowohl die Pipetten wie die Messkolben wurden deshalb sehr oft mit einer Lösung von Kaliumbichromat und konzentrierter Schwefelsäure gereinigt.

Bekanntlich gibt es zwei verschiedene Arten die Pipetten zu verwenden und dem entsprechend die Pipetten zu eichen. Man kann die Pipette auf Ausfluss oder auf Trockenfüllung (mit Nachspülen) eichen. Letzteres garantiert natürlich im allgemeinen eine grössere Genauigkeit. Im vorliegenden Falle ist dies jedoch zweifelhaft, weil hierbei andere und schwierig zu bestimmende Fehler auftreten können. Die Pipetten wurden deshalb auf Ausfluss geeicht und benutzt. Nur die äusserste Spitze der 5 cm³ Präzisionspipette wurde nachgespült. Die 50 cm³ Pipette war eine Präzisionspipette von besonderer Konstruktion mit einer Marke auch an der Spitze. Bei dieser

wurde deshalb die Spitze nicht nachgespült. Wenn eine Pipette immer eine konstante Benetzung haben soll, muss man bekanntlich darauf achten, dass die Ausflusszeit nicht zu klein[1] und stets ungefähr dieselbe ist. Dies wurde dadurch erreicht, dass der Hals mit dem Finger etwas verschlossen wurde. Bei der 5 cm³ Pipette wurde der letzte Tropfen derart ausgetrieben, dass der Hals mit dem Finger vollständig geschlossen und die Pipette mit der Hand erwärmt wurde. Wenn man eine Pipette in dieser Art behandelt, gibt sie eine sehr konstante Benetzung und ist sicher als Präzisionsinstrument verwendbar.

Die folgenden Tabellen geben die bei der Eichung erhaltenen Pipettenvolumina.

50 cm³ Präzisionspipette:

G	t	g	v
49.8966	17.70	49.9493	50.0155
49.8953	17.50	49.9482	50.0128
49.9002	17.50	49.9531	50.0178

Hierbei bezeichnet G das Gewicht des Wassers in der Pipette in Luft, g in Vakuum angegeben in gr, t die Temperatur, v den Pipetteninhalt. Als Mittelwert bekommt man

$$v = 50.0154 \text{ cm}^3.$$

5 cm³ Präzisionspipette:

G	t	g	v
5.0152	17.27	5.0205	5.0268
5.0153	17.60	5.0206	5.0270
10.0264	18.10	10.0370	5.0255
5.0138	18.20	5.0191	5.0262

Bei der dritten Beobachtung ist, wie aus der Tabelle hervorgeht, das Gewicht des doppelten Pipetteninhalts bestimmt. Bei der Mittelwertbildung ist deshalb dieser Beobachtung ein doppeltes Gewicht gegeben. Als Mittelwert erhält man hier

$$v = 5.0262 \text{ cm}^3.$$

Als Messkolben wurden käufliche, von der Reichsanstalt geeichte Präzisionsnormalkolben benutzt. Diese wurden geeicht. Dabei ergab sich:

Kolbe N:o 57 $v = 1000.04$ cm³
» » 56 $v = 1000.02$ »
» » 48 $v = 1000.09$ »
» » 39 $v = 500.159$ »
» » 35 $v = 500.015$ »

Für die Bestimmung der Temperatur des Thermostates wurde ein Thermometer benutzt auf welchem die Skala in 0.02 Grade geteilt war. Dieses Thermometer wurde geeicht durch Kom-

[1] Man vergleiche Ostwald-Luther: Physiko-Chemische Messungen, Leipzig, 1902.

paration mit einem Präzisionsthermometer aus Quarz, dessen Korrektionstabelle aus der Reichsanstalt stammte. Dabei ergab sich für den benutzten Thermometer folgende Korrektionstabelle:

$t°$	Korr.
0	+0.06
14	+0.07
15	+0.07
15.5	+0.07

Weiter ging die Skala des Vergleichsthermometers nicht. Als Korrektion des benutzten Thermometers bei 18° wurde durch Extrapolation +0.07 gefunden.

Bestimmung der Widerstandskapazität des Elektrolytgefässes.

Bei der Bestimmung der Widerstandskapazität muss eine Lösung von einem gut definierten Salze von einer Konzentration gewählt werden, deren Leitvermögen innerhalb des Gebietes, wo die eigentlichen Messungen des Leitvermögens zu machen sind, liegt. Als Normalflüssigkeit wurde hier deshalb eine Lösung von Chlorkalium gewählt. Die Erfahrung hat bestätigt, dass die Messungen von Kohlrausch und Maltby bei *KCl* ausserordentlich zuverlässig sind. Ausserdem haben neuere Messungen von Weiland [1] die Messungen von Kohlrausch und Maltby bei *KCl* sehr gut bestätigt. Als absolut richtig wurde hier das Leitvermögen von $1 \cdot 10^{-3}$ normal *KCl*:

$$\varkappa = 127.34 \cdot 10^{-6}$$

angenommen [2]. Um Anschluss an die Messungen von Kohlrausch und Maltby zu bekommen, wurden 7.4565 gr. *KCl* in Luft gewogen und zu 1000.02 cm³ Lösung bei 18° aufgelöst. Dadurch erhielt man eine 0.1 Normallösung (im Sinne von Kohlrausch. Weiter wurden in Luft 496.38 gr. reines Wasser gewogen. Hierzu wurden 5.0262 cm³ von der 0.1 Normallösung zugeführt. Dadurch bekam man eine Lösung von der erwünschten Konzentration d. h. $1 \cdot 10^{-3}$ normal. Diese Lösung wurde sowohl in dem Elektrolytgefässe wie in einer Flasche aus Quarz zubereitet. Aus der Flasche wurde dann mittels der kleinen Pipette dem Elektrolytgefässe Lösung zugeführt, um den Einfluss der Füllungshöhe auf die Widerstandskapazität zu finden.

Bei Benutzung einer Lösung von so kleiner Konzentration kann man von dem Leitvermögen des reinen Wassers gar nicht absehen. Durch die Messungen müssen also sowohl das Leitvermögen des reines Wassers wie die Widerstandskapazität bestimmt werden. Dies geschah mittels sukzessiver Approximationen. Als Ausgangswert für die Widerstandskapazität C wurde

$$C = 0.1$$

angenommen.

Es wurde zuerst das Leitvermögen des verwendeten reinen Wassers bestimmt. Dabei ergab sich:

Die wahre Ablesung auf der Brücke = 344.74.

Der Vergleichswiderstand R_1 = 43154.3 Ohm.

[1] Journ. Amer. Chem. Soc. 40, S. 138, 1918

[2] Um Anschluss an die, in der experimentellen Praxis eingeführten Bezeichnungen zu finden, wird die spezifische Leitfähigkeit hier mit $\varkappa$ statt mit λ bezeichnet und kurz das Leitvermögen genannt.

Der Widerstand der Zuleitungsdrähte γ zu dem Elektrolytgefäss war bei allen Beobachtungen = 0.1 Ohm und zu den Vergleichswiderständen 0.02 Ohm.

Daraus ergibt sich der Widerstand R_2 des Wassers = 98391 Ohm.

Aus der Gleichung

$$\varkappa = \frac{C}{R_2 - \gamma}$$

erhält man bei der Annahme $C = 0.1$ hier in erster Approximation als Leitvermögen des Wassers

$$\varkappa' = 1.02 \cdot 10^{-6}.$$

Durch Zuführung von 5.0262 cm³ der 0.1 Normallösung *KCl* wurde jetzt, wie oben beschrieben ist, die 0.001 Normallösung erhalten. Der Vergleichswiderstand war hier $R_1 = 708.68$ Ohm. Folgende Tabelle gibt die korrigierte Ablesungen a auf der Brücke bei verschiedener Füllungshöhe (Flüssigkeitsmenge f in dem Gefässe):

f	a
492.5	689.15
497.6	689.15
502.6	689.17
507.6	689.17
512.7	689.19
517.7	689.17
522.7	689.21

Die Versuche zeigten also, dass die Widerstandskapazität in dem vorliegenden Intervalle innerhalb der Beobachtungsfehlergrenze beinahe unabhängig von der Füllungshöhe war. Als Mittelwert bekommt man

$$a = 689.17.$$

Daraus ergibt sich der Widerstand R_2

$$R_2 = 808.25 \text{ Ohm.}$$

Benutzt man jetzt wieder die Gleichung $C = \varkappa (R_2 - \gamma)$ wobei $\varkappa = (127.34 + 1.02) \cdot 10^{-6} = 128.36 \cdot 10^{-6}$ findet man

$$C = 0.103734.$$

Dieser Wert wird als Ausgangswert für die zweite Approximation genommen und in ähnlicher Weise wie oben weiter verfahren. Als Schlusswert ergibt sich

$$C = 0.103763$$

Die Konstanz dieser Widerstandskapazität wurde während der Arbeit wiederholt kontrolliert.

Das reine Wasser. Berücksichtigung des Verdunstens.

Als Ausgangsmaterial wurde in grossen Bomben käufliches destilliertes Wasser benutzt. Das Leitvermögen desselben war $8 \cdot 10^{-6}$ bis $12 \cdot 10^{-6}$. Dieses Wasser wurde noch zwei Mal destilliert; das erste Mal mit einem kleinen Zusatz von Kaliumbichromat und Schwefelsäure;[1]

[1] Hulett: Zeitschr. f. Phys. Ch. 21, S. 297, 1896.

das zweite Mal wurde ein wenig Ätzkali zugesetzt. Bei der zweiten Destillation wurden nicht mehr als 270 cm^3 pro Stunde überdestilliert. Die Kühlröhre wurde aus Quarz hergestellt, der Tropfenempfänger aus Jenaglas N:o 59. Man erhielt in dieser Weise Wasser von einem Leitvermögen von etwa 1.10^{-6}. Zur Aufbewahrung das Wassers wurden Kolben aus Jenaglas benutzt, die vorher lange und gut ausgedämpft waren. Infolge der Löslichkeit des Glases verschlechterte sich jedoch mit der Zeit das Wasser in diesen Kolben. Zu meiner Verfügung stand auch eine Quarzflasche von 3 Liter Inhalt. Die Mündung wurde durch Überstülpen eines Glases von besonderer Konstruktion gedeckt. An dem inneren unteren Rande des Glases wurde ein ziemlich hoher konischer Glasring angeschmolzen und der so gebildete Zwischenraum teilweis mit gelöschtem Kalk gefüllt. In dieser Flasche liess sich das Wasser sehr gut aufbewahren. In der Tat verbesserte sich das Wasser. Bei Wasser von einem Leitvermögen von $0.9 \cdot 10^{-6}$ wurde nach etwa drei Wochen ein Leitvermögen von $0.5 \cdot 10^{-6}$ gefunden. Zweckmässig ist es jedoch nicht bei den Messungen so gutes Wasser zu benutzen, weil es sich bei der Berührung mit der Luft verschlechtert. Dagegen hat es sich gezeigt, dass Wasser von einem Leitvermögen von etwa 1.10^{-6} wenigstens während der Zeit, die die Messungen in Anspruch nahmen, sich nicht veränderte.

Es fragt sich noch, ob das Verdunsten des Wassers so stark war, dass man bei den Konzentrationsbestimmungen darauf hätte Rücksicht nehmen müssen. Zu diesem Zweck wurde die aus dem im Thermostate stehenden Widerstandsgefässe in 16 Stunden verdunstete Wassermenge bestimmt. Es ergab sich, dass diese Menge 0.20 gr. war. Die dadurch bedingte Korrektion während der Zeit der eigentlichen Messungen braucht man deshalb wohl kaum zu berücksichtigen.

3. Die Beobachtungen.

Es wurden nur solche Salze ausgewählt, die sehr genau definiert sind, wobei auf die Definition des Kristallwassergehalt besondere Rücksicht genommen wurde. Für die Messungen wurden Chlorkalium, Chlornatrium, Bariumnitrat und Kupfersulfat benutzt.[1]

KCl: Von Siegfried (Zofingen) wurde Kaliumchlorid »pro Analyse» mit Analysenschein geliefert. Das Salz wurde noch ein Mal umkristallisiert, in einem Quarztigel ausgeglüht und in einem Exsikkator über Chlorkalcium abgekühlt. Sp. Gew. = 1.98. Gewicht eines Mols in Luft = 74.525 gr.[1] Das Salz ist ein wenig hygroskopisch, doch nicht so stark, dass seine genaue Abwiegung Schwierigkeit erbietet.

NaCl: Das Salz »zur Analyse» von Kahlbaum wurde in ganz ähnlicher Weise behandelt wie *KCl*. Sp. Gew. = 2.17. Gewicht eines Mols in Luft = 58.436 gr.

$Ba(NO_3)_2$: Das Salz von Kahlbaum wurde zwei Mal umkristallisiert und in einen Exsikkator über Phosphorpentoxid gebracht. Das anhaftende Wasser wurde schliesslich noch durch Erwärmung auf etwa 200° entfernt. Sp. Gew. = 3.23. Gewicht eines Mols in Luft = 261.328 gr.

$CuSO_4$: Das Salz von Kahlbaum »zur Analyse» entspricht der Zusammensetzung $CuSO_4 + 5H_2O$. Das Salz wurde noch ein Mal über Eis umkristallisiert und in einer Nutsche sorgfältig

[1] Als Atomgewichte wurden hier benutzt: $H = 1.008$, $O = 16.00$, $N = 14.008$, $Na = 23.00$, $S = 32.07$, $Cl = 35.46$, $K = 39.10$, $Cu = 63.57$ $Ba = 137.37$.

ausgetrocknet. Um die Konstanz der Zusammensetzung zu prüfen, wurden zwei Portionen in ganz gleicher Weise hergestellt und ausgemessen. Die Messungen ergaben völlige Übereinstimmung. Sp. Gew. = 2.28. Gewicht eines Mols in Luft 249.615 gr. Die offen auf der Wage stehenden Kristalle zeigten keine Gewichtsveränderung.

$$\text{Mischung } \frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}.$$

Es wurden 29.810 gr. *KCl* und 5.8436 gr *NaCl* in Luft gewogen und zu 1000.04 cm³ (Kolbe N:o 57) Lösung gelöst. Das gab eine Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.5$ Mol pro Liter (Lösung N:o 1). Davon 2 Mal 50.0154 cm³ zu 1000.02 cm³ (Kolbe N:o 56) verdünnt, gab die Gesamtkonzentration 0.050015 Mol pro Liter (Lösung N:o 2). Von dieser Lösung wurden wieder 2 Mal 50.0154 cm³ zu 500.015 cm³ (Kolbe N:o 35) verdünnt. Diese Lösung hatte dann die Gesamtkonzentration 0.010006 Mol pro Liter (Lösung N:o 3).

Die bei den Messungen benutzten Gesamtkonzentrationen wurden aus diesen Lösungen hergestellt. Zu 485 cm³ Wasser wurde 5.0262 cm³ Lösung N:o 3 zugeführt. Das ergab die Gesamtkonzentration $\Gamma = 1.0263 \cdot 10^{-4}$ Mol pro Liter.

Dazu	5.0262	cm³	von	der	Lösung	N:o	3	gab	$\Gamma = 2.0317 \cdot 10^{-4}$ $\frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}$.
»	5.0262	»	»	»	»	»	»		$\Gamma = 3.0170 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	N:o	2	»	$\Gamma = 7.9640 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»		$\Gamma = 12.813 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»		$\Gamma = 17.568 \cdot 10^{-4}$ » .

Für die »Ionenstärke» gilt

$$I = \frac{1}{2} \Sigma \gamma_i z_i^2 = \frac{1}{2} [(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2) x'] \Gamma.$$

Hier ist

für KCl:	für $NaCl$:
$\nu_1 = 1, z_1 = 1,$	$\nu_1' = 1, z_1' = 1,$
$\nu_2 = 1, z_2 = 1,$	$\nu_2' = 1, z_2' = 1,$
$x = \frac{4}{5},$	$x' = \frac{1}{5}.$

Daraus berechnet man

$$I = \Gamma.$$

Man erhält also

$I = \Gamma$	$\sqrt{I}$
$1.0263.10^{-4}$	0.010131
2.0317 »	0.014254
3.0170 »	0.017369
7.9640 »	0.028221
12.813 »	0.035795
17.568 »	0.041914

Um jetzt die molare Leitfähigkeit zu bestimmen, wurde bei den oben angegeben Konzentrationen das Leitvermögen bestimmt. Es wurden drei Messungsreihen benutzt.

Messungsreihe I.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.903	1.0263	722.00	6948.96	7564.85	128.14	124.86
0.907	2.0317	783.48	3947.66	3960.24	252.94	124.49
0.911	3.0170	715.49	2460.69	2702.96	374.78	124.22
0.915	7.9640	770.22	1025.93	1046.85	982.04	123.31
0.919	12.813	729.65	608.78	655.69	1573.30	122.79
0.924	17.568	831.63	508.81	480.79	2148.93	122.32

Hier bedeuten $\varkappa'$ das Leitvermögen des Wassers, Γ ist die Gesamtkonzentration in Mol pro Liter, a ist die korrigierte Ablesung auf der Brücke, R_1 der bekannte Widerstand, R_2 der berechnete, Widerstand, γ der Widerstand des Zuleitungsdrahtes zu dem Elektrolytgefässe ($R_2 - \gamma$ gibt also den Widerstand der Lösung an), $\varkappa$ ist das Leitvermögen der Lösung (das Leitvermögen des Wassers ist abgezogen). Das Leitvermögen ist dabei aus der Gleichung $\varkappa = \frac{C}{R_2 - \gamma}$ berechnet. Schliesslich bedeutet Λ die molare Leitfähigkeit in der üblichen Definition: Das Leitvermögen durch molare Konzentration pro cm³, also

$$\Lambda = \frac{\varkappa}{\Gamma/_{1000}}.$$

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $0.8992 \cdot 10^{-6}$. Ausserdem wurde vorher das Leitvermögen des Wassers, aus dem die Lösungen N:o 1, N:o 2 und N:o 3 hergestellt sind, gemessen. Die verdünnten Lösungen wurden in einer Quarzflasche und in Flaschen aus Borosilikatglas aufbewahrt, um sicher zu sein, dass das Leitvermögen des Wassers in diesen Lösungen sich nicht veränderte. Gewöhnlich wurde bei diesen Lösungen nicht sehr gutes Wasser verwendet, ungefähr von dem Leitvermögen $1.4 \cdot 10^{-6}$. Dieser Umstand ist wie aus der Tabelle hervorgeht, berücksichtigt worden.

Das benutzte Borosilikatglas ähnelt in Bezug auf die Löslichkeit in Wasser sehr Pyrexglas und war deshalb für diesen Zweck sehr geignet.

Messungsreihe II.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
1.056	1.0263	729.92	6948.96	7482.75	128.10	124.82
1.059	2.0317	788.37	3947.66	3935.67	253.06	124.53
1.062	3.0170	718.59	2460.69	2691.31	374.94	124.28
1.065	7.9640	771.48	1025.93	1045.14	982.18	123.33
1.068	12.813	730.12	608.78	655.27	1572.85	122.75
1.071	17.568	832.09	508.81	480.53	2148.67	122.31

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war hier $1.0533 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
1.128	1.0263	733.80	6948.96	7443.22	128.12	124.84
1.130	2.0317	790.18	3947.66	3926.65	252.95	124.50
1.133	3.0170	719.70	2460.69	2687.15	374.82	124.24
1.136	7.9640	771.75	1025.93	1044.78	981.80	123.28
1.139	12.813	730.60	608.78	654.84	1573.18	122.78
1.141	17.568	832.19	508.81	480.47	2148.21	122.28

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $1.1250 \cdot 10^{-6}$.

Wir stellen jetzt die Resultate zusammen. Man erhält dann

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.0263	124.84
2.0317	124.51
3.0170	124.25
7.9640	123.31
12.813	122.77
17.568	122.31

Die Theorie gibt, dass bei grosser Verdünnung, Λ eine Funktion von der Quadratwurzel aus der Ionenstärke ist. Empirisch setzen wir, wie oben erwähnt ist

$$\Lambda = \Lambda_0 - A\sqrt{I} + BI.$$

Dabei bedeutet Λ_0 den Grenzwert bei unendlich grosser Verdünnung, A gibt die Neigung und B die Krümmung der Leitfähigkeitskurve an. Die Grössen Λ_0, A und B sollen aus den Beobachtungen bestimmt werden. Zu diesem Zwecke haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
124.84 &= \Lambda_0 - 0.010131\,A + 0.0001026\,B,\\
124.51 &= \Lambda_0 - 0.014254\,A + 0.0002032\,B,\\
124.25 &= \Lambda_0 - 0.017369\,A + 0.0003017\,B,\\
123.31 &= \Lambda_0 - 0.028221\,A + 0.0007964\,B,\\
122.77 &= \Lambda_0 - 0.035795\,A + 0.0012813\,B,\\
122.31 &= \Lambda_0 - 0.041914\,A + 0.0017568\,B.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man zuerst Nähererungswerte für Λ_0, A und B finden und die Fehlergleichungen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate lösen. Man findet dann

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 125.67,\\
A &= 83.14,\\
B &= 49.86.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind hierbei

$$\begin{aligned}
&0.00,\\
&+0.02,\\
&0.00,
\end{aligned}$$

$$-0.05,$$
$$+0.04,$$
$$+0.02.$$

Empirisch bekommt man also

$$\Lambda = 125.67 - 83.14\sqrt{I} + 49.86\, I.$$

Wir wollen jetzt dieses Resultat mit der Theorie vergleichen. Nach der Theorie soll

$$1 - f_\lambda = k\sqrt{I}$$

sein. Dabei ist

$$f_\lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda_0},$$
$$k = k_r + k_e.$$

Für k_r gilt die Gleichung

$$k_r = \alpha \frac{\left\{x\left(\frac{\nu_1 z_1^4}{L_1} + \frac{\nu_2 z_2^4}{L_2}\right) + x'\left(\frac{\nu_1' z_1'^4}{L_1'} + \frac{\nu_2' z_2'^4}{L_2'}\right)\right\}\left\{x(\nu_1 L_1^2 + \nu_2 L_2^2) + x'(\nu_1' L_1'^2 + \nu_2' L_2'^2)\right\}}{\left\{x(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2) + x'(\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2)\right\}\left\{x(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2) + x'(\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2')\right\}}.$$

Hier ist

für *KCl*:	für *NaCl*:
$x = \frac{4}{5}$,	$x' = \frac{1}{5}$,
$\nu_1 = 1,\ z_1 = 1,\ L_1 = 64.61,$	$\nu_1' = 1,\ z_1' = 1,\ L_1' = 43.49,$
$\nu_2 = 1,\ z_2 = 1,\ L_2 = 65.39,$	$\nu_2' = 1,\ z_2' = 1,\ L_2' = 65.39,$

Hieraus ergibt sich bei 18°

$$k_r = 0.392.$$

Wird der mittlere Ionenradius b eingeführt, bekommt man

$$k_r = 0.327\, b.$$

Hierbei ist b definiert durch die Gleichung

$$b = \frac{x(\nu_1 L_1 b_1 + \nu_2 L_2 b_2) + x'(\nu_1' L_1' b_1' + \nu_2' L_2' b_2')}{x(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2) + x'(\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2')}.$$

Bezeichnen wir jetzt den mittleren Ionenradius für *KCl* mit b_0 und für *NaCl* mit b_0', bekommen wir

$$b = \frac{x(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2) b_0 + x'(\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2') b_0'}{x(\nu_1 L_1 + \nu_2 L_2) + x'(\nu_1' L_1' + \nu_2' L_2')}.$$

Die Theorie gibt also als Grenzgesetz

$$1 - f_\lambda = (0.392 + 0.327\, b)\sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{83.14}{125.67}\sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 0.662\sqrt{I}.$$

[1] Die Beweglichkeiten L der Ionen stammen aus der Arbeit von DEBYE und HÜCKEL (Phys. Zeitsch. XXIV, 1923).

Für die Bestimmung des mittleren Ionenradius bekommen wir also durch Vergleichung der beiden Werte von $1 - f_\lambda$

$$0.662 = 0.392 + 0.327\, b.$$

Hieraus ergibt sich

$$b = 0.83 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Aus der Definitionsgleichung für b ergibt sich bei der Annahme, dass die mittleren Ionenradien für KCl und $NaCl$ in der Mischung dieselben Werte behalten, wie sie sich aus der Beobachtung der Leitfähigkeit der einzelnen Salzlösungen ergeben, das heisst

für KCl: für $NaCl$:

$$b_0 = 0.82 \text{ (Ångström-Einheiten)}, \quad b_0' = 0.90 \text{ (Ångström-Einheiten)},$$

der Wert für den mittleren Ionenradius für das Gemisch

$$b = 0.83 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Die beiden Werte für den mittleren Ionenradius stimmen also genau mit einander überein.

Es erübrigt noch den Grenzwert $\Lambda_0 = \lim_{l=0} \Lambda$ für das Gemisch mit dem theoretisch aus der Beobachtung von KCl und $NaCl$ gewonnenen zu vergleichen. Theoretisch soll man für das Gemisch haben

$$\Lambda_0 = x\, \Lambda_0^{(KCl)} + x'\, \Lambda_0^{(NaCl)}.$$

Aus den Beobachtungen von *Kohlrausch* folgen

$$\Lambda_0^{(KCl)} = 129.93, \quad \Lambda_0^{(NaCl)} = 108.89.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\Lambda_0 = 125.72.$$

Dieser Wert stimmt mit dem aus den Beobachtungen für das Gemisch gefundenen gut überein

Mischung $\frac{KCl}{NaCl} = \frac{1}{4}$.

Es wurden 7.4525 gr KCl und 23.3744 gr $NaCl$ in Luft gewogen. Die Lösungen wurden in ganz ähnlicher Weise hergestellt wie bei $\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}$. Sowohl die Konzentrationen wie die Ionenstärke waren bei beiden deshalb ganz gleich.

Messungsreihe I.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.969	1.0263	657.77	6948.96	8303.55	115.27	112.32
0.974	2.0317	709.81	3947.66	4371.27	227.62	112.03
0.979	3.0170	782.72	2977.81	2990.13	337.22	111.77
0.985	7.9640	694.27	1025.93	1161.38	883.60	110.95
0.990	12.813	764.45	708.68	728.56	1414.34	110.38
0.995	17.568	748.04	508.81	534.53	1931.25	109.93

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0{,}9635 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe II.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
1.046	1.0263	661.82	6948.96	8252.73	115.27	112.32
1.051	2.0317	712.06	3947.66	4357.46	227.62	112.03
1.055	3.0170	784.24	2977.81	2984.40	337.14	111.75
1.060	7.9640	694.81	1025.93	1160.48	883.54	110.94
1.064	12.813	765.13	708.68	727.91	1414.86	110.42
1.068	17.568	748.50	508.81	534.20	1931.75	109.96

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.0414 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
1.077	1.0263	663.65	6948.96	8229.98	115.31	112.36
1.082	2.0317	712.83	3947.66	4352.75	227.56	112.00
1.086	3.0170	785.16	2977.81	2980.90	337.23	111.78
1.091	7.9640	695.33	1025.92	1159.61	883.90	110.99
1.095	12.813	765.38	708.68	727.67	1415.01	110.43
1.099	17.568	748.78	508.81	534.00	1932.14	109.98

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.0730 \cdot 10^{-6}$.
Stellt man jetzt die Resultate zusammen, bekommt man

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.0263	112.33
2.0317	112.02
3.0170	111.77
7.9640	110.96
12.813	110.41
17.568	109.96

Für die Bestimmung der Grössen Λ_0, A und B hat man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
112.33 &= \Lambda_0 - 0.010131\, A + 0.0001026\, B,\\
112.02 &= \Lambda_0 - 0.014254\, A + 0.0002032\, B,\\
111.77 &= \Lambda_0 - 0.017369\, A + 0.0003017\, B,\\
110.96 &= \Lambda_0 - 0.028221\, A + 0.0007964\, B,\\
110.41 &= \Lambda_0 - 0.035795\, A + 0.0012813\, B,\\
109.96 &= \Lambda_0 - 0.041914\, A + 0.0017568\, B.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 113.13,\\
A &= 79.25,\\
B &= 83.96.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind dann

$$\begin{aligned} &-0.01,\\ &0.00,\\ &0.01,\\ &0.00,\\ &+0.01,\\ &0.00. \end{aligned}$$

Experimentell bekommt man also für $\frac{KCl}{NaCl} = \frac{1}{4}$:

$$\Lambda = 113.13 - 79.25\sqrt{I} + 83.96\, I.$$

Wir wollen wiederum dieses Resultat mit der Theorie vergleichen, wie wir es bei $\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}$ gemacht haben. Hier ist

$$\text{für } KCl\text{:} \quad x = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{für } NaCl\text{:} \quad x' = \tfrac{4}{5}.$$

Man berechnet wieder zuerst den Wert für k_r und bekommt

$$k_r = 0.412.$$

Wird der mittlere Ionenradius b für das Gemisch eingeführt, erhält man

$$k_r = 0.327\, b.$$

Die Theorie gibt also

$$1 - f_\lambda = (0.412 + 0.327\, b)\sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{79.25}{113.13}\sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 0.700\sqrt{I}.$$

Vergleicht man jetzt das experimentelle Resultat mit dem theoretischen, bekommt man

$$0.700 = 0.412 + 0.327\, b.$$

Daraus berechnet man den mittleren Ionenradius für das Gemisch

$$b = 0.88 \text{ (Ångström-Einheiten)}.$$

Berechnet man b aus der Definitionsgleichung für den mittleren Ionenradius für das Gemisch, findet man

$$b = 0.88 \text{ (Ångström-Einheiten)}.$$

Also wieder eine genaue Übereinstimmung.

Berechnet man noch den Grenzwert, der sich aus der Theorie für das Gemisch ergibt, bekommt man

$$\Lambda_0 = 113.10.$$

Dieser Wert stimmt gut überein mit dem, was sich aus den Messungen der Mischung ergab.

Mischung $\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$.

Es wurden 26.1328 gr $Ba(NO_3)_2$ und 22.3575 gr KCl in Luft gewogen und zu 1000.04 cm³ (Kolbe N:o 57) Lösung gelöst. Das gab eine Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.4$ Mol pro Liter (Lösung N:o 1). Davon 2 Mal 50.0154 ccm zu 1000.02 cmm verdünnt (Kolbe N:o 56) gab die Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.040012$ Mol pro Liter (Lösung N:o 2). Von dieser Lösung wurden wieder 2 Mal 50.0154 ccm zu 500.015 (Kolbe N:o 35) ccm verdünnt. Die so erhaltene Lösung hatte dann die Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.0080048$ Mol pro Liter (Lösung N:o 3).

Die bei der Messungen benutzten Konzentrationen wurden aus diesen Lösungen in folgender Weise hergestellt: Zu 485 ccm reinem Wasser wurde 5.0262 cm³ Lösung N:o 3 zugeführt. Das gibt die Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.82103 \cdot 10^{-4}$ Mol pro Liter.

Dazu	5.0262	ccm	von	der	Lösung	N:o 3	gab	$\Gamma = 1.6254 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}$.
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 2.4136 \cdot 10^{-4}$	» .
»	5.0262	»	»	»	»	N:o 2	»	$\Gamma = 6.3712 \cdot 10^{-4}$	» .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 10.251 \cdot 10^{-4}$	» .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 14.054 \cdot 10^{-4}$	» .

Die jeder Konzentration zugehörige Ionenstärke wird wieder aus der Gleichung

$$I = \frac{1}{2}[(\nu_1 z_1^2 + \nu_2 z_2^2)x + (\nu_1' z_1'^2 + \nu_2' z_2'^2)x']\,\Gamma$$

berechnet.

Hier ist

für $Ba(NO_3)_2$:	für KCl:
$\nu_1 = 1,\ z_1 = 2,$	$\nu_1' = 1,\ z_1' = 1,$
$\nu_2 = 2,\ z_2 = 1,$	$\nu_2' = 1,\ z_2' = 1,$
$x = \frac{1}{4},$	$x' = \frac{3}{4}.$

Hieraus ergibt sich

$$I = 1.5\,\Gamma.$$

Man erhält also folgende einander entsprechenden Werte von Γ, I und $\sqrt{I}$:

Γ	I	$\sqrt{I}$
$0.82103 \cdot 10^{-4}$	$1.2315 \cdot 10^{-4}$	0.011097
$1.6254 \cdot 10^{-4}$	$2.4381 \cdot 10^{-4}$	0.015614
$2.4136 \cdot 10^{-4}$	$3.6204 \cdot 10^{-4}$	0.019027
$6.3712 \cdot 10^{-4}$	$9.5568 \cdot 10^{-4}$	0.030914
$10.251 \cdot 10^{-4}$	$15.376 \cdot 10^{-4}$	0.039212
$14.054 \cdot 10^{-4}$	$21.082 \cdot 10^{-4}$	0.045915

Es wurden wieder drei vollständige Messungsreihen ähnlich wie vorher bei Mischungen aus KCl und $NaCl$ ausgeführt.

Messungsreihe I.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
0.926	0.82103	716.71	6948.96	7620.68	126.90	154.56
0.932	1.6254	776.14	3947.66	3997.69	250.24	153.95
0.938	2.4136	708.24	2460.69	2730.64	370.62	153.55
0.944	6.3712	759.82	1025.93	1061.18	968.47	152.01
0.949	10.251	717.90	608.78	666.43	1547.50	150.96
0.955	14.054	816.24	508.81	489.86	2108.66	150.04

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9201 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe II.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
0.957	0.82103	718.20	6948.96	7604.86	126.87	154.53
0.963	1.6254	777.14	3947.66	3992.55	250.26	153.96
0.969	2.4136	708.49	2460.69	2729.67	370.44	153.49
0.975	6.3712	760.04	1025.93	1060.88	968.34	151.99
0.980	10.251	718.12	608.78	666.23	1547.67	150.99
0.985	14.054	816.50	508.81	489.71	2109.02	150.06

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9517 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
1.075	0.82103	724.45	6948.96	7539.28	126.88	154.54
1.080	1.6254	780.34	3947.66	3976.17	250.16	153.90
1.085	2.4136	710.86	2460.69	2720.70	370.54	153.53
1.089	6.3712	760.89	1025.93	1059.69	968.29	151.97
1.094	10.251	718.40	608.78	665.97	1547.09	150.93
1.099	14.054	816.83	508.81	489.51	2108.73	150.04

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.0698 \cdot 10^{-6}$.

Stellt man die Resultate zusammen, bekommt man

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.2315	154.54
2.4381	153.94
3.6204	153.52
9.5568	151.99
15.376	150.96
21.082	150.05

Für die Bestimmung der Grössen Λ_0, A und B ergeben sich also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
154.54 &= \Lambda_0 - 0.011097\, A + 0.0001232\, B,\\
153.94 &= \Lambda_0 - 0.015614\, A + 0.0002438\, B,\\
153.52 &= \Lambda_0 - 0.019027\, A + 0.0003620\, B,\\
151.99 &= \Lambda_0 - 0.030914\, A + 0.0009557\, B,\\
150.96 &= \Lambda_0 - 0.039212\, A + 0.0015376\, B,\\
150\,05 &= \Lambda_0 - 0.045915\, A + 0.0021082\, B.
\end{aligned}$$

Hieraus finden wir

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 155.92,\\
A &= 126.87,\\
B &= -0.92.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind

$$\begin{aligned}
&+0.03,\\
&0.00,\\
&+0.01,\\
&0.00,\\
&+0.02,\\
&-0.04.
\end{aligned}$$

Experimentell bekommen wir also für $\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$:

$$\Lambda = 155.92 - 126.87\sqrt{I} - 0.92\, I.$$

Wir wollen jetzt dieses Resultat mit der Theorie vergleichen. Zunächst stehen wir also vor der Aufgabe die Grössen k_r und k_r zu bestimmen. Dieses geschieht in ganz ähnlicher Art wie vorher. Wir haben

für $Ba(NO_3)_2$:	für KCl:
$x = \frac{1}{4}$,	$x' = \frac{3}{4}$,
$r_1 = 1,\ z_1 = 2,\ L_1 = 110.24,$	$r_1' = 1,\ z_1' = 1,\ L_1' = 64.61,$
$r_2 = 2,\ z_1 = 1,\ L_2 = 61.83,$	$r_2' = 1,\ z_2' = 1,\ L_2' = 65.39.$

Man bekommt dann

$$k_r = 0.622.$$

Wenn wieder der mittlere Ionenradius b für das Gemisch eingeführt wird, finden wir

$$k_r = 0.327\ b.$$

Die Theorie gibt also

$$1 - f_\lambda = (0.622 + 0.327\, b)\ \sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{126.87}{155.92}\sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 0.814\sqrt{I}.$$

Vergleichen wir die beiden Werte auf $1 - f_\lambda$ mit einander, ernalten wir

$$0.814 = 0.622 + 0.327\, b.$$

Hieraus berechnet man den mittleren Ionenradius für das Gemisch. Man findet

$$b = 0.59 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Wir berechnen jetzt den mittleren Ionenradius für das Gemisch aus der Definitionsgleichung unter der Annahme, dass der mittlere Ionenradius für die einzelnen Salze bei der Mischung sich nicht verändert. Diese mittleren Ionenradien sind

bei $Ba(NO_3)_2$:	bei KCl:
$b_0 = 0.50$ (Ångström-Einheiten),	$b_0' = 0.82$ (Ångström-Einheiten).

Die Definitionsgleichung gibt

$$b = 0.70 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Die Übereinstimmung dieser beiden Werte von b ist recht befriedigend.

Wir berechnen noch den Grenzwert $\lim_{l=0} \Lambda = \Lambda_0$ für das Gemisch aus der Theorie von den Grenzwerten für $Ba(NO_3)_2$ und KCl. Diese Grenzwerte sind

für $Ba(NO_3)_2$:	für KCl:
$\Lambda_0^{Ba(NO_3)_2} = 233.90$,	$\Lambda_0^{KCl} = 129.93$.

Daraus ergibt sich für das Gemisch

$$\Lambda_0 = 155.92$$

in völliger Übereinstimmung mit dem experimentellen Ergebnis.

Mischung $\frac{\text{KCl}}{Ba(NO_3)_2} = \frac{1}{1}$.

Es wurden 26.1328 gr $Ba(NO_3)_2$ und 7.4525 gr KCl in Luft gewogen und zu 1000.04 ccm (Kolbe N:o 57) Lösung gelöst. Das gab die Gesamtkonzentrationen $\Gamma = 0.2$ Mol pro Liter (Lösung N:o 1). Davon wurden 3 Mal 50.0154 cm zu 1000.09 ccm (Kolbe N:o 48) verdünnt. Man erhielt dann die Gesamtkonzentration $\Gamma = 0.030007$ Mol pro Liter (Lösung N:o 2). Von dieser Lösung wurden wieder 2 Mal 50.0154 ccm zu 500.015 ccm (Kolbe N:o 35) verdünnt. Die so erhaltene Lösung hatte dann die Gesammtkonzentration 0.0060031 Mol pro Liter (Lösung N:o 3).

Die bei den Messungen benutzten Konzentrationen wurden aus diesen Lösungen in folgender Weise hergestellt. Zu 485 ccm reinem Wasser wurde 5.0262 cm³ Lösung N:o 3 zugeführt. Das gab die Gesamtkonzentration $0.61572 \cdot 10^{-4}$ Mol pro Liter.

Dazu	5.0262	ccm	von	der	Lösung	N:o 3	gab	$\Gamma = 1.2190 \cdot 10^{-4}$ $\frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}$.
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 1.8101 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	N:o 2	»	$\Gamma = 4.7779 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 7.6874 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 10.540 \cdot 10^{-4}$ » .

Die zu jeder Konzentration gehörige Ionenstärke wird aus der Gleichung für I berechnet. Hier ist

für $Ba(NO_3)_2$:	für KCl:
$\nu_1 = 1$, $z_1 = 2$,	$\nu_1' = 1$, $z_1' = 1$,
$\nu_2 = 2$, $z_2 = 1$,	$\nu_2' = 1$, $z_2' = 1$,
$x = \frac{1}{2}$,	$x' = \frac{1}{2}$.

Hieraus ergibt sich

$$I = 2\,\Gamma.$$

Man erhält also folgende einander entsprechende Werte von Γ, I und $\sqrt{I}$:

Γ	I	$\sqrt{I}$
$0.61572 \cdot 10^{-4}$	$1.2315 \cdot 10^{-4}$	0.011097
$1.2190 \cdot$ »	$2.4380 \cdot$ »	0.015614
$1.8101 \cdot$ »	$3.6202 \cdot$ »	0.019027
$4.7779 \cdot$ »	$9.5557 \cdot$ »	0.030912
$7.6874 \cdot$ »	$15.375 \cdot$ »	0.039211
$10.540 \cdot$ »	$21.080 \cdot$ »	0.045913

Es wurden wieder drei vollständige Messungsreihen ähnlich wie vorher ausgeführt.

Messungsreihe I.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
0.960	0.61572	727.28	7974.87	8618.64	110.79	179.91
0.965	1.2190	769.97	4456.43	4549.11	218.45	179.19
0.969	1.8101	750.65	2977.81	3117.95	323.09	178.51
0.974	4.7779	791.51	1225.80	1217.17	842.75	176.39
0.978	7.6874	727.16	708.68	765.93	1344.99	174.98
0.982	10.540	708.59	508.81	564.30	1829.01	173.55

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9551 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe II.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
1.067	0.61572	733.99	7974.87	8539.85	110.83	179.97
1.071	1.2190	773.49	4456.43	4528.45	218.43	179.18
1.075	1.8101	752.87	2977.81	3108.75	323.03	178.46
1.079	4.7779	792.55	1225.80	1215.57	842.81	176.40
1.083	7.6874	727.79	708.68	765.26	1345.08	174.99
1.087	10.540	709.07	508.81	563.91	1829.19	173.57

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.0628 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
1.096	0.61572	735.58	7974.87	8521.40	110.81	179.94
1.100	1.2190	774.70	4456.43	4521.33	218.50	179.23
1.104	1.8101	753.47	2977.81	3106.28	323.00	178.43
1.108	4.7779	792.53	1225.80	1215.62	842.50	176.34
1.111	7.6874	727.76	708.68	765.29	1344.45	174.92
1.115	10.540	709.39	508.81	563.66	1829.72	173.62

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.0921 \cdot 10^{-6}$.

Die Resultate werden jetzt zusammengestellt. Wir bekommen dann

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.2315	179.94
2.4380	179.20
3.6202	178.47
9.5557	176.38
15.375	174.96
21.080	173.58

Für die Bestimmung der Grössen Λ_0, A und B erhalten wir also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
179.94 &= \Lambda_0 - 0.011097\, A + 0.0001232\, B,\\
179.20 &= \Lambda_0 - 0.015614\, A + 0.0002438\, B,\\
178.47 &= \Lambda_0 - 0.019027\, A + 0.0003620\, B,\\
176.38 &= \Lambda_0 - 0.030912\, A + 0.0009556\, B,\\
174.96 &= \Lambda_0 - 0.039211\, A + 0.0015375\, B,\\
173.58 &= \Lambda_0 - 0.045913\, A + 0.0021080\, B.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 181.93,\\
A &= 178.95,\\
B &= -42.00.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind dann

$$\begin{aligned}
&0.00,\\
&+0.04,\\
&-0.04,\\
&+0.01,\\
&+0.09,\\
&-0.06.
\end{aligned}$$

Experimentell bekommen wir also

$$\Lambda = 181.93 - 178.95\sqrt{I} - 42.00\, I.$$

Wir wollen dieses Resultat wieder mit dem, was die Theorie ergibt vergleichen. Zu diesem Zweck berechnen wir zuerst k_r und k_v aus ihren Definitionsgleichungen. Hier haben wir

für $Ba(NO_3)_2$:	für KCl:
$x = \frac{1}{2}$,	$x' = \frac{1}{2}$,
$r_1 = 1$, $z_1 = 2$, $L_1 = 110.24$,	$r_1' = 1$, $z_1' = 1$, $L_1' = 64.61$,
$r_2 = 2$, $z_2 = 1$, $L_2 = 61.83$,	$r_2' = 1$, $z_2' = 1$, $L_2' = 65.39$.

Wir bekommen dann

$$k_r = 0.772.$$

Wenn wieder der mittlere Ionenradius für das Gemisch eingeführt wird, erhalten wir

$$k_v = 0.327\, b.$$

Die Theorie gibt also

$$1 - f_\lambda = (0.772 + 0.327\, b)\sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{178.95}{181.93} \sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 0.984 \sqrt{I}.$$

Vergleichen wir die beiden Werte von $1 - f_\lambda$ mit einander, finden wir die Gleichung

$$0.984 = 0.772 + 0.327\, b.$$

Diese Gleichung wird erfüllt für

$$b = 0.65 \text{ (Ångström-Einheiten)}.$$

Wird für das Gemisch der mittlere Ionenradius aus der Definitionsgleichung unter derselben Annahme wie vorher berechnet, bekommen wir

$$b = 0.61 \text{ (Ångström-Einheiten)}.$$

Die Übereinstimmung dieser beiden Werte ist gut.

Wir wollen noch den Grenzwert $\lim_{I=0} \lambda$ aus der Theorie von den Grenzwerten für $Ba(NO_3)_2$ und KCl berechnen. Wir finden dann

$$\lambda_0 = 181.91,$$

was gut mit dem Werte übereinstimmt, der sich aus unseren Beobachtungen ergibt

$$\text{Mischung } \frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{3}{1}.$$

Es wurden 22.3575 gr KCl und 24.9615 gr $CuSO_4 + 5\, HO_2$ in Luft gewogen und zu 1000.04 ccm (Kolbe N:o 57) Lösung gelöst. Das gab eine Gesamtkonzentration $I = 0.4$ Mol pro Liter (Lösung N:o 1). Davon wurden 2 Mal 50.0154 ccm genommen und zu 1000,02 ccm (Kolbe N:o 56) verdünnt. Das gab eine Gesamtkonzentration $I = 0.040012$ Mol pro Liter (Lösung N:o 2). Von dieser Lösung wurden wieder 2 Mal 50.0154 ccm zu 509.015 ccm (Kolbe N:o 35) verdünnt. Man erhielt dann eine Lösung von der Gesamtkonzentration $I = 0.0080048$ Mol pro Liter (Lösung N:o 3).

Die bei den Messungen benutzten Lösungen wurden aus diesen Lösungen in folgender Weise hergestellt. Zu 485 ccm Wasser wurde 5.0262 ccm Lösung N:o 3 zugeführt. Die erhaltene Lösung hatte dann eine Gesamtkonzentration $I = 0.82103 \cdot 10^{-4}$ Mol pro Liter.

Dazu	5.0262	ccm	von	der	Lösung	N:o 3	gab	$I = 1.6254 \cdot 10^{-4}$ $\frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}$.
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$I = 2.4136 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	N:o 2	»	$I = 6.3712 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0622	»	»	»	»	»	»	$I = 10.251 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$I = 14.054 \cdot 10^{-4}$ » .

Die zu jeder Konzentration gehörige Ionenstärke wird aus der Definitionsgleichung für I berechnet. Die dazu erforderlichen Konstanten sind

für $CuSO_4$:	für KCl:
$\nu_1 = 1,\ z_1 = 2,$	$\nu_1' = 1,\ \nu_2' = 1,$
$\nu_2 = 1,\ z_2 = 2,$	$z_1' = 1,\ z_2' = 1,$
$x = \frac{1}{4},$	$x' = \frac{3}{4}$

Man bekommt dann

$$I = 1\frac{3}{4}\Gamma.$$

Wir finden dann folgende einander entsprechende Werte von Γ, I und Γ/I:

Γ	I	Γ/I
$0.82103 \cdot 10^{-4}$	$1.4368 \cdot 10^{-4}$	0.011987
1.6254 · »	2.8445 · »	0.016866
2.4136 · »	4.2238 · »	0.020552
6.3712 · »	11.150 · »	0.033390
10.251 · »	17.939 · »	0.042354
14.054 · »	24.595 · »	0.049594

Es wurden folgende Messungsreihen benutzt:

Messungsreihe I.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.918	0.82103	705.94	6948.96	7736.94	124.93	152.16
0.923	1.6254	760.86	3947.66	4077.97	245.22	150.86
0.928	2.4136	691.66	2460.69	2796.10	361.82	149.91
0.933	6.3712	733.72	1025.93	1098.93	934.89	146.74
0.938	10.251	687.51	608.78	695.90	1481.69	144.55
0.942	14.054	777.27	508.81	514.43	2007.62	142.85

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9132 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe II.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.951	0.82103	707.48	6948.96	7720.10	124.90	152.14
0.955	1.6254	762.19	3947.66	4070.86	245.34	150.94
0.960	2.4136	692.52	2460.69	2792.63	361.96	149.96
0.965	6.3712	734.14	1025.93	1098.30	935.11	146.78
0.969	10.251	687.82	608.78	695.57	1482.07	144.58
0.974	14.054	777.19	508.81	514.48	2007.11	142.81

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9462 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$\varkappa' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.970	0.82103	708.50	6948.96	7708.98	124.90	152.12
0.975	1.6254	762.58	3947.66	4068.88	245.28	150.90
0.979	2.4136	692.70	2460.69	2791.90	361.87	149.93
0.984	6.3712	734.04	1025.93	1098.45	934.79	146.73
0.988	10.251	687.65	608.78	695.75	1481.49	144.53
0.992	14.054	776.97	508.81	514.62	2006.36	142.75

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9663 \cdot 10^{-6}$.

Die Resultate werden jetzt in folgender Tabelle zusammengestellt:

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.4368	152.14
2.8445	150.90
4.2238	149.93
11.150	146.75
17.939	144.55
24.595	142.80

Für die Bestimmung der Grössen Λ_0, A und B bekommen wir also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
152.14 &= \Lambda_0 - 0.011987\, A + 0.0001437\, B,\\
150.90 &= \Lambda_0 - 0.016866\, A + 0.0002845\, B,\\
149.93 &= \Lambda_0 - 0.020552\, A + 0.0004224\, B,\\
146.75 &= \Lambda_0 - 0.033390\, A + 0.0011150\, B,\\
144.55 &= \Lambda_0 - 0.042354\, A + 0.0017939\, B,\\
142.80 &= \Lambda_0 - 0.049594\, A + 0.0024595\, B.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 155.21,\\
A &= 259.46,\\
B &= 184.00.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind dann

$$\begin{aligned}
&+0.01,\\
&+0.02,\\
&-0.03,\\
&-0.01,\\
&0.00,\\
&+0.01.
\end{aligned}$$

Experimentell haben wir also

$$\Lambda = 155.21 - 259.46\sqrt{I} + 184\, I.$$

Wir vergleichen dieses Resultat mit dem, was die Theorie bei sehr grosser Verdünnung gibt. Wir wollen zu diesem Zweck zuerst k_r und k_e aus ihren Definitionsgleichungen bestimmen. Wir haben ja

für $CuSO_4$:	für KCl:
$x = \frac{1}{4}$,	$x' = \frac{3}{4}$,
$r_1 = 1,\ z_1 = 2,\ L_1 = 95.56$,	$r_1 = 1,\ z_1 = 1,\ L_1' = 64.61$,
$r_2 = 1,\ z_2 = 2,\ L_2 = 135.24$,	$r_2 = 1,\ z_2 = 1,\ L_2' = 65.39$.

Wir bekommen dann

$$k_r = 0.877.$$

Wenn wieder der mittlere Ionenradius b für das Gemisch eingeführt wird, finden wir

$$k_e = 0.327\, b.$$

Die Theorie gibt also als Grenzgesetz (Gleichung der Tangente der Leitfähigkeitskurve, wenn $\sqrt{I}$ als Abszisse gewählt wird)

$$1 - f_\lambda = (0.877 + 0.327\, b)\sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{259.46}{155.21}\sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 1.672\sqrt{I}.$$

Vergleichen wir die beiden Werte von $1 - f_\lambda$, bekommen wir

$$1.672 = 0.877 + 0.327\, b.$$

Für den mittleren Ionenradius b für das Gemisch finden wir den Wert

$$b = 2.41 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Aus der Definitionsgleichung berechnen wir jetzt den mittleren Ionenradius für das Gemisch unter derselben Annahme wie vorher. Als mittlere Ionenradien für die einzelnen Elektrolyten findet man aus den Messungen von Kohlrausch

für $CuSO_4$:	für KCl:
$b_0 = 5.1$,	$b_0' = 0.82$ (Ångström-Einheiten).

Die Definitionsgleichung gibt für das Gemisch

$$b = 2.41 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Die Übereinstimmung der beiden Werte von b ist also gut.

Wir berechnen noch den Grenzwert $\lim_{I=0} \Lambda = \Lambda_0$ für die Mischung aus der Theorie von den Grenzwerten für $CuSO_4$ und KCl. Diese Grenzwerte[1] sind

für $CuSO_4$:	für KCl:
${\Lambda_0}^{CuSO_4} = 230.80$,	${\Lambda_0}^{KCl} = 129.93$.

Daraus ergibt sich für die Mischung

$$\Lambda_0 = 155.15.$$

Die Übereinstimmung mit dem aus den Beobachtungen über die Mischung erhaltenen Wert ist befriedigend

$$\text{Mischung } \frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}.$$

Es wurden in Luft 7.4525 gr KCl und 49.923 gr $CuSO_4 + 5\, H_2O$ gewogen und zu 1000.04 ccm (Kolbe N:o 57) Lösung gelöst. Das gab eine Gesamtkonzentration $I = 0.3$ Mol im Liter (Lösung N:o 1). Davon wurden 2 Mal 50.0154 ccm zu 1000.02 ccm (Kolbe N:o 56) verdünnt, und man bekam dann die Gesamtkonzentration 0.030009 Mol pro Liter (Lösung N:o 2). Von dieser Lösung wurden wieder 2 Mal 50.0154 ccm zu 500.015 ccm (Kolbe N:o 35) verdünnt. Diese Lösung hatte dann die Gesamtkonzentration 0.0060036 Mol pro Liter (Lösung N:o 3).

[1] Die Λ_0-Werte für die einzelnen Elektrolyten sind überall aus der Arbeit von Debye und Hückel: l. c. genommen.

Die bei den Messungen benutzten Gesamtkonzentrationen wurden aus diesen Lösungen hergestellt. Zu 485 ccm reinem Wasser wurde 5.0262 ccm Lösung N:o 3 zugeführt. Das gab die Gesamtkontration $\Gamma = 0.61577 \cdot 10^{-4}$ Mol pro Liter.

Dazu	5.0262	ccm	von	der	Lösung	N:o 3	gab	$\Gamma = 1.2191 \cdot 10^{-4}$ $\frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}$.
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 1.8102 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	N:o 2	»	$\Gamma = 4.7784 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	» .	»	»	»	»	»	$\Gamma = 7.6879 \cdot 10^{-4}$ » .
»	5.0262	»	»	»	»	»	»	$\Gamma = 10.541 \cdot 10^{-4}$ » .

Die zu jeder Konzentration gehörige Ionenstärke wird aus der Definitionsgleichung für I berechnet. Dabei ist

für $CuSO_4$:	für KCl:
$\nu_1 = 1,\ z_1 = 2,$	$\nu_1' = 1,\ z_1' = 1,$
$\nu_2 = 1,\ z_2 = 2,$	$\nu_2' = 1,\ z_2' = 1,$
$x = \frac{2}{3},$	$x' = \frac{1}{3}.$

Man findet

$$I = 3\,\Gamma.$$

Wir stellen jetzt die einander entsprechenden Werte von Γ, I und $\sqrt{I}$ zusammen.

Γ	I	$\sqrt{I}$
$0.61577 \cdot 10^{-4}$	$1.8473 \cdot 10^{-4}$	0.013592
$1.2191 \cdot 10^{-4}$	$3.6572 \cdot 10^{-4}$	0.019124
$1.8102 \cdot 10^{-4}$	$5.4306 \cdot 10^{-4}$	0.023304
$4.7784 \cdot 10^{-4}$	$14.335 \cdot 10^{-4}$	0.037862
$7.6879 \cdot 10^{-4}$	$23.064 \cdot 10^{-4}$	0.048025
$10.541 \cdot 10^{-4}$	$31.622 \cdot 10^{-4}$	0.056234

Es wurden folgende Messungsreihen gemacht.

Messungsreihe I.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$\varkappa \cdot 10^7$	Λ
0.976	0.61577	665.77	6948.96	8203.78	116.72	189.55
0.980	1.2191	709.59	3947.64	4372.63	227.49	186.62
0.985	1.8102	775.01	2977.81	3019.94	333.73	184.37
0.990	4.7784	791.87	1225.80	1216.61	842.98	176.42
0.995	7.6879	710.46	708.68	783.93	1313.67	170.87
1.000	10.541	680.11	508.81	587.93	1754.88	166.48

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 0.9705 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe II.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
1.117	0.61577	673.43	6948.96	8110.45	116.77	189.63
1.121	1.2191	713.97	3947.64	4345.80	227.56	186.67
1.125	1.8102	778.03	2977.81	3008.22	333.61	184.30
1.129	4.7784	792.99	1225.80	1214.90	842.81	176.38
1.132	7.6879	711.16	708.68	783.16	1313.61	170.87
1.136	10.541	680.90	508.81	587.25	1755.57	166.55

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.1134 \cdot 10^{-6}$.

Messungsreihe III.

$x' \cdot 10^6$	$\Gamma \cdot 10^4$	a	R_1	$R_2 - \gamma$	$x \cdot 10^7$	Λ
1.315	0.61577	683.82	6948.96	7987.22	116.76	189.62
1.317	1.2191	719.60	3947.64	4311.80	227.48	186.60
1.318	1.8102	782.40	2977.81	2991.41	333.68	184.33
1.320	4.7784	795.18	1225.80	1211.55	843.24	176.47
1.321	7.6879	712.31	708.68	781.90	1313.83	170.90
1.323	10.541	681.63	508.81	586.62	1755.58	166.55

Das Leitvermögen des benutzten Wassers war $= 1.3130 \cdot 10^{-6}$.

Die Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$I \cdot 10^4$	Λ (Mittelwert)
1.8473	189.60
3.6572	186.63
5.4306	184.33
14.335	176.42
23.064	170.88
31.622	166.53

Die Grössen Λ_0, A und B werden also aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
189.60 &= \Lambda_0 - 0.013592\, A + 0.0001847\, B,\\
186.63 &= \Lambda_0 - 0.019124\, A + 0.0003657\, B,\\
184.33 &= \Lambda_0 - 0.023304\, A + 0.0005431\, B,\\
176.42 &= \Lambda_0 - 0.037862\, A + 0.0014335\, B,\\
170.88 &= \Lambda_0 - 0.048025\, A + 0.0023064\, B,\\
166.53 &= \Lambda_0 - 0.056234\, A + 0.0031622\, B.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 197.17,\\
A &= 556.59,\\
B &= 205.40.
\end{aligned}$$

Die Restfehler sind dann

$$-0.05,$$
$$+0.02,$$
$$+0.02,$$
$$+0.03,$$
$$-0.03,$$
$$+0.01.$$

Experimentell bekommen wir also

$$\Lambda = 197.17 - 556.59\sqrt{I} + 205.40\, I.$$

Wir wollen jetzt dieses Resultat mit der Theorie vergleichen. Der Grössen k_r und k_e sind zu diesem Zweck aus ihren Definitionsgleichungen zu berechnen. Hier sind

für $Cu\,SO_4$:	für KCl:
$x = \frac{2}{3}$,	$x' = \frac{1}{3}$,
$\nu_1 = 1,\ z_1 = 2,\ L_1 = 95.56,$	$\nu_1' = 1,\ z_1' = 1,\ L_1' = 64.61,$
$\nu_2 = 1,\ z_2 = 2,\ L_2 = 135.24,$	$\nu_2' = 1,\ z_2' = 1,\ L_2' = 65.39.$

Wir finden dann

$$k_r = 1.368.$$

Wenn wieder der mittlere Ionenradius für das Gemisch eingeführt wird, bekommen wir wie früher

$$k_e = 0.327\, b.$$

Die Theorie gibt also bei grosser Verdünnung

$$1 - f_\lambda = (1.368 + 0.327\, b)\sqrt{I}.$$

Experimentell fanden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{556.59}{197.17}\sqrt{I},$$

oder

$$1 - f_\lambda = 2.823\sqrt{I}.$$

Vergleichen wir die beiden Werte von $1 - f_\lambda$, erhalten wir

$$2.823 = 1.368 + 0.327\, b.$$

Für den mittleren Ionenradius der Mischung gibt diese Gleichung den Wert

$$b = 4.45 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Aus der Definitionsgleichung für den mittleren Ionenradius der Mischung bekommen wir bei derselben Annahme wie vorher den Wert

$$b = 4.24 \text{ (Ångström-Einheiten).}$$

Die Übereinstimmung ist zwar nicht so gut wie vorher aber immerhin recht befriedigend.

Wird der Grenzwert $\lim_{I=0} \Lambda = \Lambda_0$ aus der Theorie mit Benutzung der Grenzwerte für $Cu\,SO_4$ und KCl berechnet, findet man

$$\Lambda_0 = 197.18,$$

was mit dem Wert, der sich aus den Messungen des Gemisches ergibt gut übereinstimmt.

4. Zusammenfassung.

1:o) Es ist eine Apparatur zusammengestellt, die Leitfähigkeitsmessungen auch bei sehr kleinen Konzentrationen mit befriedigender Genauigkeit gestattet.

2:o) Es ist eine elementare Methode entwickelt um mit Hilfe einer gewöhnlichen Wheatstoneschen Brücke Widerstandsmessungen von ziemlich grosser Genauigkeit zu machen ohne den Eichwert der Brücke ganz genau zu kennen.

Wir stellen jetzt die Resultate zusammen.

$$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}. \qquad \Lambda = 125.67 - 83.14\sqrt{I} + 49.86\, I$$

$$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{1}{4}. \qquad \Lambda = 113.13 - 79.25\sqrt{I} + 83.96\, I.$$

Elektrolyt	Λ_0	Λ_0'	A	B	$\frac{A}{\Lambda_0}$	k_r	b	b'
KCl	129.93	—	84.77	90.6	0.652	0.382	0.82	—
$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}$	125.67	125.72	83.14	49.9	0.662	0.392	0.83	0.83
$\frac{KaCl}{NaCl} = \frac{1}{4}$	113.13	113.10	79.25	84.0	0.700	0.412	0.88	0.88
$NaCl$	108.89	—	77.34	79.8	0.710	0.413	0.90	—

Dabei bedeutet Λ_0 den Grenzwert der molaren Leitfähigkeit wie er aus den Beobachtungen berechnet ist, Λ_0' wie derselbe nach der Mischungsregel (60) berechnet ist. Die Grössen b sind, die Ionenradien wie sie aus den Beobachtungen berechnet sind. b' wie sie aus der Definitionsgleichung (58) für den mittleren Ionenradius berechnet sind[1].

$$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}. \qquad \Lambda = 155.92 - 126.87\sqrt{I} - 0.9\, I.$$

$$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{1}{1}. \qquad \Lambda = 181.93 - 178.95\sqrt{I} - 42.0\, I.$$

Elektrolyt	Λ_0	Λ_0'	A	B	$\frac{A}{\Lambda_0}$	k_r	b	b'
KCl	129.93	—	84.77	90.6	0.652	0.382	0.82	—
$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$	155.92	155.92	126.87	−0.9	0.814	0.622	0.59	0.70
$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{1}{1}$	181.93	181.91	178.95	−42.0	0.984	0.772	0.65	0.61
$Ba(NO_3)_2$	233.90	—	262.23	−187.0	1.121	0.959	0.50	—

$$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{3}{1}. \qquad \Lambda = 155.21 - 259.46\sqrt{I} + 184.0\, I.$$

$$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}. \qquad \Lambda = 197.17 - 556.59\sqrt{I} + 205.4\, I.$$

[1] Die Werte von A, B, $\frac{A}{\Lambda_0}$, k_r und b für die einheitlichen Elektrolyten sind aus den Beobachtungen von Kohlrausch berechnet.

Elektrolyt	Λ_0	Λ_0'	A	B	$\frac{A}{\Lambda_0}$	k_r	b	b'
KCl	129.93	—	84.77	90.6	0.652	0.382	0.82	—
$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{3}{1}$	155.21	155.15	259.46	184.0	1.672	0.877	2.4	2.4
$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}$	197.17	197.18	556.59	205.4	2.823	1.368	4.45	4.24
$CuSO_4$	230.80	—	765.52	342.0	3.317	1.622	5.2	—

3:o) Aus den Tabellen geht hervor, dass die aus den Beobachtungen berechneten Werte für den Grenzwert Λ_0 bei Mischungen ausserordentlich gut mit der elementaren Mischungsregel (60) übereinstimmen.

Weiter sieht man sofort, dass die von dem Koeffizienten A bestimmte Neigung der Leitfähigkeitskurve (für $I = o$), mit steigendem relativem Gehalt von mehrwertigen Ionen steiler wird und zwar so, dass $\frac{A}{\Lambda_0}$ wächst. Dies deutet darauf hin, dass die Veränderung der molaren Leitfähigkeit mit der Konzentration durch Einführung von elektrischen Kräften erklärbar wäre, und wäre dies eine Stütze für den Ausgangspunkt der Theorie von DEBYE.

Mit Hilfe dieser Theorie ist eine Gleichung für die Leitfähigkeit bei Mischungen von zwei Elektrolyten aufgestellt und diese Gleichung wurde mit von mir gemachten Beobachtungen bei sehr kleinen Konzentrationen verglichen. Wenn man das aus den Beobachtungen für die Mischung gewonnene Resultat mit der Theorie vergleicht, ergibt sich eine Gleichung, aus der man einen »mittleren Ionenradius» für das Gemisch berechnen kann. Wenn man annimmt, dass bei der Mischung der mittlere Ionenradius eines Salzes sich nicht verändert, findet man einen zweiten Wert des mittleren Ionenradius' des Gemisches. Die gute Übereinstimmung dieser Werte spricht zu Gunsten der Theorie. Nur in einem Falle, bei $\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$, ist eine kleine Abweichung vorhanden.

Wir erinnern daran, dass die Ionenradien bei der Integration $\int p_{r,\varepsilon}\, d\sigma$ über die Ionenoberflächen eingeführt sind. Dabei sind die Ionen als starre Kugeln angesehen. Bekanntlich kommt man je nach der zu untersuchenden Eigenschaft der Ionen, zu etwas verschiedenen Werten des Ionenradius. Die jetzt erhaltenen Werte der Ionenradien entsprechen der Grössenordnung nach durchaus dem, was zu erwarten war. Dagegen lassen sich je nach der zu untersuchenden Eigenschaft, Verschiedenheiten erwarten. Bei Untersuchungen derselben Art ist es jedoch anzunehmen, dass der Begriff »Ionenradius» sich gleichartig verhalten wird. Es scheint deshalb der Schluss berechtigt, dass die früher erwähnte Übereinstimmung der Werte des Ionenradius' für das Gemisch zu Gunsten der Gleichung (52) spricht.

4:o) Wir werden jetzt unsere Aufmerksamkeit etwas genauer auf die charakteristischen Grösse $\frac{A}{\Lambda_0}$ richten. Theoretisch setzt sich diese aus zwei Teilen zusammen, von denen derjenige welcher von der Relaxationszeit herrührt, eine Form hat, die erwarten lässt, dass ein kleiner Zusatz von 2—1 wertigen oder 2—2-wertigen Salzen zu einem 1—1-wertigen Salze eine ziemlich starke Vergrösserung des $\frac{A}{\Lambda_0}$-Wertes für die Mischung zur Folge haben dürfte. Das geht in der Tat aus der Kurventafel N:o 1 für die $\frac{A}{\Lambda_0}$-Werte hervor, wo die Kurven nach oben konvex

sind. Diese nach oben konvexen $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurven scheinen mir zu Gunsten einer Gleichung von der Form (52) zu sprechen. Bei Mischungen von KCl und $NaCl$ dagegen ist die Kurve wenigstens sehr annähernd eine Gerade.

Wir wollen hier nebenbei einen Vergleich mit der Theorie von Ghosh machen. Wir fanden, dass diese Theorie als Grenzgesetz für alle 1—1 wertigen Salze angewandt

$$1 - f_\lambda = 0.374 \sqrt[3]{\Gamma}$$

gibt. Wenn wir aber empirisch den Ansatz machen

$$1 - f_\lambda = \frac{\Lambda}{\Lambda_0} \sqrt[3]{\Gamma},$$

und aus den Beobachtungen von Kohlrausch über KCl bei $\Gamma = 1 \cdot 10^{-4}$, $2 \cdot 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-3}$, $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ berechnen, ergibt sich $\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = 0.246$. Die Übereinstimmung ist kaum befriedigend. Weiter zeigen die genauen Berechnungen von Debye und Hückel [1], dass bei dem Werte für $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ bei verschiedenen 1—1-wertigen Salzen nicht ganz unwesentliche Verschiedenheiten auftreten. Man vergleiche übrigens in unserer Zusammenstellung die $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Werte für KCl und $NaCl$. Unsere Beobachtungen zeigen wie $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ bei Gemischen von KCl und $NaCl$ mit verändertem relativen Gehalt von KCl und $NaCl$ sich in sehr guter Übereinstimmung mit der Gleichung (52) ändert.

Wir fragen jetzt, was die Theorie von Ghosh bei einem Gemisch von einem 1—1-wertigen und einem 2—1-wertigen Salze (z. B. KCl und $BaCl_2$) geben würde. Indem wir für die Arbeit A einen in x und x' linearen Ansatz machen [2], finden wir

$$1 - f_\lambda = \frac{\varepsilon^2 N \sqrt[3]{2N}}{10 DRT} \frac{x + x' \cdot 2\sqrt{3}}{2x + 3x'} \sqrt[3]{\Gamma},$$

wo

$$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{x}{x'} \qquad (x + x' = 1).$$

Wenn man die empirische Kurve mit der theoretischen vergleicht, findet man

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{x + x' \cdot 2\sqrt{3}}{2 + x'} \frac{\varepsilon^2 N \sqrt[3]{2N}}{10 DRT}.$$

Wenn wir jetzt eine $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurve entwerfen würden so, wie unser Kurvendiagramm es zeigt, und den $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Punkt für KCl mit dem $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Punkte für $BaCl_2$ verbinden, ist die Neigung dieser Geraden

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\varepsilon^2 N \sqrt[3]{2N}}{10 DRT}.$$

Die Grösse $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ für das Gemisch steigt also, wie man leicht zeigen kann, für kleine Werte von x' schneller als diese Gerade, was in der Tat der Effekt ist, den wir beobachtet haben und welchen die Gleichung

[1] l. c.

[2] Allerdings hätte man vielleicht hier auch einen anderen Weg einschlagen und erst einen regulären Gittertypus suchen können, der mit der Formel $x \cdot KCl + x' \cdot BaCl_2$ vereinbar wäre, und dann die Arbeit berechnen, die nötig wäre um die Ionen dieses Gitters ins Unendliche zu bringen.

(52) beschreibt mit Berücksichtigung auch der individuellen Eigenschaften der Ionen die zu dem gleichen Haupttypus gehören. Die qualitative Übereinstimmung der Theorie von Ghosh mit der von Debye bei der Beschreibung des Ganges der Funktion $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ bei Gemischen von Salzen von verschiedenem Typus, sind wir geneigt darauf zurückzuführen, dass beide Theorien die Anomalie der starken Elektrolyten durch Wirkungen interionischer Kräfte von elektrischer Natur erklären wollen. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung scheint darauf zu deuten, dass es berechtigt ist, die Veränderung des Dissoziationsgrades mit der Konzentration auf solche Kräfte zurückzuführen.

Zusammenfassend können wir sagen: Bei den von uns untersuchten Mischungen ändert sich $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ mit x (und x') und zwar so, als ob zwei Effekte dabei vorhanden wären. Bei Mischungen von KCl und $NaCl$ sind die individuellen Eigenschaften der Ionen von demselben Typus wirksam. Die dadurch bedingte Änderung ist in x (und x') annähernd linear. Bei Mischungen von KCl und $Ba(NO_3)_2$ oder $CuSO_4$ treten hauptsächlich die Typus-Eigenschaften der Salze in ihrer Wirkung zu Tage. Die dadurch bedingte Änderung ist nicht mehr linear, sondern die $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurve hat (als Funktion von x' aufgezeichnet) eine nach oben konvexe Krümmung.

5:o) Es fragt sich noch, inwieweit die von uns gewonnenen Resultate mit einer elementaren arithmetischen Mischungsregel übereinstimmen. Für den Grenzwert bei $\lim I = 0$ ist die Übereinstimmung vom Λ_0-Wert der Mischung mit dem arithmetischen Mittelwert sehr gut, wie bei den Berechnungen der Beobachtungen auseinandergesetzt wurde. Für $\lim I = 0$ wären also alle Lösungen isohydrisch, was auch mit dem Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen übereinstimmt. Die Ermittelung des Λ_0-Wertes für ein Gemisch könnte also zu einer — allerdings sehr mühsamen — quantitativen Analyse für ein Gemisch aus bekannten Bestandteilen dienen. Aber wie verhält es sich, wenn nun die Konzentration wächst? In erster Linie wird der Gang der Λ-Kurve dann durch die Grösse A beschrieben. Bekanntlich folgen z. B. die Chloride, Bromide und Jodide ein und desselben Metalls oder die Salze naheverwandter Metalle mit derselben Säure sogar bei ziemlich grosser Konzentration der einfachen arithmetischen Mischungsregel.[1] Darauf beruht bekanntlich eine quantitative Analyse solcher Salze.[2] Was zeigen nun unsere Beobachtungen über KCl und $NaCl$? Gesetzt wir haben zwei Salze, deren Grenzgesetze in $\Lambda - \sqrt{I}$. Ebene gegeben sind durch die Gleichungen

$$\Lambda' = \Lambda_0' - A' \sqrt{I},$$
$$\Lambda'' = \Lambda_0'' - A'' \sqrt{I}.$$

Wenn wir ein Gemisch von diesen beiden Elektrolyten haben, definiert durch x und x', wobei x und x' dieselbe Bedeutung haben wie früher, muss man, falls die arithmetische Mischungsregel richtig ist, für das Gemisch

$$\Lambda = x\Lambda_0' + x'\Lambda_0'' - (xA' + x'A'')\sqrt{I}$$

haben; also für das Gemisch

$$A = xA' + x'A''$$

Wenn wir dies mit unseren früheren Resultaten vergleichen, haben wir

[1] Kohlrausch u. Holborn: Das Leitvermögen der Elektrolyte, 1916. S. 134.

[2] Erdmann: Chem. Ber. 1897. S. 1175.

	Λ	$x\Lambda' + x'\Lambda''$
$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}$	83.14	83.28
$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{1}{4}$	79.25	78.83

Die Übereinstimmung ist also sehr befriedigend.

Wie lassen sich nun die beiden Tatsachen, dass die elementare Mischungsregel sehr gut stimmt, und dass die $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurve für Gemische von KCl und $NaCl$ in grosser Annäherung eine Gerade ist, in Zusammenhang mit einander bringen? Für ein Gemisch von KCl und $NaCl$ haben wir dann

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda' x + \Lambda'' x'}{\Lambda_0' x + \Lambda_0'' x'}.$$

Setzt man hier

$$x' = 1 \quad x$$

und beachtet, dass für $NaCl$ und KCl die Werte von Λ und Λ_0 nicht weit verschieden von einander sind, kann man mit ziemlich grosser Annäherung diesen Wert durch

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda''}{\Lambda_0''}\left\{1 + x\left(\frac{\Lambda'}{\Lambda''} - \frac{\Lambda_0'}{\Lambda_0''}\right)\right\},$$

ersetzen. Aus der Tatsache, dass die einfache Mischungsregel für Gemische von $NaCl$ und KCl gilt, folgt dann, dass die $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurve für das Gemisch mit grosser Annäherung eine Gerade ist. Der oben angegebene Wert für $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ gilt streng genommen nur für kleine Werte von x. Für $x = 1$ sollte man eigentlich haben

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda'}{\Lambda_0'}.$$

Unsere Annäherung gibt aber hier einen Fehler von etwa 1 %. Das Resultat, dass die $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$-Kurve für Gemische von $NaCl$ und KCl annähernd eine Gerade ist, kann dadurch nicht geändert werden.

In diesem Zusammenhang geben wir auch die Resultate bei Mischungen von KCl und $Ba(NO_3)_2$, ebenso wie bei KCl und $CuSO_4$ an

	Λ	$x\Lambda' + x'\Lambda''$
$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$	126.87	129.14
$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{1}{1}$	178.95	173.50
$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{3}{1}$	259.45	254.96
$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}$	556.59	538.60

Es treten also Abweichungen hervor, die bei $\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}$ sogar nicht unwesentlich sind. Bestimmtes aber lässt sich darüber nicht sagen.

5:o) Als charakteristische Variabel tritt bei dem Leitfähigkeitsproblem nicht die Konzentration selber sondern eher die Ionenstärke I und zwar mit der Potenz $^1/_2$ auf. Schon Lewis und Rindall[1] haben als massgebend für das Verhalten einer Elektrolytlösung ihre Ionenstärke eingeführt.

Gewöhnlich wird wie bekannt als Interpolationsformel

[1] l. c. Man vergleiche auch: Otto Schärer: Theorie der Löslichkeitsbeeinflussung bei starken Elektrolyten. Leipzig 1924.

$$\Delta = \Delta_0 - A\, I^{\frac{1}{3}}$$

benutzt. Unsere Gleichung (52) aber fordert ein Gesetz mit der Potenz $^1/_2$. Schon KOHLRAUSCH fand, dass sich das Äquivalentleitvermögen von starken Salzen merklich vollkommen durch den Ausdruck

$$\Delta = \Delta_0 - A\sqrt{I}$$

darstellen lässt.[1] Diese Formel gilt nach KOHLRAUSCH zwischen Konzentrationen von einem Zehntausendstel bis zu einigen Tausendstel normal herab. In dem Kurvendiagramm N:o 2 haben wir die $\Delta_0 - \Delta$-Kurven für $\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$ mit I, $I^{\frac{1}{2}}$, $I^{\frac{1}{3}}$ als Abszissen dargestellt. Man sieht, dass die Kurve, wenn $\sqrt{I}$ als Abszisse gewählt wird und *nur* dann eine Gerade ist. Wir haben früher gesehen, dass wir für kleine Konzentrationen setzen können

$$\Delta = \Delta_0 - A\sqrt{I} + B\, I.$$

Die Grösse $\Delta = B\, I$ misst die Abweichung von einer Geraden. Aus unseren Beobachtungen und Rechnungen bekommen wir folgende Zusammenstellung:

$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{4}{1}$

$I \cdot 10^4$	Δ
1.026	0.01
2.032	0.01
3.017	0.02
7.964	0.04
12.813	0.06
17.568	0.09

$\frac{KCl}{NaCl} = \frac{1}{4}$

$I \cdot 10^4$	Δ
1.026	0.01
2.032	0.02
3.017	0.03
7.964	0.07
12.813	0.11
17.568	0.15

$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{3}{1}$

$I \cdot 10^4$	Δ
1.232	0.00
2.438	0.00
3.620	0.00
9.557	0.00
15.376	0.00
21.082	0.00

$\frac{KCl}{Ba(NO_3)_2} = \frac{1}{1}$

$I \cdot 10^4$	Δ
1.232	—0.01
2.438	—0.01
3.620	—0.02
9.556	—0.04
15.375	—0.06
21.080	—0.09

$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{3}{1}$

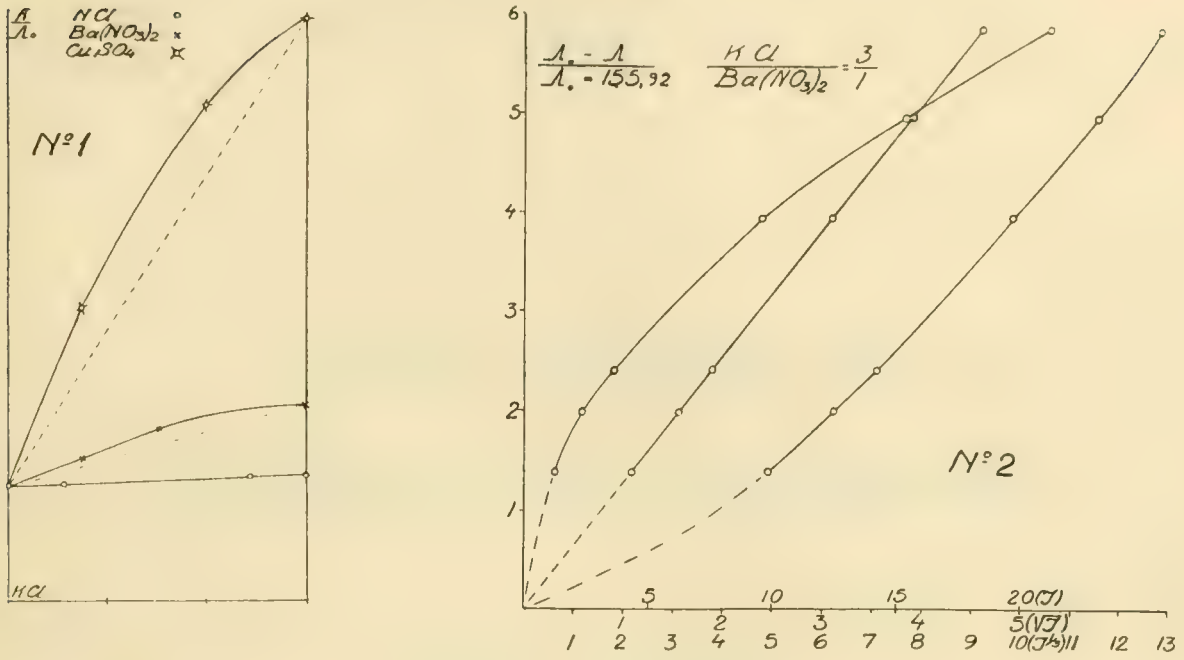
$I \cdot 10^4$	Δ
1.437	0.03
2.845	0.05
4.224	0.08
11.150	0.21
17.939	0.33
24.595	0.45

$\frac{KCl}{CuSO_4} = \frac{1}{2}$

$I \cdot 10^4$	Δ
1.847	0.04
3.657	0.08
5.431	0.11
14.335	0.29
23.064	0.47
31.622	0.65

Daraus geht hervor, dass die Beobachtungen für Gemische von KCl—$NaCl$ und KCl—$Ba(NO_3)_2$ in Δ—$\sqrt{I}$-Ebene ziemlich genau bis zu Konzentrationen von etwa $1 \cdot 10^{-3}$ durch eine Gerade darstellbar werden können. Bei Gemischen von KCl—$CuSO_4$ macht sich eine für die 2—2-wertigen Salze charakteristische Krümmung schon früher geltend.

[1] F. KOHLRAUSCH: Berl Akad. Ber. 1899, S. 665; 1900, S. 1002. Zeitschr. f. Elektrochem. 13, 1907, S. 333.



Das Kurvendiagramm N:o 1 ist in für derartige graphische Darstellungen üblicher Weise aufgezeichnet. Handelt es sich z. B. darum, den Verlauf von $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ für die Mischungen KCl und $Ba\,(NO_3)_2$ vom Typus $x \cdot KCl + x' \cdot Ba\,(NO_3)_2$ darzustellen, so ist zu beachten, dass $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ für reines KCl einem Punkt auf der vertikalen Linie links, für reines $Ba\,(NO_3)_2$ einem Punkt auf der vertikalen Linie rechts entspricht; für $\frac{KCl}{Ba\,(NO_3)_2} = \frac{x}{x'}$ entspricht $\frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ einem Punkt auf einer vertikalen Linie, welche den Abstand zwischen den beiden erstgenannten Linien im Verhältnis $\frac{x'}{x}$ teilt.

Das Kurvendiagramm N:o 2 veranschaulicht den Verlauf der Kurve $\Lambda_0 - \Lambda$ bei $\frac{KCl}{Ba\,(NO_3)_2} \cdot \frac{3}{1}$, wobei für Λ der von mir gefundene Wert 155.92 benutzt wurde. Als Abszissen wurden, wie bereits früher erwähnt, $I, \sqrt{I}$ und $\sqrt[3]{I}$ gewählt. Der extrapolierte Teil der Kurve ist punktiert gezeichnet. Die unterste, mit $\sqrt[3]{I}$ als Abszisse aufgezeichnete Kurve, weicht sogar innerhalb des bei der Untersuchung angewendeten Intervalls recht beträchtlich von einer geraden Linie ab. Die am stärksten gekrümmte Kurve wurde mit I als Abszisse gezeichnet.

Berichtigungen.

Seite 7, Zeile 3 von oben lies: $\bar{\lambda}$ statt σ.
„ „ „ 17 „ „ „ $\bar{\Lambda}$ „ Λ.
„ 25, „ 1 von unten lies: Systeme statt systeme.
„ 27, „ 1 von oben lies: $x' \nu_1' \Gamma$ statt $x \nu_1' \Gamma$ und $x' \nu_2' \Gamma$ statt $x \nu_2' \Gamma$.
„ 38 Gleichung (56) lies $L_1'^2$ und $L_2'^2$ statt $\bar{L}_1'^2$ und $\bar{L}_2'^2$.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 11

ÜBER

FACHWERKTRÄGER

MIT

VERÄNDERLICHEM KRAFTANGRIFF

VON

HARALD LUNELUND

(Vorgelegt von Hj. Tallqvist und Osc. V. Johansson am 23. März 1925).

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

Im folgenden werden die Spannungen in einem Fachwerkträger unter der Einwirkung verschiedener Kräfte untersucht. Dabei wird angenommen, dass ausser dem Eigengewicht und der Schneelast noch eine Kraft bzw. zwei Kräfte mit veränderlichen Angriffsrichtungen an geeigneten Knotenpunkten angreifen. Derartige Kräfte können z. B. dadurch entstehen, dass man in den betreffenden Punkten Rollen befestigt und mit deren Hilfe Lasten hebt.

Es werden hier nur »statisch bestimmte Fachwerke» behandelt, d. h. solche, bei denen sich die Auflagerdrücke mit Hilfe der Gesetze der elementaren Statik berechnen lassen. Ein solches Fachwerk lässt sich u. a. ohne Zuhilfenahme überzähliger Stäbe in Dreiecke auflösen.

Die Einzelstäbe werden hier überall als starr angenommen, d. h. ihre Formveränderung, ihr elastisches Verhalten nicht berücksichtigt.

Wir machen die Annahme, dass die Schwerlinien der in einem Knotenpunkte zusammentreffenden Stangen sich in *einem* Punkte schneiden. Die Stangen seien in dem betreffenden Punkte durch reibungslose Gelenke verbunden. Nur die Knotenpunkte seien Belastungspunkte, d. h. äussere Kräfte werden nur in den Knotenpunkten angreifend gedacht.

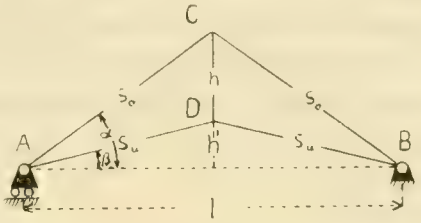


Fig. 1.

Problemstellung. Wir betrachten den in Fig. 1 dargestellten *Dachstuhl mit unverstrebtem Hauptsparren*, welcher in den Punkten A und B befestigt ist. (Die Art der Befestigung wird S. 4 näher angegeben.) Es gilt die in den Stäben AC, BC, AD, BD und CD unter verschiedenen Bedingungen auftretenden Spannungen zu berechnen.

Die Beanspruchung jedes Stabes rührt teils aus dem Eigengewicht, teils aus der zufälligen Belastung her. Zur zufälligen Belastung gehört u. a. das Gewicht einer auf der Dachfläche ruhenden Schneelast. Weil dieselbe sich über den ganzen Träger wie das Eigenwicht verteilt, können wir jedoch mit der Summe der beiden Gewichte rechnen. Wenn P_0 die aus dem Eigengewicht herrührende, P_1 die durch die grösste Schneelast allein bewirkte Belastung bedeutet, so ist die ganze, vertikal nach unten wirkende Beanspruchung $P = P_0 + P_1$. Dabei denken wir uns das ganze Eigengewicht an den Knotenpunkten des oberen Gurtes angreifend.

Wir werden nun folgende Fälle behandeln:

1) Ausser der Belastung P wirke in D eine Kraft Q, die zuerst lotrecht nach unten gerichtet sein möge.
2) Die Kraft Q möge sich um den Punkt D drehen und teils allein, teils gleichzeitig mit P wirken.

3) Im Punkt C greife eine um C drehbare Kraft Q' an. Es gilt die Stabspannungen bei alleiniger Wirkung von Q' sowie bei gleichzeitiger Wirkung sämtlicher oben angeführten Kräfte zu bestimmen.

1) Von der Belastung P entfällt auf jeden der Sparren AC und BC die Hälfte. An den Knotenpunkten A und B wirken somit nach abwärts die Lasten $\frac{1}{4}P$, nach aufwärts die Reaktionen $\frac{1}{2}P$. Der nach aufwärts gerichtete Überschuss beträgt $\frac{1}{4}P$. In C wirkt nach abwärts $\frac{1}{4}P+\frac{1}{4}P=\frac{1}{2}P$. Dagegen gibt die am Knotenpunkt D angreifende Kraft Q in A und B nur die nach oben gerichteten Reaktionen $\frac{1}{2}Q$. An den Knotenpunkten A und B ergeben sich somit nach aufwärts die resultierenden Kräfte $\frac{1}{4}P+\frac{1}{2}Q=\frac{1}{4}(P+2Q)$.

Wir wollen die in den Stangen AC (bzw. BC), AD (bzw. BD) und CD wirkenden Spannkräfte mit O bzw. mit U und V bezeichnen. Um dieselben zu berechnen, kann man sich z. B. der *Ritterschen Schnittmethode* bedienen. Führt man durch den Träger einen Schnitt, so soll der abgeschnittene Trägerteil im Gleichgewicht sein, wenn man an ihm die entsprechenden Stabkräfte anbringt. Man sucht, um statisch bestimmbare Verhältnisse zu erhalten, den Schnitt so zu führen, dass er höchstens drei Stäbe trifft. Um die Spannung in einem der Stäbe zu bestimmen, wählt man den Schnittpunkt der beiden anderen zum Momentenpunkt und erreicht dadurch, dass die Kräfte der beiden letzteren je ein Moment gleich Null geben. Die gesuchte Kraft tritt dann als einzige Unbekannte in der Momentengleichung auf.

Bestimmung von O und U. Wir legen den Schnitt mm (Fig. 2) und berechnen die Momente in bezug auf C und D als Drehpunkte. Es ergibt sich für den Punkt D

$$O\cdot p_o+\tfrac{1}{4}(P+2Q)\cdot\tfrac{1}{2}l=0,$$

woraus

$$O=-\frac{(P+2Q)l}{8p_o}.$$

Weil $p_o=h\cdot\cos\alpha=\frac{hl}{2s_o}$, so erhalten wir

$$O=-\frac{(P+2Q)s_o}{4h}. \tag{1}$$

O erleidet Druckspannung. Dieselbe ist direkt proportional $P+2Q$ und der Länge s_o des Obergurtes, aber umgekehrt proportional zu h.

Für AD ist C Drehpunkt, folglich lautet die Momentengleichung jetzt

$$-U\cdot p_u+\tfrac{1}{4}(P+2Q)\tfrac{1}{2}l=0,$$

so dass

$$U=\frac{(P+2Q)l}{8p_u}.$$

Da $p_u=h\cdot\cos\beta=\frac{hl}{2s_u}$, so ist

$$U=\frac{(P+2Q)s_u}{4h}. \tag{2}$$

U wird demnach auf Zug beansprucht. Die Spannung ist proportional zu $P+2Q$ und s_u und umgekehrt proportional zu h.

Bestimmung von V. Wir führen den Schnitt $m_1 m_1$ so wie Fig. 3 zeigt. Die Momentengleichung in bezug auf Punkt A lautet

$$(Q - V)\frac{1}{2}l + U \cdot p_{u_1} = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$V = Q - \frac{2 U p_{u_1}}{l},$$

woraus durch Einsetzen des Wertes von U sowie unter Berücksichtigung dass $p_{u_1} = l \sin \beta = \frac{h' l}{s_u}$

(3) $$V = \frac{Ph' + 2Q(h+h')}{2h}.$$

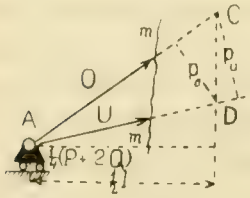


Fig. 2

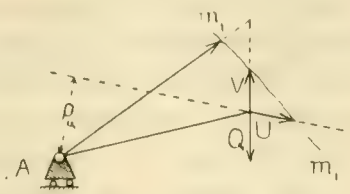


Fig. 3.

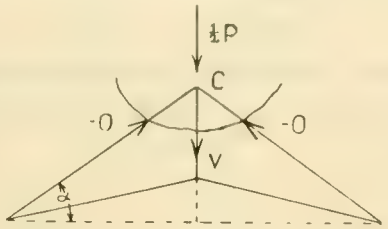


Fig. 4.

Wir kontrollieren die Richtigkeit der Spannungen durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen im Punkt C. Es soll sein (Fig. 4)

$$V + \frac{1}{2}P = 2(-O)\sin\alpha = 2(-O)\frac{h+h'}{s_u}.$$

Nun ist

$$V + \frac{1}{2}P = \frac{Ph' + 2Q(h+h')}{2h} + \frac{1}{2}P = \frac{(P+2Q)(h+h')}{2h}.$$

Setzt man den oben für O (1) gefundenen Wert ein, so ergibt sich

$$2(-O)\frac{h+h'}{s_o} = \frac{(P+2Q)(h+h')}{2h},$$

d. h. derselbe Ausdruck wie oben für $V + \frac{1}{2}P$.

Wie verändern sich die Spannungen, wenn die Stange ADB horizontal bzw. nach unten gebrochen ist?

Im ersten Fall ist $h' = 0$, im zweiten Fall negativ. Es ergibt sich

für $h' = 0$ $\qquad V = Q,$

$h' < 0,$

d. h. $h' = -h''$ $\qquad V = Q - (P + 2Q)\frac{h''}{h}.$

V bleibt somit eine Zugkraft, so lange $h'' < \frac{Qh}{P+2Q}$, wird Null für $h'' = \frac{Q}{P+2Q}h$ und geht für grössere Werte von h'' in eine Druckkraft über.

2) Wir wollen jetzt das Problem so *erweitern*, dass wir annehmen, die *Richtung der Kraft Q sei veränderlich.*

Es bilde die Richtung von Q mit der nach unten gerichteten Lotlinie den Winkel φ · φ wird bei Drehung gegen den Uhrzeiger positiv gerechnet. Die vertikale Komponente ist dann $Q \cdot \cos\varphi$, die horizontale $Q \cdot \sin\varphi$. Während vorher die Auflager nur lotrechten Druck auszuhalten hatten, tritt nun eine seitliche Beanspruchung hinzu. Für den Träger kommt demnach jetzt die Art der Unterstützung in Betracht. Bekanntlich ist ein an beiden Enden unterstützter Träger statisch bestimmt aufgelagert, wenn er an einem Ende ein *festes*, als *Walzen*-(Kipp-)*lager* ausgebil-

detes Auflager erhält, am anderen Ende dagegen ein *bewegliches Rollenlager*. Das erste Lager vermag ausser der Ausübung eines lotrechten Druckes einer seitlichen Verschiebung des Trägers einen wagerecht wirkenden Widerstand entgegenzusetzen, das andere nur einen vertikalen Druck auszuüben (wenn man von der Reibung absieht, welche in Wirklichkeit nicht unbedeutend sein kann).

Im folgenden wollen wir bei A (Fig. 1) ein Rollenlager, bei B ein Walzenlager annehmen. Das erstere sei jedoch zugleich so beschaffen, dass das Fachwerk nicht von A vertikal gehoben werden kann.

Die Wirkung einer zufälligen Belastung, z. B. eines Winddruckes kann bekanntlich mit Hilfe eines *Cremona*plans bestimmt werden, jedoch erhält man je nachdem der Wind von rechts oder links kommt verschiedene Auflagerdrücke. Wir werden hier den Winddruck erst später (S. 16) und nur im Vorbeigehen berücksichtigen und statt dessen erst die Wirkung der beweglichen Kraft Q untersuchen.

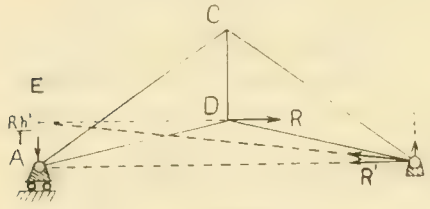


Fig. 5.

Der Einfluss der vertikalen Komponente $Q \cdot \cos \varphi$ ergibt sich leicht. Man hat nur in den Formeln (1), (2) und (3) Q durch $Q \cdot \cos \varphi$ zu ersetzen. Etwas umständlicher ist dagegen die Berechnung der durch die horizontale Komponente $Q \cdot \sin \varphi$ veranlassten Spannungen. Wir nennen $Q \cdot \sin \varphi$ vorläufig kurz R und untersuchen zuerst den Einfluss dieser Komponente.

a) Es wirkt nun in D (Fig. 5) nach rechts die Kraft R. Eine Reaktionskraft von derselben Grösse wirkt in B nach links. Dazu kommt aber noch ein Kräftepaar vertikaler Reaktionen von der Grösse $\frac{Rh'}{l}$, die in A abwärts, in B aufwärts wirken. Das Fachwerk darf nämlich in A nicht von der Unterlage gehoben werden, und wir nehmen wie gesagt darum an dass dies durch die Befestigungsart verhindert ist. Die Beweglichkeit in horizontaler Richtung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Die Reaktionen bestehen also im ganzen aus einer vertikalen in A $\left(\frac{Rh'}{l}\right)$ und einer schiefen in B. Die Richtung der letzteren erhält man indem man (Fig. 5) R in D bis zum Schnittpunkt E mit der durch A gehenden Vertikalen verlängert. BE gibt die Richtung der Reaktionskraft in B an.

Wenn $h' = 0$, sind die vertikalen Reaktionen $= 0$.

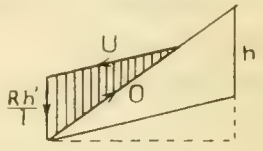


Fig. 6.

Um die Spannungen O u. s. w. zu bestimmen, könnte man wie vorher Schnitte legen oder die Summen der horizontalen bzw. der vertikalen Komponenten in A und B gleich Null setzen. Einfacher bestimmt man jedoch die Stabspannungen durch direkte Zerlegung. Wir bezeichnen die Spannung in AC mit O, in BC mit O', in AD mit U, in BD mit U' und in CD mit V. Dann ist (Fig. 6)

$$O : \frac{Rh'}{l} = s_o : h \quad \text{und} \quad -U : \frac{Rh'}{l} = s_u : h,$$

woraus

$$O = \frac{Rh's_o}{hl} \quad \text{bzw.} \quad U = -\frac{Rh's_u}{hl}. \tag{4}$$

Dass $O = O'$ ist, geht unmittelbar aus der Symmetrie (oder aus den Projektionsgleichungen) hervor. O und O' sind Zugspannungen, U Druckspannung.

Wir bestimmen jetzt V aus Fig 7. Es ist.

$$V = 2\,O \cdot \sin\alpha = 2\,\frac{Rh's_o}{hl}\cdot\frac{h+h'}{s_o} = 2\,\frac{Rh'(h+h')}{hl};$$

$$V = -\frac{2\,Rh'(h+h')}{hl}. \tag{5}$$

CD erleidet Druckspannung.

Die unbekannte U' kann mit Hilfe der Projektionsgleichungen im Punkt D bestimmt werden (Fig. 8). U' ist Druckspannung. Die Projektionsgleichung für die vertikalen Kräfte lautet

$$(U + U')\sin\beta = V.$$

Daraus ergibt sich

$$U + U' = -\frac{2\,Rh'(h+h')}{hl\cdot\sin\beta} = -\frac{2\,R(h+h')s_u}{hl}.$$

Weil

$$U = -\frac{Rh's_u}{hl},$$

so ist

$$U' = -\frac{R(2h+h')s_u}{hl}. \tag{6}$$

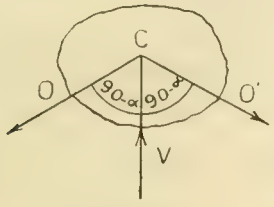


Fig. 7.

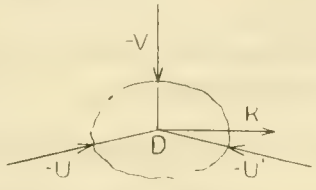


Fig. 8.

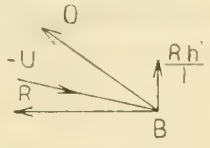


Fig. 9.

Wir wollen die Resultate mittels einer Projektionsgleichung in B (Fig. 9) z. B. in horizontaler Richtung kontrollieren.

Es soll sein

$$R + O'\cdot\cos\alpha + U'\cdot\cos\beta = 0.$$

Nun ist

$$O'\cdot\cos\alpha = \frac{Rh's_o}{hl}\cdot\frac{l}{2s_o} = \frac{Rh'}{2h},$$

$$U''\cdot\cos\beta = -\frac{R(2h+h')s_u}{hl}\cdot\frac{l}{2s_u} = -\frac{R(2h+h')}{2h}.$$

Die Summe der beiden letzten Terme ist somit gleich $-R$ wie es die Gleichgewichtsbedingung verlangt.

Graphisch bestimmt man die Stabspannungen durch Zeichnen des in Fig. 10 dargestellten Kräfteplanes. In dem der Zeichnung zu Grunde gelegten speziellen Falle verhält sich $l : h : h'$ $5 : 1.2 : 0.6$.

Wir gehen z. B. vom Punkt A aus, ziehen A_1B_1 lotrecht und gleich $\frac{Rh'}{l}$ und von B_1 eine Parallele zu DA. Diese schneidet die von A_1 parallel zu CA gezogene Linie im Punkt C_1. A_1C_1 und B_1C_1 stellen durch ihre Längen die Spannungen O und U dar.

Wir ziehen weiter durch A_1 eine Parallele zu BC. Diese schneidet die durch C_1 gehende Lotlinie im Punkte D_1. C_1D_1 gibt dann die Spannung V, A_1D_1 wieder O'.

Endlich ziehen wir durch B_1 eine Parallele zu BD. Diese schneidet die durch D_1 gehende Horizontale im Punkte E_1. B_1E_1 stellt die Grösse der Spannung U' dar.

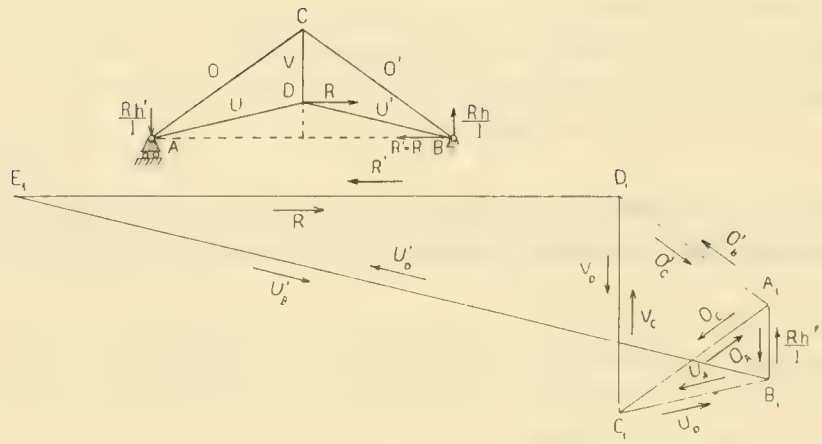


Fig. 10.

Wenn $l = 5$ m, $h = 1{,}2$ m, $h' = 0{,}6$ m und $R = 1000$ kg, so erhält man $\frac{Rh'}{l} = 120$ kg, $O = 308$ kg, $U = 257$ kg, $U' = 1286$ kg, $V = 360$ kg. Die Spannung U' ist demnach bei weitem die grösste.

b) Wir berücksichtigen jetzt auch *die vertikale Komponente* $Q \cdot \cos\varphi$, setzen aber vorläufig $P = 0$. In den Formeln (1), (2) und (3) schreiben wir statt Q den Wert $Q \cdot \cos\varphi$. Dann ergeben sich durch die vertikale Komponente allein folgende Spannungen:

$$O = \frac{Q \cdot \cos\varphi \cdot s_o}{2h}, \quad U = -\frac{Q \cdot \cos\varphi \cdot s_u}{2h}, \quad V = \frac{Q \cdot \cos\varphi \cdot (h+h')}{h}.$$

Die resultierenden, durch Q bedingten Spannungen sind also in diesem Falle, wenn zugleich für R sein Wert $Q \cdot \sin\varphi$ substituiert wird

$$\begin{aligned} O = O' &= -\frac{Qs_o}{2hl}(l \cdot \cos\varphi - 2h' \cdot \sin\varphi), \\ U &= \frac{Qs_u}{2hl}(l \cdot \cos\varphi - 2h' \cdot \sin\varphi), \\ U' &= \frac{Qs_u}{2hl}[l \cdot \cos\varphi - 2(2h + h')\sin\varphi], \\ V &= \frac{Q(h+h')}{hl}(l \cdot \cos\varphi - 2h' \cdot \sin\varphi). \end{aligned} \tag{7}$$

Wir untersuchen jetzt wann die unter Einwirkung von Q entstehenden Stabspannungen gleich Null werden, bzw. ihr Maximum und Minimum erreichen (im algebraischen Sinne genommen).

Es sei zuerst wie vorher $h' > 0$, d. h. ADB nach oben gebrochen. Dann ist

$O = O' = U = V = 0$, wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{2h'}$, d. h. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{ctg}\beta$ und entweder $\varphi = \varphi_1 = 90° - \beta$, d. h. Q hat die Richtung DB oder $\varphi = \varphi_2 = 270° - \beta$, d. h. Q hat die entgegengesetzte Richtung. Alle Stäbe sind dann spannungslos ausser DB, wo $U' = -Q$ bzw. $= Q$.

U' wird Null, wenn

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{2(2h + h')},$$

woraus

$$\sin\varphi = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(2h + h')^2}}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{2(2h + h')}{\sqrt{l^2 + 4(2h + h')^2}}$$

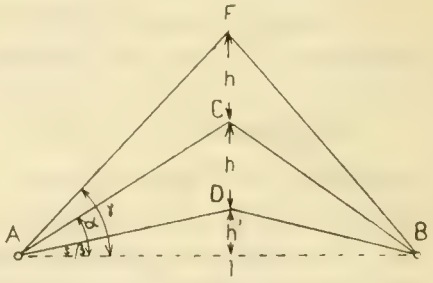


Fig. 11.

Der eine Drehungswinkel φ_1 liegt im ersten, der andere φ_2 im dritten Quadranten. Es ist um φ zu konstruieren nur nötig DC in Fig. 11 über den Punkt C um das Stück h zu verlängern und den Endpunkt F mit A oder B zu verbinden. Dann ist $< AFD = \varphi$.

Wir führen einen Winkel γ ein, sodass $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2(2h+h')}{l}$, woraus $\varphi_1 = 90° - \gamma$, $\varphi_2 = 270° - \gamma$. Bei Verwendung von β und γ können wir nunmehr die Spannungen (7) durch folgende Ausdrücke wiedergeben:

$$
\begin{aligned}
O = O' &= -Q\,\frac{s_o\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}\cos(\beta+\varphi),\\
U &= Q\,\frac{s_u\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}\cos(\beta+\varphi),\\
V &= Q\,\frac{(h+h')\sqrt{l^2+4h'^2}}{hl}\cos(\beta+\varphi),\\
U' &= Q\,\frac{s_u\sqrt{l^2+4(2h+h')^2}}{2hl}\cos(\gamma+\varphi).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Die Veränderungen der Spannungen mit φ gehen aus den Formeln (8) unmittelbar hervor. Die Extremwerte bei O, O', U und V ergeben sich aus $\varphi = 360° - \beta$ bzw. $\varphi = 180° - \beta$, bei U' aus $\varphi = 360° - \gamma$ bzw. $\varphi = 180° - \gamma$, welche Richtungen zu den die Nullspannungen gebenden Richtungen senkrecht sind.

Wir haben also folgende Zusammenstellung:

O bzw. O': $\varphi_3 = 180° - \beta$, Max. $= Q\cdot\frac{s_o\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}$, $\varphi_4 = 360° - \beta$, Min. $= -Q\cdot\frac{s_o\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}$,

U: $\varphi_3 = 180° - \beta$, Min. $= -Q\cdot\frac{s_u\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}$, $\varphi_4 = 360° - \beta$, Max. $= Q\cdot\frac{s_u\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}$,

V: $\varphi_3 = 180° - \beta$, Min. $= -Q\cdot\frac{(h+h')\sqrt{l^2+4h'^2}}{hl}$, $\varphi_4 = 360° - \beta$, Max. $= Q\cdot\frac{(h+h')\sqrt{l^2+4h'^2}}{hl}$,

U': $\varphi_3' = 180° - \gamma$, Min. $= -Q\cdot\frac{s_u\sqrt{l^2+4(2h+h')^2}}{2hl}$, $\varphi_4' = 360° - \gamma$, Max. $= Q\cdot\frac{s_u\sqrt{l^2+4(2h+h')^2}}{2hl}$.

Wenn Q sich von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360°$ (entgegengesetzt dem Uhrzeiger) dreht, so verändern die Spannungen ihren Charakter von Zug- bzw. Druckspannung. So ist z. B. nach einer Drehung von φ um 180° R entgegengesetzt gerichtet als in Fig. 10. Um Zahlenwerte zu erhalten, nehmen wir jetzt bestimmte Dimensionen des Fachwerkträgers an. Es sei (vgl. S. 7) $l = 5.0$ m, $h = 1{,}2$ m, $h' = 0.6$ m. Q möge einfachheitshalber gleich 1000 kg sein. Dann ist $s_o = \sqrt{\frac{l^2}{4}+(h+h')^2} = 3.081$ m, $s_u = \sqrt{\frac{l^2}{4}+h'^2} = 2.571$ m. Die den 0- und den Maximi- bzw. Minimiwerten von O, O', U und V entsprechenden Winkel φ sind dann

$$\varphi_1 = 76° 30' 15'',\ \varphi_2 = 256° 30' 15'',\ \varphi_3 = 166° 30' 15'',\ \varphi_4 = 346° 30' 15'',$$

wobei jedoch O und O' in bezug auf das Vorzeichen von den anderen Spannungen abweichen. Dabei ist

$$\alpha = 35° 45' 13'',\ \beta = 13° 29' 45''\ \text{ und }\ \gamma = 50° 11' 40''.$$

U' wird also Null für $\varphi_1' = 39° 48' 20''$ und $\varphi_2' = 219° 48' 20''$, Minimum für $\varphi_3' = 129° 48' 20''$ und Maximum für $\varphi_4' = 309° 48' 20''$.

Die grössten Spannungen erreichen bei den oben angenommenen Fachwerkdimensionen folgende Werte:

$$O_{\max.}\ \text{bzw.}\ O'_{\max.} = 1320\text{ kg},\ U_{\max.} = 1102\text{ kg},\ V_{\max.} = 1543\text{ kg}\ \text{ und }\ U'_{\max.} = 1673\text{ kg},$$

welche sich wie die Zahlen $1 : 0.8345 : 1.169 : 1.267$ verhalten.

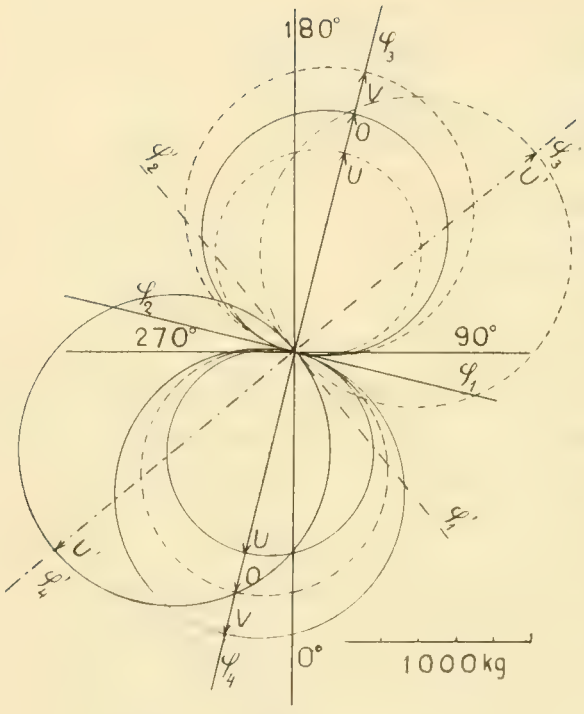


Fig. 12.

Die Spannungen können graphisch als Sehnen in denjenigen Kreisen dargestellt werden, welche mit den jeweiligen Maximiwerten als Durchmesser gezeichnet werden und die Nullrichtungen berühren. Entsprechend dem verschiedenen Zeichen bei Zug- und Druckspannung erhält man Doppelkreise, in denen die positiven (Zug-)Spannungen voll ausgezogen, die negativen punktiert sind. Beim passieren der Nulllinie tritt Zeichenwechsel ein.

In Fig. 12 sind in der angegebenen Weise die Veränderungen der Spannungen von O bzw. O', U, U' und V, durch »Spannungsrosen» dargestellt. Man sieht, dass für U' die 0 — bzw. Extremwerte bei verschiedenen Drehungswinkeln als bei den anderen Spannungen auftreten.

Wir gehen jetzt zu dem Fall über, dass $h' = 0$, d. h. die Punkte A, D und B in einer Geraden liegen.

$h' = 0$. Die Gleichungen (8) gehen nun, weil in diesem Falle auch $\beta = 0$, in folgende über

$$(9)\qquad \begin{aligned} O = O' &= -\frac{Q s_o \cos\varphi}{2h}, \quad U = \frac{Q s_u \cos\varphi}{2h}, \\ V &= Q \cdot \cos\varphi, \quad U' = \frac{Q s_u \sqrt{l^2 + 16 h^2}}{2hl} \cos(\gamma + \varphi) = \frac{Q s_u (l \cdot \cos\varphi - 4h \cdot \sin\varphi)}{2hl}. \end{aligned}$$

O, O', U und V sind Null wenn $\cos\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 90°$, bzw. $270°$.

U' ist gleich Null wenn $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{4h}$, wobei φ entweder im ersten oder im dritten Quadranten liegt.

Die Extremwerte ergeben sich aus den Gleichungen

$\cos\varphi = 1$, d. h. $\varphi = 0°$, 180° (die Spannungen O, O', U und V),

$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{4h}{l}$. Es liegt φ jetzt im zweiten oder im vierten Quadranten.

Die grössten Spannungen sind

$$O_{\max.} = O'_{\max.} = \frac{Q s_o}{2h}, \quad U_{\max.} = \frac{Q s_u}{2h}, \quad V_{\max.} = Q, \quad U'_{\max} = \frac{Q s_u \sqrt{l^2 + 16 h^2}}{2hl}.$$

s_o und s_u haben jetzt andere Werte als vorher. Es ist für $l = 5.0$ m, $h = 1.2$ m, $s_o = 2.773$ m und $s_u = 2.5$ m. Die grössten Spannungen O, bzw. O', U, V und U' erreichen jetzt die Maximiwerte 1155 kg, bzw. 1042, 1000 und 1444 kg. Der grösste absolute Wert von U' ergibt sich natürlich wenn die Kraft Q die Richtung DB oder die entgegengesetzte Richtung DA (Fig. 1) hat.

Die Spannungsrosen für den Fall $h' = 0$ sind in Fig. 13 dargestellt.

Tom. L.

Um den Fall $h' < 0$ zu untersuchen, hat man in (7) $h' = -h_1$ zu setzen, wobei $h_1 > 0$ ist, oder in (8) $\beta = -\beta_1$. Weil die Veränderungen in den Spannungen beim Passieren des Wertes $h' = 0$ nicht wesentlich sind, bietet dieser Fall kaum was neues. Die Discussion desselben kann deshalb hier unterlassen werden.

Um die Abhängigkeit der Spannungen von h' zu untersuchen, kann man auch in den Formeln (7) die Differentialquotienten in bezug auf h' bilden. Es ist

$$\frac{dO}{dh'} = \frac{dO'}{dh'} = \frac{Q s_o \cdot \sin\varphi}{hl}, \quad \frac{dU}{dh'} = \frac{dU'}{dh'} = -\frac{Q s_u \cdot \sin\varphi}{hl};$$

d. h. die Zu- bzw. Abnahme der Spannungen O O', U und U' mit h' ist bei unverändertem h proportional zu $\sin\varphi$. Die Abhängigkeit ist bei V etwas komplizierter, indem

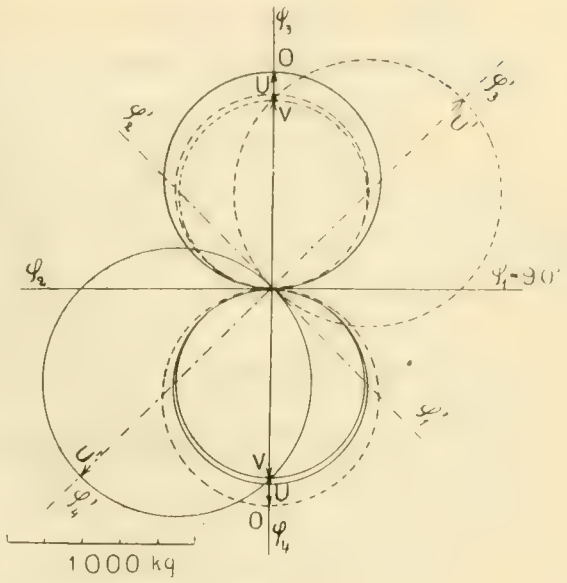


Fig. 13.

$$\frac{dV}{dh'} = \frac{Q}{hl}[l \cdot \cos\varphi - 2(h + 2h')\sin\varphi].$$

Jetzt wollen wir *auch die Belastung* P (vgl. S. 3) *berücksichtigen*. Die Gleichungen (7) geben dann

$$\begin{aligned}
O = O' &= -\frac{(P + 2Q\cdot\cos\varphi)s_o}{4h} + \frac{Q\cdot\sin\varphi\cdot h' s_o}{hl} = -\frac{s_o}{4hl}(Pl + 2Ql\cdot\cos\varphi - 4Qh'\cdot\sin\varphi),\\
U &= \frac{(P + 2Q\cdot\cos\varphi)s_u}{4h} - \frac{Q\cdot\sin\varphi\cdot h' s_u}{hl} = \frac{s_u}{4hl}(Pl + 2Ql\cdot\cos\varphi - 4Qh'\cdot\sin\varphi),\\
U' &= \frac{(P + 2Q\cdot\cos\varphi)s_u}{4h} - \frac{Q\cdot\sin\varphi\cdot(2h + h')s_u}{hl} = \frac{s_u}{4hl}[Pl + 2Ql\cdot\cos\varphi - 4Q(2h + h')\sin\varphi],\\
V &= \frac{Ph' + 2Q\cos\varphi\cdot(h + h')}{2h} - \frac{2Q\cdot\sin\varphi\cdot h'(h + h')}{hl} = \frac{1}{2hl}[Plh' + 2Q(h + h')(l\cdot\cos\varphi - 2h'\cdot\sin\varphi].
\end{aligned} \tag{10}$$

Benutzen wir statt dessen die Gleichungen (8), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
O = O' &= -\frac{Ps_o}{4h} - \frac{Qs_o\sqrt{l^2 + 4h'^2}}{2hl}\cos(\beta + \varphi),\\
U &= \frac{Ps_u}{4h} + \frac{Qs_u\sqrt{l^2 + 4h'^2}}{2hl}\cos(\beta + \varphi),\\
V &= \frac{Ph'}{2h} + \frac{Q(h + h')\sqrt{l^2 + 4h'^2}}{hl}\cos(\beta + \varphi),\\
U' &= \frac{Ps_u}{4h} + \frac{Qs_u\sqrt{l^2 + 4(2h + h')^2}}{2hl}\cos(\gamma + \varphi).
\end{aligned} \tag{11}$$

Die Gleichungen

$$\frac{4hlO}{s_o} = -Pl + (-2l\cos\varphi + 4h'\cdot\sin\varphi)Q = -Pl - 2Q\sqrt{l^2 + 4h'^2}\cos(\beta + \varphi)$$

zeigen unmittelbar, dass die Maxima- und Minima- jetzt bei genau denselben Drehungswinkeln wie früher erhalten werden, nur die Grösse der Spannungen wird durch das Glied $-Pl$ geändert.

Es fragt sich, welchen Einfluss die relative Grösse von P und Q auf die Spannungen hat.

Um die Frage zu beantworten, setzen wir einfachheitshalber zuerst $\varphi = 0$ (bzw. 180°) und betrachten das Verhältnis $\frac{Q}{P} = q$ als variabel. Dann ist

$$\frac{4hO}{s_o} = -P - 2Q,$$

worin Q sowohl >0 als <0 sein kann. O ist ein Maximum, wenn $\frac{Q}{P} = -\infty$, ein Minimum, wenn $\frac{P}{Q} = +\infty$ st. O ist gleich 0 für $P = -2Q$. Wenn man aber einen beliebigen Wert für φ annimmt, so ist $O = 0$, wenn

$$(-2l\cos\varphi + 4h' \cdot \sin\varphi)Q = Pl.$$

Wir führen einen Hilfswinkel φ_1 ein, sodass

$$\sin\varphi_1 = \frac{2h'}{\sqrt{l^2 + 4h'^2}}, \quad \cos\varphi_1 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h'^2}}, \quad \text{also} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2h'}{l}.$$

φ_1 liegt im ersten Quadranten und es ist $\varphi_1 = \beta$. Dabei wird

$$\frac{4hlO}{s_o} = -Pl - 2Q\sqrt{l^2 + 4h'^2} \cdot \cos(\beta + \varphi) = -P\{l + 2q\sqrt{l^2 + 4h'^2} \cdot \cos(\beta + \varphi)\} \cdot$$

$$O = 0 \quad \text{für} \quad q = \frac{-l}{2\sqrt{l^2 + 4h'^2} \cdot \cos(\beta + \varphi)} = -\frac{\cos\beta}{2\cos(\beta + \varphi)}.$$

Wenn $\cos(\beta + \varphi) > 0$, d. h. $-\frac{\pi}{2} - \beta < \varphi < \frac{\pi}{2} - \beta$, so nimmt O algebraisch mit wachsendem q ab und wächst, wenn q abnimmt. Wenn dagegen $\cos(\beta + \varphi) < 0$, d. h. $\frac{\pi}{2} - \beta < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \beta$, so kehrt sich die Sache um.

3) *Eine im Punkte C wirkende Kraft Q'.* Wir wollen das Problem noch so erweitern, dass wir annehmen, im Punkt C (Fig. 14) wirke eine Kraft Q', deren Richtung mit CD den veränderlichen Winkel ψ bildet. ψ wird bei Drehung gegen den Uhrzeiger positiv gerechnet. Wie vorher sei A ein so beschaffenes Rollenlager, dass das Fachwerk nicht von A vertikal gehoben werden kann, aber die Beweglichkeit in horizontaler Richtung ungestört ist. B ist ein festes, als Walzen (Kipp)-lager ausgebildetes Auflager.

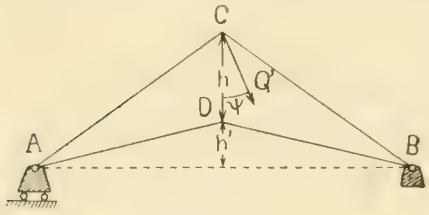


Fig. 14.

Um die Wirkung der vertikalen Komponente $Q' \cos\psi$ zu berücksichtigen, hat man in bezug auf O, O', U und U' in den Formeln (1), (2) und (3) nur Q durch $Q' \cos\psi$ zu ersetzen. In bezug auf V tritt dagegen eine Veränderung ein, da $Q' \cos\psi$ jetzt nicht im Punkt D sondern im Punkt C wirkt (vgl. S. 14). — Wir betrachten zuerst ausschliesslich den Einfluss der horizontalen Komponente $Q' \sin\psi$, die wir in Analogie zu S. 6 kurz mit R' bezeichnen wollen.

In C wirkt (Fig. 16 folgende Seite) also jetzt nach rechts die Kraft R' und in B nach links eine ebenso grosse Reaktionskraft. Ausserdem müssen wir, um ein Kräftesystem im Gleichgewicht zu bekommen noch ein Kräftepaar vertikaler Reaktionen annehmen, die jetzt die Grösse $\frac{R'(h+h')}{l}$ haben. Die entsprechende Reaktion in B ist aufwärts, in A abwärts gerichtet.

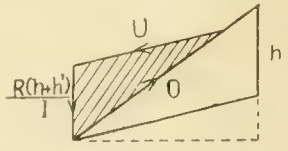


Fig. 15.

Die gesamten Reaktionen sind also in A eine vertikale Kraft von der Grösse $\frac{R'(h+h')}{l}$.

in B eine schiefe Kraft, deren Richtung man durch Verlängern von R' in C bis zum Schnittpunkt E mit der durch A gehenden Vertikalen ermittelt. Die Verbindungslinie BE zeigt dann die Richtung der schiefen Reaktionskraft in B an.

Wir nehmen zuerst an, dass $h' > 0$, d. h. ADB nach oben gebrochen ist.

Die Spannungen O und U entnehmen wir dem in Fig. 15 gezeichneten Kräfteplan. Es ist

$$O : \frac{R'(h+h')}{l} = s_o : h \quad \text{und} \quad -U : \frac{R'(h+h')}{l} = s_u : h,$$

woraus

$$O = \frac{R'(h+h')\,s_o}{hl} \quad \text{bzw.} \quad U = -\frac{R'(h+h')\,s_u}{hl}. \tag{12}$$

O ist Zugspannung, U dagegen Druckspannung. Aus Symmetriegründen ist jetzt $U = U''$, dagegen ist $O \neq O'$.

Die vertikale Spannung V kann mit Hilfe der Projektionsgleichungen im Punkt D bestimmt werden. Es ist nämlich

$$2U \cdot \sin\beta = V$$

und somit

$$V = -\frac{2R'(h+h')\,h'}{hl}. \tag{13}$$

Der Ausdruck für V gleicht somit dem früher für V erhaltenen (5), nur steht R' statt R.

O' wird jetzt durch eine Projektionsgleichung im Punkte C bestimmt. Es ist

$$(O + O')\sin\alpha = -V, \quad \text{d. h.}$$

$$O + O' = -\frac{V}{\sin\alpha} = \frac{2R'h's_o}{hl}.$$

Weil

$$O = \frac{R'(h+h')\,s_o}{hl},$$

so ergibt sich

$$O' = \frac{R'(h'-h)\,s_o}{hl}. \tag{14}$$

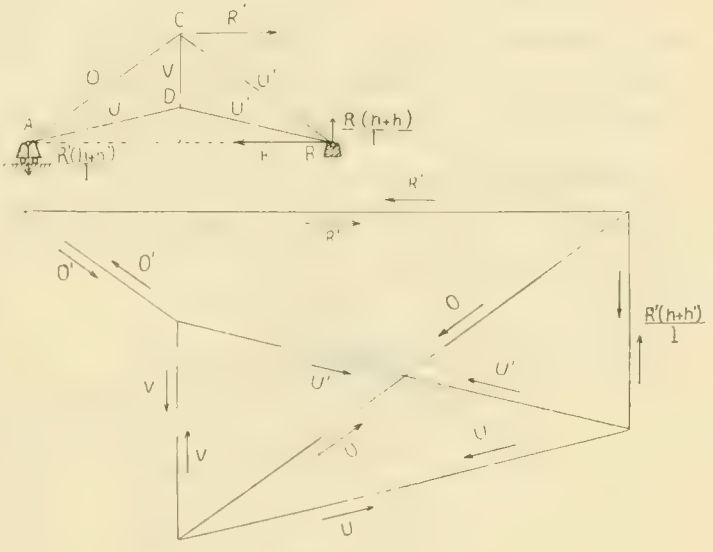


Fig. 16.

Wenn, wie in unserem speziellen Beispiel, $h\,(= 1.2\,\text{m}) > h'\,(= 0.6\,\text{m})$, so ist O' Druckspannung, während O Zugspannung ist. O' wird gleich 0, wenn $h = h'$ ist.

Wir kontrollieren die Richtigkeit obenstehender Resultate durch Aufstellen der Projektionsgleichung in B, z. B. in horizontaler Richtung. Es soll sein

$$R' + O' \cdot \cos\alpha + U' \cdot \cos\beta = 0.$$

Nun ist

$$O' \cdot \cos\alpha = \frac{R'(h'-h)}{2h},$$

$$U' \cdot \cos\beta = -\frac{R'(h+h')}{2h}.$$

Addiert man diese zwei Glieder, so erhält man die Summe $-R'$ wie es sein soll.

Der entsprechende Kräfteplan ist in Fig. 16 gezeichnet.

Bei Berücksichtigung sowohl der horizontalen wie der vertikalen Komponenten von Q' (wobei also vorläufig P gleich Null gesetzt wird) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
O &= -\frac{Q'\cos\psi\cdot s_o}{2h} + \frac{Q'\sin\psi\,(h+h')\,s_o}{hl} = -\frac{Q's_o}{2hl}\,[l\cdot\cos\psi - 2(h+h')\sin\psi],\\
U \text{ bzw. } U' &= \frac{Q'\cos\psi\cdot s_u}{2h} - \frac{Q'\sin\psi\,(h+h')\,s_u}{hl} = \frac{Q's_u}{2hl}\,[l\cdot\cos\psi - 2(h+h')\sin\psi],\\
V &= \frac{Q'\cos\psi\cdot h'}{h} - \frac{2\,Q'\sin\psi\,(h+h')h'}{hl} = \frac{Q'h'}{hl}\,[l\cdot\cos\psi - 2(h+h')\sin\psi],\\
O' &= -\frac{Q'\cos\psi\cdot s_o}{2h} + \frac{Q'\sin\psi\,(h'-h)\,s_o}{hl} = -\frac{Q's_o}{2hl}\,[l\cos\psi - 2(h'-h)\sin\psi].
\end{aligned}
\tag{15}
$$

O, U, U' und V sind alle gleich Null wenn $\operatorname{tg}\psi = \frac{l}{2(h+h')}$, d. h. $\operatorname{tg}\psi = \operatorname{ctg}\alpha$ und entweder $\psi = \psi_1 = 90^\circ - \alpha$, wobei Q' die Richtung CB hat oder $\psi = \psi_2 = 270^\circ - \alpha$, wenn Q' entgegengesetzt gerichtet ist. Dann sind alle Stäbe spannungslos ausser CB, wo $O = -Q'$ bzw. $= Q'$ ist. O' wird Null wenn $\operatorname{tg}\psi = \frac{l}{2(h'-h)} = -\frac{l}{2(h-h')}$. Wenn $h > h'$, liegt ψ im zweiten oder im vierten Quadranten, wenn $h < h'$ dagegen im ersten oder im dritten Quadranten. Für $h = h'$ ist $\psi = 90^\circ$. Um ψ zu konstruieren ist es nur nötig h' von h zu subtrahieren, der Rest ist die eine Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen andere Kathete gleich $\frac{1}{2}l$ ist.

Wir führen nun einen Winkel δ ein sodass $\operatorname{tg}\delta = \operatorname{ctg}(90^\circ - \psi) = \frac{2(h'-h)}{l}$. Es ist dann $\psi_1 = 90^\circ - \delta$, $\psi_2 = 270^\circ - \delta$. Mit Hilfe der Winkel α und δ können wir die Gleichungen (15) folgendermassen transformieren

$$
\begin{aligned}
O &= -\frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl}\cos(\alpha+\psi) = -\frac{Q's_o^2}{hl}\cos(\alpha+\psi),\\
U = U' &= \frac{Q's_u\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl}\cos(\alpha+\psi) = \frac{Q's_os_u}{hl}\cos(\alpha+\psi),\\
V &= \frac{Q'h'\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{hl}\cos(\alpha+\psi) = \frac{2Q'h's_o}{hl}\cos(\alpha+\psi),\\
O' &= -\frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h'-h)^2}}{2hl}\cos(\delta+\psi).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die Gleichungen (16) zeigen unmittelbar, dass O, U, U' und V ihre Extremwerte für $\psi = -\alpha$ oder $360^\circ - \alpha$ bzw. $\psi = 180^\circ - \alpha$ erreichen. Für O' sind die entsprechenden Drehungswinkel $\psi = -\delta$ oder $360^\circ - \delta$ und $\psi = 180^\circ - \delta$.

Wir stellen übersichtshalber die Drehungswinkel und die entsprechenden Extremwerte zusammen.

$$
\begin{aligned}
&\psi_3 = 180^\circ - \alpha\colon\ O_{\max.} = \frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl},\quad \psi_4 = 360^\circ - \alpha\colon\ O_{\min.} = -\frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl},\\
&\psi_3 = 180^\circ - \alpha\colon\ U_{\min.} \text{ bzw. } U'_{\min.} = -\frac{Q's_u\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl},\\
&\qquad\qquad \psi_4 = 360^\circ - \alpha\colon\ U_{\max.} \text{ bzw. } U'_{\max.} = \frac{Q's_u\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl},\\
&\psi_3 = 180^\circ - \alpha\colon\ V_{\min.} = -\frac{Q'h'\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{hl},\quad \psi_4 = 360^\circ - \alpha\colon\ V_{\max.} = \frac{Q'h'\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{hl},\\
&\psi_3 = 180^\circ - \delta\colon\ O'_{\max.} = \frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h'-h)^2}}{2hl},\quad \psi_4 = 360^\circ - \delta\colon\ O'_{\min.} = -\frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h'-h)^2}}{2hl}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Wenn $l = 5.0$ m, $h = 1.2$ m, $h' = 0.6$ m, so ist $\delta = -13° 29' 45''$ und die den Null-Spannungen entsprechenden Winkel ψ_1 und ψ_2 sowie die den Maximi- und Minimiwerten entsprechenden Drehungswinkel ψ_3 und ψ_4 haben folgende Werte:

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4
O, U, U' und V:	54° 14′ 47″	234° 14′ 47″	144° 14′ 47″	324° 14′ 47″
O':	103° 29′ 45″	283° 29′ 45″	193° 29′ 45″	13° 29′ 45″.

Die grössten Spannungen erreichen unter den oben angegebenen Bedingungen folgende Werte:

$$O_{\max.} = 1582,\ U_{\max.} \text{ bzw. } U'_{\max.} = 1320,\ V_{\max.} = 616,\ O'_{\max.} = 1320 \text{ kg}.$$

Das Verhältnis der Spannungen ist:

$$1 : 0.8345 : 0.3895 : 0.8345.$$

Fig. 17 stellt die zugehörige »Spannungsrose» dar.

Wenn $h' = 0$ ist, so geben die Formeln (15)

$$O = -\frac{Q' s_o}{2hl}(l \cdot \cos\psi - 2h \cdot \sin\psi),$$

$$U = U' = \frac{Q' s_u}{2hl}(l \cdot \cos\psi - 2h \cdot \sin\psi),$$

$$V = 0,$$

$$O' = -\frac{Q' s_o}{2hl}(l \cdot \cos\psi + 2h \cdot \sin\psi).$$

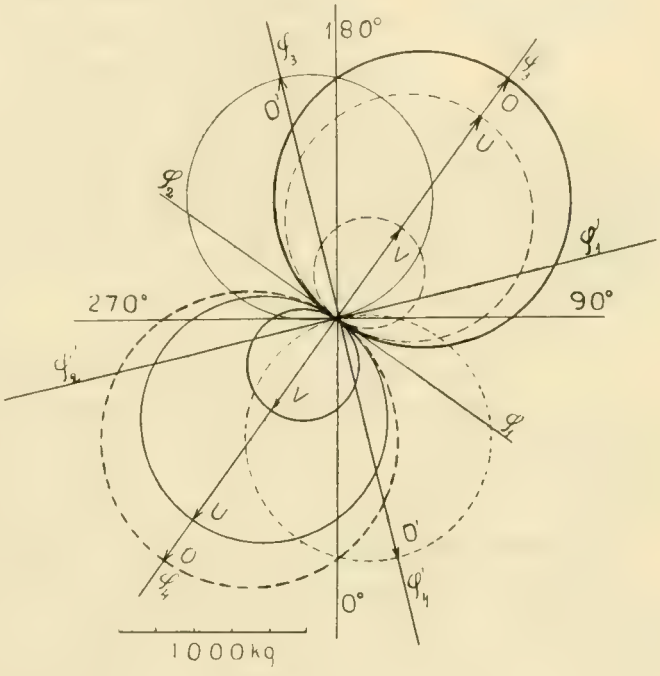


Fig. 17.

Die Verhältnisse gestalten sich somit jetzt (mit Ausnahme von V) weniger einfach als in dem S. 10 bei der beweglichen Belastung Q behandelten Falle. Der Betrag der Maximi-Spannungen für O, O', U, U' und V beträgt, wenn $h' = 0$, 1424, 1189, 555 und 1188 kg bzw.

Allgemeine Behandlung des Problems. Wir wollen zuletzt das Problem allgemein behandeln, indem wir sämtliche oben eingeführte Kräfte auf einmal angreifen lassen. Es wirken also zu gleicher Zeit:

1) Das Eigengewicht P_0 und die Schneelast P_1, deren Summe P beträgt;

2) im Punkt D eine drehbare Kraft von der Grösse Q und mit dem Drehwinkel φ;

3) im Punkt C eine drehbare Kraft von der Grösse Q' und mit dem Drehwinkel ψ.

φ und ψ werden wie früher von der nach unten gerichteten Lotlinie bei Drehung gegen den Uhrzeiger positiv gerechnet. Weil Q und Q' voneinander unabhängig sind, haben wir jetzt ein Problem mit zwei Variabeln φ und ψ.

Die resultierenden Spannungen ergeben sich durch Superposition sämtlicher Spannungen. Es ist demnach mit bezug auf Gl. (11) und (16).

$$
\begin{aligned}
O &= -\frac{Ps_o}{4h} - \frac{Qs_o\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}\cos(\beta+\varphi) - \frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl}\cos(\alpha+\psi),\\
U &= \frac{Ps_u}{4h} + \frac{Qs_u\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}\cos(\beta+\varphi) + \frac{Q's_u\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl}\cos(\alpha+\psi),\\
V &= \frac{Ph'}{2h} + \frac{Q(h+h')\sqrt{l^2+4h'^2}}{hl}\cos(\beta+\varphi) + \frac{Q'h'\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{hl}\cos(\alpha+\psi),\\
O' &= -\frac{Ps_o}{4h} - \frac{Qs_o\sqrt{l^2+4h'^2}}{2hl}\cos(\beta+\varphi) - \frac{Q's_o\sqrt{l^2+4(h'-h)^2}}{2hl}\cos(\delta+\psi),\\
U' &= \frac{Ps_u}{4h} + \frac{Qs_u\sqrt{l^2+4(2h+h')^2}}{2hl}\cos(\gamma+\varphi) + \frac{Q's_u\sqrt{l^2+4(h+h')^2}}{2hl}\cos(\alpha+\psi).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Wir wollen die obenstehenden Gleichungen kurz folgendermassen schreiben, wobei die Werte der Konstanten ohne weiteres klar sind:

$$
\begin{aligned}
O &= -A_1 - B_1\cdot\cos(\beta+\varphi) - C_1\cdot\cos(\alpha+\psi),\\
U &= A_2 + B_2\cdot\cos(\beta+\varphi) + C_2\cdot\cos(\alpha+\psi),\\
V &= A_3 + B_3\cdot\cos(\beta+\varphi) + C_3\cdot\cos(\alpha+\psi),\\
O' &= -A_1 - B_1\cdot\cos(\beta+\varphi) - C_1'\cdot\cos(\delta+\psi),\\
U' &= A_2 + B_2'\cdot\cos(\gamma+\varphi) + C_2\cdot\cos(\alpha+\psi).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Die Spannungen ergeben sich somit als Summen zweier Cosinus-Kurven, wobei die resultierende Kurve um die Werte A_1, A_2 und A_3 nach oben bzw. nach unten verschoben wird. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass die genannten Konstanten gleich Null sind. Wenn wie früher $l = 5.0$ m, $h = 1.2$ m, $h' = 0.6$ m, $Q = Q' = 1000$ kg ist, so haben die anderen Konstanten folgende Werte:

$B_1 = 1320$ kg,	$C_1 = 1582$ kg,	$B_1 + C_1 = 2902$ kg,	$\alpha = 35^\circ\,45'\,13''$,
$B_2 = 1102$ »,	$C_2 = 1320$ »,	$B_2 + C_2 = 2422$ »,	$\beta = 13^\circ\,29'\,45''$,
$B_3 = 1543$ »,	$C_3 = 616$ »,	$B_3 + C_3 = 2159$ »,	$\gamma = 50^\circ\,11'\,40''$,
$B_2' = 1673$ »,	$C_1' = 1320$ »,	$B_1 + C_1' = 2640$ »,	$\delta = 13^\circ\,29'\,45''$.
		$B_2' + C_2 = 2993$ ».	

In diesem speziellen Falle ist also $B_1 = C_2 = C_1' = 1320$ kg und $\beta = \delta$.

Die grössten Spannungen treten (absolut genommen) ein, wenn zugleich bzw.

$\beta+\varphi$	und	$\alpha+\psi = 0^\circ$	bzw.	180°,
$\beta+\varphi$	»	$\delta+\psi = 0^\circ$	»	180°,
$\gamma+\varphi$	»	$\alpha+\psi = 0^\circ$	»	180°,

Wenn $h' = 0$ ist, treten in den Formeln (18) gewisse Vereinfachungen ein. Weil die Sache teilweise schon S. 10 behandelt wurde, wollen wir darauf nicht weiter eingehen. —

In Wirklichkeit hat man bei den Fachwerken auch noch den Winddruck zu berücksichtigen. Wir schliessen diese Untersuchung mit einigen Bemerkungen über den *Winddruck* und die *Schneelast* ab.

Winddruck. Es sei die Geschwindigkeit des Windes v, die Richtung desselben schliesse mit der Dachfläche von der Grösse F den Winkel ω ein (Fig. 18). Man zerlegt v in $v\cdot\cos\omega$ parallel der Fläche und $v\cdot\sin\omega$ normal zu ihr. Zur Wirkung gelangt nur die Normalkomponente $v\cdot\sin\omega$.

Die Erfahrung lehrt, dass der Druck des Windes (N) auf eine zur Windrichtung senkrechte Fläche F proportional der Flächengrösse (in m²) und dem Quadrat der Geschwindigkeit $\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{sek}}\right)$ ist. Es ergibt sich somit

$$N = \lambda F (v \cdot \sin \Theta)^2 = \lambda F \cdot \sin^2 \Theta \cdot v^2.$$

Der Proportionalitätsfaktor λ hat etwa den Wert $\frac{1}{4}$.

Bezeichnet man $\lambda \cdot 1 \cdot v^2$, d. h. den Winddruck auf die zur Geschwindigkeit senkrechte Fläche von 1 m² mit w, so folgt

$$N = w \cdot F \cdot \sin^2 \Theta.$$

Man rechnet ja oft, dass die Windrichtung um etwa 10° gegen den Horizont geneigt ist. Bei der Horizontalneigung α der Dachfläche ist dann $\Theta = \alpha° + 10°$. Da man, um die Auflagerdrücke statisch bestimmbar zu machen annimmt, dass eines der Auflager (A in Fig. 1) ein Rollenlager: das andere B ein festes Auflager ist, so ist man genötigt mit zwei Windrichtungen zu rechnen, von links nach rechts und umgekehrt. —

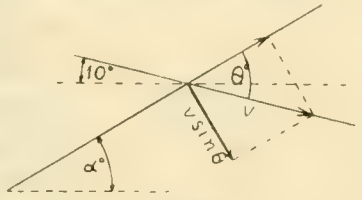


Fig. 18.

Die Belastung des Trägers hängt ja wesentlich von der Verteilung der Knotenpunkte ab. Gewöhnlich werden die Spannungen mit Hilfe von *Cremonaplänen* ermittelt. Will man sich jedoch des analytischen Weges bedienen, so kann man die Spannungen auch unter der Annahme berechnen, dass die Windrichtung sich ändert. In der Tat weht ja der Wind selten mit konstanter Stärke und Richtung, denn durch Unebenheiten des Geländes, durch andere Bauten, Wälder, Felsen u. dgl. wird derselbe geschwächt und abgelenkt. Auch von oben kann er gelegentlich kommen (Fallwinde).

Welchen Einfluss hat ein Veränderung von Θ auf die Spannungen?

Die anfänglich von links angreifende zur Dachfläche normale Kraft $N = a \cdot \sin^2 \Theta \, (a = w \cdot F)$ verteilt sich zur Hälfte auf die Knotenpunkte A und C. In A wirkt also $\frac{1}{2} N$, davon kommt aber wegen des Rollenlagers nur die vertikale Komponente $\frac{1}{2} N \cdot \cos \alpha$ zur Geltung. In C dagegen wirkt lotrecht nach unten $\frac{1}{2} N \cdot \cos \alpha$, horizontal nach rechts $\frac{1}{2} N \cdot \sin \alpha$.

Wenn $\Theta = 0$, so ist der Winddruck $= 0$, desgleichen auch für $\Theta = 180°$. Dann wirkt er aber schon auf die rechte Seite des Daches. Solange $0 \leq \Theta < 2\alpha$ ist, wird nur die linke Dachfläche beansprucht, von da an aber beide Flächen bis $\Theta = 180°$, wonach die Wirkung auf die linke Fläche ausfällt. Bei $\Theta = 90° + \alpha$, d. h. wenn der (Fall-)Wind genau von oben kommt, ist der Druck auf beide Dachflächen gleich, jedoch ist die Wirkung auf das feste und bewegliche Lager verschieden.

Das Problem ist analytisch lösbar, jedoch werden die Verhältnisse etwas kompliziert, sodass diese Methode hier keine besonderen Vorteile bietet. Wir verzichten deshalb darauf und begnügen uns darum mit einer Bemerkung über die grössten Windstärken in Finnland.

Die höchsten in Finnland während einer Stunde beobachteten Windstärken betragen gegen 20 m/sek, wobei einzelne Stösse mindestens 25 m/sek erreichen können. Den letztgenannten Werten entspricht somit ein Winddruck von etwa 160 kg/m² oder etwas mehr. Für Deutschland wird bei stärkstem Sturme etwa 250 kg angegeben, in den Lehrbüchern der Statik als Mittel-

wert 200 kg/m² angenommen. Für ganz Europa kann man nach KÖPPEN als höchste mittlere Windgeschwindigkeit einer ganzen Stunde 28 m/sek annehmen. Wie weit die Maxima darüber hinausgehen lässt sich, sagt er, nicht feststellen. In Nord-Amerika ist die Windstärke grösser, so hat man u. a. aus den Zerstörungen, die ein Tornado daselbst 1875 angerichtet hat den Winddruck in der Nähe des Zentrums auf mehr als 330 kg pro m² berechnet.

Die Windstärken sind in Finnland somit verhältnismässig klein, sie untersteigen eher als übersteigen die in Mitteleuropa vorkommenden Windstärken. Grösseres Interesse als der Winddruck bietet in bezug auf die Fachwerke in Finnland die Schneelast, welche nicht unerhebliche Werte annehmen kann. Sie ist in den verschiedenen Teilen Finnlands recht verschieden und variiert von Jahr zu Jahr wie die folgenden (nach KORHONEN[1] zusammengestellten) Zahlen zeigen. Sie beziehen sich auf die Periode 1891—1911 und folgende Orte:

Mariehamn	Br.	N.	60°	6′	L.	E.	v.	Gr. 19° 57′,
Helsingfors	»	»	60°	10′	»	»	»	» 24° 57′,
Wärtsilä	»	»	62°	10′	»	»	»	» 30° 39′,
Kajana	»	»	64°	13′	»	»	»	» 27° 46′,
Inari	»	»	69°	6′	»	»	»	» 27° 13′.

Wir geben im folgenden die grössten und kleinsten während jener 20 Jahre beobachteten Maximi-Schneehöhen in cm an sowie ihren Dichten, d. h. diejenige Zahl, welche angibt wie viele Millimeter Wasser man von einem Zentimeter Schnee erhält. Durch Multiplizieren der Schneehöhe mit der Dichte erhält man den Wassergehalt in mm und daraus den Druck in kg pro m² horizontale Fläche.

Ort:	*Mariehamn*	*Helsingfors*	*Wärtsilä*	*Kajana*	*Inari*
Grösste Schneehöhe:	6—44 cm	24—81 cm	53—106 cm	36—89 cm	53—133 cm,
Dichte	3.1	2.8	2.4	2.3	2.1
Wasserwert	18—134 mm	67—227 mm	137—254 mm	83—204 mm	112—278 mm,
Druck pro m²	18—134 kg	67—227 kg	137—254 kg	83—204 kg	112—278 kg.

Die Beanspruchung der Fachwerkträger durch die Schneelast ist demnach in Finnland so gross, dass sie eingehende Beachtung seitens der Ingenieure und Architekten verdient. Dazu kommt, dass zuweilen die Schneelast auf den verschiedenen Dachflächen recht verschieden verteilt ist, wodurch gelegentlich grössere Spannkraft in den Wandstäben als bei Vollbelastung erzeugt werden kann. In den deutschen Lehrbüchern der Statik wird als Schneedruck 70—75 kg/m² (lotrechte Belastung) angegeben.

Wir fassen das oben gesagte nochmals kurz zusammen.

Zusammenfassung. Es sind oben in einem statisch bestimmten Fachwerkträger, nämlich einem Dachstuhl die unter verschiedenen Bedingungen auftretenden Spannungen eingehend untersucht worden. Um statisch bestimmbare Verhältnisse zu haben wurde angenommen, dass der Fachwerkträger an einem Ende ein festes als Walzen(Kipp-)lager ausgebildetes Auflager, am anderen Ende dagegen ein bewegliches Rollenlager besitzt. Weiter wurde vorausgesetzt,

[1] W. W. KORHONEN, I. Die Ausdehnung und Höhe der Schneedecke, Diss. Helsingfors 1915.

dass die Einzelstäbe starr sind, d. h. ihre Formveränderung, ihr elastisches Verhalten wurde nicht berücksichtigt. Ausser Eigengewicht und Schneelast, welche vertikal nach unten wirken, wurde der Einfluss zweier drehbaren, an verschiedenen Punkten des Fachwerkes angebrachten Kräfte auf die Spannungen untersucht. Derartige bei veränderlichem Kraftangriff durchgeführte Untersuchungen bieten nicht nur theoretisches Interesse dar, sondern haben auch praktische Bedeutung.

Die Variationen der Spannungen mit den Drehwinkeln der Kräfte wurden abweichend von der üblichen graphischen Darstellungsart in bequemer Weise durch »Spannungsrosen» veranschaulicht. — Zugleich wurden Angaben über die Grösse der in Finnland vorkommenden Winddrücke und Schneelasten gemacht.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 12

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN MEROMORPHER FUNKTIONEN IN EINEM WINKELRAUM

VON

ROLF NEVANLINNA

(Am 20 Mai 1925 mitgeteilt von E. Lindelöf und K. F. Sundman)

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum.

Wenn $f(x)$ eine in einem Gebiet G und auf dem Rande Γ desselben eindeutige und meromorphe Funktion ist, so lässt sich der Wert $\log|f(x)|$ aus der Formel

$$(A) \qquad \log|f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log|f(\xi)|\left|\frac{\partial g(\xi,x)}{\partial n}\right| d\xi| - \sum_{G} g(x,a_\mu) + \sum_{G} g(x,b_\mu)$$

berechnen, wobei g die Greensche Funktion des Gebietes G bezeichnet, und das Integral über den Rand Γ, die Summen über die innerhalb G gelegenen Nullstellen a_μ und Pole b_μ von $f(x)$ erstreckt werden sollen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Formel zur Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum angewandt.

Das Hauptergebnis des ersten Abschnittes besteht in einem allgemeinen Satz, der gewisse von F. Nevanlinna und dem Verfasser früher bewiesene Sätze enthält und ergänzt. Dieser Hauptsatz erlaubt uns u. a. *die Ordnung* einer meromorphen Funktion in einem Winkelraum in natürlicher Weise zu definieren.

Im zweiten Abschnitt werden einige Sätze über meromorphe und ganze Funktionen endlicher Ordnung bewiesen, die gewisse von Bieberbach und dem Verfasser gegebene Erweiterungen des Picardschen Satzes wesentlich verschärfen. Diese Sätze ergeben sich sämtlich als Folgerungen einer allgemeinen Ungleichung, die unter Anwendung des oben erwähnten Hauptsatzes hergeleitet wird durch eine Methode, die ich schon früher zur Untersuchung verwandter Fragen angewandt habe. Unsere Ergebnisse führen zu ziemlich genauen Aussagen über die Verteilung *der Argumente* derjenigen Stellen, wo eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung einen gegebenen Wert z annimmt.

Im dritten und letzten Abschnitt wird eine innerhalb eines Winkelraumes der Öffnung $\frac{\pi}{k}$ gültige *kanonische Darstellung* einer meromorphen Funktion hergeleitet. Von dieser Darstellung ausgehend werden einige neue Eigenschaften meromorpher Funktionen bewiesen, insbesondere in dem Falle, wo die Ordnung der Funktion kein Multipel der Zahl k ist.

I

1. Es sei $f(x)$ eine analytische Funktion der komplexen Variable $x = re^{i\varphi}$, die in jedem endlichen Punkt der oberen Halbebene $I(x) \geq 0$ eindeutig und meromorph ist. Die in der oberen Halbebene gelegenen Nullstellen und Pole von $f(x)$ seien $a_\mu\,(\mu = 1, 2, \ldots)$ und $b_\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots)$; wenn diese Stellen in unendlicher Anzahl vorhanden sind, so häufen sie sich nur in dem unendlich fernen Punkt.

Im folgenden sollen die asymptotischen Eigenschaften der Funktion $\log|f(x)|$ untersucht werden. Es erweist sich hierzu als zweckmässig, diese Funktion als Summe von zwei harmonischen Funktionen:

$$\log|f(x)| = U_0(x) + U_1(x)$$

zu schreiben, von denen die erste durch folgende Vorschriften bestimmt wird: Es sei ϱ_0 eine beliebig gewählte positive Zahl. $U_0(x)$ soll in der oberen Halbebene (einschliesslich des Unendlichkeitspunktes) regulär harmonisch sein, mit Ausnahme derjenigen Punkte a_μ, b_ν, die in den Kreis $|x| < \varrho_0$ fallen, wo sie negative bzw. positive logarithmische Pole von denselben Multiplizitäten, wie $\log|f|$, haben soll. Auf dem Segment $|t| < \varrho_0$ der reellen t-Achse nehme sie die Randwerte $\log|f(t)|$ an, während $U_0(t) = 0$ für $|t| > \varrho_0$. Fordert man noch, dass U_0 in der Umgebung der Punkte $x = \pm\varrho_0$ beschränkt sei, so ist sie hierdurch *eindeutig* bestimmt, und man findet gemäss der Formel (A), wenn $g(a, b)$ die Greensche Funktion der oberen Halbebene bezeichnet,

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \log|f(t)|\,\frac{\partial g(t,x)}{\partial n}\,dt - \sum_{|a_\mu|<\varrho_0} g(x, a_\mu) + \sum_{|b_\mu|<\varrho_0} g(x, b_\mu) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\varrho_0}^{+\varrho_0} \log|f(t)|\,\frac{r\sin\varphi}{r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi}\,dt - \sum_{|a_\mu|<\varrho_0} \log\left|\frac{x-\bar{a}_\mu}{x+a_\mu}\right| + \sum_{|b_\mu|<\varrho_0} \log\left|\frac{x-\bar{b}_\mu}{x-b_\mu}\right|. \end{aligned} \tag{1}$$

[1])

Es ist für die folgende Untersuchung wichtig zu bemerken, dass $U_0(x)$ für $x \to \infty$ verschwindet derart, dass

$$U_0(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{1'}$$

[1]) Die zu einer komplexen Zahl α konjugierte Zahl wird im folgenden mit $\bar{\alpha}$ bezeichnet.

Die Differenz

$$U_1(x) = \log|f(x)| - U_0(x)$$

ist eine in der oberen Halbebene harmonische Funktion, die in den ausserhalb des Kreises $|x| = \varrho_0$ gelegenen Nullstellen a_μ und Polen b_ν von $f(x)$ negative bzw. positive logarithmische Pole besitzt und in jedem Punkt t des Intervalls $|t| \geq \varrho_0$ den Wert $\log|f(t)|$ annimmt. Auf dem Segment $|t| < \varrho_0$ verschwindet sie wiederum und lässt sich also gemäss dem Spiegelungsprinzip über dieses Segment in die untere Halbebene harmonisch fortsetzen. Insbesondere ist sie demnach im ganzen Kreise $|x| < \varrho_0$ regulär und kann in eine daselbst konvergierende trigonometrische Reihe

$$U_1(x) = d_0 + \sum_1^\infty r^\nu (d_\nu \cos \nu\varphi + c_\nu \sin \nu\varphi)$$

entwickelt werden. Unsere nächste Aufgabe ist, für die Koeffizienten dieser Entwicklung gewisse Ausdrücke mittels der Randwerte und Pole von $U_1(x)$ in einem durch die Ungleichungen

$$I(x) \geq 0, \quad |x| \leq \varrho \quad (\varrho > \varrho_0)$$

definierten Halbkreis C_ϱ herzuleiten.

Zu diesem Zweck stellen wir $U_1(x)$ in C_ϱ durch die Greensche Formel (A) dar, wo das Integral über den Rand von C_ϱ erstreckt werden soll. Führt man den Wert

$$g_\varrho(a,b) = \log\left|\frac{a-\bar{b}}{a-b}\right| + \log\left|\frac{a-\frac{\varrho^2}{\bar{b}}}{a-\frac{\varrho^2}{b}}\right|$$

der Greenschen Funktion von C_ϱ ein, so wird

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \log|f(x)| - U_0(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\varrho_0 \leq |t| \leq \varrho} \log|f(t)|\, r\sin\varphi \left\{\frac{1}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} - \frac{1}{\varrho^2+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 t^2 - 2rt\cos\varphi}\right\} |dt| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\log|f(\varrho e^{i\vartheta})| - U_0(\varrho e^{i\vartheta})\right)(\varrho^2 - r^2)\left\{\frac{1}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)} - \frac{1}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta+\varphi)}\right\} d\vartheta \\ &\quad - \sum_{\varrho_0 \leq |a_\mu| < \varrho} \log\left|\frac{x-\bar{a}_\mu}{x-a_\mu}\right|\left|\frac{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}{\varrho^2 - a_\mu x}\right| + \sum_{\varrho_0 \leq |b_\mu| < \varrho} \log\left|\frac{x-\bar{b}_\mu}{x-b_\mu}\right|\left|\frac{\varrho^2 - b_\mu x}{\varrho^2 - b_\mu x}\right|. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Kerne der hier stehenden Integrale und die Greensche Funktion $g_\varrho(x, c)$ haben die Entwicklungen

$$r\sin\varphi\left\{\frac{1}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} - \frac{1}{\varrho^2+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 t^2 - 2rt\cos\varphi}\right\} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{t^\nu} - \frac{t^\nu}{\varrho^{2\nu}}\right)\frac{r^\nu \sin\nu\varphi}{t},$$

$$(\varrho^2 - r^2)\left\{\frac{1}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi)} - \frac{1}{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta+\varphi)}\right\} = 4\sum_1^\infty \frac{\sin\nu\vartheta}{\varrho^\nu} r^\nu \sin\nu\varphi,$$

$$g_\varrho(re^{i\varphi}, c) = 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{|c|^\nu} - \frac{|c|^\nu}{\varrho^{2\nu}}\right)\frac{\sin\nu\gamma}{\nu} r^\nu \sin\nu\varphi \qquad (c = |c|e^{i\gamma}).$$

Wenn $x = re^{i\varphi}$ ein innerer Punkt des Halbkreises C_{ϱ_0} ist, so sind diese drei Reihen für sämtliche Werte t, ϑ, $|c|$, γ der Intervalle $\varrho_0 \leqq t \leqq \varrho$, $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, $\varrho_0 \leqq |c| \leqq \varrho$ bzw. $0 \leqq \gamma \leqq \pi$ absolut und gleichmässig konvergent, und wir erhalten also die trigonometrische Entwicklung der harmonischen Funktion $U_1(x)$ durch gliedweise Integration bzw. Summation der obigen Reihen auf der rechten Seite der Formel (2). Für die Koeffizienten c_ν, d_ν ergeben sich die Werte: $d_\nu = 0$ und

$$(3)\qquad \begin{aligned} c_\nu = {} & \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_0 \leqq |t| \leqq \varrho} \log|f(t)| \left(\frac{1}{t^\nu} - \frac{t^\nu}{\varrho^{2\nu}}\right) \frac{|dt|}{t} + \frac{2}{\pi \varrho^\nu} \int_0^\pi U_1(\varrho e^{i\vartheta}) \sin \nu\vartheta \, d\vartheta \\ & - \frac{2}{\nu} \sum_{\varrho_0 \leqq |a_\mu| < \varrho} \left(\frac{1}{|a_\mu|^\nu} - \frac{|a_\mu|^\nu}{\varrho^{2\nu}}\right) \sin \nu\alpha_\mu + \frac{2}{\nu} \sum_{\varrho_0 \leqq |b_\mu| < \varrho} \left(\frac{1}{|b_\mu|^\nu} - \frac{|b_\mu|^\nu}{\varrho^{2\nu}}\right) \sin \nu\beta_\mu, \end{aligned}$$

wo $a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}$, $b_\mu = |b_\mu| e^{i\beta_\mu}$ gesetzt worden ist. Es gilt also das Ergebnis:

SATZ. — *Die harmonische Funktion $U_1(x)$ lässt sich in die für $|x| < \varrho_0$ konvergente Reihe*

$$U_1(re^{i\varphi}) = \sum_1^\infty c_\nu r^\nu \sin \nu\varphi$$

entwickeln, deren Koeffizienten c_ν durch die Formel (3) *gegeben sind.*

2. Die Formel (3) verdient für den speziellen Wert $\nu = 1$ besondere Aufmerksamkeit.[1]) Um übersichtliche Bezeichnungen zu erhalten führen wir die durch die Gleichung

$$\log|f_1(x)| = U_1(x)$$

bis auf einen Faktor $e^{i\omega}$ wohlbestimmte analytische Funktion $f_1(x)$ ein und setzen dann für $r > \varrho_0$:[2])

$$A(r, f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_0}^r \left(\overset{+}{\log}|f_1(t)| + \overset{+}{\log}|f_1(-t)|\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) dt,$$

$$B(r, f_1) = \frac{2}{\pi r} \int_0^\pi \overset{+}{\log}|f_1(re^{i\varphi})| \sin\varphi \, d\varphi,$$

$$C(r, f_1) = 2 \sum_{\varrho_0 \leqq |b_\mu| < r} \left(\frac{1}{|b_\mu|} - \frac{|b_\mu|}{r^2}\right) \sin\beta_\mu.$$

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich aus (3) für $\nu = 1$:

[1]) Diese spezielle Formel ist, in etwas modifizierter Form, zuerst von F. NEVANLINNA (*Über die Beziehungen zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole*, Ve Congrès des Mathématiciens scandinaves, Helsingfors 1922) aufgestellt und angewandt worden. Vgl. auch F. und R. NEVANLINNA: *Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie* (Acta soc. sc. Fennicae, t. 50, N:o 5, 1922), T. CARLEMAN: *Über die Approximation analytischer Funktionen durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen* (Arkiv för mat., astron. och fysik, Band 17, N:o 9, 1923, insb. § 2).

[2]) Es ist $\overset{+}{\log} a$ gleich $\log a$ oder Null, je nachdem $a > 1$ oder $0 \leqq a \leqq 1$.

$$A(r,f_1)+B(r,f_1)+C(r,f_1)=A\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+B\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+C\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+c_1. \tag{4}$$

Unter Anwendung der letztgeschriebenen Formel werden wir nun einen für die folgende Untersuchung wichtigen allgemeinen Satz herleiten. Wir beweisen hierzu zunächst den

HILFSSATZ 1. — *Die Summe*

$$S(r,f_1)=A(r,f_1)+B(r,f_1)+C(r,f_1)$$

ist eine wachsende Funktion von r.

Beweis. — Sei $\varrho>\varrho_0$ und $U_\varrho(x)$ diejenige harmonische Funktion, die auf dem Rande des Halbkreises C_ϱ die Randwerte $\overset{+}{\log}|f_1|$ annimmt und im Innern von C_ϱ dieselben *positiven* logarithmischen Pole b_ν, wie $\log|f_1|=U_1$, besitzt. $U_\varrho(x)$ ist hiernach nichtnegativ und die durch die Gleichung

$$\log|f_\varrho|=U_\varrho$$

bestimmte meromorphe Funktion f_ϱ also dem absoluten Betrage nach $\geqq 1$ im Gebiete C_ϱ; es ist folglich

$$S\left(r,\frac{1}{f_\varrho}\right)=0 \quad \text{für} \quad \varrho_0\leqq r\leqq\varrho,$$

und gemäss der Formel (4)

$$S(r,f_\varrho)=\text{const.} \quad \text{für} \quad \varrho_0\leqq r\leqq\varrho.$$

Nach der Konstruktion von f_ϱ ist aber $S(\varrho,f_\varrho)=S(\varrho,f_1)$, und unser Satz ist hiernach richtig, wenn

$$S(r,f_1)\leqq S(r,f_\varrho) \quad \text{für} \quad \varrho_0\leqq r<\varrho.$$

Dies ist tatsächlich der Fall, denn zunächst ist

$$C(r,f_1)=C(r,f_\varrho), \tag{a}$$

ferner ist die in C_ϱ reguläre Funktion $\frac{f_1}{f_\varrho}$ auf dem Rande und folglich auch im Innern von C_ϱ dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$, und also

$$\overset{+}{\log}|f_1|\leqq\overset{+}{\log}|f_\varrho| \quad \text{in} \quad C_\varrho.$$

Es ist also auch

$$B(r,f_1)\leqq B(r,f_\varrho),\ A(r,f_1)\leqq A(r,f_\varrho), \tag{b}$$

und die zu beweisende Ungleichung ergibt sich durch Addition von (*a*) und (*b*).

Man bestätigt leicht, dass die einzelnen Glieder A und C der Summe S nichtabnehmende Funktionen von r sind. Demungeachtet ist der soeben bewiesene Hilfssatz nicht trivial, denn das Glied B ist nicht immer mit r wachsend, wie durch Beispiele gezeigt werden kann.

HILFSSATZ 2. — *Die meromorphe Funktion $f(x)$ genügt der Bedingung*

$$S(r,f)-S\left(r,\frac{1}{f}\right)=c_1+O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Beweis. — Nach der Definition der Funktion f_1 ist

$$A(r,f)=A(r,f_1),\ C(r,f)=C(r,f_1)$$

und, da die Differenz $U_0 = \log|f| - \log|f_1|$ der Ungleichung (1') (S. 4) genügt, weiter

$$B(r,f) = B(r,f_1) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Durch Addition ergibt sich, dass

$$S(r,f) = S(r,f_1) + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5}$$

und, in analoger Weise,

$$S\left(r,\frac{1}{f}\right) = S\left(r,\frac{1}{f_1}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Unter Beachtung der Formel (4) ergibt sich nun die Behauptung durch Subtraktion der zwei letzten Beziehungen.

Wir führen nun zur Abkürzung folgende Schreibweise ein: Es sei z eine beliebige komplexe Zahl; wir bezeichnen *für ein endliches* z

$$S(r;z) = S\left(r,\frac{1}{f-z}\right)$$

und *für* $z=\infty$

$$S(r;\infty) = S(r,f).$$

In entsprechender Weise definieren wir die Ausdrücke $A(r;z)$, $B(r;z)$, $C(r;z)$. Es gilt dann der

HILFSSATZ 3. — *Die meromorphe Funktion $f(x)$ genügt für jedes Wertpaar a, b der Bedingung*

$$S(r;a) - S(r;b) = O(1).$$

Beweis. — Sei z zunächst eine *endliche* Zahl. Gemäss der evidenten Ungleichung

$$\overset{+}{\log}(\alpha+\beta) \leq \overset{+}{\log}\,\alpha + \overset{+}{\log}\,\beta + \log 2 \qquad (\alpha,\beta \geqq 0)$$

ist

$$\overset{+}{\log}|f-z| \leq \overset{+}{\log}(|f|+|z|) < \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|z| + \log 2,$$

$$\overset{+}{\log}|f| = \overset{+}{\log}|(f-z)+z| \leq \overset{+}{\log}|f-z| + \overset{+}{\log}|z| + \log 2,$$

und also

$$\left|\overset{+}{\log}|f-z| - \overset{+}{\log}|f|\right| \leq \overset{+}{\log}|z| + \log 2.$$

Demnach wird

$$A(r,f) = A(r,f-z) + O(1),\ B(r,f) = B(r,f-z) + O(1).$$

Ferner ist $C(r,f) = C(r,f-z)$, und es gilt somit

$$S(r,f) = S(r,f-z) + O(1).$$

Nach Hilfssatz 2 ist weiter

$$S(r,f-z) = S\left(r,\frac{1}{f-z}\right) + O(1)$$

und es wird also:

$$S(r;\infty) = S(r;z) + O(1),$$

woraus die Behauptung folgt.

Bezeichnen wir nun die oben betrachtete wachsende Funktion $S(r, f_1)$ kurz mit $S(r)$, so erhalten wir unter Beachtung der Beziehung (5) als Zusammenfassung der soeben bewiesenen Hilfssätzen den

SATZ I. — *Sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt der Halbebene $I(x)>0$ eindeutige meromorphe Funktion. Er existiert dann eine bis auf eine beschränkte Grösse $O(1)$ bestimmte, wachsende Funktion $S(r)$ derart, dass die Beziehung*

$$A(r;z)+B(r;z)+C(r;z)=S(r)+O(1) \tag{I}$$

für jeden endlichen oder unendlichen Wert z besteht.

Dieses Ergebnis entspricht einem Satz in der Theorie der in der ganzen endlichen Ebene meromorphen Funktionen, den ich in einer kürzlich erschienenen Arbeit *den ersten Hauptsatz* genannt habe und der in derselben Weise aus der JENSENschen Formel folgt, wie (I) aus der Formel (4).[1]) Wie dieser erste Hauptsatz, bringt auch die Formel (I) eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft einer meromorphen Funktion zum Ausdruck. Von den drei nichtnegativen Gliedern der linken Seite in (I) bestimmen die zwei ersten (A und B) die Stärke der Konvergenz von $f(x)$ gegen den betreffenden Wert z, das dritte (C) die Dichte der Stellen, wo $f(x)$ diesen Wert z annimmt; die Summe dieser drei Grössen verhält sich nun nach (I) gegenüber verschiedenen Werten z invariant (von einer beschränkten Grösse $O(1)$ abgesehen).

Die zu einer meromorphen Funktion $f(x)$ gehörige Fundamentalgrösse $S(r)$, die in der folgenden Untersuchung eine wichtige Rolle spielen wird, besitzt auch nachstehende Eigenschaft, die eine leichte Folgerung aus dem obigen Satze ist[2]):

Wenn die Determinante der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von Null verschieden ist, so ist

$$S(r,f)=S\left(r,\frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right)+O(1).$$

Durch eine einfache Variabeltransformation lassen sich die oben erhaltenen Ergebnisse auf den allgemeineren Fall übertragen, wo die analytische Funktion in einem beliebigen Winkelgebiet W meromorph angenommen wird. Ist W insbesondere durch die Ungleichung

---

[1]) Wenn $f(x)$ eine in der endlichen Ebene meromorphe Funktion ist, setze man für ein endliches z

$$m(r;z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})-z}\right|d\varphi,\quad N(r;z)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t;z)}{t}\,dt$$

und für $z=\infty$

$$m(r;\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,\quad N(r;\infty)=\int_{r_0}^{r}\frac{n(t;\infty)}{t}\,dt,$$

wo $n(t;z)$ die Anzahl der z-Stellen von $f(x)$ im Kreise $|x|<t$ bezeichnet. In meiner Arbeit *„Zur Theorie der meromorphen Funktionen"*, die bald erscheinen wird, habe ich folgenden Satz bewiesen:

Zu jeder meromorphen Funktion gehört eine bis auf eine beschränkte Grösse $O(1)$ bestimmte, reelle, wachsende Funktion $T(r)$ derart, dass

$$T(r)=m(r;z)+N(r;z)+O(1)$$

für jedes z gilt.

[2]) Vgl. meine soeben zitierte Arbeit, insb. S. 19.

(6) $$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{k} \qquad \left(k \geqq \frac{1}{2}\right)$$

definiert, so findet man in dieser Weise für die Fundamentalgrössen A, B, C die Ausdrücke

$$A(r,f) = \frac{k}{\pi} \int_{\varrho_0}^{r} \left(\overset{+}{\log} |f(t)| + \overset{+}{\log} \left| f\left(te^{\frac{i\pi}{k}}\right)\right| \right) \left(\frac{1}{t^k} - \frac{t^k}{r^{2k}} \right) \frac{dt}{t},$$

$$B(r,f) = \frac{2k}{\pi r^k} \int_{0}^{\frac{\pi}{k}} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \sin k\varphi \, d\varphi,$$

$$C(r,f) = 2 \sum_{\varrho_0 \leq |b_\mu| < r} \left(\frac{1}{|b_\mu|^k} - \frac{|b_\mu|^k}{r^{2k}} \right) \sin k\beta_\mu,$$

welche für $k=1$ die speziellere, S. 6 gegebene Form annehmen.

3. In diesem Paragraphen sollen einige einfache Folgerungen des Hauptsatzes I besprochen werden. Wir machen den Anfang mit einigen Hilfssätzen über die Grössen A und C. Wenn $f(x)$ in dem durch die Ungleichungen (6) definierten Winkelraum meromorph ist, so kann man den etwas komplizierten Ausdrücken von A und C eine übersichtlichere Form geben, wenn man die neuen Hilfsgrössen [1])

$$a(re^{i\vartheta}; z) = \int_{\varrho_0}^{r} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(te^{i\vartheta}) - z} \right| \frac{dt}{t}, \quad c(r; z) = \sum_{\varrho_0 < r_\nu < r} \sin k\varphi_\nu(z)$$

einführt, wo $r_\nu(z)\, e^{i\varphi_\nu(z)}$ die z-Stellen von $f(x)$ (im Winkelraume W) bezeichnen; man findet so:

(7) $$\begin{cases} A(r; z) = \dfrac{k^2}{\pi} \displaystyle\int_{\varrho_0}^{r} \frac{a(t; z) + a\left(te^{\frac{i\pi}{k}}; z\right)}{t^{k+1}} \left(1 + \frac{t^{2k}}{r^{2k}}\right) dt, \\ C(r; z) = 2k \displaystyle\int_{\varrho_0}^{r} \frac{c(t; z)}{t^{k+1}} \left(1 + \frac{t^{2k}}{r^{2k}}\right) dt. \end{cases}$$

Es gelten dann die Sätze:

HILFSSATZ 1. — *Für ein positives λ sind die Integrale*

(8) $$\int^{\infty} \frac{a(te^{i\vartheta}; z)}{t^{\lambda+1}} dt \quad \textit{und} \quad \int^{\infty} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(te^{i\vartheta}) - z} \right| \frac{dt}{t^{\lambda+1}}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent.

Beweis. — Durch partielle Integration findet man

(8′) $$\int_{\varrho_0}^{r} \frac{a(te^{i\vartheta})}{t^{\lambda+1}} dt = \frac{a(\varrho_0 e^{i\vartheta}; z)}{\lambda \varrho_0^{\lambda}} - \frac{a(re^{i\vartheta}; z)}{\lambda r^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \int_{\varrho_0}^{r} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(te^{i\vartheta}) - z} \right| \frac{dt}{t^{\lambda+1}},$$

[1]) Vgl. die in der Fussnote S. 6 zitierte Arbeite von F. NEVANLINNA.

voraus man sieht, dass die Konvergenz des ersten Integrals (8) eine Folgerung der Konvergenz des zweiten ist. Ist umgekehrt jenes Integral konvergent, so wird für ein gegebenes $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > \int_r^\infty \frac{a(te^{i\vartheta};z)}{t^{\lambda+1}}\,dt \geq a(re^{i\vartheta};z)\int_r^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{a(re^{i\vartheta};z)}{\lambda r^\lambda}$$

von einem gewissen Wert r ab, und man schliesst aus (8'), dass auch das zweite Integral (8) konvergieren muss.

HILFSSATZ 2. — *Für ein gegebenes $\lambda > 0$ ist das Integral*

$$\int^\infty \frac{c(t;z)}{t^{\lambda+1}}\,dt$$

mit der Reihe

$$\sum \frac{\sin k\varphi_\nu(z)}{(r_\nu(z))^\lambda}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent.

Die Behauptung folgt, in derselben Weise wie im Hilfssatz 1, aus der Identität

$$\int_{\varrho_0}^r \frac{c(t;z)}{t^{\lambda+1}}\,dt = \frac{c(\varrho_0;z)}{\lambda\varrho_0^\lambda} - \frac{c(r;z)}{\lambda r^\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{\varrho_0 < r_\nu < r} \frac{\sin k\varphi_\nu(z)}{(r_\nu(z))^\lambda}.$$

Eine leichte Folgerung aus den Formeln (7) ist schliesslich

HILFSSATZ 3. — *Für $\lambda > k$ sind die Integrale*

$$\int^\infty \frac{A(t;z)}{t^{\lambda-k+1}}\,dt \quad \text{und} \quad \int^\infty \frac{a(t;z)+a(te^{\frac{i\pi}{k}};z)}{t^{\lambda+1}}\,dt \tag{9}$$

gleichzeitig konvergent oder divergent. Wenn $\lambda = k$, so ist das zweite der Integrale (9) *dann und nur dann konvergent, wenn die Grösse $A(r;z)$ beschränkt ist.*

Dieser Satz gilt auch dann, wenn man die Grössen A und a durch C bzw. c ersetzt.

Aus den oben gegebenen Hilfssätzen folgt nun mittels des Satzes I:

SATZ 1. — *Notwendig und hinreichend, damit die zu einer in einem Winkelraum $W\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{k}\right)$ meromorphen Funktion gehörige Fundamentalgrösse $S(r)$ beschränkt sei, ist, dass die drei Ausdrücke*

$$\int^\infty \log^+\left(\left|\frac{1}{f(t)-z}\right| + \log^+\left|\frac{1}{f\left(te^{\frac{i\pi}{k}}\right)-z}\right|\right)\frac{dt}{t^{k+1}}, \tag{10}$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r^k}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\vartheta})-z}\right| \sin k\vartheta\,d\vartheta, \tag{11}$$

$$\sum \frac{\sin k\varphi_\nu(z)}{(r_\nu(z))^k} \tag{12}$$

für einen Wert z endlich sind.

Dieser Satz lässt sich noch etwas verschärfen. Hierzu bemerke man dass die Grössen $S(r) \equiv S(r, f_1)$ (vgl. S. 9), $A(r;\infty)$ und $C(r;\infty)$, als wachsende Funktionen von r, für $r \to \infty$ bestimmten Grenzwerten zustreben. Sind die zwei letzten dieser Grenzwerte insbesondere *endlich*, so folgt aus der Formel: $B(r;\infty) = S(r) - A(r;\infty) - C(r;\infty) + O\left(\frac{1}{i}\right)$ (vgl. (5)), dass auch $B(r;\infty)$ mit wachsendem r sich einem bestimmten Grenzwert nähert. Wendet man nun dieses Ergebnis auf die Funktion $\frac{1}{f-z}$ an, so ergibt sich:

Wenn das Integral (10) *und die Reihe* (12) *für einen gewissen Wert z konvergent sind, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r^k} \int_0^{\frac{\pi}{k}} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\vartheta}) - z} \right| \sin k\vartheta \, d\vartheta .$$

Ist dieser Wert insbesondere endlich, so sind die Ausdrücke (10), (11) *und* (12) *für alle Werte z endlich.*

Wenn die Fundamentalgrösse $S(r)$ für $r \to \infty$ unbeschränkt wächst, so gilt der

SATZ 2. — *Wenn, für ein gegebenes $\lambda > k$, die Integrale*

$$\int^{\infty} \left(\overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(t) - z} \right| + \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f\left(te^{\frac{i\pi}{k}}\right) - z} \right| \right) \frac{dt}{t^{\lambda+1}},$$

$$\int^{\infty} \frac{b(r;z)}{r^{\lambda+1}} dr, \quad wo \quad b(r;z) = \int_0^{\frac{\pi}{k}} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\vartheta}) - z} \right| \sin k\vartheta \, d\vartheta$$

und die Reihe

$$\sum \frac{\sin k\varphi_\nu(z)}{(r_\nu(z))^\lambda}$$

für einen Wert z konvergent sind, so sind sie, sowie das Integral

$$\int^{\infty} \frac{S(t)}{t^{\lambda-k+1}} dt, \tag{13}$$

für jedes z konvergent.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Satz I in Verbindung mit den Hilfssätzen 2 und 3. Man könnte das obige Ergebnis auch in folgender Weise aussprechen:

Für ein gegebenes $\lambda > k$ ist das Integral

$$\int^{\infty} \frac{a(t;z) + a\left(te^{\frac{i\pi}{k}};z\right) + b(t;z) + c(t;z)}{t^{\lambda+1}} dt \tag{14}$$

entweder für alle Werte z konvergent oder für sämtliche z divergent.

Es sei $\lambda > k$ eine Zahl, wofür der erstgenannte Fall zutrifft. Wir behaupten, dass die Summe

$$a(r;z) + a\left(re^{\frac{i\pi}{k}};z\right) + b(r;z) + c(r;z) \tag{15}$$

höchstens von der Ordnung r^λ ist.[1]) Da nämlich $a(t;z)$ eine wachsende Funktion von r ist, so folgt aus der vorausgesetzten Konvergenz des Integrals (14), dass für ein gegebenes $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon > \int_r^\infty \frac{a(t;z)}{t^{\lambda+1}}\,dt > a(r;z)\int_r^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{a(r;z)}{\lambda r^\lambda}$$

von einem gewissen Wert r ab gilt. Die Grösse $a(t;z)$ ist hiernach höchstens von der Ordnung t^λ, und dasselbe gilt auch für $a(te^{\frac{i\pi}{k}};z)$ und $c(t;z)$, die ebenfalls wachsende Funktionen sind. Um b abzuschätzen, bemerke man, dass das Integral (13) für den betrachteten Wert λ konvergiert. Da nun auch $S(r)$ mit r wachsend ist, so schliesst man wie oben, dass ihre Ordnung höchstens gleich $\lambda - k$ ist. Gemäss dem Hauptsatz (I) trifft dies dann auch für $B(r;z)$ zu, und die Grösse $b = \frac{\pi}{2k} r^k B$ ist also nicht von höherer Ordnung als r^λ. Hiermit ist die Behauptung bewiesen.

Andererseits folgt aus der Definition des Ordnungsbegriffes, dass die Ordnung der Summe (15) auch nicht niedriger als r^λ ist, wenn das Integral (14) divergent angenommen wird. Wir schliessen also:

Wenn die Ordnung $\mu(z)$ der Summe (15) grösser als k ist, so ist das Integral (14) für jedes $\lambda > \mu(z)$ konvergent und für $\lambda < \mu(z)$ divergent. *Die Ordnung $\mu(z)$ behält also für sämtliche z einen konstanten Wert*[2]). Ist $\mu(z)$ wiederum für einen gewissen Wert z kleiner oder gleich k, so hat sie diese Eigenschaft für alle Werte z (Satz 1), ist aber im allgemeinen nicht mehr für verschiedene z konstant. Es liegt nun nahe folgende Definition aufzustellen:

Die Ordnung einer meromorphen Funktion in einem gegebenen Winkelraum $W\left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{k}\right)$ *sei im Falle* $\mu(z) > k$ *gleich der konstanten Zahl* $\mu(z)$, *im Falle* $\mu(z) \leq k$ *wiederum gleich der oberen Grenze der Menge* $\mu(z)$.

---

[1]) Man definiert bekanntlich die *Ordnung* einer positiven, reellen Funktion $s(r)$ als die obere Grenze

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r};$$

nach Pringsheim sagt man weiter, $s(r)$ sei vom *Maximal-, Normal-* oder *Minimaltypus* der Ordnung λ, je nachdem

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{s(r)}{r^\lambda}$$

unendlich, endlich und positiv oder gleich Null ist. Falls $s(r)$ von der endlichen Ordnung λ ist, so ist dass Integral

$$\int^\infty \frac{s(r)}{r^{k+1}}\,dr$$

für $k > \lambda$ konvergent, und, *falls $s(r)$ eine wachsende Funktion ist*, für $k < \lambda$ divergent. Wir sagen, dass $s(r)$ vom *Konvergenztypus* oder *Divergenztypus* der Ordnung λ ist, je nachdem das Integral für $k = \lambda$ konvergent oder divergent ist (G. Valiron, der zuerst die Bedeutung dieser letzten Begriffe für gewisse Fragen in der Theorie der ganzen Funktionen erkannt hat, spricht von „classe inférieure“ bzw. „classe supérieure“. Vgl. seine Arbeiten: *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (Bull. Sciences math., 1921) und *Fonctions entières et fonctions méromorphes* (Mémorial des sciences math., fasc. II, Paris, 1925)).

[2]) Man könnte leicht zeigen, dass sogar der *Typus* (vgl. die obige Fussnote) für verschiedene z invariant ist.

Es sei in diesem Zusammenhang noch darauf aufmerksam gemacht, dass eine meromorphe Funktion dann und nur dann von der Ordnung $\mu > k$ im Winkelraume W ist, wenn die zugehörige Fundamentalgrösse $S(r)$ von der Ordnung $r^{\mu-k}$ ist.

Die schärfsten Sätze über das asymptotische Verhalten einer meromorphen Funktion in einem Winkelgebiet ergeben sich *direkt* aus der Hauptformel (1), nach welcher die Gleichheit

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{A(r;z)}{S(r)} + \frac{B(r;z)}{S(r)} + \frac{C(r;z)}{S(r)} \right) = 1 \tag{16}$$

für jedes z besteht, sobald die Fundamentalgrösse S mit wachsendem r selbst unbeschränkt wächst. Diese Formel enthält in möglichst allgemeiner und prägnanter Fassung einige Sätze, die F. NEVANLINNA und der Verfasser als Verallgemeinerungen eines CARLSONschen[1]) Satzes früher bewiesen haben (vgl. die in der Fussnote 1 S. 6 angegebenen Arbeiten).

Aus der Formel (16) folgt insbesondere, dass die oberen Grenzen der Quotienten $\frac{A}{S}$, $\frac{B}{S}$ und $\frac{C}{S}$ für $r \to \infty$ nicht grösser als Eins sind. Einige weitere Eigenschaften dieser drei Ausdrücke werden als Folgerungen eines allgemeinen Satzes hervorgehen, der im nachfolgenden Abschnitt hergeleitet werden soll.

[2]) F. CARLSON: *Sur une classe de séries de Taylor* (Thèse, Upsala 1914, p. 58).

II

1. Um die am Ende des vorigen Abschnittes in Aussicht gestellte Formel[1]) herzuleiten wählen wir zunächst $q-1$ verschiedene, endliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}$. Ist nun $f(x)$ eine im Winkel $W\left(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{k}\right)$ meromorphe Funktion so bezeichne man mit $\psi(x)$ das Produkt

$$\psi = \prod_1^{q-1} (f - a_\nu).$$

Es ist dann

(1) $$(q-1)\,S(r,f) < S(r,\psi) + O(1).$$

Denn zunächst ist

(1′) $$(q-1)\,C(r,f) = C(r,\psi);$$

ferner ist

$$|f|^{q-1} = \frac{\psi}{\left|1-\frac{a_1}{f}\right| \cdots \left|1-\frac{a_{q-1}}{f}\right|},$$

und also für $|f| \geq 2a$, wenn a die grösste der Zahlen $|a_\nu|$ bezeichnet,

$$|f|^{q-1} \leqq 2^{q-1}\,|\psi|, \quad (q-1)\overset{+}{\log}|f| \leqq (q-1)\log 2 + \overset{+}{\log}|\psi|.$$

Für $|f| < 2a$ ist wiederum $\overset{+}{\log}|f| < \log 2 + \overset{+}{\log} a$, und jedenfalls gilt also

$$(q-1)\overset{+}{\log}|f| < (q-1)(\log 2 + \overset{+}{\log} a) + \overset{+}{\log}|\psi|.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$A(r,f) + B(r,f) = D(r,f),$$

so ist hiernach

(1″) $$(q-1)\,D(r,f) < D(r,\psi) + O(1),$$

und die Behauptung (1) folgt durch Addition von (1′) und (1″).

Nach dem Satz I ist weiter

(2) $$S(r,\psi) = D\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + C\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + O(1) = D\left(r,\frac{1}{\psi}\right) + \sum C\left(r,\frac{1}{f-a_\nu}\right) + O(1).$$

[1]) Die Methode, die im folgenden zur Anwendung kommt, ist dieselbe, die ich bei einer verwandten Frage in meiner S. 9 zitierten Arbeit benutzt habe.

Hier ist nach der Ungleichung: $\overset{+}{\log}(\alpha\beta) < \overset{+}{\log}\alpha + \overset{+}{\log}\beta$

$$D\left(r, \frac{1}{\psi}\right) = D\left(r, \frac{f'}{\psi}\cdot\frac{1}{f'}\right) \leqq D\left(r, \frac{f'}{\psi}\right) + D\left(r, \frac{1}{f'}\right), \tag{3}$$

und ferner nach Satz I:

$$\begin{aligned} D\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1) &= D(r, f') + C(r, f') - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) = D\left(r, f\cdot\frac{f'}{f}\right) + C(r, f') - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &\leqq D(r, f) + D\left(r, \frac{f'}{f}\right) + C(r, f') - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &= S(r, f) - C(r, f) + D\left(r, \frac{f'}{f}\right) + C(r, f') - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) + O(1). \end{aligned} \tag{4}$$

Nach (1) bis (4) ist also

$$(q-2)\,S(r, f) < \sum C\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right) + C(r, f') - C(r, f) - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) + D\left(r, \frac{f'}{\psi}\right) + D\left(r, \frac{f'}{f}\right). \tag{5}$$

Man schreibe nun weiter

$$\frac{1}{\psi} = \sum \frac{c_\nu}{f-a_\nu},$$

wo c_ν die endliche, von Null verschiedene Zahl $c_\nu = \left(\frac{df}{d\psi}\right)_{f=a_\nu}$ bezeichnet. Unter Anwendung der Ungleichung

$$\overset{+}{\log}\sum_1^p \alpha_\nu < \sum_1^p \overset{+}{\log}\alpha_\nu + \log p \tag{6}$$

folgt dann, dass

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{\psi}\right| \leqq \overset{+}{\log}\left(\sum |c_\nu|\left|\frac{f'}{f-a_\nu}\right|\right) \leqq \sum \overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{f-a_\nu}\right| + \sum \overset{+}{\log}|c_\nu| + \overset{+}{\log}(q-1)$$

und also

$$D\left(r, \frac{f'}{\psi}\right) < \sum D\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(1).$$

Unter Beachtung dieser Beziehung folgt aus (5):

$$(q-2)\,S(r) < \sum_1^{q-1} C\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right) + C(r, f') - C(r, f) - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) + R(r), \tag{7}$$

wo

$$R(r) = \sum_0^{q-1} D\left(r, \frac{f'}{f-a_\nu}\right) + O(1) \qquad (a_0 = 0).$$

Dieses Ergebnis erhält eine etwas allgemeinere Form, wenn man q endliche, verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_q$ nimmt und die Ungleichung (7) auf die Funktion

$$\varphi = \frac{1}{f-z_q}$$

anwendet, indem man $a_\nu = \frac{1}{z_\nu - z_q}$ $(\nu = 1, \ldots, q-1)$ setzt. Es wird dann

$$C\left(r, \frac{1}{\varphi - a_\nu}\right) = C\left(r, \frac{1}{f - z_\nu}\right), \quad C(r, \varphi) = C\left(r, \frac{1}{f - z_q}\right),$$

und da

$$\varphi' = \frac{f'}{(f - z_q)^2},$$

$$C(r, \varphi') \quad C\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) \quad 2\,C\left(r, \frac{1}{f - z_q}\right) - C\left(r, \frac{1}{f'}\right) - 2\,C(r, f) + C(r, f').$$

Ferner ist

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'}{f - z_q} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'}{\varphi - a_\nu} = \frac{f'}{f - z_\nu} - \frac{f'}{f - z_q} < \frac{f'}{f - z_\nu} + \frac{f'}{f - z_q},$$

also nach (6):

$$D\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi}\right) = D\left(r, \frac{f'}{f - z_q}\right), \quad D\left(r, \frac{\varphi'}{\varphi - a_\nu}\right) < D\left(r, \frac{f'}{f - z_\nu}\right) + D\left(r, \frac{f'}{f - z_q}\right) + O(1) \quad (\nu = 1, \cdots, q-1).$$

Schliesslich ist nach Satz I

$$S(r, \varphi) = S(r, f) + O(1),$$

und man findet aus (7):

$$(8) \qquad (q \quad 2)\,S(r, f) < \sum_1^q C\left(r, \frac{1}{f - z_\nu}\right) - \left[C\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (2\,C(r, f) - C(r, f'))\right] + R(r),$$

wo $R(r)$ jetzt der Ungleichung

$$R(r) < (q-1) \sum_1^q D\left(r, \frac{1}{f - z_\nu}\right) + O(1)$$

genügt.

In der Beziehung (8) kann man auch einer der Zahlen z_ν den Wert ∞ geben. Denn ist z. B. $z_q = \infty$, so hat man nur f statt $\frac{1}{f - z_q}$ zu schreiben, und die Formel (8) geht in die früher bewiesene (7) über.

Das zweite Glied rechts in (8) rührt von den mehrfachen Stellen von $f(x)$ her. Bemerkt man, dass einer m-fachen Stelle von f entweder eine $(m-1)$-fache Nullstelle von f' oder (falls die Stelle ein Pol ist) ein $(m+1)$-facher Pol von f' entspricht, so folgt:

Der Ausdruck

$$C_1(r) = C\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (2\,C(r, f) - C(r, f'))$$

wird durch die mehrfachen Stellen $\varrho_\nu e^{i\vartheta_\nu}$ von f gebildet in derselben Weise, wie $C(r; z)$ vermittels der z-Stellen; hierbei soll jedoch eine m-fache Stelle nur $(m-1)$-mal mitgezählt werden. Setzt man also, unter Beachtung dieser Regel,

$$c_1(r) = \sum_{\varrho_0 < \varrho_\nu < r} \sin k\vartheta_\nu,$$

so wird

$$C_1(r) = 2k \int_{\varrho_0}^{r} \frac{c_1(t)}{t^{k+1}} \left(1 + \frac{t^{2k}}{r^{2k}}\right) dt.$$

Wir haben also schliesslich das Ergebnis:

SATZ II. — *Es sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt des Winkelraumes $0<\arg x<\frac{\pi}{k}$ meromorphe Funktion. Wenn $z_1,\ldots,z_q$ verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen bezeichnen, so ist*

$$(q-2)\,S(r,f)<\sum_1^q C(r;z_\nu)-C_1(r)+R(r), \tag{II}$$

wo $C_1(r)$ in der oben angegebenen Weise mittels der mehrfachen Stellen von $f(x)$ gebildet wird, und

$$R(r)<(q-1)\sum_1^q\left(A\left(r,\frac{f'}{f-z_\nu}\right)+B\left(r,\frac{f'}{f-z_\nu}\right)\right)+O(1).^1) \tag{9}$$

Die Bedeutung dieses Ergebnises beruht darauf, dass *das Restglied $R(r)$* im allgemeinen *von niedrigerer Grössenordnung als die Fundamentalgrösse $S(r,f)$ ist.* Wir wollen bei dieser Gelegenheit auf eine allgemeine Untersuchung des Restgliedes nicht eingehen, sondern beschränken uns auf den einfachsten Fall, wo $f(x)$ in der *ganzen endlichen Ebene* eindeutig, meromorph und von *endlicher Ordnung* ist. Es gilt dann der

HILFSSATZ. — *Wenn $f(x)$ in der endlichen x-Ebene meromorph und von endlicher Ordnung ist, so ist*

$$R(r)=O(1). \tag{10}$$

Beweis. — Wegen der Ungleichung (9) genügt es zu zeigen, dass

$$A\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(1),\quad B\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(1).$$

Zum Beweise stellen wir $f(x)$ in der kanonischen Form

$$f=e^P\frac{\pi_1}{\pi_2}$$

dar, wo P ein Polynom ist und π_1,π_2 mittels der Nullstellen bzw. Pole von $f(x)$ gebildete WEIERSTRASSsche kanonische Produkte von endlichem Geschlechte sind. Es ist hiernach

$$\frac{f'}{f}=P'+\frac{\pi_1'}{\pi_1}-\frac{\pi_2'}{\pi_2},$$

und also gemäss der Ungleichung (6) S. 16

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{f'}{f}\right|<\log 3+\overset{+}{\log}|P'|+\overset{+}{\log}\left|\frac{\pi_1'}{\pi_1}\right|+\overset{+}{\log}\left|\frac{\pi_2'}{\pi_2}\right|.$$

Da $\overset{+}{\log}P'=O(\log r)$, so folgt, dass

$$a\left(r,\frac{f'}{f}\right)\equiv\int_{\varrho_0}^{r}\overset{+}{\log}\left|\frac{f'(t)}{f(t)}\right|\frac{dt}{t}<O\left((\log r)^2\right)+a\left(r,\frac{\pi_1'}{\pi_1}\right)+a\left(r,\frac{\pi_2'}{\pi_2}\right). \tag{11}$$

Zur Abschätzung der zwei letzten Glieder betrachten wir ein kanonisches Produkt vom endlichen Geschlechte q:

[1]) Wenn $z_\nu=\infty$ so hat man einfach f statt $f-z_\nu$ zu schreiben

$$\pi(x) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{x}{x_\nu}\right)^{\frac{x}{x_\nu} + \cdots + \frac{1}{q}\left(\frac{x}{x_\nu}\right)^q}.$$

Durch Differentiation ergibt sich für $|x| = r$, wenn $|x_\nu| = r_\nu$ gesetzt wird,

$$\left|\frac{\pi'}{\pi}\right| = \left|\sum_1^\infty \frac{x^q}{(x - x_\nu) x_\nu^q}\right| < \sum_1^\infty \left(\frac{r}{r_\nu}\right)^q \frac{1}{|r - r_\nu|}.$$

Falls r_0 so gross gewählt wird, dass $r_\nu > 2r$ für $\nu > r_0$, so wird

$$\sum_{\nu_0}^\infty \left(\frac{r}{r_\nu}\right)^q \frac{1}{|r - r_\nu|} < 2r^q \sum_{\nu_0}^\infty \frac{1}{r_\nu^{q+1}} < \text{const.}\, r^q,$$

und es ist also gemäss der Ungleichung (6) S. 16

$$\overset{+}{\log}\left|\frac{\pi'}{\pi}\right| < \text{Const.} + q \log r + \overset{+}{\log} \sum_1^{n(2r)} \left(\frac{r}{r_\nu}\right)^q \frac{1}{|r - r_\nu|}, \tag{12}$$

wo $n(r)$ die Anzahl der Punkte x_ν im Kreise $|x| < r$ bezeichnet.

Es sei nun μ eine beliebige positive Zahl. Dann gilt für $r < \varrho$:

$$\left(\frac{r}{r_\nu}\right)^q \frac{1}{|r - r_\nu|} \leq \frac{\varrho^{q+\mu}}{r_1^q} \cdot \frac{1}{\varrho^\mu |r - r_\nu|},$$

wo r_1 die kleinste der Zahlen r_ν ist, und also nach der Ungleichung (6):

$$\overset{+}{\log} \sum_1^{n(2r)} \left(\frac{r}{r_\nu}\right)^q \frac{1}{|r - r_\nu|} < \text{Const.} + (q + \mu) \overset{+}{\log} \varrho + \log n(2r) + \sum_1^{n(2r)} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{\varrho^\mu (r - r_\nu)}\right|.$$

Nun ist bekanntlich $\log n(r) = O(\log r)$ und man findet aus (12) durch Integration

$$a\left(\varrho, \frac{\pi'}{\pi}\right) < O\left((\log \varrho)^2\right) + \sum_1^{n(2\varrho)} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{\varrho^\mu (t - r_\nu)}\right| \frac{dt}{t}, \tag{13}$$

Hier ist

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{\varrho^\mu (t - r_\nu)}\right| \frac{dt}{t} < \frac{1}{\varrho_0} \int_{r_\nu - \frac{1}{\varrho^\mu}}^{r_\nu + \frac{1}{\varrho^\mu}} \log \left|\frac{1}{\varrho^\mu (t - r_\nu)}\right| dt = \frac{2}{\varrho_0 \varrho^\mu},$$

und die Summe rechts in (13) ist also höchstens gleich

$$\frac{2}{\varrho_0} \frac{n(2\varrho)}{\varrho^\mu}.$$

Wählt man nun $\mu \geq q + 1$, so strebt dieser Quotient für $\varrho > \infty$ gegen Null und es wird gemäss (13) $a\left(r, \frac{\pi'}{\pi}\right) < O\left((\log r)^2\right)$. Gemäss (11) ist nun $a\left(r, \frac{f'}{f}\right) < O\left((\log r)^2\right)$, und man schliesst vermittels des Ausdruckes (7) (S. 10) der Grösse A, dass

$$A\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1).$$

Durch eine ähnliche Überlegung könnte man zeigen, dass auch

$$B\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1). \tag{14}$$

Am Einfachsten geht dies indessen aus einem Satz hervor, den ich in meiner S. 9 zitierten Arbeit bewiesen habe. Ich zeigte dort (vgl. S. 52), dass eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung der Bedingung

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi = O(\log r)$$

genügt. Es ist hiernach

$$b\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{\pi}{2k} B\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r),$$

und also $B\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\frac{\log r}{r^k}\right)$. Hiermit ist die Beziehung (14), und folglich auch die Behauptung (10) nachgewiesen.

2. In diesem Paragraphen sollen einige Folgerungen aus der Hauptformel (II) besprochen werden. Setzt man zunächst $q = 3$, so ergibt sich dass die Fundamentalgrösse $S(r, f)$ beschränkt ist, sobald die Grösse $C(r; z)$ für drei Werte z beschränkt ist, und weiter dass die Konvergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \frac{C(r; z)}{r^{1+\lambda}} dr \qquad (\lambda > 0)$$

für drei verschiedene Werte z die Konvergenz des Integrals

$$\int^{\infty} \frac{S(r)}{r^{1+\lambda}} dr$$

zur Folge hat. Verbindet man dieses Resultat mit den im ersten Abschnitte gegebenen Sätzen (S. 9—12), so folgt:

SATZ 1. — *Es seien $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung und $r_\nu(z)e^{i\varphi_\nu(z)}$ ihre innerhalb des Winkelraumes $0 \leq \arg x \leq \frac{\pi}{k}$ fallenden z-Stellen. Wenn dann, für einen Wert $\lambda > k$, die Reihe*

$$\sum \frac{\sin k\varphi_\nu(z)}{(r_\nu(z))^\lambda} \tag{15}$$

für drei verschiedene Werte z konvergiert, so ist sie für sämtliche z konvergent. Falls $\lambda > k$, so ist auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{S(r)}{r^{1+\lambda-k}} dr$$

konvergent; im Falle $\lambda = k$ ist wiederum $S(r)$ beschränkt und also, für jedes z,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{1}{r^k}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi}) - z}\right| \sin k\varphi \, d\varphi \quad \text{und} \quad \int^{\infty}\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f(r) - z}\right| + \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f\left(re^{\frac{i\pi}{k}}\right) - z}\right|\right)\frac{dr}{r^{k+1}}$$

endlich.

Dieses Ergebnis bringt, auch in dem speziellen Fall einer ganzen Funktion f, eine wesentliche Ergänzung zu einigen älteren Sätzen. Es bezeichne $M(r)$ das Maximum von $|f(x)|$ auf dem Teilbogen des Kreises $|x| = r$, der innerhalb eines inneren Winkelraumes W' von W fällt. Unter Anwendung des s.g. SCHOTTKYschen Satzes (in der schärfsten Fassung, die ihm mittels der Modulfunktion gegeben werden kann [1]) zeigte BIEBERBACH, dass wenn

$$\lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{r^k} = \infty, \tag{16}$$

die ganze Funktion $f(x)$ im Winkelraume W der Öffnung $\frac{\pi}{k}$ alle endliche Werte z, ausser höchstens einem einzigen, unendlich oft annehmen muss.[2]) Später habe ich[3]) diesen Satz dahin verallgemeinert, dass die Reihe

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^k \tag{15'}$$

für alle endliche z mit eventueller Ausnahme eines einzigen Wertes divergent ist, falls $f(x)$ der etwas spezielleren Bedingung

$$\lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{r^k \log r} = \infty \tag{17}$$

genügt. Nun lässt sich zeigen, dass die Beziehung (16) nur dann erfüllt sein kann, wenn $S(r, f) \to \infty$ für $r \to \infty$ [4]), und wir schliessen aus Satz 1, *dass, unter der Voraussetzung* (16), *nicht nur die Reihe* (15'), *sondern sogar* (15) *für jedes endliche z, ausser höchstens einem einzigen Wert, divergieren muss.* Das Hinzutreten der Faktoren $\sin k\varphi_\nu(z)$ in den Zählern der Glieder der letztgenannten Reihe ermöglicht gewisse Schlüsse über die Argumente der z-Stellen einer meromorphen Funktion zu ziehen, die vielleicht nicht ohne Interesse sind; dies wird im folgenden an zwei Beispielen erläutert.

Beispiel 1. — Sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion *erster Ordnung*, derart dass für $I(x) > 0$

$$S(r) \to \infty \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Nach dem obigen Satz ist dann die Reihe

$$\sum \frac{\sin \varphi_\nu(z)}{r_\nu(z)}$$

divergent für jedes z ausser möglicherweise für zwei Ausnahmewerte $z = a$, $z = b$. Man nehme nun eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und ziehe die Kurve L_ε:

$$r^\varepsilon \sin \varphi = 1.$$

---

[1]) E. LANDAU: *Über den Picardschen Satz* (Vierteljahrschrift der naturf. Ges., Zürich, 1906).

[2]) L. BIEBERBACH: *Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung* (Math. Zeitschrift, B. 3, 1919), und: *Auszug aus einem Briefe des Herrn* BIEBERBACH *an den Herausgeber* (Acta math., t. 42, 1920). Vgl. auch H. MILLOUX: *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (Journ. de Math., 1924, p. 345, insb. N:o 11).

[3]) R. NEVANLINNA: *Untersuchungen über den Picardschen Satz* (Acta Soc. sc. Fennicae, T. 50, N:o 6, 1924, S. 28).

[4]) Dies wird im letzten Abschnitt vorliegender Arbeit gezeigt (Fussnote S. 37).

Ich behaupte, dass die obige Reihe auch dann für jedes $z \neq a, b$ divergent ist, wenn sämtliche Glieder gestrichen werden, die von den zwischen der reellen Achse und der Kurve L gelegenen z-Stellen herrühren. Für diese Stellen ist nämlich $r_\nu^\varepsilon \sin r\varphi_\nu < 1$, und die entsprechende Teilsumme

$$\sum \frac{\sin \varphi_\nu}{r_\nu} < \sum \frac{1}{r_\nu^{1+\varepsilon}};$$

diese letzte Reihe ist aber *konvergent*, da die Funktion f nach Voraussetzung von *erster* Ordnung ist.

Eine Funktion der betrachteten Art ist z. B. $I(ix)$. Man bestätigt mittels der STIRLINGschen Formel, dass sie in der oberen Halbebene der Bedingung

$$S(r) \sim \text{const.} \log r$$

genügt und dass ihre z-Stellen, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis, asymptotisch in dem von der Kurve L_ε und den Geraden $\sin \varphi = \varepsilon$ begrenzten Gebiete liegen, ausser für $z = 0, \infty$, welche Werte sie in der oberen Halbebene überhaupt nicht annimmt.

Beispiel 2. — Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, die wenigstens vom *Divergenztypus* der ganzzahligen Ordnung q ist; d. h.: wenn $T(r)$ die in meiner S. 9 angegebenen Arbeit eingeführte Fundamentalgrösse bezeichnet (vgl. die Fussnote S. 9 der vorliegenden Arbeit), so soll das Integral

$$\int^\infty \frac{T(r)}{r^{q+1}} dr$$

divergent sein. Wenn f insbesondere eine ganze Funktion ist, so ist diese Bedingung damit gleichbedeutend, dass das Integral

$$\int^\infty \frac{\log M(r)}{r^{q+1}} dr$$

divergiert, wobei $M(r)$ das Maximum von $|f|$ auf dem Kreise $|x| = r$ bezeichnet. Man weiss, dass auch die Reihe

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^q \tag{18}$$

dann divergent sein muss für jedes z ausser möglicherweise zwei Werte (vgl. meine S. 9 zitierte Arbeit, S. 64). Ich nehme nun an, dass zwei solche Ausnahmewerte $z = a$, $z = b$ tatsächlich existieren, und weiter, dass die z-Stellen für einen dritten Wert $z = c$ hauptsächlich in die Umgebung der q Geraden

$$\sin q\varphi = 0 \tag{19}$$

fallen derart, dass die Reihe

$$\sum \frac{|\sin q\varphi_\nu(z)|}{(r_\nu(z))^q}$$

für $z = c$ konvergent ist. Da nun diese Reihe für die drei Werte $z = a, b, c$ konvergiert, so schliesst man nach Satz 1, dass sie für alle Werte z konvergieren muss. Es liegen also nicht nur die c-Stellen, sondern überhaupt alle z-Stellen (ausser für $z = a, b$) vorzugsweise in der Nähe der Geraden

(19), derart dass diejenige Teilsumme der Reihe (18), welche den in den Winkelräumen $|\sin q\varphi| < \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ gelegenen Stellen entspricht, divergent ist, während die übrigbleibende Teilsumme konvergiert.

Man könnte ferner zeigen, dass eine solche meromorphe Funktion höchstens vom *Normaltypus* der Ordnung r^q ist, d. h. dass

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{T(r)}{r^q} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^q}$$

endlich ist [1]). Ein Beispiel einer Funktion, die den obigen Voraussetzungen entspricht, ist $f = e^{iz^q}$.

3. Aus der Hauptformel (II) können indessen einige Folgerungen gezogen werden, die wesentlich schärfer als die im letzten Paragraphen besprochenen sind. Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung, die im Winkelraume $W\left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{k}\right)$ der Bedingung $S(r) \to \infty$ für $r \to \infty$ genügt. Nach der ersten Hauptformel (I) ist dann für *jedes* z

$$\frac{A(r;z) + B(r;z)}{S(r)} + \frac{C(r;z)}{S(r)} = 1 + \varepsilon(r), \quad \text{wo} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Durch Division mit S und Elimination der Grössen C findet man dann aus der zweiten Hauptformel (II), dass

$$\sum_1^q \frac{A(r;z_\nu) + B(r;z_\nu)}{S(r)} < 2 - \frac{C_1(r)}{S(r)} + \varepsilon(r).$$

Bezeichnet man mit $\Theta(z)$ die Zahl

$$\Theta(z) = 1 - \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{C(r;z)}{S(r;z)} = \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{A(r;z) + B(r;z)}{S(r)} \qquad (0 < \Theta \leq 1),$$

so wird also a fortiori

$$\sum_1^q \Theta(z_\nu) \leq 2. \tag{20}$$

Dieses Ergebnis besteht nun wie gross die Anzahl q auch gewählt wird, und man schliesst folglich zunächst:

Die Menge der Werte z, für welche $\Theta(z)$ positiv ist, ist abzählbar.

Diese Bemerkung berechtigt uns jeden Wert z, für welchen $\Theta(z)$ nicht gleich Null ist, als einen *Ausnahmewert* der Funktion f im Winkelraume W zu bezeichnen. Die entsprechende Zahl $\Theta(z)$ benennen wir das *Gewicht* des Ausnahmewertes. Aus der Ungleichung (20) folgt nun weiter:

SATZ 2. — *Sei f eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung, die im Winkelraume W der Bedingung*

$$\lim_{r=\infty} S(r) = \infty$$

genügt. Die Funktion besitze in W die Ausnahmewerte $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ Dann ist die aus den Gewichten dieser Werte gebildete Reihe

$$\sum \Theta(z_\nu)$$

konvergent und ihre Summe höchstens gleich 2.

[1]) Dies kann mittels der im letzten Abschnitt dieser Arbeit gegebenen kanonischen Darstellung einer meromorphen Funktion in einem Winkelraum geschehen.

Aus diesem Satz geht u. a. folgendes hervor:

Wenn q eine ganze Zahl >3 bezeichnet, so kann die Ungleichung

$$\Theta(z) > \frac{2}{q} \quad \left(\text{oder also } \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{C(r;z)}{S(r)} < 1 - \frac{2}{q}\right)$$

höchstens für $q-1$ Werte z bestehen.

Wenn $f(x)$ insbesondere einen Ausnahmewert z_0 vom Gewichte Eins hat, d. h. wenn

$$\Theta(z_0) = 1 \quad \left(\lim_{r=\infty} \frac{C(r;z_0)}{S(r)} = 0\right),$$

so kann die Ungleichung

$$\Theta(z) > \frac{1}{q-1} \quad \left(\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{C(r;z)}{S(r)} < 1 - \frac{1}{q-1}\right)$$

höchstens für $q-2$ verschiedene Werte $z \neq z_0$ bestehen.

Hat $f(x)$ schliesslich zwei Ausnahmewerte vom Gewichte Eins, wofür also

$$\Theta(z) = 1 \left(\lim_{r=\infty} \frac{C}{S} = 0\right),$$

so ist für alle übrigen Werte z

$$\Theta(z) = 0 \left(\lim_{r=\infty} \frac{C}{S} = 1\right).$$

Wenn die z-Stellen einer meromorphen Funktion von endlicher Ordnung für *drei* Werte z bekannt sind, so führen die obigen Ergebnisse, insbesondere wenn sie mit den analogen, in meiner S. 9 zitierten Arbeit gegebenen Sätzen verbunden werden, zu ziemlich genauen Aussagen über sowohl die absoluten Beträge als auch die Argumente der übrigen z-Stellen. Um die Art der Folgerungen, die aus dem obigen gezogen werden können, zu beleuchten, untersuchen wir im folgenden etwas eingehender einen besonderen Fall.

Beispiel. — Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung, die den nachstehenden Bedingungen genügt:

1:o. — Wenn $n(r;z)$ die Anzahl der z-Stellen der Funktion im Kreise $|x| < r$ angibt, so existiere ein Wert $z = z_0$ derart, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{n(r;z_0)}{r^{q+1}} dr$$

für ein gegebenes, ganzzahliges q divergent ist.

2:o. — Bezeichnet $n_\varepsilon(r;z)$ die Anzahl der in den Sektoren

$$|\sin q\varphi| < \varepsilon, \quad |x| < r \tag{21}$$

gelegenen z-Stellen, so sei für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{r=\infty} \frac{n_\varepsilon(r;z_0)}{n(r;z_0)} = 1.$$

3:o. — Es existieren zwei Werte z_1 und z_2, für welche

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r;z_1)}{n(r;z_0)} = \lim_{r=\infty} \frac{n(r;z_2)}{n(r;z_0)} = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir:

Die Beziehungen

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon(r;z)}{n(r;z)} = 1, \tag{22}$$

$$\lim_{r=\infty} \frac{n(r;z)}{n(r;z_0)} < 1 < \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon(r;z)}{n(r;z_0)} \tag{22'}$$

bestehen für jedes $z \neq z_1, z_2$.

Zum Beweise betrachten wir die Ausdrücke

$$E(r;z) = 2q \int_{\varrho_0}^{r} \frac{e(t;z)}{t^{q+1}} \left(1 + \frac{t^{2q}}{r^{2q}}\right) dt, \quad G(r;z) = 2q \int_{\varrho_0}^{r} \frac{n(t;z)}{t^{q+1}} \left(1 + \frac{t^{2q}}{r^{2q}}\right) dt,$$

die in derselben Weise mittels der Summe

$$c(r,z) = \sum_{\varrho_0 < r_\nu < r} |\sin q\varphi_\nu(z)|$$

bzw. der Anzahl $n(r;z)$ gebildet sind, wie die Fundamentalgrösse C mittels c (vgl. S. 10). Man bemerke zunächst, dass, gemäss der Voraussetzung 1:o,

$$G(r;z_0) \to \infty \quad \text{für} \quad r \to \infty.$$

Ferner ist nach 2:o und 3:o

$$\lim_{r=\infty} \frac{e(r;z_\nu)}{n(r;z_0)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2,$$

und also auch

$$\lim_{r=\infty} \frac{E(r;z_\nu)}{G(r;z_0)} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2. \tag{23}$$

Nach dieser Vorbereitung bringen wir die Grundformeln (I) und (II) im Winkelraum $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{q}$ zur Anwendung. Es ergibt sich für jedes $z \neq z_1, z_2$:

$$C(r;z) + O(1) < S(r) < C(r;z_0) + C(r;z_1) + C(r;z_2) + O(1).$$

Zu dieser Ungleichung addieren wir die analogen, in den Winkeln $\frac{\nu\pi}{q} < \varphi < \frac{(\nu+1)\pi}{q}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, 2q-1)$ geltenden Beziehungen und finden so

$$E(r;z) < \sum_{\nu=0}^{2} E(r;z_\nu) + O(1).$$

Gemäss (23) gilt demnach die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} \frac{E(r;z)}{G(r;z_0)} = 0 \tag{24}$$

für *jedes* z.

Um weiter zu kommen, brauchen wir jetzt nachstehenden, in meiner oben angegebenen Arbeit (vgl. S. 68) bewiesenen Satz:

Wenn eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung der Bedingung 3:o *genügt, so gilt für jedes* $z \neq z_1, z_2$

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r;z)}{N(r;z_0)} = 1, \tag{25}$$

wo

$$N(r;z) = \int_{\varrho_0}^{r} \frac{n(t;z)}{t}\,dt.$$

Schreibt man nun die Grösse G in der Form

$$G(r;z) = 2q\int_{\varrho_0}^{r}\left(\frac{1}{t^q} + \frac{t^q}{r^{2q}}\right)dN(t;z) = \frac{4qN(r;z)}{r^q} + 2q^2\int_{\varrho_0}^{r}\frac{N(t;z)}{t^{q+1}}\left(1 - \frac{t^{2q}}{r^{2q}}\right)dt,$$

so schliesst man aus (25), dass auch

$$\lim_{r=\infty}\frac{G(r;z)}{G(r;z_0)} = 1 \tag{26}$$

für $z \neq z_1, z_2$ gilt. Hieraus lässt sich sogleich eine weitere Folgerung ziehen. Es bezeichne G_ε den Teil von G, der von den in den Sektoren (21) gelegenen z-Stellen herrührt, also den Ausdruck

$$G_\varepsilon(r;z) = 2q\int_{\varrho_0}^{r}\frac{n_\varepsilon(t;z)}{t^{q+1}}\left(1 + \frac{t^{2q}}{r^{2q}}\right)dt.$$

Für die ausserhalb (21) befindlichen Stellen ist $|\sin q\varphi_\nu| > \varepsilon$, und es ist also

$$e(r;z) \geq \left(n(r;z) - n_\varepsilon(r;z)\right)\varepsilon$$

und folglich

$$G(r;z) - G_\varepsilon(r;z) \leq \frac{1}{\varepsilon}E(r;z).$$

Gemäss (24) schliesst man hieraus, dass

$$\lim_{r=\infty}\frac{G(r;z) - G_\varepsilon(r;z)}{G(r;z_0)} = 0 \tag{27}$$

für jedes z ist, und die Beziehung (26) zeigt schliesslich, dass

$$\lim_{r=\infty}\frac{G_\varepsilon(r;z)}{G(r;z_0)} = \lim_{r=\infty}\frac{G_\varepsilon(r;z)}{G(r;z)} = 1 \quad \text{für} \quad z \neq z_1, z_2. \tag{28}$$

Diese Formeln können aber nur dann bestehen, wenn die behaupteten Ungleichungen (22) und (22′) richtig sind.

Speziellere Voraussetzungen über die Verteilung der z_0-Stellen der oben betrachteten Funktion erlauben entsprechend genauere Schlüsse über die übrigen z-Stellen zu ziehen. So kann man z. B. folgendes zeigen:

Die meromorphe Funktion f genüge, ausser den unter 1:0, 2:0 *und* 3:0 *angegebenen Voraussetzungen, noch folgender Bedingung:*

Es bezeichne $n_\varepsilon^{(\nu)}(r;z)$ die Anzahl der z-Stellen, die innerhalb desjenigen der Sektoren (21) *fallen, dessen Halbierende der Strahl $\varphi = \frac{\nu\pi}{q}$ ist ($\nu = 0, 1, \ldots, 2q-1$). Es sei dann*

(29) $$\lim_{r=\infty} \frac{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z_0)}{n(r; z_0)} = k_\nu,$$

wo $k_\nu > 0$ *und*

$$\sum_0^{2q-1} k_\nu = 1.$$

Dann gilt für jedes $z \neq z_1, z_2$:

(30) $$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z)}{n(r; z)} \leq k_\nu < \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z)}{n(r; z)},$$

(30′) $$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z)}{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z_0)} \leq 1 \leq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z)}{n_\varepsilon^{(\nu)}(r; z_0)}.$$

Wir führen den Beweis für den Wert $\nu = 0$ und setzen zu diesem Zweck

$$H(r; z) = 2q \int_{\varrho_0}^{r} \frac{h(t; z)}{t^{q+1}} \left(1 + \frac{t^{2q}}{r^{2q}}\right) dt;$$

hier ist

$$h(t; z) = \sum_{\varrho_0 < r_\nu < r} \cos q\varphi_\nu(z), \quad \text{wo} \quad |\varphi_\nu| < \frac{\pi}{2q}.$$

Man beweist zunächst leicht, indem man die Voraussetzungen 2:o und (29) beachtet, dass

$$h(t; z_0) \sim n_\varepsilon^{(0)}(t; z_0) \sim k_0 n(t; z_0),$$

und also:

(31) $$H(r; z_0) \sim G_\varepsilon^{(0)}(r; z_0) \sim k_0 G(r; z_0),$$

wobei $G_\varepsilon^{(0)}$ der von den innerhalb des Sektors S_0 ($|q\varphi| \leq \arcsin \varepsilon$) liegenden z_0-Stellen herrührende Teil von G_ε ist.

Wendet man nun die zweite Hauptungleichung im Winkelraum S_0 an, so folgt, da nach 3:o

$$\lim_{r=\infty} \frac{H(r; z_\nu)}{H(r; z_0)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2),$$

dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{H(r; z)}{H(r; z_0)} = 1$$

für alle Werte $z \neq z_1, z_2$ gilt. Für dieselben Werte z ist dann infolge (31) und (26)

(32) $$H(r; z) \sim k_0 G(r; z_0) \sim k_0 G(r; z).$$

Wir behaupten schliesslich, dass

(33) $$H(r; z) \sim G_\varepsilon^{(0)}(r; z) \qquad (z \neq z_1, z_2).$$

In der Tat ist zunächst

$$h(r; z) < (n - n_\varepsilon) + n_\varepsilon^{(0)},$$

und also

$$H(r; z) \leq \left(G(r; z) - G_\varepsilon(r; z)\right) + G_\varepsilon^{(0)}(r; z),$$

$$\frac{G_\varepsilon^{(0)}(r; z)}{H(r; z)} \geq 1 - \frac{G(r; z) - G_\varepsilon(r; z)}{H(r; z)}.$$

Nach (32) und (27) strebt nun das letzte Glied für $r \to \infty$ gegen Null und es ist demnach

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{G_\varepsilon^{(0)}(r;z)}{H(r;z)} \geqq 1. \tag{34}$$

Eine Abschätzung in umgekehrter Richtung ergibt sich durch folgende Erwägung: Es sei θ eine beliebige Zahl des Intervalles $0 < \theta < 1$ und $\varphi = \varphi_0$ eine Wurzel der Gleichung $\cos q\varphi = \theta$; die Zahl $|\sin q\varphi_0|$ bezeichnen wir kurz mit ε_1. Es ist dann

$$h(r;z) > \theta n_{\varepsilon_1}^{(0)}(r;z) \geq \theta\left(n_\varepsilon^{(0)} - (n - n_{\varepsilon_1})\right) > \theta n_\varepsilon^{(0)}(r;z) - \left(n(r;z) - n_{\varepsilon_1}(r;z)\right),$$

und also

$$H(r;z) > \theta G_\varepsilon^{(0)}(r;z) - \left(G(r;z) - G_{\varepsilon_1}(r;z)\right),$$

oder

$$\frac{G_\varepsilon^{(0)}(r;z)}{H(r;z)} \leq \frac{1}{\theta} + \frac{G(r;z) - G_{\varepsilon_1}(r;z)}{\theta H(r;z)}.$$

Hier verschwindet, wegen (32) und (27), das letzte Glied für $r \to \infty$, und es folgt, dass

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{G_\varepsilon^{(0)}(r;z)}{H(r;z)} \leq \frac{1}{\theta};$$

dieses Ergebnis besteht aber, wie nahe an Eins θ auch gewählt werden mag, und es muss also

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{G_\varepsilon^{(0)}}{H} \leq 1 \tag{35}$$

für jedes $z \neq z_1, z_2$ sein. Die zu beweisende Beziehung (33) folgt nunmehr aus (34) und (35).

Durch Verbindung der Formeln (33) und (32) erhalten wir schliesslich die für alle $z \neq z_1, z_2$ gültige Beziehung

$$G_\varepsilon^{(0)}(r;z) \sim k_0 G(r;z_0) \sim k_0 G(r;z),$$

woraus die Behauptungen (30) und (30′) unmittelbare Folgerungen sind.

III

In diesem letzten Abschnitt werden wir, von der Integralformel (2) S. 5 ausgehend, eine innerhalb eines gegebenen Winkelraumes gültige Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung herleiten.

Es sei $f(x)$ in jedem endlichen Punkt der oberen Halbebene $I(x) > 0$ meromorph. Wenn die zugehörige Fundamentalgrösse $S(r)$ zunächst *beschränkt* angenommen wird, so ergibt sich die in Aussicht gestellte Darstellung direkt aus der Formel (vgl. S. 5)

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{\pi}\int_{-\varrho}^{+\varrho} \log|f(t)|\, r\sin\varphi \left\{\frac{1}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} - \frac{1}{\varrho^2+\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 t^2 - 2rt\cos\varphi}\right\} dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log|f(\varrho e^{i\vartheta})| \frac{4\varrho r(\varrho^2-r^2)\sin\varphi\sin\vartheta}{(\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta-\varphi))(\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\vartheta+\varphi))} d\vartheta \tag{1}$$

$$-\sum_{|a_\mu|<\varrho}\log\left|\frac{x-\bar{a}_\mu}{x-a_\mu}\right|\left|\frac{\varrho^2-\bar{a}_\mu x}{\varrho^2-a_\mu x}\right| + \sum_{|b_\nu|<\varrho}\log\left|\frac{x-\bar{b}_\nu}{x-b_\nu}\right|\left|\frac{\varrho^2-\bar{b}_\nu x}{\varrho^2-b_\nu x}\right| \qquad (x = re^{i\varphi})$$

durch den Grenzübergang $\varrho \to \infty$. Hierbei hat man nachstehende Folgerungen aus der vorausgesetzten Beschränktheit der Grösse S zu beachten:

1:o. — Das Integral

$$\int^{\infty} \frac{|\log|f(t)|| + |\log|f(-t)||}{t^2} dt$$

ist konvergent.

2:o. — Es existiert der endliche Grenzwert

$$\lim_{\varrho=\infty}\frac{1}{\varrho}\int_0^{\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(\varrho e^{i\vartheta})-z}\right| \sin\vartheta\, d\vartheta = \eta(z).$$

3:o. — Die Reihen

$$\sum\frac{\sin\alpha_\mu}{|a_\mu|}, \quad \sum\frac{\sin\beta_\nu}{|b_\nu|}$$

und das Integral

$$\int^{\infty} \frac{c(t;z)}{t^2} dt$$

LABORATORY

sind konvergent, und es ist also

$$\lim_{t=\infty} \frac{c(t;z)}{t} = 0.$$

Man findet nun:

$$\left| \int_{-\varrho}^{+\varrho} \log|f(t)| \frac{r\sin\varphi}{\varrho^2 + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 t^2 - 2rt\cos\varphi}\, dt \right| \leq \frac{r}{(\varrho - r)^2} \int_{-\varrho}^{+\varrho} |\log|f(t)||\, dt = \frac{r}{\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)^2} \int_{-\varrho}^{+\varrho} \frac{|\log|f(t)||}{\varrho^2}\, dt.$$

Aus 1:o folgt leicht, dass das letzte Integral für $\varrho \to \infty$ verschwindet, und es ergibt sich also als Grenzwert des ersten Gliedes rechts in (1):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log|f(t)| \frac{r\sin\varphi}{r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi}\, dt.$$

Das zweite Glied zerlegen wir in zwei Teile, indem wir $\log|f| = \overset{+}{\log}|f| - \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f}\right|$ schreiben. Für den ersten Teil hat man den asymptotischen Ausdruck

$$\frac{2r\sin\varphi}{\pi}(1 + \varepsilon(\varrho))\frac{1}{\varrho}\int_0^{\pi} \overset{+}{\log}|f(\varrho e^{i\vartheta})| \sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (\varepsilon \to 0 \quad \text{für} \quad \varrho \to \infty),$$

der wegen 2:o für $\varrho \to \infty$ gegen den endlichen Wert $\frac{2\eta(\infty)}{\pi} r\sin\varphi$ strebt. Der zweite Teil nähert sich wiederum $\frac{2\eta(0)}{\pi} r\sin\varphi$, und das ganze zweite Glied also dem Grenzwert

$$\frac{2\eta}{\pi} r\sin\varphi,$$

wobei $\eta = \eta(\infty) - \eta(0)$.

Die erste, von den Nullstellen $a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu}$ herrührende Summe rechts in (1) schreiben wir in der Form

$$(2) \qquad \sum_{|a_\mu|<\varrho} \log\left|\frac{x - \bar{a}_\mu}{x - a_\mu}\right| - \sum_{|a_\mu|<\varrho} \log\left|\frac{\varrho^2 - a_\mu x}{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}\right|.$$

Hier ist für $|x| = r < \varrho$:

$$\left|\frac{\varrho^2 - a_\mu x}{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}\right| - 1 \leq \frac{|\varrho^2 - a_\mu x| - |\varrho^2 - \bar{a}_\mu x|}{\varrho^2 - |a_\mu| r} \leq \frac{2r|a_\mu|\sin\alpha_\mu}{\varrho(\varrho - r)} \leq \frac{2\varrho r}{\varrho - r} \cdot \frac{\sin\alpha_\mu}{\varrho}$$

und also

$$0 \leq \log\left|\frac{\varrho^2 - a_\mu x}{\varrho^2 - \bar{a}_\mu x}\right| \leq \log\left(1 + \frac{2\varrho r}{\varrho - r}\frac{\sin\alpha_\mu}{\varrho}\right) \leq \frac{2r}{1 - \frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{\sin\alpha_\mu}{\varrho};$$

die zweite Summe in (2) ist demnach kleiner als

$$\frac{2r}{1 - \frac{r}{\varrho}} \cdot \frac{c(\varrho;0)}{\varrho},$$

und strebt gemäss 3:o mit wachsendem ϱ gegen Null. Der ganze Ausdruck (2) hat also als Grenzwert die unendliche Reihe

$$\sum \log\left|\frac{x - a_\mu}{x - a_\mu}\right|,$$

die wegen 3:o in der ganzen endlichen Ebene konvergent ist.

Die letzte Summe rechts in (1) ergibt schliesslich als Grenzwert die Reihe

$$\sum \log \left| \begin{matrix} x & b_\nu \\ x & b_\nu \end{matrix} \right|,$$

und wir haben also zusammenfassend das Ergebnis:

SATZ 1. — *Es sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt der oberen Halbebene meromorphe Funktion mit den Nullstellen a_μ und Polen b_ν. Wenn dann die zugehörige Fundamentalgrösse $S(r)$ beschränkt ist, so existiert der endliche Grenzwert*

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi \log |f(re^{i\vartheta})| \sin \vartheta \, d\vartheta = \eta,$$

und es ist für jeden Punkt $x = re^{i\varphi}$ der betrachteten Halbebene:

$$(3) \quad \log |f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \log |f(t)| \frac{r \sin \varphi}{r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi} + \frac{2\eta}{\pi} r \sin \varphi - \sum \log \left| \frac{x - a_\mu}{x - a_\mu} \right| + \sum \log \left| \frac{x - b_\nu}{x - b_\nu} \right|.$$

Dieses Ergebnis enthält als unmittelbares Korollar einen Satz, den ich früher als eine Erweiterung eines bekannten PHRAGMÉN-LINDELÖFschen Satzes bewiesen habe.[1]) Nimmt man nämlich an, dass $|f(x)| < 1$ auf der reellen Achse und

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi \log |f(re^{i\vartheta})| \sin \vartheta \, d\vartheta = 0,$$

so ist zunächst $\eta \leq 0$. Wenn ferner $f(x)$ in der oberen Halbebene *regulär* angenommen wird, so ist $S(r)$ beschränkt und sämtliche Glieder rechts in (3) sind nichtpositiv; es ist demnach $\log |f| \leq 0$, $|f| \leq 1$ in *jedem* Punkt dieser Halbebene.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Falle über, wo $S(r)$ mit wachsendem r selbst unbeschränkt wächst. Es existiere andererseits eine so grosse (ganze) Zahl $q > 0$, dass das Integral

$$\int^\infty \frac{S(r)}{r^{q+1}} dr$$

konvergent ist, und also

$$\lim_{r=\infty} \frac{S(r)}{r^q} = 0.$$

Wir stellen wieder zunächst einige Konsequenzen aus dieser Voraussetzung zusammen, die wir im folgenden nötig haben und die sämtlich unmittelbare Folgerungen der am Ende des ersten Abschnittes gegebenen Hilfssätze sind.

1:o. — Die Integrale

$$(4) \quad \int^\infty \frac{|\log |f(t)|| + |\log |f(-t)||}{t^{q+2}} dt, \quad \int^\infty \frac{a(t;z) + a(-t;z)}{t^{q+2}} dt$$

sind konvergent.

[1]) Vgl. R. NEVANLINNA: *Über die Anwendung des Poissonschen Integrals zur Untersuchung der Singularitäten analytischer Funktionen* (Ve Congrès des Mathématiciens scandinaves, Helsingfors 1922) und die S. 6 zitierte Arbeit von F. und R. NEVANLINNA.

2:o. — Es ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{B(r;z)}{r^q} = 0.$$

Schreibt man also $|\log|f||^{+} = \log^{+}|f| + \log^{+}\left|\frac{1}{f}\right|$, so folgt insbesondere, dass

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r^{q+1}} \int_0^{\pi} |\log|f(re^{i\vartheta})|| \sin\vartheta \, d\vartheta = 0.$$

3:o. — Das Integral

$$\int^{\infty} \frac{c(r;z)}{r^{q+2}} dr$$

und die Reihen

$$(4') \qquad \sum \frac{\sin\alpha_\mu}{|a_\mu|^{q+1}}, \quad \sum \frac{\sin\beta_\nu}{|b_\nu|^{q+1}}$$

sind konvergent.

Nach diesen Vorbereitungen schreiben wir, wie im ersten Abschnitte,

$$\log|f| = U_0 + U_1,$$

wo U_0 die Funktion (1) S. 4 bezeichnet und U_1 die im Satze S. 6 angegebene, im Kreise $|x| < \varrho_0$ konvergente trigonometrische Entwicklung hat. Wir werden im folgenden die in (3) (S. 6) gegebenen Ausdrücke der Koeffizienten c_ν durch den Grenzübergang $\varrho \to \infty$ transformieren.

Das *erste Glied* auf der rechten Seite der Formel (3) (S. 6) schreiben wir in der Form

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\log|f(t)| + \log|f(-t)|}{t^{\nu+1}} dt - \frac{1}{\pi\varrho^\nu} \int_{\varrho_0}^{\varrho} (\log|f(t)| + \log|f(-t)|) \left(\frac{t}{\varrho}\right)^\nu \frac{dt}{t}.$$

Der absolute Betrag des letzten Gliedes ist kleiner als

$$\frac{1}{\pi\varrho^\nu} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{|\log|f(t)|| + |\log|f(-t)||}{t} dt = \frac{a(\varrho;0) + a(\varrho;\infty) + a(-\varrho;0) + a(-\varrho;\infty)}{\pi\varrho^\nu}$$

und strebt also, wegen der Konvergenz des zweiten Integrals in (4), mit wachsendem ϱ gegen Null *für jedes* $\nu > q+1$. Der ganze Ausdruck (5) hat also den Grenzwert

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\log|f(t)| + \log|f(-t)|}{t^{\nu+1}} dt \quad \text{für} \quad \nu \geq q+1.$$

Das *zweite Glied* rechts in (3) (S. 6) strebt gemäss 2:o für $\varrho \to \infty$ gegen Null, falls $\nu \geq q+1$.

Das *dritte*, von den Nullstellen a_μ herrührende Glied schreibe man:

$$\frac{2}{\nu} \sum_{\varrho_0 \leq |a_\mu| < \varrho} \frac{\sin\nu\alpha_\mu}{|a_\mu|^\nu} - \frac{2}{\nu} \sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < \varrho} \frac{|a_\mu|^\nu \sin\nu\alpha_\mu}{\varrho^{2\nu}}.$$

Es ist für $0 < \alpha < \pi$

$$\left|\frac{\sin\nu\alpha}{\sin\alpha}\right| < \nu,$$

und also

$$\frac{1}{\nu} \left| \sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < \varrho} \frac{|a_\mu|^\nu \sin\nu\alpha_\mu}{\varrho^{2\nu}} \right| < \frac{1}{\varrho^\nu} \sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < \varrho} \sin\alpha_\mu = \frac{c(\varrho;0)}{\varrho^\nu}.$$

Nach 3:o verschwindet dieser Quotient aber für $\varrho \to \infty$, sobald $\nu > q+1$, und das betrachtete Glied geht also über in

$$\frac{2}{\nu} \sum_{|a_\mu| > \varrho_0} \frac{\sin \nu \alpha_\mu}{|a_\mu|^\nu} \quad \text{für jedes} \quad \nu > q+1.$$

In derselben Weise findet man schliesslich als Grenzwert des letzten, von den Polen b herrührenden Gliedes der Formel (3) (S. 6) die Summe

$$\frac{2}{\nu} \sum_{|b_\mu| > \varrho_0} \frac{\sin \nu \beta_\mu}{|b_\mu|^\nu} \qquad (\nu > q+1).$$

Zusammenfassend ergibt sich also für den Koeffizienten c_ν die für $\nu > q+1$ gültige Darstellung

$$c_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{\log|f(t)| + \log|f(-t)|}{t^{\nu+1}} dt - \frac{2}{\nu} \sum_{|a_\mu| \geq \varrho_0} \frac{\sin \nu \alpha_\mu}{|a_\mu|^\nu} + \frac{2}{\nu} \sum_{|b_\mu| \geq \varrho_0} \frac{\sin \nu \beta_\mu}{|b_\mu|^\nu}. \tag{6}$$

Man betrachte nun andererseits den Ausdruck $U_{q+1}(x)$, der aus der rechten Seite der Formel (1) (S. 29) formal so hervorgeht, dass man $\varrho = \infty$ setzt, und von dem Kerne des Integrals und den Gliedern der von den Nullstellen und Polen herrührenden Summen die $q+1$ ersten Glieder ihrer trigonometrischen Entwicklungen subtrahiert, d. h. den Ausdruck:

$$U_{q+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| > \varrho_0} \log|f(t)| K_q(x,t)|dt| + \sum_{|a_\mu| \geq \varrho_0} \log|D_q(x, a_\mu)| - \sum_{|b_\mu| \geq \varrho_0} \log|D_q(x, b_\mu)|, \tag{7}$$

wo

$$K_q(x,t) = \frac{r \sin \varphi}{r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi} - \sum_1^q \frac{r^\nu \sin \nu\varphi}{t^{\nu+1}} = I\left(\frac{x^{q+1}}{t^{q+1}(t-x)}\right) \qquad (x = re^{i\varphi}),$$

und

$$D_q(x,a) = \frac{E\left(\frac{x}{a}, q\right)}{E\left(\frac{x}{a}, q\right)};$$

hier bezeichnet $E(u,q)$, wie gewöhnlich, den Weierstrassschen Primfaktor

$$E(u,q) = (1-u)\, e^{u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^q}{q}}.$$

Man bestätigt unschwer, dass das Integral und die Summen rechts in (7) wegen der vorausgesetzten Konvergenz des Integrals (4) und der Reihen (4′) in jedem inneren Bereich der oberen Halbebene absolut und gleichmässig konvergieren. U_{q+1} definiert also eine in dieser Halbebene harmonische Funktion, die in jedem Punkt (ausser a_μ und b_μ) regulär ist. Auf dem Segment $|x| < \varrho_0$ der reellen Achse verschwindet sie und lässt sich hierüber in die untere Halbebene fortsetzen. Speziell ist sie im ganzen Kreise $|x| < \varrho_0$ regulär und lässt sich also in eine daselbst konvergierende trigonometrische Reihe entwickeln. Es ergibt sich aus (7):

$$U_{q+1}(x) = \sum_{q+1}^{\infty} c_\nu r^\nu \sin \nu\varphi,$$

wo die Koeffizienten c_ν ebenfalls die Werte (6) haben. Man schliesst also, dass

$$U_1(re^{i\varphi}) = \sum_1^q c_\nu r^\nu \sin \nu\varphi + U_{q+1}(re^{i\varphi})$$

zunächst für $|x| < \varrho_0$ gilt; aus dem Prinzip der harmonischen Fortsetzung folgt aber weiter, dass die Gültigkeit dieser Gleichheit sich auf *jeden Punkt der oberen Halbebene* erstreckt.

Für die meromorphe Funktion $f(x)$ ergibt sich schliesslich die in der ganzen oberen Halbebene gültige Darstellung

$$\log|f(re^{i\varphi})| = U_0(re^{i\varphi}) + U_{q+1}(re^{i\varphi}) + \sum_1^q c_\nu r^\nu \sin \nu\varphi, \tag{8}$$

wo U_0 und U_{q+1} durch (1) S. 4 bzw. (7) definiert sind. Wir bezeichnen nun mit $f_0(x)$ die analytische Funktion, die durch die Gleichheit

$$\log|f_0| = U_0 \tag{9}$$

bis auf einen Faktor $e^{i\omega}$ eindeutig bestimmt ist; addiert man dann zu beiden Seiten der Formel (8) die konjugierten harmonischen Funktionen, so kann unser Ergebnis in nachstehender Weise ausgesprochen werden:

SATZ 2. — *Es sei $f(x)$ eine in jedem endlichen Punkt der Halbebene $I(x) \geqq 0$ meromorphe Funktion und $S(r)$ die zu ihr gehörige Fundamentalgrösse. Wenn das Integral*

$$\int^\infty \frac{S(r)}{r^{q+1}} dr$$

für ein positives, ganzzahliges q konvergent ist, so ist

$$f(x) = f_0(x)\, e^{iP_q(x) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|\geq\varrho_0} \log|f(t)| \left(\frac{x}{t}\right)^{q+1} \frac{dt}{t-x}} \cdot \frac{\prod\limits_{|a_\mu|>\varrho_0} D_q(x, a_\mu)}{\prod\limits_{|b_\mu|>\varrho_0} D_q(x, b_\mu)}. \tag{10}$$

Hier ist f_0 die durch die Gleichung (9) bestimmte, ausserhalb des Kreises $|x| = \varrho_0$ (einschliesslich des Unendlichkeitspunktes) reguläre analytische Funktion, P_q ein Polynom vom Grade $\leq q$, dessen Koeffizienten reell sind, und D_q gleich

$$D_q(x, a) = \frac{E\left(\frac{x}{a}, q\right)}{E\left(\frac{x}{a}, q\right)}.$$

Wir beweisen noch folgenden ergänzenden

ZUSATZ. — *Die Darstellung (10) ist auch im Falle $q = 0$ gültig, falls $S(r)$ beschränkt ist und dazu:*

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi |\log|f(re^{i\vartheta})| \sin\vartheta\, d\vartheta = 0 \tag{11}$$

Ist nämlich S beschränkt, so gilt die Darstellung (3) S. 31, wo nach der Voraussetzung (11) η jetzt $= 0$ ist. Diese Formel ist aber mit der obigen (10) identisch, falls $q = 0$ gesetzt wird.

Aus der Darstellung (10) geht die wichtige Tatsache hervor, dass eine in einer Halbebene meromorphe Funktion von endlicher Ordnung k durch ihre Nullstellen und Pole und die Randwerte ihres absoluten Betrages bis auf einen Faktor e^{iP_q}, wo P_q ein Polynom vom Grade $q<k$ bezeichnet, *eindeutig* bestimmt ist. Eine Folgerung dieser Tatsache ist, dass falls die Ordnung k einer meromorphen Funktion in einem Winkelraum der Öffnung $\frac{\pi}{h}$ *kein Multipel von* h *ist*, die asymptotischen Eigenschaften der Funktion im Wesentlichen bestimmt sind, wenn das Verhalten der Fundamentalgrössen A und C für *zwei* Werte z bekannt ist. Um dies einzusehen brauchen wir indessen einige Hilfssätze, die sich auf die einzelnen Faktoren der rechts in (10) stehenden Ausdrucks beziehen und die im folgenden Paragraphen bewiesen werden sollen.

2. Wir beweisen zunächst den

HILFSSATZ 1. — *Es sei* $f(x)$ *in der oberen Halbebene meromorph und das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(t)|+\overset{+}{\log}|f(-t)|}{t^{q+2}}\,dt \tag{12}$$

konvergent. Dann ist $(x=re^{i\varphi})$ *für* $r>\varrho_0$, $0\leq\varphi\leq\pi$

$$\sin\varphi\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\varrho_0}\overset{+}{\log}|f(t)|\,|K_q(x,t)|\,dt\right|<hr^q\left[\int_{\varrho_0}^{r}\frac{a(t)}{t^{q+1}}\,dt+r\int_{r}^{\infty}\frac{a(t)}{t^{q+2}}\,dt\right], \tag{13}$$

wo h *eine von* r *und* φ *unabhängige Grösse bezeichnet, und*

$$a(t)=a(t;\infty)+a(-t;\infty).$$

Es ist gemäss der Definition des Ausdrucks K_q, falls $|t|>2r$,

$$K_q(x,t)<\left|\frac{x}{t}\right|^{q+1}\frac{1}{|x-t|}\leq\frac{2r^{q+1}}{|t|^{q+2}}<\frac{4r^{q+1}}{|t|^{q+1}(|t|+r)},$$

und für $|t|<2r$

$$\sin\varphi\,|K_q(x,t)|\leq\frac{r\sin^2\varphi}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}+\sum_{\nu=1}^{q}\frac{r^{\nu}}{|t|^{\nu+1}}.$$

Hier ist das erste Glied rechts gleich

$$\frac{\sin^2\omega}{r},$$

wo ω den Winkel bezeichnet, den der Vektor $x-t$ mit der Richtung der positiven reellen Achse bildet, und man findet also:

$$\sin\varphi\,|K_q|\leq\frac{1}{r}+\sum_{\nu=1}^{q}\frac{r^{\nu}}{|t|^{\nu+1}}\leq h_1\frac{r^q}{|t|^{q+1}}<3h_1\frac{r^{q+1}}{|t|^{q+1}(|t|+r)},$$

wo h_1 eine nur von q abhängige Zahl bezeichnet. Es existiert also eine von r und φ unabhängige Zahl h_2 derart, dass die Ungleichung

$$\sin\varphi\,|K_q(re^{i\varphi},t)|<\frac{h_2r^{q+1}}{|t|^{q+1}(|t|+r)}$$

für $r>0$ und jedes t gilt. Es wird hiernach weiter:

$$\sin\varphi\left|\int\limits_{|t|>\varrho_0}^{+}\log|f(t)\,K_q(x,t)|\,dt\right| < h_2 r^{q+1}\int\limits_{t=\varrho_0}^{\infty}\frac{da(t)}{t^q(t+r)} = h_2 r^{q+1}\int\limits_{\varrho_0}^{\infty} a(t)\frac{(q+1)t+qr}{t^{q+1}(t+r)^2}\,dt$$

$$< h_2(q+1)r^{q+1}\int\limits_{\varrho_0}^{\infty}\frac{a(t)\,dt}{t^{q+1}(t+r)}.$$

Die Behauptung (13) folgt hieraus, wenn man das letzte Integral als Summe von zwei Integralen zwischen den Grenzen ϱ_0 und r, bzw. r und ∞ schreibt.

Aus dem oben Bewiesenen ergibt sich der

HILFSSATZ 2. — *Es sei $f(x)$ eine meromorphe Funktion, die in der oberen Halbebene von endlicher Ordnung ist und $q>0$ die kleinste ganze Zahl, für welche das Integral*

$$\int^{\infty}\frac{a(t,f)+a(-t,f)+a\left(t,\frac{1}{f}\right)+a\left(-t,\frac{1}{f}\right)}{t^{q+2}}\,dt \tag{14}$$

konvergiert. Es bezeichne ferner $\psi_q(x)$ die in der oberen Halbebene reguläre analytische Funktion

$$\psi_q(x) = e^{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|>\varrho_0}\log|f(t)|\left(\frac{x}{t}\right)^{q+1}\frac{dt}{t-x}}, \tag{15}$$

und $S(r,\psi_q)$ die zu ihr gehörige Fundamentalgrösse.

Dann ist im Falle $q=0$:

$$S(r,\psi_0) = O(1). \tag{16}$$

Ist wiederum $q\geq 1$ und die Summe

$$a(t,f)+a(-t,f)+a\left(t,\frac{1}{f}\right)+a\left(-t,\frac{1}{f}\right) \tag{17}$$

von der Ordnung t^λ $(q\leq\lambda\leq q+1)$, so ist $S(r,\psi_q)$ von der Ordnung $r^{\lambda-1}$ und weiter

$$\lim_{r=\infty}\frac{S(r,\psi_q)}{r^q} = 0. \tag{16'}$$

Die Ordnung der Funktion ψ_q in der Halbebene $I(x)\geq 0$ ist also gleich λ.

Beweis. — Wenn das Integral (14) für $q\geq 0$ konvergiert, so ist die Summe (17) gleich εr^{q+1}, wo $\varepsilon\to 0$ für $r\to\infty$. Schreibt man nun in (15): $\log|f| = \overset{+}{\log}|f| - \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{f}\right|$, so ergibt sich aus der Ungleichung (13) dass

$$\sin\varphi\,|\log|\psi_q||<\varepsilon r^{q+1}, \tag{18}$$

und es ist also

$$B(r,\psi_q) = \frac{2}{\pi r}\int\limits_0^{\pi}\overset{+}{\log}|\psi_q(re^{i\vartheta})|\sin\vartheta\,d\vartheta < \varepsilon r^q. \tag{19}$$

Ferner ist $a(r,f)\equiv a(r,\psi_q)$, und also nach dem Hilfsatz 3 S. 11 $A(r,\psi_0)=O(1)$ und $A(r,\psi_q)=\varepsilon r^q$ für $q\geq 1$. Da schliesslich $C(r,\psi_q)\equiv 0$, so ergeben sich die Beziehungen (16) und (16') unter Anwendung des ersten Hauptsatzes.

Wenn, im Falle $q\geq 1$, die Ordnung der Summe (17) gleich r^λ ist $(q\leq\lambda\leq q+1)$, so ist die Summe $A(r,f)+A\left(r,\frac{1}{f}\right)\equiv A(r,\psi_q)+A\left(r,\frac{1}{\psi_q}\right)$ von der Ordnung $r^{\lambda-1}$. Nach dem ersten

Hauptsatz ist also $S(r, \psi_q)$ nicht von niedrigerer Ordnung als $r^{\lambda-1}$. Andererseits ist sie auch nicht von höherer Ordnung. Denn aus der Ungleichung (13) folgt zunächst, dass die Ordnung von $B(r, \psi_q)$ höchstens gleich $r^{\lambda-1}$ ist; ferner ist $C(r, \psi_q) = 0$, und die Summe $A(r, \psi_q) + B(r, \psi_q) + C(r, \psi_q) = S(r, \psi_q) + O(1)$ kann also höchstens von der Ordnung $r^{\lambda-1}$ sein. Hiermit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Wir machen insbesondere auf nachstehende Folgerung der Ungleichung (13) aufmerksam:

ZUSATZ 1. — *Es bezeichne* $\mu(r, \psi_q)$ *die Grösse:*

$$\mu(r, \psi_q) = \max\left(\sin\varphi \overset{+}{\log} |\psi_q(re^{i\varphi})|\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{20}$$

Die Ordnung von $\mu(r, \psi_q)$ *ist dann höchstens gleich der Ordnung der Summe* (17) *und es ist*

$$\lim_{r=\infty} \frac{\mu(r, \psi_q)}{r^{q+1}} = 0\ ^1).$$

Wenn die Ordnung λ der Summe (17) *nichtganzzahlig* ist, so lässt sich der Hilfssatz 2 etwas verschärfen. Durch einen ähnlichen Beweis, wie der obige, ergibt sich z. B. nachstehender Satz, der für einige spätere Anwendungen von Bedeutung sein wird, :

ZUSATZ 2. — *Wenn die Ordnung* λ *der Summe* (17) *im Intervalle* $q < \lambda < q+1\ (q > 1)$ *liegt und das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{a(t, f) + a(-t, f) + a\left(t, \frac{1}{f}\right) + a\left(-t, \frac{1}{f}\right)}{t^{\lambda+1}}\, dt$$

konvergiert, so sind auch die Integrale

$$\int^{\infty} \frac{S(r, \psi_q)}{r^{\lambda}}\, dr \quad \text{und} \quad \int^{\infty} \frac{\mu(r, \psi_q)}{r^{\lambda+1}}\, dr \tag{21}$$

konvergent.

Wenn die Voraussetzung dieses Satzes für den *ganzzahligen* Wert $\lambda = q+1$ erfüllt ist, so ist nach Hilfssatz 2 zwar $S(r, \psi_k) < \varepsilon r^{\lambda-1}$, $\mu(r, \psi_q) < \varepsilon r^{\lambda}$, die Integrale (21) sind aber nicht notwendigerweise konvergent.

Wir gehen jetzt zur näheren Untersuchung der von den Nullstellen und Polen herrührenden Produkte rechts in der Formel (10) über und beweisen zunächst den

HILFSSATZ 3. — *Es sei* $a_\mu = |a_\mu| e^{i\alpha_\mu} (\mu = 1, 2, \cdots)$ *eine Folge von Punkten, die in der oberen Halbebene liegen. Ferner sei die Reihe*

[1]) Unter Berücksichtigung dieses Zusatzes kann man aus der Darstellung (3) S. 31 folgendes schliessen: *Falls* $f(x)$ *in der oberen Halbebene regulär und die zugehörige Fundamentalgrösse* $S(r)$ *beschränkt ist, so ist die obere Grenze*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\mu(r)}{r}$$

endlich, wobei $\mu(r) = \max\limits_{0 \leq \varphi \leq \pi} \left(\overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \sin\varphi\right)$.

Hieraus folgt weiter, dass wenn $M(r)$ das Maximum von $|f|$ auf demjenigen Bogen des Kreises $|x| = r$ bezeichnet, der in einen *inneren* Winkelraum der betrachteten Halbebene fällt, auch der Quotient $\frac{M(r)}{r}$ *beschränkt* ist. Von dieser Bemerkung haben wir schon im zweiten Abschnitt (S. 21) Gebrauch gemacht.

(22) $$\frac{\sin \alpha_\mu}{|a_\mu|^{q+1}}$$

für einen ganzzahligen Wert $q>0$ konvergent, und $\pi_q(x)$ die in der oberen Halbebene reguläre analytische Funktion

$$\pi_q(x) = \prod_1^\infty D_q(x, a_\mu) = \prod_1^\infty \frac{E\left(\frac{x}{a_\mu}, q\right)}{E\left(\frac{x}{a_\mu}, q\right)}.$$

Bezeichnet $\varrho_0>0$ eine Zahl, die kleiner als $|a_\mu|$ ist, so existiert eine von r und φ unabhängige Zahl k derart, dass die Ungleichung

(23) $$\log|\pi_q(re^{i\varphi})| < kr^q\left[\int_{\varrho_0}^{r} \frac{c(t)}{t^{q+1}}dt + r\int_r^\infty \frac{c(t)}{t^{q+2}}dt\right]$$

für $r>\varrho_0$ besteht, wobei $c(t)$ die Summe

$$c(t) = \sum_{\varrho_0 < |a_\mu| < t} \sin \alpha_\mu$$

bezeichnet.

Im Falle $q=0$ ist

(23′) $$\log|\pi_q(x)| \leq 0 \quad \text{für} \quad I(x) \geq 0.$$

Beweis. — Wenn $q=0$, so ist jeder Faktor des Produktes π in der oberen Halbebene dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins, woraus die Beziehung (23′) folgt. Im Falle $q\geq 1$ ist wiederum

(24) $$\log|D_q(re^{i\varphi}, a_\mu)| = \log\left|\frac{x-a_\mu}{x-\bar{a}_\mu}\right| + 2\sum_{\nu=1}^{q} \frac{\sin \nu\alpha_\mu}{\nu|a_\mu|^\nu} r^\nu \sin \nu\varphi,$$

und also für $r<|a_\mu|$:

(25) $$\log|D_q(re^{i\varphi}, a_\mu)| = -2\sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{\sin \nu\alpha_\mu}{\nu|a_\mu|^\nu} r^\nu \sin \nu\varphi.$$

Ist nun $|a_\mu|\leq 2r$, so folgt aus (24), wenn man bemerkt, dass das erste Glied rechts *nichtpositiv* ist und dass

$$\frac{|\sin \nu\alpha_\mu|}{\sin \alpha_\mu} \leq \nu,$$

$$\log|D_q| \leq 2\sin\alpha_\mu \sum_1^q \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^\nu < k_1 \sin\alpha_\mu \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^q < k_2 \sin\alpha_\mu \frac{r^{q+1}}{|a_\mu|^q(|a_\mu|+r)},$$

wo k_2 und k_1 nur von q abhängig sind. Im Falle $|a_\mu|>2r$ ergibt sich aus (25):

$$\log|D_q| \leq 2\sin\alpha_\mu \sum_{q+1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^\nu = 2\sin\alpha_\mu \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^{q+1} \frac{|a_\mu|}{|a_\mu|-r} < 6\sin\alpha_\mu \frac{r^{q+1}}{|a_\mu|^q(|a_\mu|+r)}.$$

Jedenfalls existiert also eine von a_μ, r und φ unabhängige Zahl k_3 derart, dass

(26) $$\log|D_q(re^{i\varphi}, a_\mu)| < k_3 \sin\alpha_\mu \frac{r^{q+1}}{|a_\mu|^q(|a_\mu|+r)}.$$

Gemäss (25) ist nun

$$\log|\pi_q(re^{i\varphi})| = \sum \log|D_\varrho| < k_3 r^{q+1} \int_{t=\varrho_0}^{\infty} \frac{dc(t)}{t^q(t+r)} = k_3 r^{q+1} \int_{\varrho_0}^{\infty} c(t) \frac{(q+1)t+qr}{t^{q+1}(t+r)^2} dt$$

$$< k_3 (q+1) r^{q+1} \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{c(t)\,dt}{t^{q+1}(t+r)},$$

woraus die Behauptung (23) folgt.

HILFSSATZ 4. — *Sei q die kleinste ganze Zahl, für welche die Reihe* (21) *konvergiert. Ferner bezeichne $S(r, \pi_q)$ die zu der Funktion π_p gehörige Fundamentalgrösse und $M(r, \pi_q)$ das Maximum*

$$M(r, \pi_q) = \max|\pi_q(re^{i\varphi})| \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Dann ist

$$M(r, \pi_0) \leqq 1, \quad S(r, \pi_0) = O(1)$$

und

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, \pi_q)}{r^{q+1}} = 0, \quad \lim_{r=\infty} \frac{S(r, \pi_q)}{r^q} = 0 \quad \text{für} \quad q \geq 1.$$

Wenn die Ordnung der Grösse $c(r)$ gleich r^λ ist, so ist $S(r, \pi_q)$ von der Ordnung $r^{\lambda-1}$, falls $\lambda > 1$. Ist λ insbesondere nichtganzzahlig $(q < \lambda < q+1)$ und das Integral

$$\int^{\infty} \frac{c(t)}{t^{\lambda+1}} dt$$

konvergent, so konvergieren auch die Integrale

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r, \pi_q)}{r^{\lambda+1}} dr \quad \text{und} \quad \int^{\infty} \frac{S(r, \pi_q)}{r^\lambda} dr.$$

Zum Beweise bemerke man, dass $|\pi_q| = 1$ auf der reellen Achse und dass π_q im Innern der oberen Halbebene *regulär* ist. Folglich ist $A(r, \pi_q) = 0$, $C(r, \pi_q) = 0$, und also $B(r, \pi_q) = S(r, \pi_q) + O(1)$. Die Grössen B und $\log M$ werden weiter mittels der Ungleichung (23) in ähnlicher Weise abgeschätzt, wie B und μ im Hilfssatz 2 (nebst Zusätzen) mittels der analogen Ungleichung (13).

3. Es sei $f(x)$ wieder eine im Winkelraume $W\left(0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{k}\right)$ meromorphe Funktion von endlicher Ordnung λ. Wenn $\lambda > k$ ist, so ist die Summe

$$a(r; z) + a(re^{i\frac{\pi}{k}}; z) + b(r; z) + c(r; z) \equiv s(r; z) \tag{27}$$

für jedes z von der Ordnung r^λ und die Fundamentalgrösse $S(r, f)$ von der Ordnung $r^{\lambda-k}$ (vgl. S. 13). Die oben abgeleitete kanonische Darstellung erlaubt uns nun folgende Ergänzung zu diesem Ergebnisse zu beweisen:

SATZ 1. — *Es sei $f(x)$ eine im Winkelraum $0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{k}$ meromorphe Funktion von der endlichen Ordnung $\lambda > k$. Wenn λ kein Multipel der Zahl k ist, so ist die Summe*

$$a(r, z) + a(re^{\frac{i\pi}{k}}; z) + c(r; z) \tag{28}$$

von der Ordnung r^λ für jedes z ausser möglicherweise einem einzigen Wert.

Beweis. — Vermittels einer Variabelsubstitution lässt sich der Satz auf den Fall $k=1$ zurückführen. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, dass die Summe (28) für zwei Werte $z=\alpha$ und $z=\beta$ von der Ordnung $\lambda'<\lambda$ sei. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\alpha=\infty$ und $\beta=0$ wählen, denn der allgemeine Fall wird auf diesen zurückgeführt durch eine lineare Transformation, die die Ordnung der Funktion f invariant lässt (vgl. S. 9).

Es sei nun $q(>0)$ die grösste ganze Zahl von der Eigenschaft $q<\lambda$. Weil f von der Ordnung λ ist und $q+1>\lambda$, so muss das Integral

$$\int^{\infty} \frac{S(r,f)}{r^{q+1}}\,dr$$

konvergent sein, und $f(x)$ lässt sich also in der oberen Halbebene durch die Formel (10) S. 34 darstellen. Es ist also

$$f(x)=f_0(x)\,e^{P_q(x)}\,\psi_q(x)\,\frac{\pi_q\left(x,\frac{1}{f}\right)}{\pi_q(x,f)}, \tag{29}$$

wo ψ_q die Funktion (15) und $\pi_q\left(x,\frac{1}{f}\right)$ die früher (S. 38) mit $\pi_q(x)$ bezeichnete Funktion bedeutet.

Wir machen nun von folgender einfachen Bemerkung Gebrauch: *Wenn* $f_\nu(x)\,(\nu=1,2,\cdots,p)$ *Funktionen bezeichnen, die in der oberen Halbebene meromorph sind, so ist*

$$S(r,f_1\cdot f_2\cdots f_p)\leqq\sum_1^p S(r,f_\nu). \tag{30}$$

Aus der Ungleichung $\overset{+}{\log}|f_1\cdots f_p|<\overset{+}{\log}|f_1|+\cdots+\overset{+}{\log}|f_p|$ folgt nämlich zunächst, dass

$$A(r,f_1\cdots f_p)\leqq\sum_1^p A(r,f_\nu),\quad B(r,f_1\cdots f_p)\leqq\sum_1^p B(r,f_\nu). \tag{30'}$$

Ferner sind sämtliche Pole des Produktes $f_1\ldots f_p$ in den Polen der Faktoren enthalten und also

$$C(r,f_1\cdots f_p)\leqq\sum_1^p C(r,f_\nu). \tag{30''}$$

Die zu beweisende Ungleichung ergibt sich nun durch Addition aus (30′) und (30″).

Bemerkt man, dass nach Hauptsatz I:

$$S\left(r,\frac{1}{\pi_q}\right)=S(r,\pi_q)+O(1),$$

so folgt aus (29) durch Anwendung der Ungleichung (30):

$$S(r,f)<S(r,f_0)+S\left(r,e^{P_q}\right)+S(r,\psi_q)+S\left(r,\pi_q\left(x,\frac{1}{f}\right)\right)+S(r,\pi_q(x,f))+O(1). \tag{31}$$

Hier ist zunächst

$$S(r,f_0)=O(1),\quad S\left(r,e^{P_q}\right)=O(r^{q-1}).$$

Da die Summe (28) nach der Antithese für $z=0$, $z=\infty$ von der Ordnung $r^{\lambda'}(\lambda'<\lambda)$ ist, so folgt ferner aus den Hilfssätzen 2 und 4, dass die Ordnung der vier letzten Glieder in (31) höchstens $r^{\lambda'-1}$ ist. Die ganze rechte Seite ist also von *niedrigerer* Ordnung als $r^{\lambda-1}$, was unmöglich ist, da die linksstehende Grösse $S(r,f)$ doch nach der Voraussetzung des Satzes genau von der Ordnung $r^{\lambda-1}$ ist. Aus diesem Widerspruch geht die Richtigkeit des Satzes hervor.

Um sogleich eine einfache Anwendung des obigen Satzes zu machen, betrachten wir eine *ganze* Funktion $f(x)$ von endlicher Ordnung, die auf den Schenkeln des Winkels $W\left(0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{k}\right)$ den asymptotischen Wert ∞ hat und zwar so, dass die Grösse

$$a(r;\infty) + a(re^{\frac{i\pi}{k}};\infty) = \int_{\varrho_0}^{r} \left(\overset{+}{\log}\ |f(t)| + \overset{+}{\log}\, |f(te^{\frac{i\pi}{k}})|\right)\frac{dt}{t}$$

von der Ordnung r^λ ist, wo $\lambda > k$. Dann ist, falls die Ordnung von $b(r;\infty)$ nicht höher als r^λ ist, die Funktion f von der Ordnung λ im Winkelraum W. Ist wiederum die Ordnung λ' von b (und f) grösser als λ, so kann man folgendes behaupten: *Wenn λ' kein Multipel von k ist, so nimmt $f(x)$ jeden endlichen Wert z im Winkelraum W unendlich oft an derart, dass die Grösse $c(r;z)$ von der Ordnung $r^{\lambda'}$ ist.* In der Tat ist die Funktion f von der Ordnung $r^{\lambda'}$ und die Summe (28) für $z = \infty$ von *niedrigerer* Ordnung (r^λ). Nach Satz 1 muss sie also für alle endlichen Werte z von der Ordnung $r^{\lambda'}$ sein; hieraus folgt die Behauptung, wenn man bemerkt, dass f auf den Schenkeln von W gegen ∞ strebt und dass also die Summe $a(r;z) + a(re^{\frac{i\pi}{k}};z)$ für jedes endliche z beschränkt sein muss.

In ähnlicher Weise, wie den Satz 1, beweist man ferner nachfolgenden, schärferen Satz:

SATZ 2. — *Es sei $f(x)$ eine im Winkelraum $W\left(0 < \arg x \leqq \frac{\pi}{k}\right)$ meromorphe Funktion von der endlichen Ordnung $\lambda > k$. Ferner sei das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{a(r;z) + a(re^{\frac{i\pi}{k}};z) + c(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

für zwei Werte z konvergent.

Wenn λ keine Multipel der Zahl k ist, so konvergiert das Integral

$$\int^{\infty} \frac{a(r;z) + a(re^{\frac{i\pi}{k}};z) + b(r;z) + c(r;z)}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

für jedes z. Falls $f(x)$ insbesondere in W regulär ist und

$$\mu(r) = \max_{0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{k}} \left(\overset{+}{\log}\, |f(re^{i\varphi})| \sin k\varphi\right),$$

so ist auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

konvergent.

4. Von der kanonischen Darstellung (10) S. 34 ausgehend könnte man, in Analogie mit der Definition des Geschlechtes in der Theorie der in der vollen Ebene meromorphen Funktionen, *das Geschlecht einer meromorphen Funktion in einem gegebenen Winkelraum* definieren. Bei einer ganzen oder meromorphen Funktion ist bekanntlich das Geschlecht durch die Ordnung λ eindeutig bestimmt ausser für ganzzahlige Werte λ, für welche gewisse Komplikationen eintreten. Mittels der in den zwei letzten Paragraphen gegebenen Sätzen könnte man analoge Regeln zur Bestimmung des Geschlechtes einer in einem Winkelraum der Öffnung $\frac{\pi}{k}$ meromorphen Funk-

tion aufstellen; die Rolle der kritischen Ordnungen wird hierbei von den Werten $\lambda = \nu \cdot k$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) übernommen.

Ohne auf eine nähere Erörterung der oben berührten Verhältnisse einzugehen, wollen wir zum Schluss, als Anwendung der oben erzielten Ergebnisse, einen Satz beweisen, der einen Beitrag zu gewissen Fragen in der Theorie der ganzen Funktionen liefern wird.

Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion von der endlichen Ordnung $\lambda > \frac{1}{2}$ und $M_\alpha(r)$ das Maximum von $|f|$ auf demjenigen Bogen des Kreises $|x| = r$, der innerhalb eines gegebenen Winkelraumes α fällt. Nimmt man weiter an, dass $\log M_\alpha$ von niedrigerer Ordnung als r^λ ist, so weiss man, dass die Öffnung des Winkels α höchstens gleich $\pi\left(2 - \frac{1}{\lambda}\right)$ sein kann. Andererseits kennt man ganze Funktionen (z. B. die MITTAG-LEFFLERschen E-Funktionen), die in einem Winkelraum von dieser extremen Grösse sogar den asymptotischen Wert Null haben.[1])

Anders verhält sich die Sache, wenn $f(x)$ einen endlichen *Ausnahmewert* z hat derart, dass die Anzahl $n(r; z)$ der z-Stellen von $f(x)$ im Kreise $|x| < r$ von niedrigerer Ordnung als r^λ ist (dies kann bekanntlich nur für eine ganzzahlige Ordnung λ eintreffen). Dann könnte man schon mittels der WEIERSTRASSschen Produktdarstellung schliessen, dass die Öffnung eines Winkelraumes α, wo $\log M_\alpha$ von niedrigerer Ordnung als r^λ ist, höchstens gleich $\frac{\pi}{\lambda}$ ist, was für $\lambda > 1$ mehr aussagt als der obenerwähnte Satz. Dies ergibt sich auch als Korollar des nachstehenden, schärferen Satzes, der im folgenden bewiesen werden soll:

SATZ. — *Es seien $f(x)$ eine ganze Funktion endlicher Ordnung mit den Nullstellen $r_n e^{i\varphi_n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), $M(r)$ ihr Maximalmodul*

$$M(r) = \max_{|x|=r} |f(x)|$$

und $M_\alpha(r)$ das Maximum von $|f|$ auf dem innerhalb eines Winkelraumes α fallenden Teilbogen des Kreises $|x| = r$. Ferner seien die Reihe

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu}\right)^k \tag{32}$$

und das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M_\alpha(r)}{r^{k+1}}\, dr \tag{33}$$

für einen Wert $k > 1$ konvergent.

Wenn die Öffnung des Winkels α grösser als $\frac{\pi}{k}$ ist, so ist auch das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r)}{r^{k+1}}\, dr \tag{34}$$

konvergent und die Funktion $f(x)$ also höchstens von der Ordnung r^k.

Beweis. — Es sei β der Eksplementwinkel von α, und $m_\beta(r)$ das Integral

$$m_\beta(r) = \int_\beta \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi\,,$$

[1]) Vgl. die S. 21 zitierten Arbeiten von BIEBERBACH.

wo die Integration über den innerhalb β liegenden Bogen des Kreises $|x| = r$ erstreckt werden soll. Wenn m_β von *niedrigerer* Ordnung als r_k ist, so folgt aus der Voraussetzung des Satzes, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{m(r)}{r^{k+1}} dr, \quad \text{wo} \quad m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi,$$

konvergieren muss. Es ist aber bekannt, dass für eine derartige Funktion auch das Integral (34) konvergent ist.[1])

Wir können also im folgenden annehmen, dass die Ordnung h der Grösse $m_\beta(r)$ grösser als, oder gleich k ist. Es sei nun α' ein *vollständig innerhalb* α liegender Winkelraum von der Öffnung $\frac{\pi}{k'}$, derart dass

$$k > k' > \frac{k}{2k-1}. \tag{35}$$

Unter Berücksichtigung dieser Vorschrift legen wir den Wert k' so fest, dass h *kein Multipel* der Zahl $\frac{k'}{2k'-1}$ ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass α' der Winkelraum $0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{k'}$ ist. Beachtet man, dass $f(x)$ eine *ganze* Funktion ist, und also $c(r, f) \equiv c(r; \infty) = 0$, so ergibt sich aus der vorausgesetzten Konvergenz des Integrals (33), dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{a(r; z) + a(re^{\frac{i\pi}{k'}}; z) + b(r; z) + c(r; z)}{r^{k+1}} dr$$

für $z = \infty$ konvergent sein muss.[2]) Da die Öffnung von α' gleich $\frac{\pi}{k'}$ ist und $k > k'$, so schliesst man hieraus, dass dieses Integral für *alle* Werte z konvergiert (vgl. S. 12).

Nach dieser Vorbereitung gehen wir zur Untersuchung der Eigenschaften der Funktion $f(x)$ in dem Eksplementwinkel β' von α' über. Um unsere gewöhnliche Bezeichnungen benutzen zu können, denken wir uns β' durch eine Drehung von vornherein in die Lage

$$0 \leqq \arg x \leqq \frac{\pi}{l}, \quad \text{wo} \quad l = \frac{k'}{2k'-1},$$

gebracht. Aus dem oben bewiesenen schliessen wir zunächst, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{a(r; z) + a(re^{\frac{i\pi}{l}}; z)}{r^{k+1}} dr \tag{36}$$

für jedes z konvergent ist. Die Summe

$$a(r; \infty) + a(re^{\frac{i\pi}{l}}; \infty)$$

ist demnach höchstens von der Ordnung r^k. Um die Grösse

$$b(r; \infty) = \int_0^{\frac{\pi}{l}} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \sin l\varphi \, d\varphi$$

[1]) Vgl. meine S. 9 zitierte Arbeit, insb. S. 23.

[2]) Die Hilfsgrössen b, c sind hierbei für den Winkelraum α' zu bilden

abzuschätzen, bemerke man, dass β ein innerer Winkel von β' ist und dass also eine positive Zahl η existiert, so dass $\sin l\varphi \geq \eta$ für jeden Punkt $x = re^{i\varphi}$ des Winkels β ist. Es ist also:

$$\eta m_\beta(r) \leqq b(r;\infty) \leq m_\beta(r) + \log M_a(r). \tag{37}$$

Weil nun m_β von der Ordnung r^h $(h > k)$ ist, während $\log M_a$ höchstens der Ordnung r^k ist, so folgt, dass auch $b(r;\infty)$ von der Ordnung r^h ist. Schliesslich ist $c(r;\infty) = 0$ und es geht also hervor, dass die Ordnung der Summe

$$a(r;\infty) + a(re^{\frac{i\pi}{l}};\infty) + b(r;\infty) + c(r;\infty)$$

gleich h ist. Gemäss der Ungleichung (35) ist aber $h \geq k > l\left(= \frac{k'}{2k'-1}\right)$, und wir schliessen, dass auch *die Ordnung der Funktion f im Winkelraum* β' gleich h ist (S. 12).

Ich behaupte nun, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{a(r;z) + a(re^{\frac{i\pi}{l}};z) + c(r;z)}{r^{k+1}}\, dr$$

für die zwei Werte $z = 0$ und $z = \infty$ konvergent ist. Um dies einzusehen, genügt es zu bemerken, dass das Integral (36) für diese Werte z konvergiert, dass $c(r;\infty) = 0$ und dass die Reihe (32) nach Voraussetzung konvergent ist. Ferner ist die Ordnung $h > l$ der Funktion f im Winkelraum β' der Öffnung $\frac{\pi}{l}$ kein Multipel von l. Aus Satz 1 (S. 39) folgt dann zunächst, dass notvendigerweise $h = k$, und aus Satz 2 (S. 41) weiter, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{b(r;\infty)}{r^{k+1}}\, dr$$

konvergieren muss. Gemäss der Ungleichung (37) ist aber dann auch

$$\int^{\infty} \frac{m_\beta(r)}{r^{k+1}}\, dr$$

konvergent, und die behauptete Konvergenz des Integrals (34) ergibt sich durch die Erwägung, welche am Anfang dieses Beweises angestellt wurde. [1])

Von besonderem Interesse ist folgendes unmittelbare Korollar des obigen Satzes:
Sei $f(x)$ *eine ganze Funktion von ganzzahliger Ordnung* q *und das Integral*

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{q+1}}$$

divergent. Wenn die Reihe

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu}\right)^q$$

konvergiert, so ist das Integral

[1]) Wir haben den obigen Satz nur im Falle $k > 1$ bewiesen. Tatsächlich ist er auch für $k \leq 1$ gültig. der Beweis lässt sich in analoger Weise, wie oben, unter Anwendung des Satzes 1, S. 31 führen.

$$\int^{\infty} \frac{\log^{+} M_{\alpha}(r)}{r^{q+1}} dr$$

für jeden Winkelraum α, dessen Öffnung $> \frac{\pi}{q}$ ist, divergent.

Wenn $r_\nu(z)(\nu = 1, 2, \cdots)$ die absoluten Beträge der z-Stellen der ganzen Funktion $f(x)$ bezeichnen, so kann man nach einem Satz, den VALIRON [1]) zuerst bewiesen hat, schliessen, dass die Reihe

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^q$$

unter der Voraussetzung des letzten Satzes für jeden endlichen Wert $z \neq 0$ *divergent* sein muss. Der obige Satz führt nun zu folgender Erweiterung des VALIRONschen Satzes:

Es sei α ein beliebiger Winkelraum von grösserer Öffnung als $\frac{\pi}{q}$. Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes ist dann die Reihe

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{1}{r_\nu(z)}\right)^q,$$

wo die Summation nur über die in α gelegenen z-Stellen erstreckt wird, für jedes endliche $z \neq 0$ divergent.

Ich habe diesen Satz früher (vgl. die in der Fussnoté[3]) S. 21 zitierte Arbeit, insb. S. 28) unter der Voraussetzung bewiesen, dass ein innerer Winkel α' von α existiert derart, dass das Integral

$$\int^{\infty} \frac{\log M_{\alpha'}(r)}{r^{q+1}} dr$$

divergent ist. Diese Bedingung ist aber nach dem obigen Satze tatsächlich erfüllt.

[1]) G. VALIRON: *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922).

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 13.

ÜBER DIE NUMERISCHE INTEGRATION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

E. J. NYSTRÖM

(Mitgeteilt am 23. September 1925 von E. Lindelöf und K. F. Sundman)

HELSINGFORS 1925

HELSINGFORS 1925
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

VORWORT.

Die angenäherte Integration hat, besonders in der letzten Zeit, ein ausgedehntes Anwendungsgebiet innerhalb der exakten Wissenschaften und der Technik gefunden. Nicht nur in Fällen, wo die Integralfunktionen unbekannt sind, ist man auf Näherungsverfahren angewiesen, sondern es kommt auch vor, dass die theoretisch entwickelten Integrale derart kompliziert sind, dass man für praktische Zwecke Approximationen vorziehen wird.

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, die wichtigsten *Methoden der numerischen Integration von Differentialgleichungen* darzustellen. Unsere Abhandlung gehört somit der *angewandten Mathematik* an.

Im ersten Abschnitt derselben wird die Rungesche Integrationsmethode auseinandergesetzt, welche die meistens sehr mühsamen Reihenentwicklungen zu ersetzen bestimmt ist. Da bis jetzt die *direkte* Anwendung der Rungeschen Methode auf den wichtigen Fall von Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht behandelt war, haben wir hierüber eine eingehende Untersuchung angestellt. Als Ergebnis davon haben wir mehrere neue Formelsysteme gefunden, welche die gleiche Approximation wie die früher bekannten mit bedeutend geringerem Arbeitsaufwand erreichen lassen.

Der zweite Abschnitt ist denjenigen Methoden gewidmet, die in der astronomischen Störungsrechnung ihr klassisches Vorbild haben. Einige der gebräuchlichsten Integrationsformeln nebst ihren Restgliedern werden unabhängig voneinander durch Integration von bekannten Interpolationsformeln abgeleitet. Auf diesem Wege hat z. B. J. C. Adams seine Integrationsformel (s. S. 32) abgeleitet. Wir geben übrigens eine andere Formel (41), welche dieselben Differenzen benutzt, wie die Adamssche, die sich aber durch bequemere Koeffizienten auszeichnet. Unsere Formel ist ein Analogon zu der von C. Störmer aufgestellten, bequemen Formel (54) für die zweifache Integration. Ferner werden die Verfahren der Fehlerabschätzung recht ausführlich besprochen.

Schliesslich wird im dritten Abschnitt die praktische Ausführung der numerischen Integration behandelt; die Vorschriften der verschiedenen Methoden werden miteinander verglichen und durch Beispiele erläutert. Dabei wird auch die manchmal sehr nützliche »Methode der sukzessiven Approximationen» berücksichtigt.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort.

Erster Abschnitt: *Die Rungesche Integrationsmethode und darauf bezügliche Untersuchungen.*

§ 1. Integration von Differentialgleichungen nach den Methoden von *Runge* und *Kutta* 3
§ 2. Allgemeiner Ansatz für Differentialgleichungen zweiter Ordnung 7
§ 3. Aufstellung der Bedingungsgleichungen 9
§ 4. Auflösung der Bedingungsgleichungen 14
§ 5. Zusammenstellung der Formeln 23
§ 6. Fehlerabschätzungen 26
§ 7. Beispiele 27

Zweiter Abschnitt: *Integration von Differentialgleichungen durch numerische Quadratur.*

§ 8. Zurückführung der Integration von Differentialgleichungen auf numerische Quadratur 29
§ 9. Die wichtigsten Integrationsformeln 30
§ 10. Über die Genauigkeit der Integrationsformeln 38
§ 11. Beispiel zur Erläuterung der Fehlerabschätzungen 41

Dritter Abschnitt: *Über die praktische Durchführung der angenäherten Integration.*

§ 12. Die Methode der sukzessiven Approximationen 43
§ 13. Beispiel der sukzessiven Approximation 45
§ 14. Allgemeines über die Wahl der Integrationsmethode 47
§ 15. Ergänzende Bemerkungen betreffend die Summationsmethode 50
§ 16. Beispiel aus dem Zweikörperproblem 52

Errata.

Erster Abschnitt.

Über die Rungesche Integrationsmethode und darauf bezügliche Untersuchungen.

§ 1. Integration von Differentialgleichungen nach den Methoden von *Runge* und *Kutta*.

1. Wenn es sich darum handelt, den Verlauf einer durch einen gegebenen Anfangspunkt (t, x) gehenden Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x) \tag{1}$$

analytisch zu verfolgen, liegt es sehr nahe, der unabhängigen Veränderlichen t einen Zuwachs Δt zu geben und die entsprechende Zunahme Δx der gesuchten Funktion x zu berechnen. Man gelangt so zu einem neuen Punkt der Integralkurve, von dem man wieder ausgeht, um einen dritten aufzusuchen. Man kann auf diese Weise eine Reihe von Punkten der Lösungskurve berechnen, wobei die Differenz Δt der Abszissen zweier aufeinander folgenden Punkte, wenn man will, bei jedem Schritt verschieden sein kann.

Um Δx zu berechnen, kann man die Taylorsche Reihe

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \cdots \tag{2}$$

benutzen, wobei die einzelnen Differentialquotienten sich nacheinander aus (1) ableiten lassen. Durch Differentiation nach t wird nämlich erhalten

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = f'_t + f'_x f,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = x''' = f''_{tt} + 2ff''_{tx} + f^2 f''_{xx} + f'_t f'_x + f f'^2_x,$$

. . . . . .

Es wird natürlich vorausgesetzt, dass die Taylorsche Reihe für die betrachteten Werte konvergiert; wenn das aber der Fall ist, kann durch Berechnung genügend vieler Glieder derselben Δx mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden.

2. Die praktische Anwendung der eben geschilderten Methode stösst in den meisten Fällen auf grosse Schwierigkeiten, weil die Ausdrücke für die höheren Differentialquotienten im allgemeinen sehr kompliziert werden.

Daher hat RUNGE[1] eine Methode gegeben, die später von HEUN[2] und KUTTA[3] vervollständigt worden ist und welche gestattet, den Wert Δx, bis auf Glieder einer gewissen Ordnung in Δt, durch Berechnung einer Anzahl von Werten der direkt durch die Differentialgleichung (1) gegebenen Funktion f zu finden. Die Idee ist folgende:

Δx wird als Mittelwert aus mehreren, mit geeigneten Gewichten $a, b, c, d, \ldots$ zu versehenden Werten $\Delta^i x$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ bestimmt, die folgendermassen sukzessiv berechnet werden:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Delta' x &= f(t, x)\,\Delta t, \\ \Delta'' x &= f(t + \varkappa\Delta t, x + \varkappa\Delta' x)\,\Delta t, \\ \Delta''' x &= f(t + \lambda\Delta t, x + \varrho\Delta'' x + (\lambda - \varrho)\Delta' x)\,\Delta t, \\ \Delta'''' x &= f(t + \mu\Delta t, x + \sigma\Delta''' x + \tau\Delta'' x + (\mu - \sigma - \tau)\Delta' x)\,\Delta t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die hierbei auftretenden Grössen $\varkappa, \lambda, \ldots, \tau$ sollen zusammen mit den Gewichten $a, b, c, d, \ldots$ so bestimmt sein, dass die Entwicklung des Ausdrucks

$$(4)\qquad \Delta x = a\Delta' x + b\Delta'' x + c\Delta''' x + d\Delta'''' x + \cdots$$

in möglichst vielen Gliedern mit der Entwicklung (2) übereinstimmt.

3. In seiner schon zitierten Abhandlung hat KUTTA gezeigt, dass für Näherungen 2., 3. und 4. Ordnung bzw. 2, 3 und 4 Funktionsberechnungen nötig sind, und mehrere Formeln der betreffenden Art aufgestellt. Eine von ihnen, die vier Funktionswerte benutzt und eine Genauigkeit von der vierten Ordnung gibt, lautet

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta' x &= f(t, x)\,\Delta t, \\ \Delta'' x &= f(t + \frac{1}{2}\Delta t, x + \frac{1}{2}\Delta' x)\,\Delta t, \\ \Delta''' x &= f(t + \frac{1}{2}\Delta t, x + \frac{1}{2}\Delta'' x)\,\Delta t, \\ \Delta'''' x &= f(t + \Delta t, x + \Delta''' x)\,\Delta t, \\ \Delta x &= \frac{1}{6}[\Delta' x + 2\Delta'' x + 2\Delta''' x + \Delta'''' x]. \end{cases}$$

Sie hat sich für die praktische Rechnung als besonders brauchbar erwiesen und hat unter dem Namen der »*Runge-Kuttaschen Formel*» in vielen Lehrbüchern Aufnahme gefunden.

Wünscht man die Glieder der Taylorschen Reihe (2) bis zur fünften Ordnung einschliesslich richtig darzustellen und benutzt man zu diesem Zweck fünf Funktionswerte, so stehen nach (3) im ganzen 15 Zahlenkoeffizienten zur Verfügung, während die Anzahl der mit ihnen zu erfüllenden Bedingungen gleich 16 wird. Die grosse Zahl der letzteren erklärt sich folgendermassen: Sollen die beiden Ausdrücke (2) und (4) bis zu den Gliedern einer gewissen Ordnung in Δt für

[1] RUNGE, Math. Ann. 46 (1895). S. 167—78. Seine Formeln können ebenso wie (5) und (7) als Erweiterungen der »Simpsonschen Regel» aufgefasst werden.

[2] HEUN, Zeitschr. Math. Phys. Bd. 45 (1900). S. 23—38.

[3] KUTTA, Ebenda, Bd. 46 (1901). S. 435—52. Erst hier findet sich der vollständige Ansatz (3). Literaturangaben über die früheren Formeln sowie über den ganzen Gegenstand überhaupt enthält RUNGE-WILLERS: Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen in Enc. math. Wiss. II. C. 2. S. 148—50.

beliebige Funktionen $f(t, x)$ übereinstimmen, so müssen nicht nur die Koeffizienten gleicher Potenzen von Δt einander gleich sein, sondern innerhalb dieser Ausdrücke auch die Teile, die in den partiellen Ableitungen gleich gebildet sind. Die beiden ersten Potenzen liefern je eine Gleichung. Die dritte Potenz liefert jedoch zwei, die vierte vier und die fünfte Potenz endlich acht Gleichungen; im ganzen also für eine Näherung fünfter Ordnung 16 Bedingungsgleichungen. Diese lassen sich nun mit 15 Unbekannten nicht befriedigen, es sei denn, dass sie voneinander abhängig wären. Ob dem so ist, lässt sich wahrscheinlich erst durch sehr lange Rechnungen feststellen, und die Frage ist unentschieden. Sehr wichtig ist die betreffende Untersuchung nicht, denn aus den Bedingungsgleichungen ist zu ersehen, dass die zugehörige Formel, — wenn sie wirklich existierte —, mit unbequemen Koeffizienten versehen wäre und nur einen geringen praktischen Wert besässe.

Kutta gibt noch zwei Formelsysteme an, die sechs Funktionswerte benutzen und eine Approximation fünfter Ordnung ergeben. Aus irgendeinem Grunde ist das zweite von ihnen fehlerhaft; es soll so lauten (wenn wir t, x statt x, y schreiben):

$$\left\{\begin{aligned}
\Delta' x &= f(t, x)\,\Delta t,\\
\Delta'' x &= f\Big(t+\frac{\Delta t}{3},\ x+\frac{\Delta' x}{3}\Big)\Delta t,\\
\Delta''' x &= f\Big(t+\frac{2\Delta t}{5}, x+\frac{6\Delta'' x+4\Delta' x}{25}\Big)\Delta t,\\
\Delta'''' x &= f\Big(t+\Delta t,\ x+\frac{15\Delta''' x-12\Delta'' x+\Delta' x}{4}\Big)\Delta t,\\
\Delta^{\mathrm{V}} x &= f\Big(t+\frac{2\Delta t}{3}, x+\frac{8\Delta'''' x-50\Delta''' x+90\Delta'' x+6\Delta' x}{81}\Big)\Delta t,\\
\Delta^{\mathrm{VI}} x &= f\Big(t+\frac{4\Delta t}{5}, x+\frac{8\Delta'''' x+10\Delta''' x+36\Delta'' x+6\Delta' x}{75}\Big)\Delta t,\\
\Delta x &= \frac{23\Delta' x+125\Delta''' x-81\Delta^{\mathrm{V}} x+125\Delta^{\mathrm{VI}} x}{192}.
\end{aligned}\right.$$ [4]

4. Runge hat bemerkt [5], dass sein Verfahren auch auf *Systeme von simultanen Differentialgleichungen* angewandt werden kann, und Kutta zeigte [6], dass seine Formeln für jedes solche System gelten, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich derjenigen der gesuchten Funktionen ist. Man lässt nur jede Funktion auf dieselbe Weise wie x in die Formeln eintreten, und es zeigt sich, dass die Ordnung der Näherung für jede Funktion dieselbe wird, als wenn es sich um eine einzelne Gleichung für diese handelte.

So lässt sich z. B. das System

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x' = h(t, x, u),\\
\frac{du}{dt} &= u' = f(t, x, u),
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

falls die Anfangswerte von t, x, u gegeben sind, mit der aus (5) durch Verallgemeinerung entstandenen Formel

[4] Bei Kutta steht

$$\Delta^{\mathrm{VI}} x = f\Big(t+\frac{4\Delta t}{5},\ x+\frac{4\Delta'''' x-5\Delta''' x+18\Delta'' x+7\Delta' x}{30}\Big)\Delta t,\quad \Delta x=\frac{48\Delta' x+125\Delta''' x-81\Delta^{\mathrm{V}} x+100\Delta^{\mathrm{VI}} x}{192}.$$

[5] In dem unter [1] genannten Aufsatz, S. 172 ff.

[6] Emden: Gaskugeln, Leipzig 1907, S. 92 ff.

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta' x &= h(t,x,u)\Delta t \\ \Delta'' x &= h(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, u+\frac{1}{2}\Delta' u)\Delta t, \\ \Delta''' x &= h(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta'' x, u+\frac{1}{2}\Delta'' u)\Delta t, \\ \Delta'''' x &= h(t+\Delta t, x+\Delta''' x, u+\Delta''' u)\Delta t, \\ \Delta x &= \frac{1}{6}[\Delta' x + 2\Delta'' x + 2\Delta''' x + \Delta'''' x], \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta' u &= f(t,x,u)\Delta t, \\ \Delta'' u &= f(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, u+\frac{1}{2}\Delta' u)\Delta t, \\ \Delta''' u &= f(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta'' x, u+\frac{1}{2}\Delta'' u)\Delta t, \\ \Delta'''' u &= f(t+\Delta t, x+\Delta''' x, u+\Delta''' u)\Delta t, \\ \Delta u &= \frac{1}{6}[\Delta' u + 2\Delta'' u + 2\Delta''' u + \Delta'''' u] \end{cases}$$

integrieren, und zwar wird dadurch eine Approximation vierter Ordnung sowohl in x als u erhalten. Dabei werden für jede Funktion vier Funktionswerte berechnet.

5. Bekanntlich lässt sich eine Differentialgleichung höherer Ordnung sowie ein System solcher, auf ein *Normalsystem* zurückführen (die Gleichungen (6) bilden ein solches mit zwei Funktionen), indem man die höheren Ableitungen als neue Funktionen bezeichnet. In der Praxis kann es jedoch unter Umständen vorteilhafter sein, die genannte Zurückführung in anderer Weise zu bewerkstelligen.

Wenn also die Anfangswerte der Funktionen und ihrer Ableitungen gegeben sind, kann auch ein System höherer Ordnung mittels der Formeln KUTTAS integriert werden. Werden z. B. die Formeln (7) auf ein System von Gleichungen zweiter Ordnung

$$(8)\quad \begin{cases} x'' = f(t,x,y,\ldots,u,v,\ldots), & x' = u \\ y'' = g(t,x,y,\ldots,u,v,\ldots), & y' = v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{cases}$$

angewandt, so nehmen sie folgende Gestalt an, wenn man sie für zwei Funktionen (x, y) ausschreibt:

$$(9)\quad \begin{cases} \Delta' x &= u\Delta t, & \Delta' u &= f(t,x,y,u,v)\Delta t, \\ \Delta'' x &= (u+\frac{1}{2}\Delta' u)\Delta t, & \Delta'' u &= f(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, y+\frac{1}{2}\Delta' y, u+\frac{1}{2}\Delta' u, v+\frac{1}{2}\Delta' v)\Delta t, \\ \Delta''' x &= (u+\frac{1}{2}\Delta'' u)\Delta t, & \Delta''' u &= f(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta'' x, y+\frac{1}{2}\Delta'' y, u+\frac{1}{2}\Delta'' u, v+\frac{1}{2}\Delta'' v)\Delta t, \\ \Delta'''' x &= (u+\Delta''' u)\Delta t, & \Delta'''' u &= f(t+\Delta t, x+\Delta''' x, y+\Delta''' y, u+\Delta''' u, v+\Delta''' v)\Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta' y &= v\Delta t, & \Delta' v &= g(t,x,y,u,v)\Delta t, \\ \Delta'' y &= (v+\frac{1}{2}\Delta' v)\Delta t, & \Delta'' v &= g(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, y+\frac{1}{2}\Delta' y, u+\frac{1}{2}\Delta' u, v+\frac{1}{2}\Delta' v)\Delta t, \\ \Delta''' y &= (v+\frac{1}{2}\Delta'' v)\Delta t, & \Delta''' v &= g(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta'' x, y+\frac{1}{2}\Delta'' y, u+\frac{1}{2}\Delta'' u, v+\frac{1}{2}\Delta'' v)\Delta t, \\ \Delta'''' y &= (v+\Delta''' v)\Delta t, & \Delta'''' v &= g(t+\Delta t, x+\Delta''' x, y+\Delta''' y, u+\Delta''' u, v+\Delta''' v)\Delta t \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{1}{6}[\Delta' x + 2\Delta'' x + 2\Delta''' x + \Delta'''' x], \quad \Delta u = \frac{1}{6}[\Delta' u + 2\Delta'' u + 2\Delta''' u + \Delta'''' u],$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}[\Delta' y + 2\Delta'' y + 2\Delta''' y + \Delta'''' y], \quad \Delta v = \frac{1}{6}[\Delta' v + 2\Delta'' v + 2\Delta''' v + \Delta'''' v].$$

Die erste Gruppe dieser Formeln gibt nebst den Ausdrücken für Δx und Δu die Vorschrift zur Integration der Differentialgleichung $x'' = f(t, x, u)$. Der Vergleich mit (7) lässt erkennen, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sich mit viel geringerer Mühe integrieren lässt als ein System von zwei simultanen Gleichungen der ersten Ordnung, was darauf beruht, dass

die Berechnung der Funktion h beim Übergang auf (9) ganz fortfällt. Entsprechendes gilt für den Fall mehrerer Gleichungen.

Bisweilen, etwa wenn f oder g grosse Werte annehmen, kann es vorteilhaft sein, die oben angegebenen Formeln nicht direkt anzuwenden, sondern zuerst einen Wechsel der unabhängigen Veränderlichen vorzunehmen.

§ 2. Allgemeiner Ansatz für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

6. Auf obige Angaben (nebst Bemerkungen über die praktische Benutzung der Formeln) beschränken sich sämtliche, uns bekannte Darstellungen der Runge-Kuttaschen Methode.

Der Umstand, dass im Normalsystem (8) die Hälfte der Gleichungen von ausserordentlich einfachem Bau ist, gibt jedoch zu der Vermutung Anlass, es gäbe möglicherweise Formeln, die speziell für dieses System eine bequemere Integration gestatteten oder etwa, bei dem gleichen Arbeitsaufwand, eine bessere Approximation lieferten als die Formel (9). Für Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung ist diese Vermutung noch mehr berechtigt.

Wir beschränken die Untersuchung indessen auf beliebige Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die weitaus das grösste Interesse bieten, insbesondere durch ihr häufiges Auftreten in der Astronomie, der Physik und der Technik.

Wenn die Integration von (8) mittels (9) ausgeführt wird, werden die Grössen $\Delta''u$, $\Delta''v, \ldots$ mit den Werten

$$x_1 = x + \lambda_1 \Delta' x;\ y_1 = y + \lambda_1 \Delta' y; \ldots,$$

$\left(\text{wo } \lambda_1 = \frac{1}{2}\right)$ berechnet. Es sind aber die Grössen $\Delta''x$, $\Delta''y, \ldots$ schon bekannt oder sie können wenigstens vor $\Delta''u$, $\Delta''v, \ldots$ ermittelt werden; daher hätte man allgemeiner setzen können

$$\Delta''u = f(t + \delta_2 t, x + \delta_2 x,\ y + \delta_2 y, \ldots, u + \delta_2 u, v + \delta_2 v, \ldots)\,\Delta t, \text{ wo}$$

$$\delta_2 t = \lambda_1 \Delta t,\ \delta_2 x = (\lambda_1 - \mu_1)\Delta' x + \mu_1 \Delta'' x,\ \delta_2 y = (\lambda_1 - \mu_1)\Delta' y + \mu_1 \Delta'' y, \ldots, \tag{10}$$

$$\delta_2 u = \lambda_1 \Delta' u,\ \delta_2 v = \lambda_1 \Delta' v, \ldots$$

und analog für $\Delta''v, \ldots$, wodurch ein neuer Parameter gewonnen wäre.

Weil aber die $\Delta^i x, \Delta^i y, \ldots, (i = 1, 2, 3, \ldots)$ lineare Funktionen von $u, \Delta^\nu u, \Delta^\nu v, \ldots,$ $(\nu = 1, 2, \ldots i-1)$ sind, erscheint es natürlicher, $\delta_2 x, \delta_2 y, \ldots$ mit Hilfe der letzteren auszudrücken. Wir schreiben daher statt (10)

$$\delta_2 t = \lambda \Delta t,\ \delta_2 x = [\lambda u + \varrho \Delta' u]\Delta t,\ \delta_2 y = [\lambda v + \varrho \Delta' v]\Delta t, \ldots, \delta_2 u = \lambda \Delta' u,\ \delta_2 v = \lambda \Delta' v, \ldots \tag{11}$$

Nach diesem Gesichtspunkt werden wir nun einen allgemeinen Ansatz aufstellen, indem wir unter den Funktionszeichen lineare Verbindungen aus möglichst vielen der Grössen $\Delta^\nu u, \Delta^\nu v, \ldots$ in Betracht ziehen. Dadurch wird eine grössere Zahl von unbestimmten Koeffizienten hineingezogen, als es bei dem Kuttaschen Ansatz der Fall ist.

Um konsequent zu sein, müssten wir $\Delta' u$ so ansetzen

$$\Delta' u = f(t + \varkappa \Delta t, x + \varkappa u \Delta t, y + \varkappa v \Delta t, \ldots, u, v, \ldots)\,\Delta t \tag{12}$$

und ähnlich für $\Delta' v, \ldots$ Das wollen wir jedoch nicht tun, sondern berechnen zuerst ebenso wie Kutta die Funktionen $f, g, \ldots$ mit den *Anfangswerten* von $t, x, y, \ldots, u, v, \ldots$ Erstens kann es nämlich vorteilhaft sein, die Funktionswerte gerade in den Anfangs- und Endpunkten der Inter-

valle berechnet zu haben, namentlich dann, wenn die gefundene, erste Annäherung mittels der *Methode der sukzessiven Approximationen*[7] verbessert werden soll, und ferner hat ein von uns mit (12) begonnener Ansatz zu solchen Bedingungsgleichungen geführt, die es fast unumgänglich erscheinen liessen, $\varkappa = 0$ zu setzen.

Während KUTTA die Funktionen $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ sämtlich als gleichberechtigt ansieht und auf dieselbe Weise behandelt, lassen wir diese Voraussetzung fallen, indem wir die Funktionen $x, y, \ldots$ nur unter sich und ebenso ihre Ableitungen $u, v, \ldots$ nur unter sich als gleichberechtigt ansehen. Zwar könnte man in $\delta_2 x, \delta_2 y, \ldots$ und $\delta_2 u, \delta_2 v, \ldots$ die Koeffizienten λ und ebenso die μ als verschieden annehmen; das würde aber nur unnötige Komplikationen mit sich bringen und schliesslich doch zu demselben Resultate führen, was wir jetzt nicht näher begründen wollen.

7. Nach diesen Bemerkungen können wir gleich den allgemeinen Ansatz hinschreiben. Dabei schliessen wir mit dem fünften Funktionswert, weil wir im folgenden höchstens je fünf Werte $\Delta' u, \Delta' v, \ldots$ zur Bestimmung von $\Delta x, \Delta u, \ldots$ heranziehen werden. Unser Ansatz lautet, wenn wir uns der Kuttaschen Bezeichnungsweise anschliessen:

$$\begin{aligned} \Delta' u &= f(t+\delta_i t, x+\delta_i x, y+\delta_i y, \ldots, u+\delta_i u, v+\delta_i v, \ldots)\Delta t \\ \Delta' v &= g(t+\delta_i t, x+\delta_i x, y+\delta_i y, \ldots, u+\delta_i u, v+\delta_i v, \ldots)\Delta t \\ &\ldots\ldots\ldots

Die Grössen $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta u, \Delta v, \ldots$ bildet KUTTA als Mittelwerte und wendet jedesmal dieselben Gewichte $a, b, c, \ldots$ an. Dagegen setzen wir

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta x = [u + a\ \Delta' u + b\ \Delta'' u + c\ \Delta''' u + d\ \Delta'''' u + e\ \Delta^{\mathrm{V}} u + \cdots]\Delta t \\ \Delta u = \quad a'\Delta' u + b'\Delta'' u + c'\Delta''' u + d'\Delta'''' u + e'\Delta^{\mathrm{V}} u + \cdots \\ \Delta y = [v + a\ \Delta' v + b\ \Delta'' v + c\ \Delta''' v + d\ \Delta'''' v + e\ \Delta^{\mathrm{V}} v + \cdots]\Delta t \\ \Delta v = \quad a'\Delta' v + b'\Delta'' v + c'\Delta''' v + d'\Delta'''' v + e'\Delta^{\mathrm{V}} v + \cdots, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

indem wir also neue, passend zu bestimmende Koeffizienten hineinziehen.

§ 3. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

8. Die folgenden Entwicklungen werden wir so gestalten, dass sie für ein aus beliebig vielen Gleichungen bestehendes System (8) gelten. Es wird jedoch genügen, die Formeln für nur zwei Funktionen x, y hinzuschreiben, denn daraus geht schon die allgemeine Form der Ausdrücke hervor.

Zunächst müssen wir die Taylorschen Reihen der Funktionen $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ bilden, damit wir die aus (13) und (14) folgenden Entwicklungen mit denselben vergleichen können. Bei den Differentiationen wird es praktisch sein, folgenden Operator

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v} + \cdots$$

einzuführen. Wenden wir ihn auf eine Funktion $\varphi(t, x, y, \ldots, u, v, \ldots)$ an, so ist das Ergebnis

$$D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cdots + f\frac{\partial \varphi}{\partial u} + g\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \cdots;$$

wir sehen also, dass D nichts anderes bedeutet als eine Differentiation nach t. Durch formale Anwendung des binomischen Lehrsatzes werden nun folgende Operatoren gewonnen

$$D^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v} + \cdots\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x} + \cdots + 2uv\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \cdots + 2uf\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial u} + \cdots$$

$$D^3 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + f\frac{\partial}{\partial u} + g\frac{\partial}{\partial v} + \cdots\right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial t^3} + 3u\frac{\partial^3}{\partial t^2\,\partial x} + \cdots + 3u^2v\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y} + \cdots + 3u^2f\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial u} + \cdots$$

u. s. w. Ferner gelten die Regeln

$$D(\varphi + \psi) = D\varphi + D\psi, \quad D(\varphi\psi) = \varphi D\psi + \psi D\varphi,$$

$$D(D^n\varphi) = D^{n+1}\varphi + n[fD^{n-1}\varphi'_x + gD^{n-1}\varphi'_y + \cdots + DfD^{n-1}\varphi'_u + DgD^{n-1}\varphi'_v + \cdots], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

9. Es kommen in D drei Arten von partiellen Ableitungen vor: erstens solche in bezug auf die unabhängige Veränderliche t, dann die in bezug auf die gesuchten Funktionen $x, y, \ldots$ und schliesslich Ableitungen in bezug auf die Funktionen $u, v, \ldots$, die ihrerseits Ableitungen der gesuchten Funktionen sind. Wir können indessen eine grössere Symmetrie dadurch erreichen, dass wir die Veränderliche t als eine der gesuchten Funktionen betrachten. Denken wir uns nämlich zu den Gleichungen (8) noch die Gleichung $t'' = 0$ hinzugefügt, so ist nichts im Wege, t als gleichberechtigt mit $x, y, \ldots$ anzusehen, und zwar lautet für diese Funktion die eine Anfangsbedingung $t' = 1$. Diese Auffassungsweise erlaubt uns nun, t ganz zu ignorieren, wenn wir nur dafür Sorge tragen, dass unsere Formeln für eine unbeschränkte Anzahl Funktionen $x, y, \ldots$

gelten. Anders ausgedrückt: Wir operieren so, als ob die unabhängige Variable in den Gleichungen (8) explicite gar nicht vorkäme. Für die Übersichtlichkeit ist das von grossem Vorteil.

Nun bilden wir die Ableitungen von $x, y, \ldots$ und erhalten für die vier ersten

$$x' = u,\ x'' = f,\ x''' = Df,\ x'''' = D^2 f + f'_x f + f'_y g + \cdots + f'_u Df + f'_v Dg + \cdots,$$
$$y' = v,\ y'' = g,\ y''' = Dg,\ y'''' = D^2 g + g'_x f + g'_y g + \cdots + g'_u Df + g'_v Dg + \cdots,$$
$$\ldots.,\ \ldots.,\ \ldots.,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die mittels derselben erhaltenen Taylorschen Entwicklungen für x und u sind auf Seite 12—13 in je eine Kolumne geschrieben und bis zu den Gliedern fünfter Ordnung einschl. in Δt fortgesetzt. Der Grund, warum wir diese Schreibweise benutzen, wird später klargelegt werden.

10. Die Zuwächse $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta u, \Delta v, \ldots$ müssen auch nach Potenzen von Δt entwikkelt werden. Dazu brauchen wir den Taylorschen Lehrsatz für mehrere Variablen, den wir unter Benutzung der sog. symbolischen Multiplikation in folgender Form schreiben:

$$f(t+\delta_i t, x+\delta_i x, y+\delta_i y, \ldots, u+\delta_i u, v+\delta_i v, \ldots) = f(t, x, y, \ldots, u, v, \ldots) +$$
$$+\left[\delta_i t \frac{\partial}{\partial t} + \delta_i x \frac{\partial}{\partial x} + \delta_i y \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + \delta_i u \frac{\partial}{\partial u} + \delta_i v \frac{\partial}{\partial v} + \cdots\right] f + \frac{1}{2!}\left[\ \right]^2 f + \frac{1}{3!}\left[\ \right]^3 f + \cdots, \tag{15}$$

wo in jeder Klammer derselbe Ausdruck steht wie in der ersten.

Die Grössen $\delta_i x, \delta_i y, \ldots, \delta_i u, \delta_i v$ bilden wir jedesmal nach (13) und bleiben bei den Gliedern vierter Ordnung stehen, falls die Reihen nicht eher abbrechen. Nachdem diese Ausdrücke bekannt sind, benutzen wir die Formel (15), um die Reihen für $\Delta^i u, \Delta^i v, \ldots$ zu entwickeln. Sodann bilden wir $\delta_{i+1} x, \delta_{i+1} y, \ldots, \delta_{i+1} u, \delta_{i+1} v, \ldots$ und gehen so Schritt für Schritt weiter.

Die Übersicht über die z. T. sehr weitläufigen Ausdrücke versuchen wir durch folgende Anordnung zu erleichtern. In $\Delta^i u, \ldots$ erscheinen nach und nach dieselben Glieder wie in den Taylorschen Reihen für $x, \ldots, u, \ldots$, und nun haben wir diejenigen Glieder der erstgenannten Reihen, die einen gemeinsamen Koeffizienten bekommen, bereits beim Hinschreiben der Taylorschen Reihen für $x, \ldots, u, \ldots$ (S. 12—13) in eine Gruppe zusammengefasst und für sie eine besondere Zeile reserviert. Dabei ist unter einem Koeffizienten eine Funktion der unbestimmten Parameter $\lambda, \mu, \ldots, \vartheta_1$ verstanden. Die Reihen $\Delta^i u$ tragen wir jetzt, nachdem wir sie mit den zugehörigen Gewichten a, b, c, d, e multipliziert haben, in je eine Kolumne der Tabelle S. 12—13 ein, und zwar brauchen wir dabei nur die Koeffizienten hinzuschreiben, da die mit diesen zu multiplizierenden Glieder auf derselben Zeile in den x- und u-Kolumnen schon angegeben sind.

Die Bedingungsgleichungen, deren Aufstellung das Ziel dieser ganzen Rechnung ist, treten nun fast unmittelbar hervor. Der Koeffizient (in dem angegebenen Sinne) irgendeines Gliedes der Taylor-Reihe muss nämlich nach (14) gleich sein der Summe der Koeffizienten desselben Gliedes in den Reihen für $a\Delta' u, b\Delta'' u, c\Delta''' u, d\Delta'''' u, e\Delta^{\mathrm{V}} u$, bzw. $a'\Delta' u, b'\Delta'' u, c'\Delta''' u, d'\Delta'''' u, e'\Delta^{\mathrm{V}} u$. Diese Gleichungen können aus unserem Schema ohne Schwierigkeit abgelesen werden; auf der einen Seite des Gleichheitszeichens steht in jeder ein Bruch, und diesen Bruch haben wir von den Gliedern der Taylor-Reihen stets als Faktor abgetrennt.

Bisher haben wir nur die Reihen für $\Delta x, \Delta u, \Delta^i u$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ausdrücklich in Betracht gezogen, genau dieselben Bedingungsgleichungen ergeben sich aber beim Vergleich der beiden Reihen für $\Delta y, \Delta v$.

Wir stellen hier die Grössen $\delta_i x, \delta_i y, \delta_i u, \delta_i v$, $(i = 2, 3, 4, 5)$ zusammen. Man bekommt der Reihe nach

$$\begin{cases}\delta_2 x = \lambda u \Delta t + \varrho f (\Delta t)^2,\\ \delta_2 y = \lambda v \Delta t + \varrho g (\Delta t)^2,\\ \delta_2 u = \lambda f \Delta t,\\ \delta_2 v = \lambda g \Delta t,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_3 x = \mu u \Delta t + \sigma f (\Delta t)^2 + \lambda \tau D f (\Delta t)^3 + [\varrho \tau (f'_x f + f'_y g) + \lambda^2 \tau \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^4,\\ \delta_3 y = \mu v \Delta t + \sigma g (\Delta t)^2 + \lambda \tau D g (\Delta t)^3 + [\varrho \tau (g'_x f + g'_y g) + \lambda^2 \tau \tfrac{1}{2} D^2 g](\Delta t)^4,\\ \delta_3 u = \mu f \Delta t + \lambda \tau_1 D f (\Delta t)^2 + [\varrho \tau_1 (f'_x f + f'_y g) + \lambda^2 \tau_1 \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^3 + [\lambda \varrho \tau_1 (f D f'_x + g D f'_y) + \lambda^3 \tau_1 \tfrac{1}{6} D^3 f](\Delta t)^4,\\ \delta_3 v = \mu g \Delta t + \lambda \tau_1 D g (\Delta t)^2 + [\varrho \tau_1 (g'_x f + g'_y g) + \lambda^2 \tau_1 \tfrac{1}{2} D^2 g](\Delta t)^3 + [\lambda \varrho \tau_1 (f D g'_x + g D g'_y) + \lambda^3 \tau_1 \tfrac{1}{6} D^3 g](\Delta t)^4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_4 x = \nu u \Delta t + \varphi f (\Delta t)^2 + (\mu \psi + \lambda \chi) D f (\Delta t)^3 +\\ \quad + [(f'_x f + f'_y g)(\sigma \psi + \varrho \chi) + \lambda \tau_1 \psi (f'_u D f + f'_v D g) + (\mu^2 \psi + \lambda^2 \chi) \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^4,\\ \delta_4 y = \nu v \Delta t + \varphi g (\Delta t)^2 + (\mu \psi + \lambda \chi) D g (\Delta t)^3 +\\ \quad + [(g'_x f + g'_y g)(\sigma \psi + \varrho \chi) + \lambda \tau_1 \psi (g'_u D f + g'_v D g) + (\mu^2 \psi + \lambda^2 \chi) \tfrac{1}{2} D^2 g](\Delta t)^4,\\ \delta_4 u = \nu f \Delta t + (\mu \psi_1 + \lambda \chi_1) D f (\Delta t)^2 +\\ \quad + [(\sigma \psi_1 + \varrho \chi_1)(f'_x f + f'_y g) + \lambda \tau_1 \psi_1 (f'_u D f + f'_v D g) + (\mu^2 \psi_1 + \lambda^2 \chi_1) \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^3 +\\ \quad + [(\mu \sigma \psi_1 + \lambda \varrho \chi_1)(f D f'_x + g D f'_y) + (\mu^3 \psi_1 + \lambda^3 \chi_1) \tfrac{1}{6} D^3 f + \varrho \tau_1 \psi_1 (f'_u (f'_x f + f'_y g) + f'_v (g'_x f + g'_y g)) +\\ \quad + \lambda^2 \tau_1 \psi_1 \tfrac{1}{2} (f'_u D^2 f + f'_v D^2 g) + \lambda \mu \tau_1 \psi_1 (D f D f'_u + D g D f'_v) + \lambda \tau \psi_1 (f'_x D f + f'_y D g)](\Delta t)^4,\\ \delta_4 v = \nu g \Delta t + \cdots\cdots,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\delta_5 x = \pi u \Delta t + \xi f (\Delta t)^2 + (\nu \vartheta + \mu \zeta + \lambda \eta) D f (\Delta t)^3 +\\ \quad + [(f'_x f + f'_y g)(\varphi \vartheta + \sigma \zeta + \varrho \eta) + (f'_u D f + f'_v D g)(\mu \psi_1 \vartheta + \lambda \chi_1 \vartheta + \lambda \tau_1 \zeta) + (\nu^2 \vartheta + \mu^2 \zeta + \lambda^2 \eta) \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^4,\\ \delta_5 y = \pi v \Delta t + \xi g (\Delta t)^2 + (\nu \vartheta + \mu \zeta + \lambda \eta) D g (\Delta t)^3 +\\ \quad + [(g'_x f + g'_y g)(\varphi \vartheta + \sigma \zeta + \varrho \eta) + (g'_u D f + g'_v D g)(\mu \psi_1 \vartheta + \lambda \chi_1 \vartheta + \lambda \tau_1 \zeta) + (\nu^2 \vartheta + \mu^2 \zeta + \lambda^2 \eta) \tfrac{1}{2} D^2 g](\Delta t)^4,\\ \delta_5 u = \pi f \Delta t + (\nu \vartheta_1 + \mu \zeta_1 + \lambda \eta_1) D f (\Delta t)^2 +\\ \quad + [(f'_x f + f'_y g)(\varphi \vartheta_1 + \sigma \zeta_1 + \varrho \eta_1) + (f'_u D f + f'_v D g)(\mu \psi_1 \vartheta_1 + \lambda \chi_1 \vartheta_1 + \lambda \tau_1 \zeta_1) + (\nu^2 \vartheta_1 + \mu^2 \zeta_1 + \lambda^2 \eta_1) \tfrac{1}{2} D^2 f](\Delta t)^3 +\\ \quad + \{(f D f'_x + g D f'_y)(\nu \varphi \vartheta_1 + \mu \sigma \zeta_1 + \lambda \varrho \eta_1) + (\nu^3 \vartheta_1 + \mu^3 \zeta_1 + \lambda^3 \eta_1) \tfrac{1}{6} D^3 f +\\ \quad + [f'_u (f'_x f + f'_y g) + f'_v (g'_x f + g'_y g)](\sigma \psi_1 \vartheta_1 + \varrho \chi_1 \vartheta_1 + \varrho \tau_1 \zeta_1) + (\mu^2 \psi_1 \vartheta_1 + \lambda^2 \chi_1 \vartheta_1 + \lambda^2 \tau_1 \zeta_1) \tfrac{1}{2} (f'_u D^2 f + f'_v D^2 g) +\\ \quad + (D f D f'_u + D g D f'_v)(\mu \nu \psi_1 \vartheta_1 + \lambda \nu \chi_1 \vartheta_1 + \lambda \mu \tau_1 \zeta_1) + (f'_x D f + f'_y D g)(\mu \psi \vartheta_1 + \lambda \chi \vartheta_1 + \lambda \tau \zeta_1) +\\ \quad + [f'_u (f'_u D f + f'_v D g) + f'_v (g'_u D f + g'_v D g)] \lambda \tau_1 \psi_1 \vartheta_1\} (\Delta t)^4,\\ \delta_5 v = \pi g \Delta t + \cdots\cdots\end{cases}$$

Der Kürze wegen haben wir die Ausdrücke für $\delta_4 v$, $\delta_5 v$ nicht hingeschrieben, sie können leicht nach der Analogie von $\delta_4 u$, $\delta_5 u$ gebildet werden.

Nun lassen wir die Tabelle der Reihenentwicklungen und der Bedingungsgleichungen folgen. Die letzteren haben wir mit laufender Numerierung versehen, und zwar bezeichnen die Nummern 1—12 diejenigen Gleichungen, die aus den Reihen für Δx erhalten wurden, während die Gleichungen 1′—32′ durch Identifizierung der beiden Reihen für Δu entstanden sind. Diese Gleichungen enthalten die Gewichte a', b', c', d', e', die ersteren dagegen die Gewichte a, b, c, d, e als unbekannte Koeffizienten.

$$\Delta x - u\,\Delta t \qquad + \left\{ \begin{array}{l} a\,\Delta' u + b\,\Delta'' u + c\,\Delta''' u + d\,\Delta'''' u \\ a'\Delta' u + b'\Delta'' u + c'\Delta''' u + d'\Delta'''' u \end{array} \right.$$

$$\Delta x = u\,\Delta t +$$

1.	$+ f(\Delta t)^2 \times$	$\frac{1}{2}$	$= a$	$+ b$	$+ c$	$+ d$
2.	$+ Df(\Delta t)^3 \times$	$\frac{1}{6}$		$b\lambda$	$+ c\mu$	$+ d\nu$
	$+ (\Delta t)^4 \times$					
3.	$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. (f'_x f + f'_y g) \times$	$\frac{1}{24}$		$b\varrho$	$+ c\sigma$	$+ d\varphi$
4.	$+ (f'_u Df + f'_v Dg) \times$	$\frac{1}{24}$	$=$		$c\lambda\tau_1$	$+ d(\mu\psi_1 + \lambda\chi_1)$
5.	$+ \frac{1}{2} D^2 f \times$	$\frac{1}{12}$		$b\lambda^2$	$+ c\mu^2$	$+ d\nu^2$
	$+ (\Delta t)^5 \times$					
6.	$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. (fDf'_x + gDf'_y) \times$	$\frac{1}{40}$	$=$	$b\lambda\varrho$	$+ c\mu\sigma$	$+ d\nu\varphi$
7.	$+ \frac{1}{6} D^3 f \times$	$\frac{1}{20}$	$=$	$b\lambda^3$	$+ c\mu^3$	$+ d\nu^3$
8.	$+ [f'_u(f'_x f + f'_y g) + f'_v(g'_x f + g'_y g)] \times$	$\frac{1}{120}$	$=$		$c\varrho\tau_1$	$+ d(\sigma\psi_1 + \varrho\chi_1)$
9.	$+ \frac{1}{2}(f'_u D^2 f + f'_v D^2 g) \times$	$\frac{1}{60}$			$c\lambda^2\tau_1$	$+ d(\mu^2\psi_1 + \lambda^2\chi_1)$
10.	$+ (Df\,Df'_u + Dg\,Df'_v) \times$	$\frac{1}{40}$			$c\lambda\mu\tau_1$	$+ d\nu(\mu\psi_1 + \lambda\chi_1)$
11.	$+ (f'_x Df + f'_y Dg) \times$	$\frac{1}{120}$	$=$		$c\lambda\tau$	$+ d(\mu\psi + \lambda\chi)$
12.	$+ [f'_u(f'_u Df + f'_v Dg) + f'_v(g'_u Df + g'_v Dg)] \times$	$\frac{1}{120}$	$=$			$d\lambda\tau_1\psi_1$
13.				$b\varrho^2$	$+ c\sigma^2$	$+ d\varphi^2$
14.				$b\lambda^2\varrho$	$+ c\mu^2\sigma$	$+ d\nu^2\varphi$
15.				$b\lambda^4$	$+ c\mu^4$	$+ d\nu^4$
16.					$c\varrho\tau$	$+ d(\sigma\psi + \varrho\chi)$
17.					$c\lambda^2\tau$	$+ d(\mu^2\psi + \lambda^2\chi)$
18.					$c\lambda\varrho\tau_1$	$+ d(\mu\sigma\psi_1 + \lambda\varrho\chi_1)$
19.					$c\lambda^3\tau_1$	$+ d(\mu^3\psi_1 + \lambda^3\chi_1)$
20.					$c\lambda^2\tau_1^2$	$+ d(\mu\psi_1 + \lambda\chi_1)^2$
21.					$c\sigma\lambda\tau_1$	$+ d\varphi(\mu\psi_1 + \lambda\chi_1)$
22.					$c\mu^2\lambda\tau_1$	$+ d\nu^2(\mu\psi_1 + \lambda\chi_1)$
23.					$c\mu\lambda\tau$	$+ d\nu(\mu\psi + \lambda\chi)$
24.					$c\mu\varrho\tau_1$	$+ d\nu(\sigma\psi_1 + \varrho\chi_1)$
25.					$c\mu\lambda^2\tau_1$	$+ d\nu(\mu^2\psi_1 + \lambda^2\chi_1)$
26.						$d\lambda\tau_1\psi$
27.						$d\varrho\tau_1\psi_1$
28.						$d\lambda^2\tau_1\psi_1$
29.						$d\lambda\mu\tau_1\psi_1$
30.						$d\lambda\tau\psi_1$
31.						$d\nu\lambda\tau_1\psi_1$
32.						

$$+ e\ \Delta^{\nu} u \Big\} \Delta t$$

$$+ e' \Delta^{\nu} u \qquad = \qquad \Delta u$$

$$\Delta u =$$

$$e = 1 \times f \Delta t + \qquad 1'.$$

$$e\pi = \tfrac{1}{2} \times D f (\Delta t)^2 + \qquad 2'.$$

$$(\Delta t)^3 \times$$

$$e\xi = \left\{ \tfrac{1}{6} \times (f'_x f + f'_y g) + \right. \qquad 3'.$$

$$e(\nu\vartheta_1 + \mu\xi_1 + \lambda\eta_1) = \tfrac{1}{6} \times (f'_u D f + f'_v D g) + \qquad 4'.$$

$$e\pi^2 = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} D^2 f \Big\} + \qquad 5'.$$

$$(\Delta t)^4 \times$$

$$e\pi\xi = \left\{ \tfrac{1}{8} \times (f D f'_x + g D f'_y) + \right. \qquad 6'.$$

$$e\pi^3 = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{1}{6} D^3 f + \qquad 7'.$$

$$e(\varphi\vartheta_1 + \sigma\xi_1 + \varrho\eta_1) = \tfrac{1}{24} \times [f'_u (f'_x f + f'_y g) + f'_v (g'_x f + g'_y g)] + \qquad 8'.$$

$$e(\nu^2\vartheta_1 + \mu^2\xi_1 + \lambda^2\eta_1) = \tfrac{1}{12} \times \tfrac{1}{2} (f'_u D^2 f + f'_v D^2 g) + \qquad 9'.$$

$$e\pi(\nu\vartheta_1 + \mu\xi_1 + \lambda\eta_1) = \tfrac{1}{8} \times (D f D f'_u + D g D f'_v) + \qquad 10'.$$

$$e(\nu\vartheta + \mu\xi + \lambda\eta) = \tfrac{1}{24} \times (f'_x D f + f'_y D g) + \qquad 11'.$$

$$e(\mu\psi_1\vartheta_1 + \lambda\chi_1\vartheta_1 + \lambda\tau_1\zeta_1) = \tfrac{1}{24} \times [f'_u (f'_u D f + f'_v D g) + f'_v (g'_u D f + g'_v D g)] \Big\} + \qquad 12'.$$

$$(\Delta t)^5 \times$$

$$e\xi^2 = \left\{ \tfrac{1}{20} \times \tfrac{1}{2} (f''_{xx} f^2 + 2 f''_{xy} f g + f''_{yy} g^2) + \right. \qquad 13'.$$

$$e\pi^2\xi = \tfrac{1}{10} \times \tfrac{1}{2} (f D^2 f'_x + g D^2 f'_y) + \qquad 14'.$$

$$e\pi^4 = \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{24} D^4 f + \qquad 15'.$$

$$e(\varphi\vartheta + \sigma\zeta + \varrho\eta) = \tfrac{1}{120} \times [f'_x (f'_x f + f'_y g) + f'_y (g'_x f + g'_y g)] + \qquad 16'.$$

$$e(\nu^2\vartheta + \mu^2\zeta + \lambda^2\eta) = \tfrac{1}{60} \times \tfrac{1}{2} [f'_x D^2 f + f'_y D^2 g] + \qquad 17'.$$

$$e(\nu\varphi\vartheta_1 + \mu\sigma\zeta_1 + \lambda\varrho\eta_1) = \tfrac{1}{40} \times [f'_u (f D f'_x + g D f'_y) + f'_v (f D g'_x + g D g'_y)] + \qquad 18'.$$

$$e(\nu^3\vartheta_1 + \mu^3\zeta_1 + \lambda^3\eta_1) = \tfrac{1}{20} \times \tfrac{1}{6} (f'_u D^3 f + f'_v D^3 g) + \qquad 19'.$$

$$e(\nu\vartheta_1 + \mu\zeta_1 + \lambda\eta_1)^2 = \tfrac{1}{20} \times \tfrac{1}{2} [f''_{uu} (D f)^2 + 2 f''_{uv} D f D g + f''_{vv} (D g)^2] + \qquad 20'.$$

$$e\xi(\nu\vartheta_1 + \mu\zeta_1 + \lambda\eta_1) = \tfrac{1}{20} \times (f''_{xu} f D f + f''_{xv} f D g + f''_{yu} g D f + f''_{yv} g D g) + \qquad 21'.$$

$$e\pi^2(\nu\vartheta_1 + \mu\zeta_1 + \lambda\eta_1) = \tfrac{1}{10} \times \tfrac{1}{2} (D f D^2 f'_u + D g D^2 f'_v) + \qquad 22'.$$

$$e\pi(\nu\vartheta + \mu\xi + \lambda\eta) = \tfrac{1}{30} \times (D f D f'_x + D g D f'_y) + \qquad 23'.$$

$$e\pi(\varphi\vartheta_1 + \sigma\zeta_1 + \varrho\eta_1) = \tfrac{1}{30} \times [(f'_x f + f'_y g) D f'_u + (g'_x f + g'_y g) D f'_v] + \qquad 24'.$$

$$e\pi(\nu^2\vartheta_1 + \mu^2\zeta_1 + \lambda^2\eta_1) = \tfrac{1}{15} \times \tfrac{1}{2} (D^2 f D f'_u + D^2 g D f'_v) + \qquad 25'.$$

$$e(\mu\psi_1\vartheta + \lambda\chi_1\vartheta + \lambda\tau_1\zeta) = \tfrac{1}{120} \times [f'_x (f'_u D f + f'_v D g) + f'_y (g'_u D f + g'_v D g)] + \qquad 26'.$$

$$e(\sigma\psi_1\vartheta_1 + \varrho\chi_1\vartheta_1 + \varrho\tau_1\zeta_1) = \tfrac{1}{120} \times [f'_u [f'_u (f'_x f + f' g) + f'_v (g'_x f + g'_y g)] + \qquad 27'.$$
$$+ f'_v [g'_u (f'_x f + f'_y g) + g'_v (g'_x f + g'_y g)]] +$$

$$e(\mu^2\psi_1\vartheta_1 + \lambda^2\chi_1\vartheta_1 + \lambda^2\tau_1\zeta_1) = \tfrac{1}{60} \times \tfrac{1}{2} [f'_u (f'_u D^2 f + f'_v D^2 g) + f'_v (g'_u D^2 f + g'_v D^2 g)] + \qquad 28'.$$

$$e(\mu\nu\psi_1\vartheta_1 + \lambda\nu\chi_1\vartheta_1 + \lambda\mu\tau_1\zeta_1) = \tfrac{1}{40} \times [f'_u (D f D f'_u + D g D f'_v) + f'_v (D f D g'_u + D g D g'_v)] + \qquad 29'.$$

$$e(\mu\psi\vartheta_1 + \lambda\chi\vartheta_1 + \lambda\tau\zeta_1) = \tfrac{1}{120} \times [f'_u (f'_x D f + f'_y D g) + f'_v (g'_x D f + g'_y D g)] + \qquad 30'.$$

$$e\pi(\mu\psi_1\vartheta_1 + \lambda\chi_1\vartheta_1 + \lambda\tau_1\zeta_1) = \tfrac{1}{30} \times [(f'_u D f + f'_v D g) D f'_u + (g'_u D f + g'_v D g) D f'_v] + \qquad 31'.$$

$$e\lambda\tau_1\psi_1\vartheta_1 = \tfrac{1}{120} \times [f'_u [f'_u (f'_u D f + f'_v D g) + f'_v (g'_u D f + g'_v D g)] + \qquad 32'.$$
$$+ f'_v [g'_u (f'_u D f + f'_v D g) + g'_v (g'_u D f + g'_v D g)]]$$

§ 4. Auflösung der Bedingungsgleichungen.

11. Bei der numerischen Integration von Differentialgleichungen bildet im allgemeinen die Berechnung der Funktionswerte den weitaus grössten Teil der Arbeit, denn alles Übrige sind im wesentlichen nur Additionen und Multiplikationen mit verhältnismässig einfachen Koeffizienten. Daher werden wir bei der Bestimmung der letzteren stets mit möglichst wenig Funktionswerten den gewünschten Grad der Annäherung zu erreichen versuchen.

Aus der grossen Tabelle der Bedingungsgleichungen werden wir nun bestimmte Systeme von solchen herausgreifen, durch deren Auflösung sich Näherungsformeln verschiedener Ordnung erzielen lassen.

Unter einer Näherung einer gewissen Ordnung n für ein System (8) verstehen RUNGE und KUTTA eine solche, die die Taylorschen Reihen

$$\Delta x = u\Delta t + \tfrac{1}{2}f(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{6}Df(\Delta t)^3 + \cdots, \quad \Delta u = f\Delta t + \tfrac{1}{2}Df(\Delta t)^2 + \cdots$$

bis auf Glieder n-ter Ordnung einschliesslich richtig darstellt. Es ist dies eine notwendige Folge aus der Betrachtung des Systems (8) als eines Spezialfalles des Normalsystems. Von unserem Standpunkt aus erscheint die Frage berechtigt, ob es nicht natürlicher wäre, die Ordnung der Näherung n zu nennen, wenn die gesuchten Funktionen bis auf Grössen n-ter, ihre Ableitungen aber bis auf solche der n—1. Ordnung einschl. richtig angenähert werden, weil nämlich dann in beiden Reihen gleich weit in der Berechnung der Ableitungen x''', x'''', ... gegangen wird. Jedoch wollen wir die frühere Benennung nicht ändern, werden aber Formeln untersuchen, die sich entweder der einen oder der anderen Auffassungsweise anschliessen.

Gelegentlich werden wir die Ordnung nur durch römische Ziffern andeuten und daneben die Anzahl der zu berechnenden Funktionswerte schreiben; so würde z. B. die Bezeichnung (IV, III, 3) auf eine Näherungsformel hindeuten, die eine Approximation vierter Ordnung in den gesuchten Funktionen und eine der dritten in ihren Ableitungen liefert und zwar durch Berechnung von drei Funktionswerten für jede Funktion.

A. Näherungsformeln für Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in denen die ersten Ableitungen fehlen.

12. Wir werden zuerst eine besondere Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung (8) untersuchen, nämlich solche, wo die ersten Ableitungen $u, v, \ldots$ fehlen.

Auf die Form eines solchen Systems lässt sich jedes Normalsystem

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y, \ldots), \quad \frac{dy}{dt} = G(t, x, y, \ldots), \ldots$$

bringen. Durch Differentiation findet man nämlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \cdots$$

In diese Ausdrücke tragen wir die Werte der ersten Ableitungen von $x, y, \ldots$ ein und bekommen dann ein System der verlangten Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, y, \ldots), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g(t, x, y, \ldots), \ldots \tag{16}$$

Differentialgleichungen dieser Art kommen oft in den Anwendungen vor, in der Mechanik z. B., wenn die wirkenden Kräfte von dem Ort und von der Zeit abhängen, nicht aber von den jeweiligen Geschwindigkeiten.

13. Aus dem allgemeinen Ansatz (13) geht hervor, dass als Folge des Auftretens von $u, v, \ldots$ in den Differentialgleichungen (8) die Koeffizienten mit dem Index eins, also $\tau_1, \ldots, \vartheta_1$ in den Bedingungsgleichungen erscheinen. Daraus lässt sich schliessen, dass im Falle eines Systems der Form (16) alle diejenigen Bedingungsgleichungen, wo diese Grössen vorkommen, fortgelassen werden können. In der Tat haben wir in diesem Falle $f'_u \equiv f'_v \equiv g'_u - g'_v - \ldots \equiv 0$, und können uns überzeugen, dass die Glieder der Taylorschen Reihen, die den genannten Gleichungen entsprechen, identisch verschwinden. Die Nummern dieser Bedingungsgleichungen, die also im Falle des Systems (16) nicht erfüllt zu werden brauchen, sind: 4, 8, 9, 10, 12; 4′, 8′, 9′, 10′, 12′, 18′—22′, 24′—32′.

14. Zur Bestimmung einer Näherungsformel dritter Ordnung (III, III) ist es notwendig, das System der Gleichungen 1, 2, 1′, 2′, 3′, 5′ zu befriedigen. Diese lauten, wenn wir nur zwei Funktionsberechnungen voraussetzen, also $c = d = e = c' = d' = e' = 0$ setzen,

$$a + b = \frac{1}{2}, \quad b\lambda = \frac{1}{6}, \quad a' + b' = 1, \quad b'\lambda = \frac{1}{2}, \quad b'\varrho = \frac{1}{6}, \quad b'\lambda^2 = \frac{1}{3}.$$

Die Lösung ist eindeutig bestimmt, und es ergibt sich

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}, \quad a' = \frac{1}{4}, \quad b' = \frac{3}{4}, \quad \lambda = \frac{2}{3}, \quad \varrho = \frac{2}{9}.$$

Die Formel selbst ist nebst den anderen an anderer Stelle (S. 23) angeschrieben und wird dort mit Nr. I bezeichnet. Dabei erscheint es zweckmässig, gewisse Grössen $\Delta' x, \Delta' y, \ldots$ wieder als Abkürzungen einzuführen.

15. Zur Bestimmung der Koeffizienten einer Näherungsformel (IV, IV, 3) erhält man das folgende System von Gleichungen:

$$(17)\quad \left|\begin{array}{llll}
1. & a + b + c = \frac{1}{2}, & 1'. & a' + b' + c' = 1, \qquad 6'. \quad b'\lambda\varrho + c'\mu\sigma = \frac{1}{8},\\
2. & b\lambda + c\mu = \frac{1}{6}, & 2'. & b'\lambda + c'\mu = \frac{1}{2}, \qquad 7'. \quad b'\lambda^3 + c'\mu^3 = \frac{1}{4},\\
3. & b\varrho + c\sigma = \frac{1}{24}, & 3'. & b'\varrho + c'\sigma = \frac{1}{6}, \qquad 11'. \quad c'\lambda\tau = \frac{1}{24}.\\
5. & b\lambda^2 + c\mu^2 = \frac{1}{12}, & 5'. & b'\lambda^2 + c'\mu^2 = \frac{1}{3},
\end{array}\right.$$

MARINE BIOLOGICAL LABORATORY WOODS HOLE LIBRARY MASS.

Wir versuchen zuerst λ und μ zu bestimmen, denn wenn diese Grössen bekannt sind, können die anderen Unbekannten linear ermittelt werden. Durch Elimination von b', c' aus $2', 5', 7'$ bekommen wir die Relation

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \frac{1}{2} \\ \lambda^2 & \mu^2 & \frac{1}{3} \\ \lambda^3 & \mu^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \lambda\mu(\mu - \lambda)\left[\frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\lambda + \mu}{3} + \frac{1}{4}\right].$$

Es muss

$$\frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\lambda+\mu}{3} + \frac{1}{4} = 0 \tag{18}$$

sein, denn die anderen Möglichkeiten, nämlich $\lambda = 0$, $\mu = 0$ oder $\lambda = \mu$ würden, wie leicht ersichtlich, zu einem Widerspruch führen. Nun folgt aus $3'$, $5'$; $6'$, $7'$

$$b'(\lambda^2 - 2\varrho) + c'(\mu^2 - 2\sigma) = 0, \quad b'\lambda(\lambda^2 - 2\varrho) + c'\mu(\mu^2 - 2\sigma) = 0.$$

c' kann wegen $11'$ nicht verschwinden und b' wegen $2'$, $5'$, $7'$ auch nicht; daher folgt

$$\varrho = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \sigma = \frac{\mu^2}{2}. \tag{19}$$

Diese zwei Relationen machen nicht nur $3'$ und $6'$ mit den Gleichungen $5'$ und $7'$ bzw. identisch, sondern auch 3 und 5 untereinander. In anderen Gleichungen unseres Systems kommen ϱ und σ überhaupt nicht vor.

Werden nun λ und μ so bestimmt, dass die Relation (18) erfüllt ist, so bestimmen sich die anderen Unbekannten eindeutig und zwar

$$a, b, c \text{ aus } 1, 2, 5; \quad a', b', c' \text{ aus } 1', 2', 5'; \quad \tau \text{ aus } 11'; \quad \varrho, \sigma \text{ aus (19)}.$$

Damit werden in der Tat alle 11 Gleichungen in (17) befriedigt.

Den willkürlichen Parameter (λ oder μ) können wir entweder dadurch verwenden, dass wir dem System (17) noch eine Gleichung hinzufügen, um etwa ein bestimmtes Teilglied fünfter Ordnung in der x-Reihe richtig darzustellen, oder aber um das Wurzelsystem möglichst bequem zu gestalten.

Für den letztgenannten Zweck liegt es sehr nahe $\mu = 1$ zu setzen, womit wir nach (18) $\lambda = \frac{1}{2}$ bekommen. Es ergibt sich weiter in der beschriebenen Weise

$$\lambda = \frac{1}{2}, \ \mu = 1, \ \varrho = \frac{1}{8}, \ \sigma = \frac{1}{2}, \ \tau = \frac{1}{2}, \ a = \frac{1}{6}, \ b = \frac{1}{3}, \ c = 0, \ a' = c' = \frac{1}{6}, \ b' = \frac{2}{3}.$$

Dieses Wurzelsystem wird wohl das einfachst mögliche sein; die zugehörige Formel, Nr. II, S. 24, erinnert sehr an die »Runge-Kuttasche», setzt aber nur drei berechnete Funktionswerte voraus, statt vier wie jenes.[8] Bei der Untersuchung der Restglieder werden wir zeigen, dass das neue System dem alten auch an Genauigkeit nicht nachsteht. Dasselbe macht es unnötig, eine Näherung (IV, III) zu suchen, da zu der letzteren ebenfalls drei Funktionsberechnungen erforderlich wären.

16. Höhere Näherungen als die schon behandelten können wir erst durch Hinzunahme eines vierten Funktionswertes erhalten, in welchem Falle wir nach (13) und (14) über 17 Koeffizienten verfügen können.

Zunächst schreiben wir die Bedingungen für eine Näherung (V, V, 4) vollständig auf:

[8] Wie die »Runge-Kuttasche Formel» als Erweiterung der »Simpsonschen Regel» gilt, kann unsere Formel Nr. II als Erweiterung einer gewissen *Kubaturformel* aufgefasst werden, die in der Literatur unter verschiedenen Namen, z. B. »règle des trois niveaux» vorkommt; zuerst wohl in CAVALIERI: Una Centuria di varii Problemi (Prattica Astrologica), Bologna 1639. Vgl. Enc. Math. Wiss. II. C. 2. S. 129.

$$
(20)\quad \left\{\begin{array}{llll}
1. & a+b+c+d = \frac{1}{2}, & 1'. & a'+b'+c'+d' = 1,\\
2. & b\lambda+c\mu+d\nu = \frac{1}{6}, & 2'. & b'\lambda+c'\mu+d'\nu = \frac{1}{2},\\
3. & b\varrho+c\sigma+d\varphi = \frac{1}{24}, & 3'. & b'\varrho+c'\sigma+d'\varphi = \frac{1}{6},\\
5. & b\lambda^2+c\mu^2+d\nu^2 = \frac{1}{12}, & 5'. & b'\lambda^2+c'\mu^2+d'\nu^2 = \frac{1}{3},\\
6. & b\lambda\varrho+c\mu\sigma+d\nu\varphi = \frac{1}{40}, & 6'. & b'\lambda\varrho+c'\mu\sigma+d'\nu\varphi = \frac{1}{8},\\
7. & b\lambda^3+c\mu^3+d\nu^3 = \frac{1}{20}, & 7'. & b'\lambda^3+c'\mu^3+d'\nu^3 = \frac{1}{4},\\
11. & c\lambda\tau+d(\mu\psi+\lambda\chi) = \frac{1}{120}, & 11'. & c'\lambda\tau+d'(\mu\psi+\lambda\chi) = \frac{1}{24},\\
 & & 13'. & b'\varrho^2+c'\sigma^2+d'\varphi^2 = \frac{1}{20},\\
 & & 14'. & b'\lambda^2\varrho+c'\mu^2\sigma+d'\nu^2\varphi = \frac{1}{10},\\
 & & 15'. & b'\lambda^4+c'\mu^4+d'\nu^4 = \frac{1}{5},\\
 & & 16'. & c'\varrho\tau+d'(\sigma\psi+\varrho\chi) = \frac{1}{120},\\
 & & 17'. & c'\lambda^2\tau+d'(\mu^2\psi+\lambda^2\chi) = \frac{1}{60},\\
 & & 23'. & c'\mu\lambda\tau+d'\nu(\mu\psi+\lambda\chi) = \frac{1}{30}.
\end{array}\right.
$$

Die Auflösung gestaltet sich ähnlich derjenigen von (17), aber natürlich verwickelter. Damit die vier in b', c', d' linearen Gleichungen $2', 5', 7', 15'$ vereinbar seien, ist die Bedingung

$$
\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \frac{1}{2} \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \frac{1}{3} \\ \lambda^3 & \mu^3 & \nu^3 & \frac{1}{4} \\ \lambda^4 & \mu^4 & \nu^4 & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = -P\left[\frac{\lambda\mu\nu}{2} - \frac{\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu}{3} + \frac{\lambda+\mu+\nu}{4} - \frac{1}{5}\right] = 0
$$

notwendig, wo

$$
P = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \\ \lambda^3 & \mu^3 & \nu^3 \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda).
$$

Sie ist auch hinreichend, wenn wir vorläufig die Annahme $P \neq 0$ machen. Dann haben wir

$$
(21)\qquad \frac{\lambda\mu\nu}{2} - \frac{\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu}{3} + \frac{\lambda+\mu+\nu}{4} - \frac{1}{5} = 0.
$$

Wie bei der Auflösung von (17) zeigt es sich, dass, λ, μ, ν als bekannt vorausgesetzt, alle übrigen Parameter sich durch diese *rationell* ausdrücken lassen. Die Grössen a, b, c, d werden linear aus $1, 2, 5, 7$ berechnet, ebenso a', b', c', d' aus $1', 2', 5', 7'$, und zwar ergibt sich

$$
(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} b = \frac{B}{P}, \quad c = \frac{C}{P}, \quad d = \frac{D}{P}, \quad a = \frac{1}{2} - b - c - d, \\ b' = \frac{B'}{P}, \quad c' = \frac{C'}{P}, \quad d' = \frac{D'}{P}, \quad a' = 1 - b' - c' - d', \end{array}\right.
$$

wo

$$(23)\quad \begin{cases} B = \begin{vmatrix} \mu & \nu & \frac{1}{6} \\ \mu^2 & \nu^2 & \frac{1}{12} \\ \mu^3 & \nu^3 & \frac{1}{20} \end{vmatrix} = -\mu\nu(\mu-\nu)\left[\frac{\mu\nu}{6} - \frac{\mu+\nu}{12} + \frac{1}{20}\right], \quad B' = \begin{vmatrix} \mu & \nu & \frac{1}{2} \\ \mu^2 & \nu^2 & \frac{1}{3} \\ \mu^3 & \nu^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\mu\nu(\mu-\nu)\left[\frac{\mu\nu}{2} - \frac{\mu+\nu}{3} + \frac{1}{4}\right], \\ C = \begin{vmatrix} \lambda & \nu & \frac{1}{6} \\ \lambda^2 & \nu^2 & \frac{1}{12} \\ \lambda^3 & \nu^3 & \frac{1}{20} \end{vmatrix} = \lambda\nu(\lambda-\nu)\left[\frac{\lambda\nu}{6} - \frac{\lambda+\nu}{12} + \frac{1}{20}\right], \quad C' = \begin{vmatrix} \lambda & \nu & \frac{1}{2} \\ \lambda^2 & \nu^2 & \frac{1}{3} \\ \lambda^3 & \nu^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \lambda\nu(\lambda-\nu)\left[\frac{\lambda\nu}{2} - \frac{\lambda+\nu}{3} + \frac{1}{4}\right], \\ D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \frac{1}{6} \\ \lambda^2 & \mu^2 & \frac{1}{12} \\ \lambda^3 & \mu^3 & \frac{1}{20} \end{vmatrix} = -\lambda\mu(\lambda-\mu)\left[\frac{\lambda\mu}{6} - \frac{\lambda+\mu}{12} + \frac{1}{20}\right], \quad D' = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \frac{1}{2} \\ \lambda^2 & \mu^2 & \frac{1}{3} \\ \lambda^3 & \mu^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\lambda\mu(\lambda-\mu)\left[\frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\lambda+\mu}{3} + \frac{1}{4}\right]. \end{cases}$$

Um ϱ, σ, φ zu bestimmen, bilden wir aus $5', 3'; 7', 6'; 15', 14'$ das homogene System

$$\begin{cases} b' \quad (\lambda^2 - 2\varrho) + c' \quad (\mu^2 - 2\sigma) + d' \quad (\nu^2 - 2\varphi) = 0, \\ b'\lambda \quad (\lambda^2 - 2\varrho) + c'\mu \quad (\mu^2 - 2\sigma) + d'\nu \quad (\nu^2 - 2\varphi) = 0, \\ b'\lambda^2(\lambda^2 - 2\varrho) + c'\mu^2(\mu^2 - 2\sigma) + d'\nu^2(\nu^2 - 2\varphi) = 0. \end{cases}$$

Wenn b', c', d' alle von Null verschieden sind, folgt hieraus, weil $P \neq 0$ angenommen wurde,

$$(24)\qquad \varrho = \frac{\lambda^2}{2}, \quad \sigma = \frac{\mu^2}{2}, \quad \varphi = \frac{\nu^2}{2}.$$

Unter den Annahmen $b' = 0$, $c' = 0$ oder $d' = 0$ würde man aus $2', 5', 7', 15'$ für μ und ν, bzw. λ und ν, λ und μ bestimmte, irrationale Werte bekommen, während λ bzw. μ, ν unbestimmt blieben. Aus $11'$ und $23'$ erhält man aber für $c' = 0$ den Wert $\nu = \frac{4}{5}$ und für $d' = 0$ den Wert $\mu = \frac{4}{5}$; diese Annahmen führen also zu einem Widerspruch. Wenn $b' = 0$ ist, gelten jedenfalls die beiden letzten der Relationen (24). Zieht man noch die aus $17', 16'$ zu erhaltende Gleichung $(c'\tau + d'\chi)(\lambda^2 - 2\varrho) + d'\psi(\mu^2 - 2\sigma) = 0$ in Betracht, so sieht man, dass entweder $2\varrho = \lambda^2$ oder $c'\tau + d'\chi = 0$ ist. Die letztere Annahme führt aber in Verbindung mit $b' = 0$ auch zu einem Widerspruch, denn damit würde aus $11'$ und $17'$ der Wert $\mu = \frac{2}{5}$ folgen. Wir sehen also, dass die Gleichungen (24) stets erfüllt sein müssen, wenn $P \neq 0$ ist. Mit den dadurch bedingten Werten für ϱ, σ, φ werden alle die 7 Gleichungen von (20), die ϱ, σ enthalten (nämlich $3, 3', 6, 6', 13', 14', 16'$), mit gewissen anderen ($5, 5', 7, 7', 15', 15', 17'$) desselben Systems identisch.

Es bleibt nun übrig, die vier Gleichungen $11, 11', 17', 23'$ mit den drei Parametern τ, ψ, χ zu befriedigen, was den Grössen λ, μ, ν eine weitere Bedingung als (21) aufzuerlegen scheint. Wir betrachten zunächst die drei in bezug auf $\lambda\tau$ und $\mu\psi + \lambda\chi$ linearen Gleichungen $11, 11', 23'$. Diese lauten, wenn wir nach (22) die Ausdrücke für c, d, c', d' eintragen und mit P multiplizieren,

$$(25)\qquad \begin{cases} C\lambda\tau \quad + D(\mu\psi + \lambda\chi) \quad - \frac{1}{120}P = 0, \\ C'\lambda\tau \quad + D'(\mu\psi + \lambda\chi) \quad - \frac{1}{24}P = 0 \\ C'\mu\lambda\tau + D'\nu(\mu\psi + \lambda\chi) - \frac{1}{30}P = 0. \end{cases}$$

Eine notwendige Bedingung für ihre Vereinbarkeit miteinander besteht in dem Verschwinden der Determinante

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} C & D & \frac{1}{120}P \\ C' & D' & \frac{1}{24}P \\ C'\mu & D'\nu & \frac{1}{30}P \end{vmatrix}.$$

Falls $P \neq 0$ ist, kann, wie wir gesehen haben, eine Lösung nur existieren, wenn weder c' noch d' verschwindet; daher müssen infolge (22) auch C' und D' von Null verschieden sein. Wir sehen nun, dass die zweireihige Unterdeterminante des Elements $\frac{1}{120}P$ in (26) nicht verschwinden kann, dies besagt aber, dass die genannte Bedingung für die Vereinbarkeit der Gleichungen (25) auch hinreichend ist. Nun tragen wir in (26) die Ausdrücke (23) ein und erhalten

$$\frac{1}{6}P\lambda^2\mu\nu(\nu-\lambda)(\lambda-\mu)\begin{vmatrix} \frac{\lambda\nu}{6}-\frac{\lambda+\nu}{12}+\frac{1}{20} & \frac{\lambda\mu}{6}-\frac{\lambda+\mu}{12}+\frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{\lambda\nu}{2}-\frac{\lambda+\nu}{3}+\frac{1}{4} & \frac{\lambda\mu}{2}-\frac{\lambda+\mu}{3}+\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \left(\frac{\lambda\nu}{2}-\frac{\lambda+\nu}{3}+\frac{1}{4}\right)\mu & \left(\frac{\lambda\mu}{2}-\frac{\lambda+\mu}{3}+\frac{1}{4}\right)\nu & \frac{1}{5} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante transformieren wir noch folgendermassen

$$|K_1\,K_2\,K_3| = |K_2-K_1 \quad \nu K_2-\mu K_1+(\mu-\nu)K_3 \quad K_3|,$$

wobei K_1, K_2, K_3 symbolisch die drei Kolonnen derselben bedeuten. Es ergibt sich dann statt (26)

$$\frac{1}{6}P^2\lambda(\mu-\nu)\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{6}-\frac{1}{12} & \frac{\lambda}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{3} & \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{\lambda}{3}-\frac{1}{4} & -\frac{\lambda\mu\nu}{2}+\frac{\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu}{3}-\frac{\mu+\nu}{4}+\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}.$$

Wegen (21) ist aber das zweite Element der dritten Zeile der Determinante gleich $\frac{\lambda}{4}$, daher erhalten wir endlich

$$\frac{1}{6}P^2\lambda(\mu-\nu)\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{6}-\frac{1}{12} & \frac{\lambda}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{1}{3} & \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{\lambda}{3}-\frac{1}{4} & \frac{\lambda}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}.$$

Die Entwicklung dieser Determinante zeigt aber, dass dieselbe *identisch* verschwindet. Wenn (21) erfüllt ist, ist also (26) stets gleich Null. Daher ist von den drei Gleichungen in (25), nämlich 11, 11′, 23′, die erste durch eine lineare Kombination der beiden anderen zu erhalten.

Zur Bestimmung von τ, ψ, χ benutzen wir nun die Gleichungen 11′, 23′, 17′. Die Auflösung liefert eindeutig bestimmte Werte, denn die dreireihige Determinante des betreffenden Systems ergibt sich zu $c'd'^2\lambda^2\mu(\mu-\lambda)(\mu-\nu)$ und ist von Null verschieden, da wir $P \neq 0$ angenommen haben und weder c' noch d' verschwinden kann.

Die Auflösung von (20) geschieht also, indem man den drei Grössen λ, μ, ν solche Werte gibt, die die Relation (21) befriedigen und keine der Grössen P, C', D' zum Verschwinden bringen. Dann werden die übrigen gesuchten Grössen eindeutig bestimmt und auf die angegebene Weise berechnet, wodurch, wie gezeigt, sämtliche Bedingungsgleichungen (20) erfüllt werden. Es ist somit eine *zweiparametrige* Schar von Näherungsformeln (V, V, 4) gefunden worden.

Noch muss der Fall $P = 0$ untersucht werden. Es ergibt sich, dass keine der Grössen $\lambda, \mu, \lambda - \mu, \mu - \nu$ verschwinden kann, ohne einen Widerspruch zur Folge zu haben. Für $\nu = 0$ und für $\lambda = \nu$ existieren zwar Lösungen, diese enthalten aber irrationale Koeffizienten und sind daher unbequem.

Es ist vorteilhaft, ein Koeffizientensystem zu bestimmen, wo $d = 0$ ist, denn mit der zugehörigen Formel kann man $\Delta x, \Delta y, \ldots$ berechnen, ohne $\Delta'''' u, \Delta'''' v, \ldots$ ermittelt zu haben. Das beste, von uns gefundene Wurzelsystem dieser Art wird für $\lambda = \frac{1}{5}$, $\mu = \frac{2}{3}$, $\nu = 1$ erhalten und lautet

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{24},\ b = \frac{25}{84},\ c = \frac{9}{56},\ d = 0,\ \lambda = \frac{1}{5},\ \mu = \frac{2}{3},\ \nu = 1,\ \tau = \frac{7}{27},\ \psi = \frac{9}{35},\ \chi = -\frac{2}{35}, \\ a' = \frac{1}{24},\ b' = \frac{125}{336},\ c' = \frac{27}{56},\ d' = \frac{5}{48},\ \varrho = \frac{1}{50},\ \sigma = \frac{2}{9},\ \varphi = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Die Formel ist auf S. 24 mit Nr. III a bezeichnet.

Unter den sonstigen Wurzelsystemen ist vielleicht dasjenige das einfachste, welches erhalten wird, wenn man $\tau = 0$ und $\psi = 0$ setzt. Es ergibt sich dann eine Formel Nr. III b, wo

$$\left\{\begin{array}{l} a = \frac{23}{192},\ b = \frac{25}{64},\ c = -\frac{9}{64},\ d = \frac{25}{192},\ \lambda = \frac{2}{5},\ \mu = \frac{2}{3},\ \nu = \frac{4}{5},\ \tau = 0,\ \psi = 0,\ \chi = \frac{4}{25}, \\ a' = \frac{23}{192},\ b' = d' = \frac{125}{192},\ c' = \frac{27}{64},\ \varrho = \frac{2}{25},\ \sigma = \frac{2}{9},\ \varphi = \frac{8}{25} \end{array}\right.$$

ist.

Die Untersuchung über Näherungen für Systeme der Form (16) schliessen wir jetzt mit der Bemerkung ab, dass wir solche von der Ordnung (V, IV) nicht aufgestellt haben, weil dieselben schon fünf Funktionsberechnungen erforderten und daher nur wenig einfacher wären als die genaueren Formelsysteme (V, V).

B. Näherungsformeln für beliebige Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

17. Obgleich jedes Normalsystem und also auch jedes System der Form (8) sich mit Hilfe der schon gefundenen Formeln integrieren lässt, wollen wir noch einige Näherungsformeln ableiten, die direkt auf (8) anwendbar sind. Die in Nr. 12 angegebene Transformation kann nämlich unter Umständen unangenehme Komplikationen mit sich bringen.

Wie vorher suchen wir mit möglichst wenigen Funktionsberechnungen auszukommen. Auch betrachten wir es als vorteilhaft, wenn zwei Funktionswerte mit *denselben* Argumenten $x + \delta^i x$, $y + \delta^i y, \ldots$ zu berechnen sind und der Unterschied nur darin besteht, dass an Stelle von $u + \delta^i u$, $v + \delta^i v, \ldots$ die Argumente $u + \delta^{i+1} u$, $v + \delta^{i+1} v, \ldots$ treten. Es ist klar, dass in der Arbeit dadurch oft eine erhebliche Erleichterung eintritt, wie etwa in dem Falle, dass die Differentialgleichungen in bezug auf die ersten Ableitungen linear sind.

Hätten wir z. B. eine Formel für eine Approximation vierter Ordnung in $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ mit vier Funktionsberechnungen, von denen z. B. in den beiden mittleren die eben genannte Vereinfachung eintritt, so ist nach (13) $\lambda = \mu$, $\varrho = \sigma$ und $\tau = 0$. Eine derartige Formel wollen wir mit (IV, IV, 3 · 4) bezeichnen.

18. Um eine vollständige Approximation dritter Ordnung (III, III) zu erhalten, haben wir drei Funktionswerte zu berechnen und das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\left\{\begin{array}{llll} 1.\ a+b\ +c\ =\frac{1}{2}, & 1'.\ a'+b'\ +c'\ =1, \\ 2.\ \ b\lambda+c\mu=\frac{1}{6}, & 2'.\ \ b'\lambda\ +c'\mu\ =\frac{1}{2}, \\ & 3'.\ \ b'\varrho\ +c'\sigma\ =\frac{1}{6}, \\ & 4'.\ \ c'\lambda\tau_1=\frac{1}{6}, \\ & 5'.\ \ b'\lambda^2+c'\mu^2\ =\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Es erweist sich hier möglich, die Bedingungen $\lambda=\mu$, $\varrho=\sigma$, $\tau=0$ hinzuzufügen, wodurch eine Approximation (III, III, 2—3) gewonnen wird statt eine (III, III, 3) wie sonst. Man findet aus dem Gleichungssystem eindeutig

$$\lambda=\mu=\tfrac{2}{3},\ b+c=\tfrac{1}{4},\ b'+c'=\tfrac{3}{4},\ a=\tfrac{1}{4},\ a'=\tfrac{1}{4},\ \varrho=\sigma=\tfrac{2}{9},\ \tau=0.$$

b und b' können noch frei gewählt werden. Wir entschliessen uns, $b=c=\frac{1}{8}$, $b'=c'=\frac{3}{8}$ zu setzen, woraus folgt $\tau_1=\frac{2}{3}$. Damit haben wir eine Formel (Nr. IV in der Zusammenstellung), aus der die Nr. I entsteht, wenn sie auf ein System der Form (16) angewandt wird.

19. Da leicht gezeigt werden kann, dass eine Approximation (IV, III, 3) unmöglich ist, versuchen wir Approximationen der Art (IV, IV, 4) aufzustellen und schreiben die zugehörigen Bedingungsgleichungen auf.

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1.\ a+b\ +c\ +d\ =\frac{1}{2}, & 1'.\ a'+b'\ +c'\ +d'\ =1, \\ 2.\ \ b\lambda\ +c\mu\ +d\nu\ =\frac{1}{6}, & 2'.\ \ b'\lambda\ +c'\mu\ +d'\nu\ =\frac{1}{2}, \\ 3.\ \ b\varrho\ +c\sigma\ +d\varphi\ =\frac{1}{24}, & 3'.\ \ b'\varrho\ +c'\sigma\ +d'\varphi\ =\frac{1}{6}, \\ 4.\ \ c\lambda\tau_1+d(\mu\psi_1+\lambda\chi_1)=\frac{1}{24}, & 4'.\ \ c'\lambda\tau_1\ +d'\ (\mu\psi_1\ +\lambda\chi_1)\ =\frac{1}{6}, \\ 5.\ \ b\lambda^2+c\mu^2\ +d\nu^2\ =\frac{1}{12}, & 5'.\ \ b'\lambda^2+c'\mu^2\ +d'\nu^2\ =\frac{1}{3}, \\ & 6'.\ \ b'\lambda\varrho+c'\mu\sigma\ +d'\nu\varphi\ =\frac{1}{8}, \\ & 7'.\ \ b'\lambda^3+c'\mu^3\ +d'\nu^3\ =\frac{1}{4}, \\ & 8'.\ \ c'\varrho\tau_1\ +d'\ (\sigma\psi_1\ +\varrho\chi_1)\ =\frac{1}{24}, \\ & 9'.\ \ c'\lambda^2\tau_1\ +d'\ (\mu^2\psi_1+\lambda^2\chi_1)=\frac{1}{12}, \\ & 10'.\ c'\lambda\mu\tau_1+d'\nu(\mu\psi_1\ +\lambda\chi_1)\ =\frac{1}{8}, \\ & 11'.\ c'\lambda\tau\ +d'\ (\mu\psi\ +\lambda\chi)\ =\frac{1}{24}, \\ & 12'.\ \ d'\lambda\tau_1\psi_1\ =\frac{1}{24}. \end{array}\right.$$

Die »Runge-Kuttasche Formel» (9) gibt eine Approximation (IV, IV, 4), also müssen ihre Koeffizienten das System (27) befriedigen. Diese ergeben sich durch einen Vergleich von (9) mit (13) und (14) und werden

$$(28)\qquad \begin{cases} a' = d' = \frac{1}{6}, & b' = c' = \frac{1}{3}, & \lambda = \mu = \frac{1}{2}, & \nu = 1, & \psi = 0, & \chi = \frac{1}{2}, & \tau = 0, \\ a = b = c = \frac{1}{6}, & d = 0, & \varrho = 0, & \sigma = \frac{1}{4}, & \varphi = \frac{1}{2}, & \psi_1 = 1, & \chi_1 = 0, & \tau_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Verifikation bietet keine Schwierigkeit.

Unsere Aufgabe ist nun zu untersuchen, ob wir mit unserem allgemeineren Ansatz in der Anwendung bequemere Formeln finden können.

Wir versuchen (27) unter den Zusatzbedingungen $\lambda = \mu$, $\varrho = \sigma$, $\tau = 0$, von denen ja nach (28) die mittlere bei der »Runge-Kuttaschen Formel» nicht erfüllt ist, zu lösen. Zunächst gibt die Elimination von $b' + c'$ und d' aus $2', 5', 7'$

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & \nu & \frac{1}{2} \\ \lambda^2 & \nu^2 & \frac{1}{3} \\ \lambda^3 & \nu^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\lambda\nu(\lambda-\nu)\left(\frac{\lambda\nu}{2} - \frac{\lambda+\nu}{3} + \frac{1}{4}\right),$$

woraus folgt

$$(29)\qquad \frac{\lambda\nu}{2} - \frac{\lambda+\nu}{3} + \frac{1}{4} = 0,$$

denn das Verschwinden irgend einer der anderen Faktoren würde in (27) einen Widerspruch erzeugen. Sodann ergibt sich, dass auch in dem vorliegenden Falle die Relationen (24) stattfinden. Infolgedessen können alle Gleichungen in (27), die ϱ, σ enthalten, weggedacht werden, da sie mit anderen desselben Systems identisch sind.

Aus $4'$ und $9'$ folgt durch Division $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ und hieraus nach (29) $\nu = 1$. Ferner geben $2, 5, 2', 5', 7'$: $b + c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $b' + c' = \frac{2}{3}$, $d' = \frac{1}{6}$, und mit diesen Werten folgt aus $4'$ und $10'$: $c'\tau_1 = \frac{1}{6}$, $\psi_1 + \chi_1 = 1$. Die anderen Gleichungen geben nach Einsetzung der schon berechneten Werte

$$a = \frac{1}{6},\ a' = \frac{1}{6},\ \varrho = \sigma = \frac{1}{8},\ \varphi = \frac{1}{2},\ c\tau_1 = \frac{1}{12},\ \psi + \chi = \frac{1}{2},\ \tau_1\psi_1 = \frac{1}{2}.$$

Um ein möglichst einfaches Wertsystem zu bekommen, setzen wir $\chi = \chi_1 = 0$, womit sich alle übrigbleibenden Werte berechnen lassen, und es wird der Reihe nach gefunden

$$\psi = \frac{1}{2},\ \psi_1 = 1,\ \tau_1 = \frac{1}{2},\ c' = \frac{1}{3},\ c = \frac{1}{6},\ b = \frac{1}{6},\ b' = \frac{1}{3}.$$

Hiermit sind wir zu einer Näherungsformel (IV, IV, 3—4), Nr. V, S. 25 gelangt, die bei der Anwendung bequemer ist als die »Runge-Kuttasche», indem sie unter Umständen die Arbeit auf etwa $^3/_4$ reduziert, in keinem Falle aber eine Mehrarbeit erfordert. Auch ist unsere Formel als die genauere anzusehen (vgl. S. 27).

Die Betrachtung des vollständig angeschriebenen Formelsystems lässt erkennen, dass aus demselben das früher abgeleitete Formelsystem Nr. II (S. 24) entsteht, wenn das erstere auf Differentialgleichungen der Form (16) angewandt wird.

20. Die oben willkürlich angenommenen Konstanten hätten wir zwar anders wählen können, jedoch wäre damit nicht viel zu erreichen. Es zeigt sich, dass eine Näherung (V, IV) schon fünf Funktionsberechnungen erfordert, dass wir aber dann eine grosse Mannigfaltigkeit solcher Formeln bekommen.

Sogar mit den die Anwendung erleichternden Annahmen $\lambda = \mu$, $\varrho = \sigma$, $\tau = 0$ ergibt sich eine mehrparametrige Schar derselben. Die ziemlich umständliche Auflösung hier wiederzugeben, hat wenig Zweck, weshalb wir uns darauf beschränken, diejenige Lösung anzugeben, die uns als die einfachste erscheint.

Ihre Koeffizienten sind

$$\left\{\begin{array}{l} a' = d' = \frac{1}{6}\,,\ b' = c' = \frac{1}{3}\,, \qquad e' = 0\,,\ \lambda = \mu = \frac{1}{2}\,,\ \nu = 1\,,\ \pi = \frac{3}{4}\,,\ \tau = 0\,, \\ a = \frac{13}{90},\ b = c = \frac{7}{30},\ d = \frac{1}{15},\ e = -\frac{8}{45},\ \varrho = \sigma = \frac{1}{8}\,,\ \varphi = \frac{1}{2}\,,\ \xi = \frac{9}{32},\ \tau_1 = \frac{1}{2}\,. \\ \qquad \chi = 0\,,\quad \psi = \frac{1}{2}\,,\ \eta = 0\,,\ \zeta = 0\,,\ \vartheta = \frac{3}{64}, \\ \qquad \chi_1 = 0\,,\quad \psi_1 = 1\,,\ \eta_1 = \frac{3}{8},\ \zeta_1 = \frac{3}{32},\ \vartheta_1 = \frac{3}{64}, \end{array}\right.$$

und es lässt sich verifizieren, dass durch dieselben die Bedingungsgleichungen 1—12 und 1′—12′ befriedigt werden. Wir haben also eine mit ziemlich einfachen, rationalen Koeffizienten versehene Näherungsformel (V, IV, 4–5) gefunden (Nr. VI, S. 25), die dadurch bemerkenswert ist, dass die vier ersten Funktionswerte genau so berechnet werden wie in der vorhergehenden Formel Nr. V, (IV, IV, 3—4).

Möglicherweise existiert eine Formel (V, V, 5), die durch Auflösung des Systems der Bedingungsgleichungen 1—12, 1′—32′ zu bestimmen wäre. Diese Auflösung bietet jedoch grosse Schwierigkeiten und würde aller Wahrscheinlichkeit nach jedenfalls keine bequemen Zahlenwerte liefern.

§ 5. Zusammenstellung der Formeln.

21. Obgleich die Formeln für eine unbeschränkte Anzahl von Differentialgleichungen gelten, schreiben wir sie der Kürze wegen für den Fall zweier Gleichungen aus, die Systeme III a und III b für den Fall einer einzigen Gleichung.

A. Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche auf die Form

$$\left\{\begin{array}{ll} x'' = f(t,x,y), & x' = u, \\ y'' = g(t,x,y), & y' = v \end{array}\right.$$

gebracht sind. (x, y, u, v sind für einen Anfangswert t gegeben).

Nr. I:
(III, III, 2)

$$\left\{\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{ll} \Delta' u = f(t,x,y)\,\Delta t, & \Delta' x = (u + \frac{1}{3}\Delta' u)\,\Delta t, \\ \Delta'' u = f(t + \frac{2}{3}\Delta t,\ x + \frac{2}{3}\Delta' x,\ y + \frac{2}{3}\Delta' y)\,\Delta t, & \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{ll} \Delta' v = g(t,x,y)\,\Delta t, & \Delta' y = (v + \frac{1}{3}\Delta' v)\,\Delta t, \\ \Delta'' v = g(t + \frac{2}{3}\Delta t,\ x + \frac{2}{3}\Delta' x,\ y + \frac{2}{3}\Delta' y)\,\Delta t, & \end{array}\right. \\ \Delta x = [u + \frac{1}{4}(\Delta' u + \Delta'' u)]\,\Delta t, & \Delta u = \frac{1}{4}[\Delta' u + 3\,\Delta'' u], \\ \Delta y = [v + \frac{1}{4}(\Delta' v + \Delta'' v)]\,\Delta t, & \Delta v = \frac{1}{4}[\Delta' v + 3\,\Delta'' v]. \end{array}\right.$$

Nr. II: (IV, IV, 3)

$$\begin{cases}
\Delta' u = f(t,x,y)\Delta t, & \Delta' x = (u+\frac{1}{4}\Delta' u)\Delta t,\\
\Delta'' u = f(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, y+\frac{1}{2}\Delta' y)\Delta t, & \Delta'' x = (u+\frac{1}{2}\Delta'' u)\Delta t,\\
\Delta''' u = f(t+\Delta t, x+\Delta'' x, y+\Delta'' y)\Delta t, &\\
\Delta' v = g(t,x,y)\Delta t, & \Delta' y = (v+\frac{1}{4}\Delta' v)\Delta t,\\
\Delta'' v = g(t+\frac{1}{2}\Delta t, x+\frac{1}{2}\Delta' x, y+\frac{1}{2}\Delta' y)\Delta t, & \Delta'' y = (v+\frac{1}{2}\Delta'' v)\Delta t,\\
\Delta''' v = g(t+\Delta t, x+\Delta'' x, y+\Delta'' y)\Delta t, &\\
\Delta x = [u+\frac{1}{6}\Delta' u+\frac{1}{3}\Delta'' u]\Delta t, & \Delta u = \frac{1}{6}[\Delta' u+4\Delta'' u+\Delta''' u],\\
\Delta y = [v+\frac{1}{6}\Delta' v+\frac{1}{3}\Delta'' v]\Delta t, & \Delta v = \frac{1}{6}[\Delta' v+4\Delta'' v+\Delta''' v].
\end{cases}$$

Nr. III a: (V, V, 4)

$$\begin{cases}
\Delta' u = f(t,x)\Delta t, & \Delta' x = [u+\frac{1}{10}\Delta' u]\Delta t,\\
\Delta'' u = f(t+\frac{1}{5}\Delta t, x+\frac{1}{5}\Delta' x)\Delta t, & \Delta'' x = [u-\frac{1}{18}\Delta' u+\frac{7}{18}\Delta'' u]\Delta t,\\
\Delta''' u = f(t+\frac{2}{3}\Delta t, x+\frac{2}{3}\Delta'' x)\Delta t, & \Delta''' x = [u+\frac{3}{10}\Delta' u-\frac{2}{35}\Delta'' u+\frac{9}{35}\Delta''' u]\Delta t,\\
\Delta'''' u = f(t+\Delta t, x+\Delta''' x)\Delta t, &\\
\Delta x = [u+\frac{14}{336}\Delta' u+\frac{100}{336}\Delta'' u+\frac{54}{336}\Delta''' u]\Delta t, &\\
\Delta u = \frac{14}{336}\Delta' u+\frac{125}{336}\Delta'' u+\frac{162}{336}\Delta''' u+\frac{35}{336}\Delta'''' u. &
\end{cases}$$

Nr. III b: (V, V, 4)

$$\begin{cases}
\Delta' u = f(t,x)\Delta t, & \Delta' x = [u+\frac{1}{5}\Delta' u]\Delta t,\\
\Delta'' u = f(t+\frac{2}{5}\Delta t, x+\frac{2}{5}\Delta' x)\Delta t, & \Delta'' x = [u+\frac{1}{3}\Delta' u]\Delta t,\\
\Delta''' u = f(t+\frac{2}{3}\Delta t, x+\frac{2}{3}\Delta'' x)\Delta t, & \Delta''' x = [u+\frac{1}{5}(\Delta' u+\Delta'' u)]\Delta t,\\
\Delta'''' u = f(t+\frac{4}{5}\Delta t, x+\frac{4}{5}\Delta''' x)\Delta t, &\\
\Delta x = [u+\frac{23}{192}\Delta' u+\frac{75}{192}\Delta'' u-\frac{27}{192}\Delta''' u+\frac{25}{192}\Delta'''' u]\Delta t, &\\
\Delta u = \frac{23}{192}\Delta' u+\frac{125}{192}\Delta'' u-\frac{81}{192}\Delta''' u+\frac{125}{192}\Delta'''' u. &
\end{cases}$$

22. B. Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der allgemeinen Form

$$\begin{cases} x'' = f(t,x,y,u,v), & x' = u,\\ y'' = g(t,x,y,u,v), & y' = v. \end{cases}$$

(x, y, u, v sind für einen Anfangswert t gegeben).

Nr. IV: (III, III, 2–3)

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Delta' u = f(t, x, y, u, v)\,\Delta t, & \Delta' x = (u + \tfrac{1}{3}\Delta' u)\,\Delta t,\\
\Delta'' u = f(t + \tfrac{2}{3}\Delta t, x + \tfrac{2}{3}\Delta' x, y + \tfrac{2}{3}\Delta' y, u + \tfrac{2}{3}\Delta' u, v + \tfrac{2}{3}\Delta' v)\,\Delta t, & \\
\Delta''' u = f(t + \tfrac{2}{3}\Delta t, x + \tfrac{2}{3}\Delta' x, y + \tfrac{2}{3}\Delta' y, u + \tfrac{2}{3}\Delta'' u, v + \tfrac{2}{3}\Delta'' v)\,\Delta t, & \\
\Delta' v = g(t, x, y, u, v)\,\Delta t, & \Delta' y = (v + \tfrac{1}{3}\Delta' v)\,\Delta t,\\
\Delta'' v = g(t + \tfrac{2}{3}\Delta t, x + \tfrac{2}{3}\Delta' x, y + \tfrac{2}{3}\Delta' y, u + \tfrac{2}{3}\Delta' u, v + \tfrac{2}{3}\Delta' v)\,\Delta t, & \\
\Delta''' v = g(t + \tfrac{2}{3}\Delta t, x + \tfrac{2}{3}\Delta' x, y + \tfrac{2}{3}\Delta' y, u + \tfrac{2}{3}\Delta'' u, v + \tfrac{2}{3}\Delta'' v)\,\Delta t, & \\
\Delta x = [u + \tfrac{1}{8}(2\Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u)]\,\Delta t, & \Delta u = \tfrac{1}{8}[2\Delta' u + 3(\Delta'' u + \Delta''' u)],\\
\Delta y = [v + \tfrac{1}{8}(2\Delta' v + \Delta'' v + \Delta''' v)]\,\Delta t, & \Delta v = \tfrac{1}{8}[2\Delta' v + 3(\Delta'' v + \Delta''' v)].
\end{array}\right.$$

Nr. V: (IV, IV, 3–4)

$$\left\{\begin{array}{ll}
\Delta' u = f(t, x, y, u, v)\,\Delta t, & \Delta' x = [u + \tfrac{1}{4}\Delta' u]\,\Delta t,\\
\Delta'' u = f(t + \tfrac{1}{2}\Delta t, x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y, u + \tfrac{1}{2}\Delta' u, v + \tfrac{1}{2}\Delta' v)\,\Delta t, & \\
\Delta''' u = f(t + \tfrac{1}{2}\Delta t, x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y, u + \tfrac{1}{2}\Delta'' u, v + \tfrac{1}{2}\Delta'' v)\,\Delta t, & \Delta'' x = [u + \tfrac{1}{2}\Delta''' u]\,\Delta t,\\
\Delta'''' u = f(t + \Delta t, x + \Delta'' x, y + \Delta'' y, u + \Delta''' u, v + \Delta''' v)\,\Delta t, & \\
\Delta' v = g(t, x, y, u, v)\,\Delta t, & \Delta' y = [v + \tfrac{1}{4}\Delta' v]\,\Delta t,\\
\Delta'' v = g(t + \tfrac{1}{2}\Delta t, x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y, u + \tfrac{1}{2}\Delta' u, v + \tfrac{1}{2}\Delta' v)\,\Delta t, & \\
\Delta''' v = g(t + \tfrac{1}{2}\Delta t, x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y, u + \tfrac{1}{2}\Delta'' u, v + \tfrac{1}{2}\Delta'' v)\,\Delta t, & \Delta'' y = [v + \tfrac{1}{2}\Delta''' v]\,\Delta t,\\
\Delta'''' v = g(t + \Delta t, x + \Delta'' x, y + \Delta'' y, u + \Delta''' u, v + \Delta''' v)\,\Delta t, & \\
\Delta x = [u + \tfrac{1}{6}(\Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u)]\,\Delta t, & \Delta u = \tfrac{1}{6}[\Delta' u + 2\Delta'' u + 2\Delta''' u + \Delta'''' u],\\
\Delta y = [v + \tfrac{1}{6}(\Delta' v + \Delta'' v + \Delta''' v)]\,\Delta t, & \Delta v = \tfrac{1}{6}[\Delta' v + 2\Delta'' v + 2\Delta''' v + \Delta'''' v].
\end{array}\right.$$

Nr. IV: (V, IV, 4–5)

Ausser den Formeln in Nr. V werden, zwecks einer schärferen Bestimmung von $\Delta x, \Delta y$, folgende Ausdrücke berechnet:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\delta_5 x = \tfrac{3}{4}[u + \tfrac{1}{16}(5\Delta' u + \Delta'''' u)]\,\Delta t, & \delta_5 u = \tfrac{3}{64}[5\Delta' u + 8\Delta'' u + 2\Delta''' u + \Delta'''' u],\\
\delta_5 y = \tfrac{3}{4}[v + \tfrac{1}{16}(5\Delta' v + \Delta'''' v)]\,\Delta t, & \delta_5 v = \tfrac{3}{64}[5\Delta' v + 8\Delta'' v + 2\Delta''' v + \Delta'''' v],\\
\Delta^{\mathrm{V}} u = f(t + \tfrac{3}{4}\Delta t, x + \delta_5 x, y + \delta_5 y, u + \delta_5 u, v + \delta_5 v)\,\Delta t, & \\
\Delta^{\mathrm{V}} v = g(t + \tfrac{3}{4}\Delta t, x + \delta_5 x, y + \delta_5 y, u + \delta_5 u, v + \delta_5 v)\,\Delta t, & \\
\Delta x = [u + \tfrac{1}{90}(13\Delta' u + 21\Delta'' u + 21\Delta''' u + 6\Delta'''' u - 16\Delta^{\mathrm{V}} u)]\,\Delta t, & \\
\Delta y = [v + \tfrac{1}{90}(13\Delta' v + 21\Delta'' v + 21\Delta''' v + 6\Delta'''' v - 16\Delta^{\mathrm{V}} v)]\,\Delta t. &
\end{array}\right.$$

Für $\Delta u, \Delta v$ gelten die in Nr. V berechneten Werte.

§ 6. Fehlerabschätzungen.

23. Irgend eine der im Vorigen aufgestellten Näherungsformeln, die etwa bis zur n:ten Ordnung einschliesslich genau ist, wird im allgemeinen die nach dem Gliede n:ter Ordnung abgebrochene Taylorsche Entwicklung an Genauigkeit übertreffen. So ergibt sich z. B. mit der Formel Nr. I, (III, III, 2) als Glied vierter Ordnung in der x-Reihe der Ausdruck

$$(\Delta t)^4\left[\tfrac{1}{18}(f'_x f + f'_y g) + \tfrac{1}{18} D^2 f\right]$$

statt des von der richtigen Integralentwicklung geforderten

$$(\Delta t)^4\left[\tfrac{1}{24}(f'_x f + f'_y g) + \tfrac{1}{24} D^2 f\right].$$

Also sind *die relativen Fehler* der einzelnen Teilglieder vierter Ordnung beide gleich $-\frac{1}{3}$. Hätten wir die Taylor-Reihe nach dem Gliede mit $(\Delta t)^3$ abgebrochen, so wären die relativen Fehler (mit $+1$ bezeichnet) von dem dreifachen Betrag gewesen.

Wir stellen in der folgenden Tabelle für einige unserer Formeln und für die »Runge-Kuttasche» solche Fehlerkoeffizienten (in der Reihe für Δx bis zu den Gliedern fünfter, und in der Reihe für Δu bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschliesslich) zusammen. Dieselben können natürlich durch direkte Reihenentwicklung gefunden werden, am bequemsten aber erhält man sie durch Eintragen der jeweiligen Werte von $\lambda, \mu, \ldots$ in die *nicht erfüllten* Bedingungsgleichungen S. 12—13.

		$x, y, \ldots$							$u, v, \ldots$		
	$\Delta x = u\,\Delta t +$	Nr. I	Nr. II	Nr. III a	Nr. III b	Nr. IV	R-K	Nr. V	Nr. I	Nr. IV	$\Delta u =$
1.	$+\frac{1}{2} f (\Delta t)^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$f\Delta t +$
2.	$+\frac{1}{6} Df (\Delta t)^3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{2} Df (\Delta t)^2$
3.	$+\frac{1}{24}\{f'_x f + f'_y g$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$+\frac{1}{6}\{f'_x f + f'_y g$
4.	$+ f'_u Df + f'_v Dg$					$-\frac{1}{3}$	0	0		0	$+ f'_u Df + f'_v Dg$
5.	$+ D^2 f\}(\Delta t)^4$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$+ D^2 f\}(\Delta t)^3$
6.	$+\frac{1}{120}\{3(f Df'_x + g Df'_y)$	$-\frac{13}{27}$	$+\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{13}{27}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{9}$	$+\frac{1}{9}$	$+\frac{1}{24}\{3(f Df'_x + g Df'_y)$
7.	$+ D^3 f$	$-\frac{13}{27}$	$+\frac{1}{6}$	0	0	$-\frac{13}{27}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{9}$	$+\frac{1}{9}$	$+ D^3 f$
8.	$+ f'_u(f'_x f + f'_y g) + f'_v(g'_x f + g'_y g)$					$-\frac{11}{9}$	$+1$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{3}$	$+ f'_u(f'_x f + f'_y g) + f'_v(g'_x f + g'_y g)$
9.	$+ f'_u D^2 f + f'_v D^2 g$					$-\frac{11}{9}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{3}$	$+ f'_u D^2 f + f'_v D^2 g$
10.	$+ 3(Df\,Df'_u + Dg\,Df'_v)$					$-\frac{13}{27}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{6}$		$+\frac{1}{9}$	$+ 3(Df\,Df'_u + Dg\,Df'_v)$
11.	$+ f'_x Df + f'_y Dg$	$+1$	$+1$	0	0	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+ f'_x Df + f'_y Dg$
12.	$+ f'_u(f'_u Df + f'_v Dg) +$ $+ f'_v(g'_u Df + g'_v Dg)\}(\Delta t)^5$					$+1$	$+1$	$+1$		$+1$	$+ f'_u(f'_u Df + f'_v Dg) +$ $+ f'_v(g'_u Df + g'_v Dg)\}(\Delta t)^4$

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass unsere Formel Nr. V, die Nr. II als Spezialfall umfasst, mit der Runge-Kuttaschen gleichwertig ist oder sogar etwas genauer (Teilglied 8), obgleich sie Vereinfachungen zeigt. Es würde jedoch wenig Zweck haben, die Tabelle der Fehler in den Gliedern höherer Ordnung hier wiederzugeben, weil die komplizierten Ausdrücke der Teilglieder nur in den seltensten Fällen zur praktischen Fehlerabschätzung verwendet werden können. Auch kann man sich nicht darauf verlassen, dass eine Formel mit den kleineren relativen Fehlern in der Wirklichkeit auch immer das bessere Resultat liefert. Verschiedene von uns durchgeführte Beispiele haben vielmehr gezeigt, dass die Fehler der Teilglieder sich in ganz unerwarteter Weise verstärken oder aufheben können.

24. Eine praktisch brauchbare Abschätzung der Grössenordnung des Fehlers gewinnt man, wie Runge gezeigt hat[1], durch nochmalige Anwendung der benutzten Formel, aber mit der doppelten Intervallbreite. Wenn die Ordnung der Annäherung n ist, kann man den Fehler nach einem Schritt, den wir mit ε_1 bezeichnen, proportional zu $(\Delta t)^{n+1}$ annehmen und also $\varepsilon_1 = k_{n+1}(\Delta t)^{n+1}$ setzen. Nach zwei Schritten ist der Fehler etwa auf den doppelten Betrag gewachsen. Hätte man nur einen Schritt von der Länge $2\Delta t$ gemacht, so wäre der Fehler $\varepsilon_2 = k_{n+1}(2\Delta t)^{n+1}$ gewesen. Nun ist identisch $2\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1}{2^n - 1}$, und wir können daher sagen:

Der Fehler der ersten Berechnung beträgt nach zwei Schritten etwa $\frac{1}{2^n - 1}$ *des Unterschiedes beider Resultate.*

Für die Formelsysteme Nr. II, V sowie für das »Runge-Kuttasche» ist $\frac{1}{2^n - 1}$ gleich $\frac{1}{15}$.

Numerische Beispiele zu dieser Methode der Fehlerabschätzung finden sich in dem oben zitierten Lehrbuch von Runge-König (S. 297 f. und 315).

Schliesslich ist zu erwähnen, dass die »Methode der sukzessiven Approximationen» als Kontrolle der in diesem Abschnitt auseinandergesetzten Methoden dienen kann und sogar die bequemste Fehlerabschätzung darbietet.

Bisher handelte es sich nur um den Fehler der Integrationsformeln. Wie ein Fehler in den Anfangswerten $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ auf das Resultat wirkt, hat Runge untersucht.[9]

§ 7. Beispiele.

25. Die Richtigkeit der Formelsysteme Nr. I—III wollen wir noch an dem Beispiel $x'' = x$ und die der Nr. IV—VI an dem Beispiel $x'' = \frac{1}{2}(x + u)$ kontrollieren, obgleich eine solche Kontrolle natürlich keine durchgreifende ist.

A. $x'' = x$. Anfangswerte: Für $t = 0$ ist $x = 1$, $u = 1$.
Intervallbreite: $\Delta t = t$. Dann muss sich die exakte Lösung $x = u = e^t$ mit der oben angeführten Genauigkeit ergeben.
Wir finden nacheinander

Nr. I: (III, III, 2) $\qquad \Delta' x = t,\ \Delta' u = t,\ \Delta'' x = t + \frac{1}{3}t^2,\ \Delta'' u = t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{9}t^3$

[9] Runge in Göttinger Nachrichten 1905, S. 252—57.

und damit

$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{18}t^4, \quad \Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3.$$

Hier zeigt sich deutlich der Vorteil dieses Formelsystems gegenüber der direkten Methode der Reihenentwicklung. Denn die nach dem Glied dritter Ordnung abgebrochene Taylor-Reihe gibt ja für Δx denselben Wert, den wir für Δu erhalten haben, während unser Wert von Δx bedeutend genauer ist. Die folgenden Formeln geben:

Nr. II: (IV, IV, 3)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4, \quad \Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{96}t^5.$$

Nr. III a: (V, V, 4)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{1200}t^6,$$
$$\Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{720}t^6 + \tfrac{1}{7200}t^7.$$

Der Koeffizient von t^6 in der Reihe für u wird zufällig gleich dem richtigen.

Nr. III b: (V, V, 4)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{600}t^6, \quad \Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5.$$

Für x wird also zufällig mit III b, für u mit III a ein besserer Wert gefunden.

B. $x'' = \tfrac{1}{2}(x + u)$. Anfangswerte: Für $t = 0$ ist $x = u = 1$.

Intervallbreite: $\Delta t = t$.

Exakte Lösung:
$$x = u = e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{720}t^6 + \cdots$$

Nr. IV: (III, III, 2–3)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{18}t^4 + \tfrac{1}{216}t^5, \quad \Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{72}t^4,$$

Nr. V: (IV, IV, 3–4)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{384}t^5, \quad \Delta u = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{7}{6 \cdot 128}t^5 + \tfrac{1}{1536}t^6.$$

»Runge-Kuttasche Formel»: (IV, IV, 4)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 = \Delta u.$$

In diesem Beispiel liefert also die Formel Nr. 5 tatsächlich bessere Werte für x und u, als es die »Runge-Kuttasche» tut (vgl. S. 27).

Nr. VI: (V, IV, 4–5)
$$\Delta x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4 + \tfrac{1}{120}t^5 + \tfrac{1}{1920}t^6 - 0.0009\,t^7 - \cdot\ \cdot,$$

Δu hat denselben Wert wie in Nr. V.

Um die Güte der in Nr. 24 angegebenen Fehlerabschätzung zu beurteilen, nehmen wir irgend eine der benutzten Formeln, z. B. die »Runge-Kuttasche», und berechnen, von $x = 1 + \Delta x$ ausgehend, mit derselben Intervallbreite t einen neuen Wert x und ferner, von $x = 1$ ausgehend, mit dem Intervall $2t$ noch einen Wert x. Dann kann die genannte Regel ohne weiteres angewandt werden. Es ergibt sich nach zwei Schritten von der Grösse t

$$x = 1 + 2t + 2t^2 + \tfrac{4}{3}t^3 + \tfrac{2}{3}t^4 + \tfrac{1}{4}t^5 + \tfrac{5}{72}t^6 + \cdots$$

nach einem Schritt von der Grösse $2t$

$$x = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4$$

und daraus der abgeschätzte Betrag des Fehlers zu

$$\frac{1}{60}t^5 + \frac{20}{288 \cdot 15}t^6 + \cdots$$

während der wirkliche Betrag des Fehlers

$$\frac{1}{60}t^5 + \frac{84}{288 \cdot 15}t^6 + \cdots$$

ist. Auch in allen anderen Fällen würde man die *Grössenordnung* des Fehlers bestimmen können.

Zweiter Abschnitt.

Integration von Differentialgleichungen durch numerische Quadratur.

§ 8. Zurückführung der Integration von Differentialgleichungen auf numerische Quadratur.

26. Für den in der Praxis besonders wichtigen Fall, dass man eine Integralkurve durch äquidistante Ordinaten bestimmen will, sind mehrfach Methoden angegeben worden, denen wir uns jetzt zuwenden wollen.

Es gibt zwar auch Methoden, die mit ganz willkürlich verteilten Ordinaten operieren und die als Verallgemeinerungen der ersteren anzusehen sind [10], allein bei ihnen wird die Rechenarbeit derart vermehrt, dass ihre etwaigen Vorzüge in Frage gestellt werden können, weshalb wir auf sie nicht näher eingehen.

Es handle sich um die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(t, x). \tag{30}$$

Wir setzen voraus, dass ihr Integral $x = x(t)$ in dem ganzen Integrationsintervall eine stetige Funktion von t ist und endliche und stetige Ableitungen besitzt soweit sie in den jeweils zu entwickelnden Formeln vorkommen.

Ferner wollen wir annehmen, die Rechnung sei bereits im Gange und die Werte $x(t_i) = x_i$ der gesuchten Funktion für eine Reihe äquidistanter Werte

$$t_i = t_0 + i\omega, \quad (i = 0, -1, -2, \ldots) \tag{31}$$

seien bereits bekannt, wobei ω die als positiv und konstant vorausgesetzte Intervallbreite bedeutet. $f(t, x)$ können wir dann als eine stetige Funktion $\bar{f}(t)$ von t auffassen, deren Werte $f(t_i, x_i) = f_i$ in den Punkten (31) bekannt sind. Nun sollen also die Werte von x für die darauffolgenden Werte t_i, $(i = 1, 2, \ldots)$ ermittelt werden.

[10] Z. B. bei T. N. Thiele: Interpolationsrechnung, Leipzig 1909, S. 21—29.

Indem wir die Differentialgleichung (30) als Integralgleichung $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t,x)\,dt$ schreiben, sehen wir, dass die Bestimmung des nächsten unbekannten Wertes von x, d. h.

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\omega} f(t,x)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\omega} \bar{f}(t)\,dt, \tag{32}$$

darauf hinausläuft, die in (32) bezeichnete Quadratur auszuführen unter Berücksichtigung der schon bekannten Werte x_i und f_i. Nachdem x_1 auf diese Weise ermittelt worden ist, wird damit f_1 berechnet, und dann können der Reihe nach $x_2, x_3, \ldots$ in derselben Weise gefunden werden.

Quadraturformeln, die sich zu dem genannten Zweck verwenden lassen, gibt es sehr viele, wir beschränken uns aber darauf, diejenigen unter ihnen zu erwähnen, die zur Integration von Differentialgleichungen verwendet worden sind oder sich dazu eignen.

27. Vorerst wollen wir jedoch bemerken, dass die Integration eines Normalsystems von der Form

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x,y,\ldots), \quad \frac{dy}{dt} = G(t,x,y,\ldots), \ldots \tag{33}$$

durch Erweiterung der oben skizzierten Methode prinzipiell keine Schwierigkeiten bietet, falls $F, G, \ldots$ den nötigen Bedingungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit genügen. Man hat nämlich nach (33) mit der Bezeichnung $y_i = y(t_i)$, . .

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\omega} F(t,x,y,\ldots)\,dt, \quad y_1 = y_0 + \int_{t_0}^{t_0+\omega} G(t,x,y,\ldots)\,dt, \ldots$$

und kann wiederum alle Quadraturen angenähert ausführen, sofern man die Werte von $x, y, \ldots$ für $t_0, t_0 - \omega, t_0 - 2\omega, \ldots$ schon berechnet hat. Es bedarf also keiner neuen Quadraturformeln um ein beliebiges Normalsystem (33) zu integrieren. Wenn es sich um Gleichungen zweiter Ordnung handelt, kann es angemessen sein, Formeln für eine zweifache Quadratur zu benutzen. Von den Einzelheiten in der Durchführung der Rechnung wird im dritten Abschnitt die Rede sein.

§ 9. Die wichtigsten Integrationsformeln.

28. Eine Reihe von Formeln, welche erlauben, die Werte der betreffenden bestimmten Integrale aus den schon bekannten Funktionswerten $f_0, f_{-1}, f_{-2}, \ldots$ linear zu berechnen, gewinnt man durch Integration aus der »Lagrangeschen Interpolationsformel» und erhält, von dem Restglied der letzteren ausgehend, Ausdrücke zur Beurteilung der jeweils erhaltenen Genauigkeit.[11] Diese haben durchweg die Form von Ableitungen von f, die für einen Mittelwert eines gewissen Intervalles zu berechnen und mit kleinen Konstanten zu multiplizieren sind.

[11] Vgl. J. F. STEFFENSEN, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1922, S. 20—36. Die Methode ist ganz analog der bekannten Quadraturmethode von NEWTON-COTES. Diese letztere kann hier nicht *direkt* angewandt werden, denn dabei wird auch f_1 benutzt, welche Grösse in unserem Falle eben gesucht wird. — Vgl. auch STEFFENSEN: Interpolationslære, København 1925, S. 166—174.

Die betreffende Methode hat ausser der Einfachheit der Koeffizienten den Vorzug, dass etwaige Fehler in den f_i nachträglich leicht zu verbessern sind. Trotzdem werden im allgemeinen gewisse Formeln der *Differenzenrechnung* vorzuziehen sein, hauptsächlich weil dieselben eine bequemere Abschätzung der aus der Integrationsmethode selbst herrührenden Fehler gestatten. Man erhält dabei schon durch den Integrationsprozess, ohne jede besondere Rechnung, eine Vorstellung von der Genauigkeit des Resultates.

29. Quadraturformeln, die, statt der Funktionswerte f_i selbst, deren Differenzen enthalten, kann man am einfachsten durch Integration der gebräuchlichen Interpolationsformeln der Differenzenrechnung herleiten. Die letzteren haben den Zweck, eine Funktion f durch ganze, rationale Funktionen anzunähern, deren Werte mit denjenigen der Funktion f in einer Anzahl äquidistanter Punkte t_i übereinstimmen. Wir können daher das Integral in (32) durch das Integral über die Näherungsfunktion ersetzen und erhalten verschiedene Formeln je nach den Differenzen, die wir in die Formeln eintreten lassen.

Am natürlichsten scheint es, nur diejenigen Differenzen zu benutzen, die direkt aus den bekannten Funktionswerten f_i, $(i = 0, -1, -2, \ldots)$ hervorgehen, die also in dem folgenden Schema oberhalb der schräg eingezeichneten Geraden gelegen sind.

(34)

			...	...		...	
$t_0-5\omega$			f_{-5}	...		...	
			$\Delta^1_{-\frac{9}{2}}$	...		...	
$t_0-4\omega$			f_{-4}	Δ^2_{-4}		...	
			$\Delta^1_{-\frac{7}{2}}$	$\Delta^3_{-\frac{7}{2}}$		...	
$t_0-3\omega$			f_{-3}	Δ^2_{-3}		Δ^4_{-3}	
			$\Delta^1_{-\frac{5}{2}}$	$\Delta^3_{-\frac{5}{2}}$		$\Delta^5_{-\frac{5}{2}}$	
$t_0-2\omega$			f_{-2}	Δ^2_{-2}		Δ^4_{-2}	
			$\Delta^1_{-\frac{3}{2}}$	$\Delta^3_{-\frac{3}{2}}$		$\Delta^5_{-\frac{3}{2}}$	
$t_0-\omega$			f_{-1}	Δ^2_{-1}		Δ^4_{-1}	
		$\Delta^{-1}_{-\frac{1}{2}}$	$\Delta^1_{-\frac{1}{2}}$	$\Delta^3_{-\frac{1}{2}}$		$\Delta^5_{-\frac{1}{2}}$	
t_0	Δ^{-2}_0		f_0	Δ^2_0		Δ^4_0	
		$\Delta^{-1}_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^1_{\frac{1}{2}}$	$\Delta^3_{\frac{1}{2}}$		$\Delta^5_{\frac{1}{2}}$	
$t_0+\omega$	Δ^{-2}_1		f_1	Δ^2_1		Δ^4_1	
		$\Delta^{-1}_{\frac{3}{2}}$	$\Delta^1_{\frac{3}{2}}$	$\Delta^3_{\frac{3}{2}}$		$\Delta^5_{\frac{3}{2}}$	

30. Solche Differenzen benutzt die »Newtonsche Formel für Interpolation nach rückwärts»[12], die folgendermassen lautet, wenn wir $n = \frac{1}{\omega}(t - t_0)$ setzen:

$$(35)\quad f(t) = f_0 + \frac{n}{1!}\Delta^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{n(n+1)}{2!}\Delta^2_{-1} + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)}{\nu!}\Delta^\nu_{-\frac{\nu}{2}} + \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu)}{(\nu+1)!}\omega^{\nu+1}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi),$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Hierbei liegt ξ zwischen dem grössten und dem kleinsten der Werte $t, t_0, t_0 - \nu\omega$ und hängt von t ab. Wir führen die Integration von t_0 bis $t_0 + \omega$ aus und erhalten mit Rücksicht auf (32)

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\omega} \bar{f}(t)\,dt = x_0 + \omega \int_0^1 \bar{f}(t_0 + n\omega)\,dn, \quad \text{oder}$$

$$(36)\quad x_1 = x_0 + \omega\left\{f_0 + \frac{1}{2}\Delta^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{12}\Delta^2_{-1} + \frac{3}{8}\Delta^3_{-\frac{3}{2}} + \frac{251}{720}\Delta^4_{-2} + \frac{95}{288}\Delta^5_{-\frac{5}{2}} + \cdots\right\} + R_{\nu+1},$$

$$(37)\quad R_{\nu+1} = \omega^{\nu+2}\int_0^1 \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu)}{(\nu+1)!}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi)\,dn.$$

ξ liegt diesmal zwischen $t_0 - \nu\omega$ und $t_0 + \omega$. Weil die Ableitung $\bar{f}^{(\nu+1)}$ stetig angenommen wurde, und weil der andere Faktor des Integranden in (37) sein Vorzeichen zwischen $n = 0$ und $n = 1$ behält, können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden, und finden

$$(38)\quad R_{\nu+1} = \omega^{\nu+2}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi')\int_0^1 \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu)}{(\nu+1)!}dn,$$

wo ξ' wieder zwischen $t_0 - \nu\omega$ und $t_0 + \omega$ liegt.

Setzen wir

$$(39)\quad A_i = \int_0^1 \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}dn, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

so lässt sich (36) nebst dem Restglied (38) so schreiben:

$$(40)\quad x_1 = x_0 + \omega f_0 + \omega\sum_{i=1}^{\nu} A_i\Delta^i_{-\frac{i}{2}} + A_{\nu+1}\omega^{\nu+2}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi), \qquad (t_0 - \nu\omega \leqq \xi \leqq t_0 + \omega).$$

Diese Formel, die wie gesagt nur bekannte Differenzen enthält, ist — allerdings ohne Restglied von J. C. ADAMS[13] aufgestellt worden. Sie kommt später z. B. in Arbeiten von CHARLIER und KRYLOFF vor.

Eine etwas bequemere Formel wird durch Integration von (35) zwischen $t_0 - \omega$ und $t_0 + \omega$ erhalten, nämlich die folgende:

[12] Die gewöhnlich mit dem Namen NEWTON's bezeichnete Interpolationsformel ist nach einer Bemerkung bei E. T. WHITTAKER & G. ROBINSON: The Calculus of Observations (London 1924, S. 12) im Jahre 1670 von JAMES GREGORY entdeckt worden (loc. cit. [14]). Die meisten von den gebräuchlichen Interpolationsformeln sind aber zum ersten Male in dem Werke I. NEWTONS: Methodus Differentialis, (gedruckt 1711, geschrieben vor Oktober 1676) enthalten. Restglieder hat man erst seit CAUCHY benutzt.

[13] F. BASHFORTH & J. C. ADAMS: An attempt to test the theories of Capillary Action, Cambridge 1883, S. 18. WHITTAKER und ROBINSON bezeichnen (loc. cit., S. 363) die Anwendung der Formel (40) als »the best method of integrating differential equations numerically».

$$x_1 = x_{-1} + 2\omega f_0 + \omega\left\{\frac{1}{3}\Delta^2_{-1} + \frac{1}{3}\Delta^3_{-\frac{3}{2}} + \frac{29}{90}\Delta^4_{-2} + \frac{14}{45}\Delta^5_{-\frac{5}{2}} + \cdots + \int_{-1}^{+1} \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)}{\nu!}\,dn\,\Delta^\nu_{-\frac{\nu}{2}}\right\} + R_{\nu+1},$$

die am zweckmässigsten in der Gestalt

$$x_1 = x_{-1} + 2\omega f_0 + \frac{1}{3}\omega\left\{\Delta^2_{-1} + \Delta^3_{-\frac{3}{2}} + \Delta^4_{-2} + \Delta^5_{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{30}\Delta^4_{-2} - \frac{1}{15}\Delta^5_{-\frac{5}{2}} - \cdots\right\} \tag{41}$$

geschrieben wird, welche sich durch die bequemen Koeffizienten im Vergleich mit (36) empfiehlt. Auf das Restglied kann diesmal der Mittelwertsatz erst dann angewandt werden, wenn man dasselbe in zwei Teile zerlegt. Wir setzen in Analogie mit (39) $G_i = \int_0^{-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\,dn$ und finden leicht

$$R_{\nu+1} = [A_{\nu+1}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi') - G_{\nu+1}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi'')]\,\omega^{\nu+2}, \tag{42}$$

wobei ξ' zwischen $t_0 - \nu\omega$ und $t_0 + \omega$, ξ'' zwischen $t_0 - \nu\omega$ und t_0 liegt.

31. Die Integration kann aber auch mittels anderer Differenzenwerte als der direkt gegebenen vollzogen werden, wenn auch in indirekter Weise. Wenn nämlich die f_i für $i = 0, -1, -2, \ldots$ gegeben sind, kann man durch *Extrapolation* sich die Funktionswerte f_i für $i = 1, 2, \ldots$ verschaffen und das Differenzenschema ergänzen. Falls die so extrapolierten Funktionswerte nicht mit den später durch Integration gefundenen übereinstimmen, wird es notwendig, die Integration mittels der verbesserten Funktions- und Differenzenwerte zu wiederholen und dies so lange fortzusetzen, bis eine Änderung in den $f_1, \ldots$ nicht mehr eintritt. Das Verfahren konvergiert bei kleinem ω sehr rasch.

Wir werden jedoch weiter unten sehen, dass die fraglichen Integrationsformeln ihre grösste Bedeutung bei der Verbesserung schon vorhandener Näherungen erlangen.

32. Eine Formel, welche die mit f_1 in einer aufsteigenden Diagonale des Schemas (34) liegenden Differenzen enthält, ist am bequemsten aus der »Newtonschen Interpolationsformel« zu erhalten, wenn man die letztere auf die Umgebung von t_1 anwendet. Dieselbe lautet:

$$x_1 = x_0 + \omega f_1 - \omega \sum_{i=1}^{\nu} G_i \Delta^i_{-\frac{i}{2}+1} + R_{\nu+1}, \tag{43}$$

wo

$$G_i = \int_0^{-1} \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\,dn \quad \text{und} \quad R_{\nu+1} = -\omega^{\nu+2} G_{\nu+1}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi), \quad (t_0 - (\nu-1)\omega < \xi < t_0 + \omega),$$

$$G_1 = \frac{1}{2},\ G_2 = \frac{1}{12},\ G_3 = \frac{1}{24},\ G_4 = \frac{19}{720},\ G_5 = \frac{3}{160},\ G_6 = \frac{863}{60480}, \ldots$$

Dieselben Koeffizienten hat eine, bereits von GREGORY aufgestellte Formel.[14]

33. Besonders in der Astronomie wird eine von GAUSS herrührende Quadraturformel viel benutzt, die in zwei horizontalen Geraden des Schemas (34) liegende Differenzen enthält. Wir führen zur Abkürzung folgende für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ geltenden Bezeichnungen ein:

[14] Brief von GREGORY an COLLINS vom 23. Nov. 1670 [Rigaud's Correspondence 2, S. 209]. Von der Formel (43) hat u. a. G. H. DARWIN umfassenden Gebrauch gemacht. Scient. pap. Vol. IV und Acta mathematica Bd. 21 (1897), S. 99—242. Vgl. auch die Note [28].

$$\Delta^i_k = \frac{1}{2}\left(\Delta^i_{k-\frac{1}{2}} + \Delta^i_{k+\frac{1}{2}}\right) \text{ für } i = -1, 1, 3, \ldots, \qquad \Delta^i_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\Delta^i_k + \Delta^i_{k+1}\right) \text{ für } i = -2, 2, 4, \ldots,$$

wo die Bedeutung der negativen Werte von i weiter unten angegeben wird. Die Formel ergibt sich aus der »Besselschen Interpolationsformel»

$$\bar{f}(t) = \frac{f_0+f_1}{2} + p\Delta^1_{\frac{1}{2}} + \frac{p^2-\frac{1}{4}}{2!}\Delta^2_{\frac{1}{2}} + \frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{3!}\Delta^3_{\frac{1}{2}} + \frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{4!}\Delta^4_{\frac{1}{2}} + \cdots$$

(44)
$$+ \frac{p\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(p^2-\frac{(2\nu-3)^2}{4}\right)}{(2\nu-1)!}\Delta^{2\nu-1}_{\frac{1}{2}} + \frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(p^2-\frac{(2\nu-1)^2}{4}\right)}{(2\nu)!}\omega^{2\nu}\bar{f}^{(2\nu)}(\xi),$$

$$t_0-(\nu-1)\omega < \xi < t_0+\nu\omega, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Hierbei ist $p = \frac{1}{\omega}(t-t_0)+\frac{1}{2}$ gesetzt worden. Wir integrieren nun (44) zwischen $t=t_0$ und $t=t_0+\omega$ und erhalten gemäss (32)

$$x_1 - x_0 = \omega\left\{\frac{1}{2}(f_1+f_0) + \sum_{i=1}^{\nu-1} M_{2i}\left(\Delta_1^{2i-1} - \Delta_0^{2i-1}\right)\right\} + R^{(1)}_{2\nu}. \tag{45}$$

Die Koeffizienten M_{2i} sind durch das Integral

$$M_{2i} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)\cdots\left(p^2-\frac{(2i-1)^2}{4}\right)}{(2i)!}\,dp, \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{46}$$

definiert, die ersten von ihnen sind

$$M_2 = -\frac{1}{12}, \quad M_4 = \frac{11}{720}, \quad M_6 = -\frac{191}{60480}, \quad M_8 = \frac{2497}{3628800}.$$

Man kann nun für $x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}$ ähnliche Formeln wie (45) ableiten, indem man die »Besselsche Interpolationsformel» auf die Schritte $t_1 - t_2, \ldots$ anwendet. Setzt man dann

$$\Delta^{-1}_{-\frac{1}{2}} = \frac{x_0}{\omega} - \frac{1}{2}f_0 - \sum_{i=1}^{\nu-1} M_{2i}\Delta_0^{2i-1}, \tag{47}$$

so gilt allgemein, wie man durch Addition der Teilintegrale findet,

$$x_n = \omega\left\{\Delta_n^{-1} + \sum_{i=1}^{\nu-1} M_{2i}\Delta_n^{2i-1}\right\} + R^{(n)}_{2\nu}, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{48}$$

oder

$$x_n = \omega\left\{\Delta_n^{-1} - \frac{1}{12}\Delta^1_n + \frac{11}{720}\Delta^3_n - \frac{191}{60480}\Delta^5_n + \frac{2497}{3628800}\Delta^7_n - \cdots\right\} + R^{(n)}. \tag{48'}$$

Die Grössen Δ^{-1} erhält man durch blosse Addition, indem man das Differenzenschema durch eine Kolonne nach links ergänzt. Das Restglied ist nach dem vorigen leicht zu bilden. Setzt man statt der darin auftretenden Summe $\sum_{i=1}^{n}\bar{f}^{(2\nu)}(\xi_i)$ den Ausdruck $n\bar{f}^{(2\nu)}(\xi')$, wo ξ' zwischen den äussersten der ξ_i liegt, so findet man

$$R^{(n)}_{2\nu} = n\,\omega^{2\nu+1}M_{2\nu}\bar{f}^{(2\nu)}(\xi'), \quad [t_0-(\nu-1)\omega < \xi' < t_0+(n+\nu-1)\omega]. \tag{49}$$

34. Gemäss der Bemerkung am Schlusse von Nr. 27 wollen wir noch einige Formeln für eine zweifache Integration besprechen.

Handelt es sich um die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x'' = F(t, x), \tag{50}$$

so haben wir mit Benutzung der bisherigen Bezeichnungsweise

$$x = x_0 + u_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} \bar{F}(t)\, dt, \tag{51}$$

indem die Integrationskonstanten so bestimmt worden sind, dass für $t = t_0$, $x = x_0$ und $\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=t_0} = u_0$ wird. Setzen wir in (51) nach ausgeführter Integration $t = t_0 + \omega$, so muss $x = x_1$ sein und ebenso $x = x_{-1}$ für $t = t_0 - \omega$. Aus den dadurch erhaltenen Gleichungen folgt

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + \int_{t_0}^{t_0+\omega} dt \int_{t_0}^{t} \bar{F}(t)\, dt + \int_{t_0-\omega}^{t_0} dt \int_{t_0}^{t} \bar{F}(t)\, dt. \tag{52}$$

$F(t)$ können wir wieder durch eine ganze, rationale Funktion annähern, um die Integrationen auszuführen. Wollen wir nur direkt gegebene Differenzenwerte benutzen, so wenden wir auch jetzt die »Newtonsche Interpolationsformel» an; wir ersetzen also in (35) $\bar{f}(t)$ durch $F(t)$. Mit den Bezeichnungen

$$B_i = \int_0^1 dn \int_0^n \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\, dn, \quad C_i = -\int_0^{-1} dn \int_0^n \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\, dn, \qquad B_i - C_i = S_i$$

ergibt sich

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + \omega^2 F_0 + \omega^2 \sum_{i=2}^{\nu} S_i \Delta^i_{-\frac{i}{2}} + R_{\nu+1}, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{53}$$

Hier bedeuten die $\Delta^i_{-\frac{i}{2}}$ Differenzen der Funktionswerte F_i. Die ersten Koeffizienten der Formel (53) sind

$$S_2 = \frac{1}{12}, \; S_3 = \frac{1}{12}, \; S_4 = \frac{19}{240}, \; S_5 = \frac{3}{40}, \; S_6 = \frac{863}{12096}.$$

Für den praktischen Gebrauch schreibt man statt (53)

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + \omega^2 F_0 + \frac{\omega^2}{12}\left[\Delta^2_{-1} + \Delta^3_{-\frac{3}{2}} + \Delta^4_{-2} + \Delta^5_{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}\Delta^4_{-2} - \frac{1}{10}\Delta^5_{-\frac{5}{2}} + \cdots\right]. \tag{54}$$

Diese Formel ist unabhängig von Adams von Störmer aufgestellt[15] und von ihm und seinen Assistenten viel benutzt worden. Störmer tabuliert übrigens direkt die Funktion $\omega^2 \bar{F}$. Für $R_{\nu+1}$ erhält man durch Anwendung des Mittelwertsatzes für zweifache Integrale unmittelbar

$$R_{\nu+1} = \omega^{\nu+3}\{B_{\nu+1}\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi') - C_{\nu+1}\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi'')\}, \qquad (t_0 - \nu\omega < \xi' < t_0 + \omega, \; t_0 - \nu\omega < \xi'' < t_0) \tag{55}$$

---

[15] C. Störmer: Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales (Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève, juillet-octobre 1907), S. 63 ff.

oder, wenn man $\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi'') = \bar{F}^{(\nu+1)}(\xi') + (\xi''-\xi')\bar{F}^{(\nu+2)}(\xi''')$ setzt, wo ξ''' zwischen ξ' und ξ'' liegt,

$$R_{\nu+1} = \omega^{\nu+3}\{S_{\nu+1}\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi') + C_{\nu+1}(\xi'-\xi'')F^{(\nu+2)}(\xi''')\}. \tag{55)'}$$

Betreffs der Grösse $|\xi'-\xi''|$ kann man jetzt nur sagen, dass sie nicht grösser ist als $(\nu+1)\omega$; eine andere Betrachtung zeigt aber, dass sie erheblich kleiner ist. Bei kleinem ω kann man jedenfalls das Restglied durch den Ausdruck $R_{\nu+1} = \omega^{\nu+3}S_{\nu+1}\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi')$ abschätzen.

35. Die rechte Seite von (52) findet sich bei LEGENDRE durch Differenzen, die in einer horizontalen Geraden liegen, ausgedrückt.[16] Die betreffende Formel wird am besten aus der »Stirlingschen Interpolationsformel»

$$\bar{F}(t) = F_0 + \frac{n}{1!}\Delta_0^1 + \frac{n^2}{2!}\Delta_0^2 + \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\Delta_0^3 + \frac{n^2(n^2-1^2)}{4!}\Delta_0^4 + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(\nu-1)^2)}{(2\nu-1)!}\Delta_0^{2\nu-1} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(\nu-1)^2)}{(2\nu)!}\omega^{2\nu}\bar{F}^{(2\nu)}(\xi), \tag{56}$$

wo $n = \frac{1}{\omega}(t-t_0)$ und $t_0 - \nu\omega < \xi < t_0 + \nu\omega$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist, abgeleitet. Führen wir die Integrationen von (52) aus und setzen

$$L_{2i} = 2\int_0^1 dn \int_0^n \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(i-1)^2)}{(2i)!}dn, \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{57}$$

so ergibt sich nämlich

$$x_1 = 2x_0 - x_{-1} + \omega^2 F_0 + \omega^2 \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{2i}\Delta_0^{2i} + \omega^{2\nu+2}L_{2\nu}\bar{F}^{(2\nu)}(\xi), \qquad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{58}$$

wo $t_0 - \nu\omega < \xi < t_0 + \nu\omega$ und die ersten Koeffizienten folgende Werte haben:

$$L_2 = \frac{1}{12},\quad L_4 = -\frac{1}{240},\quad L_6 = \frac{31}{60480},\quad L_8 = -\frac{289}{3628800}. \tag{58)'}$$

36. Für die zweifache Quadratur hat GAUSS eine sehr bequeme Formel abgeleitet, die der in Nr. 33 erwähnten ganz analog ist und die den Vorzug vor (58) verdient.[17] Dieselbe wird vielleicht am einfachsten durch zweimalige Integration aus der »Stirlingschen Interpolationsformel» (56) erhalten, wenn man nachher $\Delta_0^{2i} = 2(\Delta_1^{2i-2} - \Delta_0^{2i-2} - \Delta_0^{2i-1})$ setzt, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Hierbei ist unter Δ_i^0 der Funktionswert F_i verstanden. Wir finden mit Rücksicht auf (51)[18]

[16] LEGENDRE: Traité des Fonctions elliptiques T. II, Paris 1826, S. 52. LEGENDRE wendet allerdings die Formel nur zur zweifachen Quadratur an, obgleich er die Integration von Differentialgleichungen für eine Aufgabe erklärt, deren Behandlung wünschenswert wäre. Vgl. loc. cit[30], S. 65.

[17] Vgl. P. H. COWELL & A. C. D. CROMMELIN: Essay on the return of Halleys Comet (Greenwich Observations 1909). Die in Rede stehenden Gauss'schen Formeln (48)' und (62)' wurden zuerst von ENCKE im Berliner astr. Jahrbuch 1837 und 1862 veröffentlicht.

[18] Während unmittelbar hervorgeht, dass die Koeffizienten (57) vor den Gliedern $(\Delta_1^{2i-2} - \Delta_0^{2i-2})$ erscheinen, erfordert der *allgemeine* Nachweis, dass die Koeffizienten von Δ_0^{2i-1} durch (46) definiert sind, eine besondere Rechnung. Hierüber, sowie betreffs der Herleitung von (62) und (63) vergleiche man die Arbeit STEFFENSENS On Laplace's and Gauss' Summation-Formulas [Skandinavisk Aktuarietidskrift 1924, S. 1—15].

$$x_1 - x_0 = \omega u_0 + \omega^2 \left\{ \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{2i} (\Delta_1^{2i-2} - \Delta_0^{2i-2}) + \frac{1}{2} F_0 - \sum_{i=1}^{\nu-1} M_{2i} \Delta_0^{2i-1} \right\} + R_{2\nu-2}^{(1)}, \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

oder, wenn wir in Analogie mit (47) setzen

$$\Delta_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \frac{u_0}{\omega} - \frac{1}{2} F_0 - \sum_{i=1}^{\nu-1} M_{2i} \Delta_0^{2i-1}, \qquad \Delta_{\frac{1}{2}}^{-1} = \Delta_{-\frac{1}{2}}^{-1} + F_0 \tag{59}$$

und ausserdem

$$\Delta_0^{-2} = \frac{x_0}{\omega^2} - \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{2i} \Delta_0^{2i-2}, \qquad \Delta_1^{-2} = \Delta_0^{-2} + \Delta_{\frac{1}{2}}^{-1}, \tag{60}$$

die Formel

$$x_1 = \omega^2 \left\{ \Delta_1^{-2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{2i} \Delta_1^{2i-2} \right\} + R_{2\nu-2}^{(1)}. \tag{61}$$

Hieraus kann die allgemeine Formel

$$x_n = \omega^2 \left\{ \Delta_n^{-2} + \sum_{i=1}^{\nu-1} L_{2i} \Delta_n^{2i-2} \right\} + R_{2\nu-2}^{(n)}, \qquad (n = 1, 2, \ldots \tag{62}$$

oder

$$x_n = \omega^2 \left\{ \Delta_n^{-2} + \frac{1}{12} F_n - \frac{1}{240} \Delta_n^2 + \frac{31}{60480} \Delta_n^4 - \frac{289}{3628800} \Delta_n^6 + \cdots \right\} + R^{(n)} \tag{62'}$$

in ähnlicher Weise wie (48) aus (45) abgeleitet werden. Ihre Anwendung setzt voraus, dass man dem Differenzenschema der F_i noch eine Kolonne Δ^{-2} hinzufügt. Die ersten Grössen dieser Kolonne sind durch die »Integrationskonstanten» (59) und (60) gegeben. Für das Restglied erhält man nach einiger Rechnung den Ausdruck

$$R_{2\nu-2}^{(n)} = -\frac{\nu-1}{2} \omega^2 M_{2\nu-2} \left[\Delta_n^{2\nu-2} - \Delta_0^{2\nu-2} \right] + n M_{2\nu} \left[(t_0 + n\omega - \xi) \bar{F}^{(2\nu)}(\xi) - 2\nu \bar{F}^{(2\nu-1)}(\xi) \right] \omega^{2\nu+1}, \tag{63}$$

wo

$$t_0 - (\nu - 1)\omega < \xi < t_0 + (n + \nu - 1)\omega.$$

37. Schliesslich wollen wir noch eine Integrationsmethode erwähnen, die neuerdings von B. Numeroff erdacht worden ist.[19]

Zwecks Integration der Gleichungen (30) oder (50) führt Numeroff neue »Koordinaten» ein. Im ersteren Falle setzt er

$$\bar{x} = x - \frac{1}{6} \omega^2 [f'_t + f'_x f]$$

und im letzteren

$$\bar{x} = x - \frac{1}{12} \omega^2 F(t, x),$$

womit er in der Tat sehr bequeme Integrationsformeln erhält, die die Werte von x ergeben. In der Praxis ist die Rechnungsart von Numeroff — wie er auch selbst hervorhebt — nur dann von Bedeutung, wenn der Übergang von den neuen Koordinaten x zu den alten x mit hinreichender Leichtigkeit zu bewältigen ist.

[19] B. Numeroff: Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations [Publikationen des russischen astrophysikalischen Instituts]. Moskau 1922 (?), S. 8 ff. und 76.

§ 10. Über die Genauigkeit der Integrationsformeln.

38. Wenn wir bei der Anwendung des Differenzenschemas der Funktion f (oder F) uns von vornherein auf die Mitnahme der Differenzen bis zu etwa der ν:ten Ordnung einschliesslich beschränken und dabei annehmen, die ν:te Differenz sei konstant, und also alle folgenden gleich Null, so heisst das dasselbe wie anzunehmen, $\bar{f}(t)$ (bzw. $\bar{F}(t)$) sei ein Polynom in t, $P_\nu(t)$ vom ν:ten oder niedrigerem Grade. Denn für eine solche Funktion, und nur für eine solche, ist die ν:te Differenz konstant. Wir müssen offenbar $\nu+1$ verschiedene Funktionswerte schon kennen, um eine Differenz der ν:ten Ordnung bilden zu können, andererseits ist ein Polynom vom ν:ten Grade durch $\nu+1$ Bedingungen bestimmt.

Nun führen wir statt $\bar{f}(t)$ das Polynom $P_\nu(t)$ ein. Wird dann die Integration mit irgend einer Formel des vorigen Paragraphen ausgeführt, die $\nu+1$ Funktionswerte benutzt oder — was gleichbedeutend ist — nehmen wir in der Formel noch die (konstante) ν:te Differenz mit, so ergeben sich für die x_i die Werte derjenigen Integralfunktion von $P_\nu(t)$, die den Anfangsbedingungen entspricht, und zwar exakt, denn das Restglied einer jeden der Formeln verschwindet in diesem Falle identisch. Alle Formeln geben also unter den erwähnten Annahmen die gleichen Werte für x_i, von etwaigen Abrundungsfehler abgesehen. Wird also eine Differenz irgend einer Ordnung als konstant betrachtet, so sind alle Integrationsformeln, was die Genauigkeit betrifft, gleichwertig. Der Fehler rührt von den vernachlässigten höheren Differenzen her, die ja in Wirklichkeit nicht gleich Null sind.

Hiernach hat es also *gar keinen Zweck, unter der genannten Annahme zu extrapolieren*, um etwa eine der Formeln (43), (48)′, (58), (62)′ anwenden zu können, da man dasselbe Resultat ohne Extrapolation mittels (36), (41) oder (54) erhält. Die Extrapolation ist also nur dann anzuwenden, wenn bessere Anhaltspunkte dafür zur Verfügung stehen.

39. Durch Verkleinerung der Intervallbreite ω kann man den Fehler der Integration bei einem jeden Schritt beliebig klein machen. Denn das Restglied enthält eine Potenz von ω als Faktor, während der andere Faktor nach unseren Voraussetzungen endlich ist.

Auch bei der Integration über ein bestimmtes Intervall, etwa von $t=a$ bis $t=b=a+n\omega$, *kann der Fehler beliebig klein gemacht werden.*

Es möge sich z. B. um eine Integration mittels der Formel (40) handeln. Bedeutet dann M den grössten Wert, den $|\bar{f}^{(\nu+1)}|$ zwischen $t=a-\nu\omega$ und $t=b$ annimmt, so ist der Fehler bei keinem Schritt grösser als $A_{\nu+1}\omega^{\nu+2}M$. Da die Anzahl der Schritte $\frac{|b-a}{\omega}$ beträgt, so kann der Fehler der Integration von a bis b nicht grösser sein als $R=A_{\nu+1}|b-a|\omega^{\nu+1}M$. Wird ω verkleinert, so ändert sich M nicht oder wird jedenfalls nicht grösser; daher kann R beliebig klein gemacht werden.

Es wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Funktionswerte $f(a+\omega)$, $g(a+\omega)$, $f(a+2\omega)$, $g(a+2\omega)$, ... exakt berechnet werden können. Dies trifft nur in dem Falle einer »reinen» Quadratur zu; bei der Integration von Differentialgleichungen dagegen entstehen in den Werten $x(a+\omega)$, $y(a+\omega)$, ... und also auch in den Funktionswerten $f(a+\omega)$, $g(a+\omega)$, ...

gewisse Fehler. Man sieht aber leicht ein, dass dadurch in den x_i Fehler von der Ordnung $\nu + 3$ in ω entstehen, und die Gültigkeit der obigen Behauptung wird daher nicht aufgehoben.[20]

Das oben Gesagte kann unmittelbar auf den Fall eines beliebigen Normalsystems verallgemeinert werden.

40. Die genaue Fehlerabschätzung mit Hilfe der Restglieder bietet in den meisten Fällen grosse Schwierigkeiten, weil die dabei zu benutzenden, höheren Ableitungen von f (oder F) im allgemeinen nur sehr mühsam zu berechnen sind.

Meistens genügt aber eine ganz rohe Kenntnis des Verlaufes der betreffenden Differentialquotienten, die man sich auch ohne Differentiation verschaffen kann.

Man hat allgemein

$$\Delta_k^\nu = \omega^\nu \bar{f}^{(\nu)}(\xi), \quad \text{wo} \quad (t_k - \tfrac{\nu}{2}\omega < \xi < t_k + \tfrac{\nu}{2}\omega). \tag{64}$$

Demnach kann man die ν:ten Differenzen als *Stichproben* von den Werten der mit ω^ν multiplizierten ν:ten Ableitung von $\bar{f}$ betrachten. Wenn nur diese Differenzen einen regelmässigen Verlauf zeigen, erhält man also einen Begriff von dem Verlaufe von $f^{(\nu)}(t)$. Will man den grössten Wert von $\bar{f}^{(\nu)}(\xi)$ in einem gewissen Intervall schätzen, so genügt es meistens, dafür die grösste Differenz der ν:ten Ordnung, anzunehmen die in dem für ξ festgesetzten Intervall vorkommt. (Eigentlich müsste man ja die Werte von Δ^ν in einem nach beiden Seiten mit $\frac{\nu}{2}\omega$ verlängerten Intervall in Betracht ziehen.) Hieraus ergibt sich eine, zwar rohe, obere Grenze für den Fehler der Integrationsformel, und es ist klar, dass eine untere Grenze in analoger Weise bestimmt werden kann.

Diese und die später erwähnten Methoden der Fehlerabschätzung werden wir weiter unten, Nr. 44, an einem numerischen Beispiel erläutern.

41. Bisweilen kann man schon aus der Kenntnis der Vorzeichen der höheren Ableitungen wichtige Schlüsse ziehen, wie das Folgende zeigt. Es sei eine Reihe und ihr Restglied R gegeben $S = \sum_{\nu=0}^{\nu} U_\nu + R_{\nu+1}$. Wenn die erste, von Null verschiedene Zahl U nach U_ν mit $U_{\nu+\mu}$ bezeichnet wird, so ist $R_{\nu+1} = U_{\nu+\mu} + R_{\nu+\mu+1}$. Daraus ist folgendes ersichtlich: *Wenn* $R_{\nu+1}$ *und* $R_{\nu+\mu+1}$ *verschiedene Vorzeichen haben, ist das Restglied* $R_{\nu+1}$ *numerisch kleiner als das nächste, nicht verschwindende Glied der Reihe und hat dasselbe Vorzeichen wie dieses.* Die genannte Bedingung ist auch notwendig. Dieses Fehlerkriterium kann bisweilen gute Dienste leisten[21], besonders bei der zweifachen Integration kann aber die Bestimmung des Vorzeichens von $R_{\nu+1}$ und $R_{\nu+\mu+1}$ viel Mühe verursachen.

42. Um den Fehler einer Integrationsformel der Differenzenrechnung zu überschlagen, kann man auch untersuchen, welches Resultat man bekommen haben würde, wenn man in der Formel ein Glied mehr hinzugezogen hätte. Die Formeln liefern im allgemeinen »*semikonvergente*»

[20] Vgl. die Konvergenzbetrachtung bei J. TAMARKIN, Mathematische Zeitschrift 1923, S. 214—219.

[21] Vgl. STEFFENSEN: On the Error in Interpolation-Formulas (Skandinavisk Aktuarietidskrift 1923, S. 185—189).

Reihen, und es ist deswegen kein unbedingter Vorteil, viele Glieder mitzunehmen, denn diese fangen von einem bestimmten Glied an zu wachsen. Wie man zweckmässig verfahren kann, erläutert CHARLIER folgendermassen.[22]

»In der Praxis bin ich dem Prinzip gefolgt, die Reihe mit dem kleinsten Glied abzubrechen (das kleinste Glied wird *nicht* mitgenommen), und den Fehler ungefähr gleich dem doppelten Betrag des kleinsten Gliedes geschätzt. Es ist zwar, — — —, nicht bewiesen, dass dem wirklich auch so ist, aber das wahre Resultat wird nicht weit hiervon abweichen, wenn ω so klein gewählt worden ist, dass die Differenzen innerhalb des Intervalles nicht das Zeichen wechseln.»

Es bliebe also übrig zu zeigen, dass bei hinreichend kleinem ω der Fehler kleiner ist als der zweifache Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes. Für einige der bei CHARLIER angeführten Formeln, hat C. R. ADAMS dies getan.[23]

Es lässt sich aber *a priori* erwarten, dass, in dem uns interessierenden Falle, das Verhältnis des Restgliedes R_ν zu dem ersten vernachlässigten Glied, welches Verhältnis wir allgemein mit V_ν bezeichnen, bei verschwindendem ω sich der Einheit nähert.[24]

In der Tat erhalten wir aus (40), um mit dieser Formel zu beginnen,

$$(65), \qquad V_{\nu+1} = \frac{\omega^{\nu+2} A_{\nu+1} \bar{f}^{(\nu+1)}(\xi)}{\omega A_{\nu+1} \Delta^{\nu+1}_{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}} = \frac{\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi)}{\frac{1}{\omega^{\nu+1}} \Delta^{\nu+1}_{-\frac{\nu}{2}}}, \qquad (t_0 - \nu\omega < \xi < t_0 + \omega).$$

Sowohl $\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi)$ als $\frac{\Delta^{\nu+1}_{-\frac{\nu}{2}}}{\omega^{\nu+1}}$ nähern sich für $\omega \to 0$ dem Grenzwert $\bar{f}^{(\nu+1)}(t_0)$, also ist $\lim_{\omega \to 0} V_{\nu+1} = 1$ für $\nu = 1, 2, \ldots$

Für die mit (40) analoge Formel (53) gilt Entsprechendes. Wir haben mit Rücksicht auf (55)' $\lim_{\omega \to 0} V_\nu = 1$, $(\nu = 2, 3, \ldots)$.

Was die Gaussschen Formeln (48) und (62) betrifft, lässt sich leicht zeigen, dass für beide $\lim_{\omega \to 0} V_\nu = 1$ ist, bei welchem Glied man auch die Formeln abbricht. Dabei muss man nur beachten, dass, wenn man vorläufig unberücksichtigte Kolonnen des Differenzenschemas später in Rechnung zieht, auch die »Integrationskonstanten» verbessert werden müssen. Tut man dies nicht, so kann das Verhältnis V bei beliebig kleinem ω einen sehr grossen Wert haben.

Es wäre von Wichtigkeit, in jedem Falle entscheiden zu können, ob das Intervall klein genug ist, damit die von CHARLIER erwähnte Regel gültig sei. Was z. B. die Formel (40) betrifft, kann dies mittels des Ausdrucks (65) geschehen, indem man zusieht, ob die Ungleichheit $V_\nu < 2$ gilt oder nicht. Dies setzt allerdings wieder die Kenntnis der Ableitungen von $\bar{f}$ voraus, und die Charliersche Regel kann deshalb nur selten exakte Anwendung finden.

[22] CHARLIER: Die Mechanik des Himmels, Leipzig 1907, Bd. II, S. 63 f.

[23] C. R. ADAMS in Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XLVII (1923). S. 53—61. Erratum dazu ibid. Bd. XLVIII, S. 28. Seine Untersuchung gilt auch für den Fall der Integration über ein bestimmtes endliches Intervall.

[24] Man kann nämlich die Integrationsformeln der Differenzenrechnung nach (64) gewissermassen als Potenzentwicklungen auffassen.

43. Die in Nr. 24 auseinandergesetzte Methode der Fehlerabschätzung kann auch auf die Formeln der Differenzenrechnung angewandt werden. Wenn man nämlich die Integration mit der doppelten Intervallbreite wiederholt, ist der Fehler der ersteren Berechnung, wenn man jedesmal vor den Differenzen derselben Ordnung abbricht, angenähert gleich einem bestimmten Bruchteil des Unterschiedes beider Resultate. Dieser konstante Bruch kann in jedem besonderen Fall unmittelbar angegeben werden (vgl. das folgende Beispiel).

§ 11. Beispiel zur Erläuterung der Fehlerabschätzungen.

44. An der zweifachen Quadratur

$$x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} dt \int_{0}^{t} 10^7 \cos t \, dt$$

wollen wir nun die verschiedenen Methoden der Fehlerabschätzung zur Anwendung bringen. Der exakte Ausdruck für x ist $10^7 \cos t$.

Der Grund, warum wir nicht die Integration einer Differentialgleichung als Beispiel gewählt haben, ist der, dass wir jetzt bloss die Fehler der Quadraturformeln betrachten wollen. Bei der Integration von Differentialgleichungen treten ausser diesen Fehlern, vom zweiten Schritte an, zugleich solche auf, die von den ungenau bestimmten Funktionswerten herrühren und die besonders untersucht werden müssen. In Nr. 48 werden wir ein Beispiel solcher Fehleranhäufungen geben.

Das Intervall ω nehmen wir gleich $\frac{\pi}{15}$ und erstrecken die Integration, die wir mittels der Störmerschen Formel (54) ausführen, von 0 bis π. Das Differenzenschema der Funktion $-\left(\frac{\pi}{15}\right)^2 10^7 \cos t$ kann jetzt hingeschrieben werden; darin bilden wir noch die Differenzen sechster Ordnung, obgleich wir bei der Integration nur diejenigen bis zur vierten Ordnung einschliesslich benutzen. Neben dem Schema, das sich auf der folgenden Seite befindet, haben wir bereits in besonderen Kolumnen die exakten Werte von x sowie die mittels der Formel (54) berechneten $\bar{x}$ eingetragen. Alle Grössen geben wir in ganzen Zahlen an, bei der Rechnung wurde aber z. T. eine Dezimalstelle benutzt.

Nach der Formel (55)′ wollen wir nun den ungefähren Betrag des Fehlers der Integration feststellen. Da wir etwa $C_5 = \frac{1}{7} S_5$ haben, wollen wir das Glied mit C_5 ganz vernachlässigen.[25] Man kann nun leicht nach (55)′ für den Fehler eines jeden Schrittes eine obere und eine untere Grenze ermitteln. Es zeigt sich aber, dass man genau dieselben Grenzen erhält, wenn man nach Nr. 40 statt der fünften Ableitung des Integranden die Differenzen fünfter Ordnung benutzt. Wie aus der Tabelle hervorgeht, liegen die wirklichen Korrektionen von $\bar{x}$ tatsächlich zwischen den angegebenen Zahlen, mit Ausnahme einer derselben, die mit der oberen Fehlergrenze zusammenfällt.

[25] Dieses Glied wird tatsächlich verschwindend klein (vgl. die Schlussbemerkung von Nr. 34).

t	x	$\bar{x}$	$-\left(\frac{\pi}{15}\right)^2 10^7 \cos t$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
− 60°									
									27
− 48°								− 90	
							− 767		37
− 36°						1238		− 53	
					18752		− 819		34
− 24°				− 9586		419		− 19	
					19171		− 838		38
0°	10000000		− 438649	9586		− 419		19	
					18752		− 819		34
12°	9781476	9781480	− 429064	28338		− 1238		53	
					17514		− 767		37
24°	9135454	9135457	− 400726	45852		− 2005		90	
					15510		− 677		27
36°	8090170	8090167	− 354875	61361		− 2682		116	
					12828		− 561		27
48°	6691306	6691303	− 293514	74189		− 3243		143	
					9586		− 419		17
60°	5000000	4999993	− 219325	83775		− 3661		159	
					5925		− 260		13
72°	3090170	3090161	− 135550	89699		− 3921		172	
					2004		− 88		3
84°	1045285	1045274	− 45852	91703		− 4008		175	
					− 2004		88		− 3
96°	− 1045285	− 1045296	45852	89699		− 3921		172	
					− 5925		260		− 13
108°	− 3090170	− 3090184	135550	83775		− 3661		159	
					− 9586		419		− 17
120°	− 5000000	− 5000013	219325	74189		− 3243		143	
					− 12828		561		− 27
132°	− 6691306	− 6691319	293514	61361		− 2681		116	
					− 15510		677		− 27
144°	− 8090170	− 8090181	354875	45852		− 2005		90	
					− 17514		767		− 37
156°	− 9135454	− 9135465	400726	28338		− 1238		53	
					− 18752		819		− 34
168°	− 9781476	− 9781484	429064	9586		− 419		19	
					− 19171		838		− 37
180°	− 10000000	− 10000007	438649						

Fehlerabschätzungen	$t-12°$	24°	36°	48°	60°	72°	84°	96°	108°	120°	132°	144°	156°	168°	180°
Fehler der Integration von $t-\omega$ bis t	− 4	− 3	3	3	7	9	11	11	14	13	13	11	11	8	7
Nach Nr. 40 berechnete obere Grenze d. Fehlers	6	8	10	12	13	14	14	14	14	14	14	14	13	12	10
„ Nr. 40 „ untere „ „ „	− 8	− 5	− 3	0	2	3	7	9	11	9	7	5	2	0	− 3
„ Nr. 41 „ obere „ „ „												13	12	11	9
„ Nr. 42 berechneter Höchstbetrag d. „	− 14	− 8	− 3	3	8	14	17	21	24	26	26	26	24	21	17
„ Nr. 43 abgeschätzter Betrag „ „	− 8	− 6	− 3	0	2	3	7	10	11	12	13	13	12	11	10

Das Fehlerkriterium von Nr. 41 kann nur bei den vier letzten Schritten der durchgeführten Integration Anwendung finden. Man kann nämlich sowohl aus den Ableitungen wie aus den

Differenzen mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass R_5 und R_6 für $t = 144°$, $156°$, $168°$, $180°$ verschiedene Vorzeichen haben; bei anderen Schritten aber kann man das nicht behaupten, ohne die wirklichen Korrektionen der Werte $\bar{x}$ zu kennen.

Die Charliersche Regel kann jetzt eigentlich nicht angewandt werden, weil die ersten vernachlässigten Glieder (mit den Differenzen der fünften Ordnung) noch nicht die kleinsten sind. Man sieht jedoch, dass die Integrationsfehler (mit einer Ausnahme) kleiner sind als die doppelten Beträge dieses Gliedes und dasselbe Vorzeichen haben. Hätten wir bei der Integration auch die Glieder mit Δ^5 und Δ^6 mitgenommen, so hätte die Charliersche Regel eine gute Fehlerabschätzung geliefert.

Um endlich das in Nr. 43 auseinandergesetzte Verfahren zu probieren, haben wir die Integration nochmals durchgeführt aber mit der doppelten Intervallbreite $\omega = \frac{2\pi}{15}$, einmal von 0 und einmal von 12° ausgehend. Denken wir etwa an den Schritt von t_i bis t_{i+2}, so kann der Fehler von x_{i+2} gemäss (55)′ mit $(2\omega)^7 k$ bezeichnet werden. Bei der ersten Berechnung ist der Fehler von x_{i+1}, d. h. der Fehler nach einem Schritt von der Grösse ω, angenähert $\omega^7 k$ und derjenige von x_{i+2} mit einiger Annäherung gleich $2\omega^7 k$. Demnach ist der Fehler von x_{i+1} ungefähr gleich $\frac{1}{126}$ des Unterschiedes der beiden für x_{i+2} erhaltenen Werte. Die Genauigkeit dieser Art der Bestimmung der Grössenordnung des Fehlers ist, wie aus der Tabelle hervorgeht, recht gut.

Dritter Abschnitt.

Über die praktische Durchführung der angenäherten Integration.

§ 12. Die Methode der sukzessiven Approximationen.

45. Wenn irgendwie eine Integralkurve des Systems

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \ldots), \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \ldots), \ldots \tag{66}$$

durch eine Anzahl von passend verteilten Punkten angenähert bestimmt worden ist, aber noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit, so kann man in sehr einfacher Weise von dieser ersten Approximation zu einer besseren gelangen, ohne die ganze Rechnung aufs neue durchzuführen. Dabei genügen auch ganz rohe Näherungswerte für die Koordinaten der Punkte. Man kann sogar von ganz beliebigen Werten ausgehend schrittweise sich der richtigen Integralkurve nähern ganz ohne vorherige Kenntnis des Verlaufs derselben. Es ist jedoch von Vorteil, wenn die erste Approximation schon einigermassen genau ist, und daher behandeln wir das betreffende Verfahren, das auch als *Iterationsmethode* bezeichnet wird, hier nicht als eine selbständige Integrationsmethode, sondern als ein Mittel zur Verbesserung schon vorhandener Näherungen, die etwa nach den Methoden der vorherigen Abschnitte oder auf graphischem Wege gefunden sind.[26]

[26] Die Methode ist ursprünglich von PICARD in Anwendung gebracht worden. Später haben u. a. E. LINDELÖF, RUNGE und COTTON daran gearbeitet.

Obgleich wir uns in dieser Abhandlung nicht mit der graphischen Integration beschäftigen, wollen wir hier hervorheben, dass diese bisweilen das geeignetste Mittel zur Auffindung einer ersten Approximation bildet. Denn die graphischen Verfahren liefern im allgemeinen rasch eine Übersicht über den Verlauf der Integralkurven und eignen sich somit zur Vorbereitung und teilweise zur Kontrolle der Rechnung, falls sie nicht selbst den erwünschten Genauigkeitsgrad erreichen lassen.

46. Wir denken uns (66) durch das System von Integralgleichungen ersetzt

$$(67) \qquad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x, y, \ldots)\, dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x, y, \ldots)\, dt, \ldots$$

und nehmen an, dass man sich von der Existenz einer den Anfangsbedingungen entsprechenden Lösung überzeugt hat.

Wir bezeichnen allgemein mit $x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), \ldots$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein System von Näherungslösungen von (67). Tragen wir diese Funktionen in die Integranden ein, so ergibt sich ein neues System von Näherungslösungen

$$(68) \qquad x^{(n+1)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(t, x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots)\, dt, \quad y^{(n+1)} = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(t, x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots)\, dt, \ldots$$

Es lässt sich nun beweisen, dass $x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, \ldots$ in der Nähe von t_0 *bessere Näherungen* für $x(t), y(t)$ sind als $x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots$

Um die Fehler der einzelnen Näherungsfunktionen zu untersuchen, bilden wir aus (67) und (68) die Unterschiede $x - x^{(n+1)}, y - y^{(n+1)}, \ldots$ und geben ihnen auf Grund des Mittelwertsatzes für Funktionen mehrerer Veränderlichen die Form

$$x - x^{(n+1)} = \int_{t_0}^{t} [f'_x(t, \xi, y, \ldots)(x - x^{(n)}) + f'_y(t, x, \eta, \ldots)(y - y^{(n)}) + \cdots]\, dt,$$

$$y - y^{(n+1)} = \int_{t_0}^{t} [g'_x(t, \xi', y, \ldots)(x - x^{(n)}) + g'_y(t, x, \eta', \ldots)(y - y^{(n)}) + \cdots]\, dt,$$

. . . . . .

Die auftretenden partiellen Ableitungen von $f, g, \ldots$ sind für gewisse Werte der Veränderlichen im Bereich $x, x^{(n)}, y, y^{(n)}, \ldots$ zu berechnen. Wir nehmen an, $f'_x, f'_y, \ldots$ seien in dem genannten Bereich absolut genommen nicht grösser als eine Zahl M, und ebenso seien die absoluten Beträge von $g'_x, g'_y, \ldots$ für die in Betracht kommenden Werte nicht grösser als N etc. Ferner mögen $\delta_n, \varepsilon_n, \ldots$ je den *grössten* absoluten Betrag von $x - x^{(n)}$, $y - y^{(n)}, \ldots$ im Intervall von t_0 bis t bedeuten. Dann ist

$$\delta_{n+1} \leq M(\delta_n + \varepsilon_n + \cdots)\,|t - t_0|, \quad \varepsilon_{n+1} \leq N(\delta_n + \varepsilon_n + \cdots)\,|t - t_0|, \ldots$$

und folglich

$$\delta_{n+1} + \varepsilon_{n+1} + \cdots \leq (M + N + \cdots)(\delta_n + \varepsilon_n + \cdots)\,|t - t_0|.$$

Das Intervall $t - t_0$ kann so klein gewählt werden, dass die Grösse $(M + N + \cdots)\,|t - t_0|$ kleiner wird als ein echter Bruch $\varkappa$. Dann hat man

$$\delta_{n+1} + \varepsilon_{n+1} + \cdots \leq \varkappa(\delta_n + \varepsilon_n + \cdots) \leq \varkappa^n(\delta_1 + \varepsilon_1 + \cdots),$$

woraus hervorgeht, dass *die grössten Fehler* der Näherungslösungen mit zunehmendem n innerhalb des bestimmten Integrationsintervalls beliebig klein gemacht werden können. Zu beachten ist, dass die Näherung $x^{(n+1)}, y^{(n+1)}, \ldots$ nicht in jedem Punkte genauer zu sein braucht als die vorherige $x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots$

47. Bei der praktischen Anwendung lohnt es sich im allgemeinen nicht, die Grössen $M, N, \ldots$ im voraus zu ermitteln, um das zulässige Integrationsintervall zu bestimmen, denn das Aufhören der Konvergenz ist aus dem Verhalten der einzelnen Näherungen deutlich genug zu ersehen.

In dem Beweis wurde vorausgesetzt, dass die wiederholten Integrationen exakt ausgeführt werden, allein in der Praxis ist man gezwungen, zu diesem Zweck die Quadraturformeln des zweiten Abschnitts anzuwenden. Es gilt daher, die Intervallbreite ω so klein zu wählen und die Rechnung mit so viel Stellen zu führen, dass sowohl die Fehler der Integration als diejenigen der Abrundung für die Konvergenz der Iterationsmethode unschädlich sind.

Sollen die Werte der gesuchten Funktionen mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit berechnet werden, so muss man sich also vor allem davon überzeugen, dass die benutzte Integrationsformel für diesen Zweck hinreichend genau ist. Nur dann kann man, bei der Übereinstimmung aufeinander folgender Näherungen, die letzte für ausreichend genau halten.

Es sind noch ein paar Bemerkungen zu machen. In die Integranden trägt man stets die *besten* bisher bekannten Näherungsfunktionen ein. Wenn z. B. $x^{(n+1)}$ mit Hilfe von $x^{(n)}, y^{(n)}, \ldots$ ermittelt sind, wird $y^{(n+1)}$ mittels $x^{(n+1)}, y^{(n)}, \ldots$ berechnet, also nicht mittels $x^{(n)}, y^{(n)}$, wie das im Beweise aus Symmetriegründen geschehen ist.

Soll eine nach den Methoden des ersten Abschnitts berechnete Lösungskurve durch Integration verbessert werden, so kann man mit Vorteil die Formeln von Newton-Cotes anwenden, weil es dann nicht nötig ist, das Differenzenschema zu bilden.

§ 13. Beispiel der sukzessiven Approximation.

48. Um die praktische Brauchbarkeit des eben besprochenen Verfahrens zu beleuchten, behandeln wir ein numerisches Beispiel, nämlich das der Differentialgleichung

$$x'' = -x. \tag{69}$$

Diese hat Störmer mittels der Formel (54) integriert[27] und zwar mit den Anfangsbedingungen $x = 10^7$ und $x' = 0$ für $t = 0$ und unter Benutzung der Differenzen bis vierter Ordnung einschl. Er hat die Rechnung von $t = 0°$ bis $t = 180°$ dreimal durchgeführt, so dass er der Reihe nach die Intervallbreiten $\frac{\pi}{60}, \frac{\pi}{30}, \frac{\pi}{15}$ benutzt. Die aus der zuletzt genannten Integration resultierenden Werte von x sind in der folgenden Tabelle angegeben nebst dem Störmerschen Differenzenschema.

[27] Störmer: Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, III, S. 41—49 (Videnskapsselskapets Skrifter, Math.-naturv. Kl. 1913, Nr. 14, Kristiania). Über die Art, in der die Rechnung begonnen wird, werden wir später reden.

Es ist interessant dieses Schema mit dem in Nr. 44 zu vergleichen, wo es sich um die zweifache Integration

$$x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} dt \int_{0}^{t} 10^7 \cos t \, dt = 10^7 \cos t$$

handelte. Dieses Integral definiert gerade die exakte Lösung der jetzt vorgelegten Aufgabe, und die beiden Schemata sind daher nur insofern verschieden, als die Integrationsfehler der einzelnen Schritte auf die folgenden einwirken.

Die Tabelle enthält ausserdem die von STÖRMER mit den kleineren Intervallbreiten erhaltenen Werte von x für $t = 0°, 12°, \ldots, 180°$. Es zeigt sich, dass die Werte der *zweiten* Rechnung $\left(\omega = \frac{\pi}{30}\right)$ die genauesten sind. Bei der dritten Rechnung war ω offenbar zu gross; bei der ersten dagegen zu klein, denn die Abrundungsfehler haben sich hier bei den vielen Schritten derart angehäuft, dass der Vorteil der kleineren Intervallbreite ganz vereitelt wurde.

t	$10^7 \cos t$.	x nach *Störmer* $\omega = \frac{\pi}{60}$	x nach *Störmer* $\omega = \frac{\pi}{30}$	x nach *Störmer* $\omega = \frac{\pi}{15}$	$x^{(2)}$ zweite Näherung $\omega = \frac{\pi}{15}$	$-x\left(\frac{\pi}{15}\right)^2$	δ	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
								−9586		421	
0°	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	−438649	0		19172		−842
								9586		−421	
12°	9781476	9781476	9781475	9781476	9781476	−429063	0		18751		−816
								28337		−1237	
24°	9135454	9135458	9135453	9135457	9135454	−400726	0		17514		−766
								45851		−2003	
36°	8090170	8090177	8090169	8090173	8090169	−354875	0		15511		−681
								61362		−2684	
48°	6691306	6691315	6691305	6691306	6691305	−293513	0		12827		−557
								74189		−3241	
60°	5000000	5000009	5000000	4999991	4999999	−219324	0		9586		−420
								83775		−3661	
72°	3090170	3090180	3090170	3090143	3090168	−135549	−1		5925		−260
								89700		−3921	
84°	1045285	1045296	1045283	1045231	1045285	−45849	−2		2004		−86
								91704		−4007	
96°	−1045285	−1045274	−1045289	−1045375	−1045284	45855	−4		−2003		86
								89701		−3921	
108°	−3090170	−3090157	−3090178	−3090306	−3090167	135556	−6		−5924		259
								83777		−3662	
120°	−5000000	−4999981	−5000011	−5000189	−4999995	219333	−9		−9586		421
								74191		−3241	
132°	−6691306	−6691283	−6691320	−6691553	−6691300	293524	−11		−12827		558
								61364		−2683	
144°	−8090170	−8090139	−8090186	−8090476	−8090163	354888	−14		−15510		679
								45854		−2004	
156°	−9135454	−9135413	−9135472	−9135817	−9135448	400742	−16		−17514		
								28340			
168°	−9781476	−9781427	−9781494	−9781888	−9781469	429082	−19				
180°	−10000000	−9999945	−10000018	−10000450	−9999995	[438648]					

49. Um die von STÖRMER erhaltenen Werte x zu verbessern, kann man nun z. B. mittels der Formel (62)′ über den berechneten Teil der Integralkurve von (69) integrieren. Um dies bis $t = 180°$ fortsetzen zu können, kann man entweder ein paar Schritte weiter nach der Störmer-

schen Methode rechnen oder aber die fehlenden Differenzen vorläufig durch Extrapolation ermitteln und bei dem letzten Schritt die Formel (62)′ wiederholt anwenden, wie das in Nr. 31 auseinandergesetzt wurde.

Für den Fall $\omega = \frac{\pi}{15}$ sind die so verbesserten Werte $x^{(2)}$ in unserer Tabelle angegeben und ebenso, in einer mit δ überschriebenen Kolumne, die eintretenden Änderungen der Funktionswerte, d. h. der Grössen $-x\left(\frac{\pi}{15}\right)^2$. Die erhaltene zweite Approximation ist wesentlich genauer als die direkt mit der halbierten oder mit der geviertelten Intervallbreite berechnete, ja sogar besser als die aus diesen durch wiederholte Integration erhaltene, denn hierbei ergäben sich nur ganz kleine, durch die Abrundung bedingte, zufällige Änderungen.

Die noch einmal mit $\omega = \frac{\pi}{15}$ durchgeführte Integration ergab in den Werten $x^{(2)}$ für $t = 108°$, 120°, 132°, 144°, 156°, 168° je eine Korrektion von -1. Die weiteren Wiederholungen der Integration würden dann keinerlei Änderungen mehr verursachen.

§ 14. Allgemeines über die Wahl der Integrationsmethode.

50. Der Zweck einer numerischen Integration von Differentialgleichungen erfordert bisweilen nur die Ermittelung einzelner Funktionswerte von gewissen Partikularlösungen. Man bestimmt also nur wenige Punkte von einigen Integralkurven, ohne sich für den weiteren Verlauf derselben zu interessieren. In solchen Fällen empfiehlt sich die Rungesche Methode von selbst.

Soll aber eine Integralkurve in einem längeren Intervall genau verfolgt werden, so entsteht die Frage, ob die Quadraturenmethode (Summationsmethode) der Rungeschen nicht vorzuziehen sei. Hierüber zu entscheiden sowie die Intervallbreite passend zu wählen, ist im allgemeinen schwierig, wenigstens bei völliger Unkenntnis des Verlaufs der Integralkurven.

Mit den im ersten Abschnitt entwickelten Formeln können wir eine Approximation höchstens der fünften Ordnung erzielen, bei der also das Restglied die sechste Potenz der Intervallbreite Δt (oder ω) als Faktor enthält. Unter Anwendung der Quadraturenmethode dagegen tritt in dem Restglied schon eine höhere Potenz von ω auf, sofern wir mehr als die vier ersten Differenzenkolonnen in Betracht ziehen.

Allein der Exponent von ω ist für die Grösse des Fehlers nur dann massgebend, wenn ω sehr klein ist. Zu beachten ist nämlich, dass in den Fehlerausdrücken Ableitungen auftreten, die für gewisse Mittelwerte ξ zu berechnen sind, und dass in dem Restglied der Taylorschen Reihe der Spielraum für ξ nur ein Bruchteil von dem in den Restgliedern der Quadraturformeln vorhandenen ist. Demnach ist es sehr wohl möglich, dass die Taylorsche Reihe, und daher auch die Rungesche Methode, genauere Resultate liefert als die Quadraturenmethode, obgleich die Restglieder der ersteren niedrigerer Ordnung in ω sind.

51. Um das Gesagte deutlicher zu machen, nehmen wir an, es handle sich um die Differentialgleichung (30), und weiterhin, dass die Werte x_i für $i = 0, -1, -2, \ldots$, d. h. für die Werte (31) von t bekannt seien. Die Integration von (30) ist nun gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Fläche zwischen der in einem Koordinatensystem (t, x') gezeichneten Kurve C mit der Gleichung $x' = f(t, x) = \bar{f}(t)$, der t-Achse und zwei Ordinaten, etwa die zu t_0 und t gehörigen, zu be-

stimmen, wobei man also eine Anzahl Punkte der Kurve $(t = t_i,\ x' = f_i)$ für $i = -1, -2, \ldots$ schon kennt.

Nach der »Runge-Kuttaschen Formel» (5) geschieht diese Bestimmung, nachdem man den unbekannten Bogen der Kurve C durch einen anderen ersetzt, der mit der ersteren eine vierpunktige Berührung für $t = t_0$ hat. Es werden vier Funktionswerte $f(t, x)$ berechnet, und zwar ermittelt man die Ordinate f_0, zwei Funktionswerte in der Nähe von $t_0 + \frac{1}{2}\omega$ und einen Funktionswert in der Nähe von $t_0 + \omega$, welche Werte nur wenig von den Ordinaten der Kurve C in den Punkten $t_0 + \frac{1}{2}\omega$ und $t_0 + \omega$, bzw., abweichen.

Ziehen wir dann die Anwendung der Quadraturformel (41) zum Vergleich heran. Diese setzt nur die Berechnung der einen Ordinate f_0 voraus, benutzt aber mehrere der bekannten Ordinaten von C. Die Idee ist, durch die bekannten Punkte von C eine glatte Kurve zu legen und die von dieser und den genannten geraden Linien eingeschlossene Fläche zu berechnen.

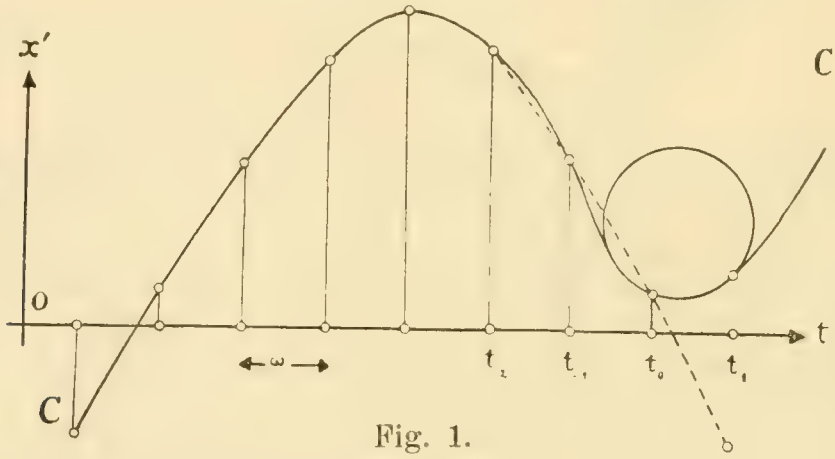


Fig. 1.

Hat C etwa die in der obenstehenden Figur angedeutete Form, so gibt die Rungesche Methode einen viel besseren Näherungswert für die genannte Fläche. Denn wie viele der bekannten Punkte von C man auch berücksichtigen mag, so kann man die Gestalt der Kurve zwischen t_0 und t_1 doch nicht voraussehen. Man wird nur dazu verleitet, für f_1 einen negativen Wert anzunehmen, während diese Grösse nach der Figur positiv ist. Die Intervallbreite ω ist in diesem Falle also viel zu gross gewählt. Dagegen würde die Rungesche Methode vielleicht bei noch grösserer Intervallbreite benutzt werden können, denn die dabei angewandte Näherungskurve hat mit C für $t = t_0$ eine Berührung höherer Ordnung als der Krümmungskreis im Punkte $t = t_0$, und letzterer entfernt sich ja im ganzen Intervall von t_0 bis t_1 nicht merklich von C.

52. Es ist natürlich vorteilhaft, die Schritte möglichst gross zu halten, denn erstens wird dabei direkt an Arbeit gespart, und ferner hat das den Vorteil, dass die Fehler der x_i sich weniger summieren. Sonst können diese Fehler derart anwachsen, dass die Rechnung mit den grösseren Schritten in der Tat genauere Resultate liefert. Hiervon haben wir ja im vorigen Paragraphen ein Beispiel gesehen.

Man sollte also die Rungesche Methode der anderen vorziehen, wenn sie die Anwendung

längerer Schritte gestattet, ohne die Arbeit zu sehr zu vermehren. Genaue Regeln hierfür können kaum gegeben werden.

Wir wollen an dieser Stelle nur beispielsweise folgendes erwähnen: In dem schon zitierten Werk von BASHFORTH und ADAMS werden Differentialgleichungen zur Bestimmung der Gestalt von liegenden und hängenden Tropfen ausgewertet. Einige solche hat HUGO KOCH später nach der Runge-Kuttaschen Methode behandelt und ist zu dem Schluss gelangt, man käme nach dieser Methode in derselben Zeit mehr als doppelt so weit wie nach der Adamsschen, eben weil man grössere Schritte machen könne.[28] KOCH äussert an einer anderen Stelle[29] die Meinung, die Runge-Kuttasche Formel könnte bei der numerischen Behandlung des *Dreikörperproblems* ausgedehnte Anwendung finden. Wenn das der Fall ist, würden unsere Formeln noch geeigneter sein.

Ein Beispiel, bei dem die Summationsmethode am leichtesten zum Ziele führt, findet sich bei KRYLOFF.[30]

Es muss noch hervorgehoben werden, dass das Differenzenschema ein sehr einfaches und ziemlich sicheres Mittel gewährt, um zu entscheiden, ob die Intervallbreite klein genug ist. Dazu hat man den Einfluss der ersten vernachlässigten Differenzen zu überschlagen. Zugleich bietet der regelmässige Gang der Differenzen eine Art Sicherheit gegen Rechenfehler. Da es entsprechende einfache Kriterien bei der Rungeschen Methode nicht gibt, wird man in zweifelhaften Fällen sich für die Summationsmethode entscheiden.

53. Hat man sich für den Gebrauch einer der beiden Hauptmethoden entschieden, so bleibt noch zu überlegen, welche der vorhandenen Formeln man anwenden soll.

Was die Rungesche Methode betrifft, kommt für Systeme der ersten Ordnung hauptsächlich (7) in Betracht und für solche der zweiten Ordnung die Systeme Nr. II und V, falls etwa in dem letzteren Falle nicht die einfacheren Nr. I und IV genügende Genauigkeit ergäben.

Bei der Anwendung der Summationsmethode wird im allgemeinen die letzte berücksichtigte Differenzenkolonne nur kleine, meistens einen etwas unregelmässigen Verlauf zeigende Grössen enthalten. Wollte man also mit Hilfe des Differenzenschemas extrapolieren, so müsste man diese letzte Differenz als konstant und gleich dem arithmetischen Mittel der bisher bekannten annehmen. Eben dies wurde aber in Nr. 38 als ein unnötiger Umweg befunden. Daher ist für einfache Quadraturen die Adamssche Formel (36) oder die mit einfacheren Koeffizienten versehene (41) am meisten zu empfehlen, und für zweifache Quadraturen die Störmersche Formel (54).[31] Nur wenn die Beträge der genannten Differenzen stark anwachsen, kann es von Vorteil sein, die

[28] HUGO KOCH: Ueber die praktische Anwendung der Runge-Kuttaschen Methode zur numerischen Integration von Differentialgleichungen (Dissertation, Göttingen 1909, S. 18—29). ADAMS hat in der genannten Arbeit sich der Formel (43) bedient, nicht der von ihm aufgestellten (36).

[29] Ibid., S. 31.

[30] A. N. KRYLOFF: Angenäherte numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, (in russischer Sprache), Berlin 1923, S. 39—42. Es handelt sich hier um die Differentialgleichung $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

[31] KRYLOFF hat (loc. cit S. 4 f und 71 f) die Vorzüge der Formeln, die nur bekannte Differenzen enthalten, ausdrücklich hervorgehoben und gezeigt, dass durch Benutzung der Formel (36) die Adamsschen Rechnungen leichter ausgeführt werden können.

nächstfolgenden schätzungsweise zu bestimmen und nach Nr. 31 eine der anderen Formeln wiederholt anzuwenden.

Jedenfalls wird es aber gut sein, nach einigen Schritten über den bisher berechneten Teil der Integralkurve nochmal zu integrieren, um die bisher berechneten Werte zu verbessern und somit eine starke Anhäufung der Fehler zu vermeiden. Für diesen Zweck sind die Gaussschen Formeln (48)′ und (62)′ am meisten geeignet, denn sie benutzen zum Teil Funktionswerte ausserhalb des Integrationsintervalles, die bei den anderen Formeln nicht berücksichtigt werden, und liefern daher vermutlich etwas genauere Resultate. Auch sind ja die Koeffizienten dieser Formeln für die Rechnung sehr bequem.

Die Vor- und Nachteile der Steffensenschen Formeln wurden schon in Nr. 28 besprochen.

§ 15. Ergänzende Bemerkungen betreffend die Summationsmethode.

54. Während die Rechnung nach der Rungeschen Methode stets in der gleichen Weise fortschreitet, bedarf es bei der Summationsmethode für den Anfang besonderer Vorschriften, weil man nämlich schon einige Werte der gesuchten Funktionen kennen muss, um die Quadraturformeln anwenden zu können.

Die betreffenden Funktionswerte kann man sich etwa in der Weise verschaffen, dass man nach irgend einer Formel des ersten Abschnitts einige Schritte berechnet, und zwar mit konstantem $\Delta t (= \omega)$. Dieses Verfahren ist nach Nr. 2 und 23 der bisweilen gebrauchten Methode der direkten Reihenentwicklung vorzuziehen.

Einen anderen Ausweg bietet die sukzessive Approximation. Wir fassen den Fall eines Systems (66) ins Auge. Zuerst werden die Anfangswerte der unabhängigen Variablen und der gesuchten Funktionen $t_a, x_a, y_a, \ldots$ in die Differentialgleichungen eingesetzt, wodurch sich die Werte $f_a, g_a, \ldots$ ergeben. Dann können wir angenähert setzen

$$x_{a+1} = x_a + f_a\omega, \quad y_{a+1} = y_a + g_a\omega, \ldots$$
$$x_{a-1} = x_a - f_a\omega, \quad y_{a-1} = y_a - g_a\omega, \ldots$$

und können damit Näherungswerte, wenn auch sehr rohe, für $f_{a+1}, f_{a-1}, g_{a+1}, g_{a-1}, \ldots$ berechnen. Darauf bilden wir die Differenzen erster und zweiter Ordnung, die sich aus den bisher (angenähert) bekannten Funktionswerten ergeben (auf je einem Blatt für jede vorkommende Funktion), und benutzen dieselben, um die Formel (41) auf den Schritt von t_{a+1} bis t_{a+2} anzuwenden. Nachdem wir so Werte für $x_{a+2}, y_{a+2}, \ldots$ bekommen haben, berechnen wir $f_{a+2}, g_{a+2}, \ldots$ und ergänzen die Differenzenschemata. Sodann werden genauere Werte für $x_{a+1}, x_{a+2}, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots$ mittels (41) oder (43) berechnet, mit deren Hilfe die Funktionswerte $f_{a+1}, g_{a+1}, \ldots$ und deren Differenzen verbessert werden. Die Formel (41) wird nun auf den Schritt von t_{a+2} bis t_{a+3} angewandt, und so geht es weiter, indem man nach und nach die bisher berechneten Werte verbessert. Nachdem die Differenzenschemata mit genügend vielen Kolonnen sicherer Werte aufgebaut sind, geht die Rechnung in der früher beschriebenen Weise rasch weiter. Soll ein System von Gleichungen zweiter Ordnung integriert werden, kann man statt (41) die Formel (54) anwenden, wobei nur kleine Modifikationen des geschilderten Verfahrens nötig sind.

Man könnte auch, wie STÖRMER vorschlägt, die Werte $x_{a+1}, x_{a+2}, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots$ mittels

der Taylorschen Reihen bestimmen, wobei man die nötigen Werte der Ableitungen mit Hilfe von Differenzen berechnete, etwa unter Anwendung der »Markoffschen» oder ähnlicher Formeln.[32]

Die Ingangsetzung der Rechnung kann oft durch Symmetrieeigenschaften der Differentialgleichungen erheblich erleichtert werden.

55. Es kommt oft vor, dass die anfangs benutzte Intervallbreite ω, auch wenn sie passend gewählt war, später sich als unzweckmässig erweist und geändert werden muss. Bei der Rungeschen Methode kann die Änderung ja ohne weiteres geschehen, bei der Quadraturenmethode dagegen nicht so leicht.

Man wird gewöhnlich in solchen Fällen entweder eine Verdoppelung oder eine Halbierung der Intervallbreite ω vornehmen, da eine anderweitige Änderung derselben viel mühsamer ist und es überhaupt schwierig ist zu ersehen, welcher der vorteilhafteste Wert von ω sei.

Die Verdoppelung der Intervallbreite geschieht, indem man aus den bisher berechneten Funktionswerten jeden zweiten herausnimmt, aus ihnen ein neues Differenzenschema (für jede Funktion) bildet und mit den letzteren die Rechnung fortsetzt. Würde die Anzahl der berechneten Funktionswerte nicht genügen, so hat man zu verfahren wie bei der Ingangsetzung der Rechnung.

Um eine mit der Intervallbreite ω etwa bis $t = t_a$ geführte Rechnung von hier an mit $\frac{\omega}{2}$ fortzusetzen, müssen die Werte der gesuchten Funktionen für $t_a - \frac{\omega}{2}$, $t_a - \frac{3}{2}\omega, \ldots$, d. h. $x_{a-\frac{1}{2}}$, $x_{a-\frac{3}{2}}, \ldots$ ermittelt werden, was mit gewöhnlichen Interpolationsformeln geschehen kann. Darauf berechnet man die entsprechenden Funktionswerte $f_{a-\frac{1}{2}}$, $g_{a-\frac{1}{2}}$, $\ldots$, welche zusammen mit f_a, g_a, f_{a-1}, g_{a-1}, $\ldots$ zur Aufstellung der neuen Differenzenschemata dienen.

Man kann die Werte $x_{a-\frac{1}{2}}, x_{a-\frac{3}{2}}, \ldots$ auch unter Benutzung der schon vorhandenen Differenzenschemata bestimmen. Die hierzu nötigen Formeln erhält man unmittelbar durch Integration von (35). Es ergibt sich

I. Einfache Integration

$$x_{a-\frac{1}{2}} = x_a + \omega\left\{-\frac{1}{2}f_0 + \sum_{i=1}^{\nu} D_i \Delta^i_{-\frac{i}{2}} + D_{\nu+1}\bar{f}^{(\nu+1)}(\xi)\,\omega^{\nu+1}\right\}, \quad (t_a - \nu\omega < \xi < t_a)$$

$$D_i = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\,dn; \quad D_1 = \frac{1}{8},\ D_2 = \frac{1}{24},\ D_3 = \frac{3}{128},\ D_4 = \frac{91}{5760},\ D_5 = \frac{539}{46080}, \ldots$$

II. Zweifache Integration

$$x_{a-\frac{1}{2}} = x_a - \frac{1}{2}\omega u_a + \omega^2\left\{\frac{1}{8}F_0 - \sum_{i=1}^{\nu} E_i \Delta^i_{-\frac{i}{2}} - E_{\nu+1}\bar{F}^{(\nu+1)}(\xi)\,\omega^{\nu+1}\right\}, \quad (t_a - \nu\omega < \xi < t_a)$$

$$E_i = \int_0^{-\frac{1}{2}} dn \int_0^{n} \frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\,dn; \quad E_1 = \frac{1}{48},\ E_2 = \frac{1}{128},\ E_3 = \frac{53}{11520}\ E_4 = \frac{49}{15360},\ E_5 = \frac{311}{129024}, \ldots$$

Analoge Formeln gelten natürlich für $y_{a-\frac{1}{2}}, \ldots$ Um $x_{a-\frac{3}{2}}$, $y_{a-\frac{3}{2}}, \ldots$ zu bekommen, hat man obige Formeln auf den unmittelbar vorangehenden Schritt anzuwenden.

[32] STÖRMER, loc. cit. [15], S. 67—70. — A. A. MARKOFF: Differenzenrechnung (deutsche Übersetzung), Leipzig 1896. S. 20 ff.

§ 16. Beispiel aus dem Zweikörperproblem.

56. Wir wollen noch ein Beispiel der angenäherten Integration behandeln, das nicht so einfach ist wie dasjenige von Nr. 48, andererseits aber doch einen Vergleich mit dem exakten Integral zulässt. Ein solches bietet das *Zweikörperproblem.*

Ein Planet P möge, von einem Zentralkörper S angezogen, eine Ellipse von der Exzentrizität $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$ beschreiben (Fig. 2).[33] Wir wählen die mittlere Entfernung a zwischen P und S zur Längeneinheit und, um die folgenden Rechnungen möglichst bequem zu gestalten, bestimmen wir die Zeiteinheit derart, dass die ganze Umlaufszeit T gleich 36 wird. Wir bezeichnen die (rechtwinkligen) Koordinaten des Körpers P in bezug auf S mit x, y und denken uns dabei die positive x-Achse gegen das Aphel A von P gerichtet. Von dem Durchgang des Planeten durch A wollen wir die Zeit t rechnen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(70)\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = f(x,y), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = g(x,y), \end{cases}$$

wo $r^2=x^2+y^2$ ist, k^2 die Gravitationskonstante und m das Verhältnis der Massen von P und S bezeichnet. Aus der Gleichung $k^2(1+m)T^2=4\pi^2a^3$ bekommen wir mit $a=1$ und $T=36$ $k^2(1+m)=\frac{\pi^2}{324}$. Die Koordinaten des Aphels sind $x_0=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=1.866025403$, $y_0=0$, und die Geschwindigkeitskomponenten in diesem Punkt sind $u_0=x_0'=0$, $v_0=y_0'=0.046765968$, wobei die letztere Zahl mit Hilfe der Relation $xv-yu=\text{const}=\sqrt{k^2(1+m)}\cdot\sqrt{a(1-e^2)}$ berechnet worden ist.

Wir stellen nun zwei, unabhängig voneinander zu behandelnde Aufgaben.

57. *Es soll der Ort sowie die Geschwindigkeit des Planeten zu irgend einer gegebenen Zeit, etwa* $t=4$, *bestimmt werden.*

Die Aufgabe wird am einfachsten durch eines unserer Formelsysteme, etwa Nr. I, II oder III a erledigt. Das Resultat wird:

Näherungsformel	x	y	u	v
Nr. I, (III, III, 2)	1.795093	0.184621	−0.035703	−0.044934
Nr. II, (IV, IV, 3)	1.795335	0.184668	−0.035719	−0.044933
Nr. III a (V, V, 4)	1.795327	0.184664	−0.035716	−0.044933
Exakter Wert	1.795325	0.184664	−0.035716	−0.044934

Würde die Genauigkeit der Formel III auch nicht genügen, so müsste man den gesuchten Ort des Planeten durch kleinere, aufeinander folgende Schritte zu erreichen versuchen, eventuell eine Rechnung nach der Summationsmethode beginnen.

[33] Vgl. das von E. STRÖMGREN in Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium N:o 13 gegebene Beispiel, wo es sich um eine Kreisbahn handelt.

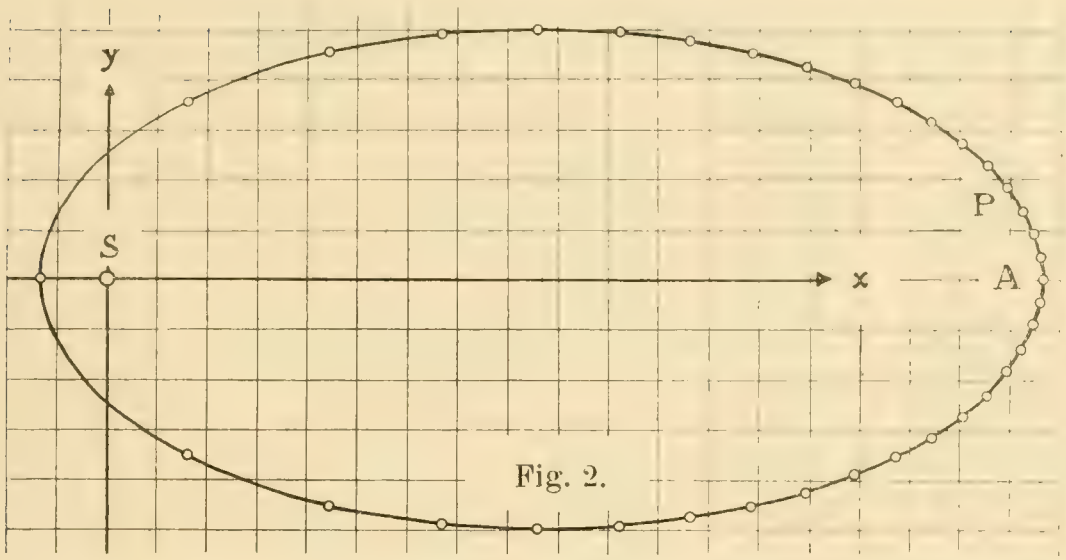


Fig. 2.

58. *Es wird verlangt, für den Planeten eine Ephemeride vom Aphel bis zum Perihel mit einem konstanten Intervall, etwa* $\Delta t = 1$, *zu berechnen.*

Zuerst berechnen wir mittels der Formel Nr. II vom Aphel ausgehend zwei Schritte von der Grösse $\Delta t = 1$ und finden

$$\text{für} \quad t = 1 \quad x_1 = 1.8616486, \quad y_1 = 0.0467294$$
$$\text{für} \quad t = 2 \quad x_2 = 1.8484850, \quad y_2 = 0.0932377.$$

Die erhaltenen Werte sind auf sieben Dezimalstellen genau. Um dies festzustellen, könnte man einen Schritt von der Grösse 2 machen — was nur eine einzige neue Funktionsberechnung erforderte — und würde finden $x_2 = 1.8484852$, $y_2 = 0.0932378$. Nach Nr. 24 ist der Fehler der Integration viel kleiner als derjenige der Abrundung.

Wir können nun vermuten, dass die Summationsmethode bei der Intervallbreite $\Delta t = 1$, wenigstens für einen Teil der Bahn, eine gute Konvergenz zeigen werde und dass dieselbe daher den anderen Methoden vorzuziehen sei. Zur Ingangsetzung der Rechnung können wir die Funktionswerte $f_0, f_1, f_2, g_0, g_1, g_2$ benutzen und ausserdem noch $f_{-2}, f_{-1}, g_{-2}, g_{-1}$, da infolge (70) $f_{-i} = f_i$ und $g_{-i} = -g_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$, ist.

Hätten wir uns von vornherein für die Summationsmethode entschieden, so wäre es am bequemsten, die Rechnung auf folgende Weise zu beginnen:

Nach der Formel Nr. II berechnen wir nur

$$x_1 = x_0 + u_0 + \tfrac{1}{6} f_0 + \tfrac{1}{3} f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y\right), \quad \Delta' x = u_0 + \tfrac{1}{4} f_0,$$
$$y_1 = y_0 + v_0 + \tfrac{1}{6} g_0 + \tfrac{1}{3} g\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta' x, y + \tfrac{1}{2}\Delta' y\right), \quad \Delta' y = v_0 + \tfrac{1}{4} g_0,$$

und finden $x_1 = 1.8616486$, $y_1 = 0.0467294$. Mit diesen Werten werden f_1, g_1 berechnet und die auf der S. 54 angeführten Differenzenschemata aufgestellt, und nun ergeben sich mittels (54) schon so genaue Werte für x_2, y_2, dass f_2, g_2 sich mit der erforderlichen Genauigkeit berechnen lassen. Darum kann die Rechnung von jetzt an in der regulären Weise mittels (54) geführt werden.

t	f	Δ^1	Δ^2
− 1	− 0.00878110		
		3288	
0	− 0.00874822		− 6576
		− 3288	
1	− 0.00878110		

t	g	Δ^1	Δ^2
− 1	0.00022041		
		− 22041	
0	0.00000000		00000
		− 22041	
1	− 0.00002041		

t	x (appr.)	y (appr.)	x (exakt)	y (exakt)
0	1.8660254	0.0000000	1 8660254	0.0000000
1	1.8616486	0.0467294	1.8616486	0 0467294
2	1.8484850	0.0932377	1.8484850	0.0932377
3	1.8264344	0.1392969	1.8264344	0.1392969
4	1.7953247	0.1846636	1.7953247	0.1846636
5	1.7549049	0.2290706	1.7549048	0.2290706
6	1.7048323	0.2722146	1.7048324	0.2722145
7	1.6446566	0.3137411	1.6446565	0.3137411
8	1.5737926	0.3532229	1.5737927	0.3532229
9	1.4914857	0.3901280	1.4914858	0.3901280
10	1.3967537	0.4237709	1 3967539	0.4237709
11	1.2883038	0.4532332	1.2883035	0.4532332
12	1.1643918	0.4772257	1.1643915	0.4772257
13	1.0225914	0.4938334	1.0225919	0.4938336
13.5	0.9439402	0.4984797		
14	0.8593659	0 4999887	0.8593665	0.4999889
14.5	0.7681140	0.4975974		
15	0.6692053	0.4902199	0.6692071	0.4902200
15.5	0.5613287	0.4762249		
16	0.4426718	0.4529819	0.4426740	0.4529828
16 5	0.3106494	0.4158128		
17	0.16158	0.35516	0.1616649	0.3549213
17.5	− 0.0081	0.2421		
18	− 0.1317	0.0146	− 0.1339746	0.0000000

Die höheren Differenzen sind bei den ersten Schritten sehr klein, sie wachsen aber rasch, so dass es notwendig wird, nach und nach neue Kolonnen in Betracht zu ziehen. Wir haben z. T. noch mit den sechsten Differenzen gearbeitet und, weil es bei den späteren Schritten angemessen erschien, zuerst die Werte einiger von ihnen durch Extrapolation bestimmt und dann die Formel (62)′ wiederholt angewandt. Die von uns erhaltenen Werte von x, y sind, ebenso wie die exakten, deren siebente Stelle etwas unsicher ist, in der Tabelle S. 54 angegeben. Bis etwa $t = 10$ sind die Fehler der Integration von der Grössenordnung der Abrundungsfehler oder noch kleiner, was sich auch mit den Methoden von Nr. 40 bis 43 nachweisen liesse, und die Werte von x und y weichen nur um eine bis zwei Einheiten der siebenten Stelle von den exakten Werten ab. Bei den weiteren Schritten aber nehmen die Integrationsfehler stark zu, was durchaus natürlich ist, da die Geschwindigkeit des Planeten immer wächst. Daher wurde von $t = 13$ an mit der halben Intervallbreite gerechnet. Aber trotzdem häufen sich die Fehler von x und y derart an, dass sie z. B. bei dem letzten Punkt vor dem Perihel, d. h. für $t = 17$, die Beträge 8 bzw. 24 Einheiten der fünften Stelle erreichen. Im Perihel sind die Fehler der berechneten Koordinaten schon 2 bzw. 15 Einheiten der dritten Stelle.

Durch nochmalige Halbierung der Schritte hätten wir natürlich die Genauigkeit weiter treiben können.

Berichtigungen und Zusätze.

Zur Fussnote [3] ist hinzuzufügen: Vgl. auch RUNGE-KÖNIG: Vorlesungen über numerisches Rechnen, Berlin 1924, S. 287 ff.

Seite 19. An der rechten Seite der symbolisch geschriebenen Determinantengleichung fehlt der Faktor $\frac{1}{\mu - \nu}$. Dementsprechend ist in den beiden folgenden Ausdrücken der Faktor $\mu - r$ zu streichen.

Seite 25, Zeile 5 von oben steht $\Delta' r$, soll sein $\Delta'' v$. Das letzte Formelsystem auf derselben Seite ist mit Nr. IV bezeichnet, soll sein Nr. VI.

Seite 36. Das Restglied der Formel (56) ist nicht vollständig, sondern es kommt hinzu

$$\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(\nu-1)^2)}{(2\nu)!}\frac{r}{2}\left(\bar{F}^{(2\nu)}(\xi') - \bar{F}^{(2\nu)}(\xi'')\right)\omega^{2\nu},$$

wo $t_0 - \nu\omega < \xi' < t_0 + (\nu-1)\omega$ und $t_0 - (\nu-1)\omega < \xi'' < t_0 + \nu\omega$. Demzufolge ist das Restglied in (58) in der angegebenen Form nicht exakt, gibt aber eine durchaus brauchbare Näherung, zumal bei kleinem ω.

Seite 44, Zeile 14 von unten steht g', soll sein g'_x.

Seite 51, » 3 » » soll das zweifache Integral negatives Vorzeichen haben.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 14.

ÜBER DIE DREHUNG EINES STARREN KÖRPERS UM EINEN FESTEN PUNKT

VON
HJ. TALLQVIST

(Vorgelegt am 19. April 1926)

HELSINGFORS 1926

HELSINGFORS 1926
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

1. Als Differentialgleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt hat man u. a.

$$(1)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=M_x, \\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=M_y, \\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=M_z. \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}=r\beta-q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt}=p\gamma-r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt}=q\alpha-p\beta. \end{cases}$$

Die Konstanten haben hierin folgende Bedeutung. A, B, C sind die Hauptträgheitsmomente des Körpers im festen Punkte O. Die Hauptträgheitsaxen bilden ein mit dem Körper fest verbundenes rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$. In bezug auf dasselbe stellen p, q, r die Komponenten der augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeit ω, M_x, M_y, M_z die Komponenten des Momentes der äusseren Kräfte dar.

Mit O als Anfangspunkt führt man ausserdem ein im Raume festes Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ ein, das mit dem System $Oxyz$ kongruent ist. Es seien die Richtungscosinus der Axen der beiden Systeme folgende:

	x	y	z
ξ	α''	β''	γ''
η	α'	β'	γ'
ζ	α	β	γ

Sie genügen den sechs bekannten Gleichungen, unter welchen

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

ein Integral der Gleichungen (2) darstellt, oder allgemeiner

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{Konst.}, \tag{4}$$

wenn α, β, γ nur den Richtungscosinussen proportionale Grössen sind.

Während die Gl. (1) die bekannten Eulerschen Gleichungen sind, erhält man die Gl. (2) einfach dadurch, dass man ausdrückt, dass die absolute Geschwindigkeit eines Punktes der ζ-Axe Null ist. Sie setzt sich in der Tat, bezogen auf das System $Oxyz$, zusammen aus der relativen Geschwindigkeit

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$$

und der Geschwindigkeit des zusammenfallenden Systempunktes

$$q\gamma - r\beta,\ r\alpha - p\gamma,\ p\beta - q\alpha.$$

Wenn die Schwere Mg allein auf den Körper wirkt und zwar im Schwerpunkte (x_0, y_0, z_0) parallell der negativen ζ-Axe, so werden ihre Komponenten im xyz-System bez. $-Mg\alpha$, $-Mg\beta, -Mg\gamma$ und die Kraftmomente die rechten Seiten der Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= Mg(z\beta - y\gamma),\\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= Mg(x\gamma - z\alpha),\\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= Mg(y\alpha - x\beta), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

welche jetzt die Gl. (1) ersetzen.

Die berühmten Fälle, in welchen die Integration der Differentialgleichungen der Drehung eines starren, schweren Körpers um einen festen Punkt bei beliebigen Anfangsbedingungen geleistet wurde, sind bekanntlich:

1) Der Eulersche Fall, in welchem keine äusseren Kräfte wirken, und somit $M_x = M_y = M_z = 0$ ist.

2) Der Lagrangesche Fall, in welchem $A = B$ und der Schwerpunkt auf der z-Axe liegt, d.h. $x_0 = y_0 = 0$ ist. (Der Fall des schweren symmetrischen Kreisels).

3) Der Fall von Sophie Kowalevski, in welchem $A = B = 2C$ ist und der Schwerpunkt des Körpers sich in der xy-Ebene befindet, d.h. $z_0 = 0$ ist.

In jedem der genannten Fälle existieren ausser dem Integral (3) noch drei von einander unabhängige algebraische Integrale der Differentialgl. (2) und (5), von welchen eins den Flächensatz, ein anderes den Satz der lebendigen Kraft ausdrückt. Die Integration der Systeme (2) und (5) lässt sich dann auf Quadraturen zurückführen. Andere Fälle, in welchen vier algebraische Integrale vorkommen, gibt es überhaupt nicht.

Ich werde hier zunächst analog dem Lagrangeschen Fall einen Körper betrachten, dessen Hauptträgheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist, und der in einem Punkte O dieser Umdrehungsaxe befestigt ist, auf den aber jetzt nicht seine Schwere wirkt, sondern ein äusseres Kräftesystem allgemeinerer Art. Für mehrere Annahmen betreffend die wirkenden Kräfte kann die Integration der Differentialgl. der Drehungsbewegung auf Quadraturen zurückgeführt werden. Es dürften auch derartige Fälle, die man übrigens mechanisch verwirklichen kann und die meines Wissens kaum früher behandelt worden sind, etwas Interesse darbieten. Auch eine Verallgemeinerung des Kowalevskischen Falles wird behandelt.

2. Es sei $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$ und auf den Körper wirke eine Kraft P im Schwerpunkte S, welche durch den festen Punkt R auf der ζ-Axe, d.h. $(0, 0, \zeta_0)$ geht, und proportional der Entfernung ϱ von diesem Punkte sich verändert, somit

$$P = Mk\varrho.$$

Eine solche Kraft kann bekanntlich als Resultierende von Zentralkräften aufgefasst werden, welche alle Massenelemente des Körpers angreifen und proportional der Entfernung vom Zentrum R sind. Mechanisch könnte man wenigstens prinzipiell diesen Fall so verwirklichen, dass der Körper in eine Flüssigkeit eingesenkt ist, welche die Wirkung der Schwere grade aufhebt, ferner der Schwerpunkt S und der feste Punkt R durch eine elastische Spiralfeder mit einander verbunden sind.

Wenn α, β, γ die Richtungscosinus der ζ-Axe im beweglichen System bezeichnen, so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{6}$$

ferner die wirkende Kraft

$$P = Mk\varrho = Mk\sqrt{\zeta_0^2 + z_0^2 - 2\zeta_0 z_0 \gamma};$$

ihre Komponenten sind

$$X = Mk\zeta_0\alpha; \quad Y = Mk\zeta_0\beta; \quad Z = Mk(\zeta_0\gamma - z_0),$$

die Kraftmomente

$$M_x = -Mk\zeta_0 z_0 \beta; \quad M_y = Mk\zeta_0 z_0 \alpha; \quad M_z = 0, \tag{7}$$

und die Differentialgleichungen der Bewegung

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr = -Mk\zeta_0 z_0 \beta, \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = Mk\zeta_0 z_0 \alpha, \\ C\frac{dr}{dt} = 0. \end{cases} \qquad \text{(9)} \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \end{cases}$$

Man bekommt hier wie im Lagrangeschen Fall die vier algebraischen Integrale

$$\text{(I)} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$\text{(II)} \quad A(p^2 + q^2) + Cr^2 = 2Mk\zeta_0 z_0 \gamma + E',$$

$$\text{(III)} \quad A(\alpha p + \beta q) + C\gamma r = G,$$

$$\text{(IV)} \quad r = \text{Konst.},$$

von welchen (II) ein Ausdruck des Satzes von der lebendigen Kraft ist, (III) den Flächensatz in bezug auf die $\xi\eta$-Ebene enthält und (IV) besagt, dass die Winkelgeschwindigkeit r der Drehung des Körpers um seine Figurenaxe Oz sich nicht ändert.

Man berechnet noch

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} \alpha p + \beta q = \frac{G - Cr\gamma}{A}, \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2, \\ p^2 + q^2 = \frac{2Mk\zeta_0 z_0 \gamma + E}{A}, \end{cases}$$

sowie aus der identischen Gleichung

$$(\alpha q - \beta p)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(p^2 + q^2) - (\alpha p + \beta q)^2$$

$$\text{(11)} \qquad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = (\alpha q - \beta p)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)(2Mk\zeta_0 z_0 \gamma + E) - (G - C r\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma),$$

$$\text{(V)} \qquad t = \int \frac{d\gamma}{\sqrt{F(\gamma)}},$$

worin $F(\gamma)$ eine ganze Funktion dritten Grades von γ darstellt, somit γ eine eindeutige elliptische Funktion einer linearen Verbindung der Zeit t ist. Setzt man

$$\gamma = f(t),$$

so hat man

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \alpha q - \beta p = \dfrac{d\gamma}{dt} = f'(t), \\ \alpha p + \beta q = \dfrac{G - Crf(t)}{A}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung des noch übrigen sechsten Integrals berechnet man die Grösse

$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta = \alpha + i\beta.$$

Es ist

$$\text{(13)} \qquad \frac{p + iq}{\alpha + i\beta} = \frac{\alpha p + \beta q + i(\alpha q - \beta p)}{1 - \gamma^2} = \frac{G - Crf(t) + iAf'(t)}{A(1 - f^2(t))}$$

und ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(\alpha + i\beta) = i\gamma(p + iq) - ir(\alpha + i\beta),$$

$$\frac{d}{dt}\log(\alpha + i\beta) = i\gamma\frac{p + iq}{\alpha + i\beta} - ir = \frac{\gamma(\beta p - \alpha q) + i[\gamma(\alpha p + \beta q) - r(1 - \gamma^2)]}{1 - \gamma^2} =$$

$$= \frac{-Af(t)f'(t) + i[(A - C)rf^2(t) + Gf(t) - Ar]}{A[1 - f^2(t)]} = \varphi(t),$$

worin $\varphi(t)$ somit eine rationale Funktion von $f(t)$ und $f'(t)$ darstellt. Das sechste Integral ist jetzt

$$\text{(VI)} \qquad \alpha + i\beta = e^{\int \varphi(t)\,dt}$$

und es ergeben sich α und β hieraus durch Zerlegung in den reellen und den imaginären Teil.

Das Integral (VI) ist etwas weiter ausgeführt

$$\text{(VI')} \qquad \alpha + i\beta = \sqrt{1 - f^2(t)}\, e^{i\left\{\frac{C - A}{A} rt + \int \frac{Gf(t) - Cr}{A[1 - f^2(t)]}\,dt\right\}}$$

oder noch

$$\text{(VI'')} \qquad \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{C - A}{A} rt + \int \frac{G\gamma - Cr}{A(1 - \gamma^2)}\,dt$$

und bestimmt zusammen mit

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$$

die Cosinus α und β. Übrigens ist

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}$$

der Eulersche Winkel, der die Drehung des Körpers um seine Figurenaxe angibt. Die Eulerschen Winkel φ, ψ, $\vartheta = \arccos\gamma$ werden aber hier eigentlich nicht benutzt.

Zuletzt erhält man p und q ohne Quadraturen aus der Gleichung

$$(14)\qquad p+iq=\frac{G-Crf(t)+iAf'(t)}{A[1-f^2(t)]}e^{\int\varphi(t)dt}=\frac{G-Cr\gamma+iA\frac{d\gamma}{dt}}{A\sqrt{1-\gamma^2}}e^{i\left\{\frac{C-A}{A}rt+\int\frac{G\gamma-Cr}{A(1-\gamma^2)}dt\right\}}.$$

Zur vollständigen Bestimmung der Drehungsbewegung gehört noch die Berechnung der Richtungscosinus $\alpha'',\beta'',\gamma''$; α',β',γ', am besten folgenderweise. Sowohl $\alpha'',\beta'',\gamma''$ wie α',β',γ', die alle reell vorausgesetzt werden, erfüllen die Differentialgl. (2) und genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned}\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1,\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1,\\ \alpha''\alpha'+\beta''\beta'+\gamma''\gamma'&=0,\end{aligned}$$

wie schon geometrisch ersichtlich. Lösungen der Gl. (2) sind ferner

$$(15)\qquad U=\alpha''+i\alpha';\quad V=\beta''+i\beta';\quad W=\gamma''+i\gamma'$$

und man kann denselben die Bedingungen auflegen

$$(16)\qquad\begin{cases}U^2+V^2+W^2=0,\\ U\alpha+V\beta+W\gamma=0.\end{cases}$$

Mit Berücksichtigung der Gl. (6) berechnet man aus denselben

$$(17)\qquad U=\frac{-\alpha\gamma\pm i\beta}{1-\gamma^2}W;\qquad V=\frac{-\beta\gamma\mp i\alpha}{1-\gamma^2}W.$$

Alsdann ergibt sich

$$\frac{dW}{dt}=qU-pV,$$

$$(18)\qquad \frac{1}{W}\frac{dW}{dt}=\frac{-\gamma(\alpha q-\beta p)\pm i(\alpha p+\beta q)}{1-\gamma^2}=\frac{-Af(t)f'(t)\pm i[G-Crf(t)]}{A(1-f^2(t))}=\psi(t)$$

und

$$(19)\qquad W=e^{\int\psi(t)dt}$$

oder etwas weiter ausgeführt

$$(19')\qquad W=\sqrt{1-f^2(t)}\,e^{\pm i\int\frac{G-Crf(t)}{A[1-f^2(t)]}dt},$$

oder noch

$$(19'')\qquad \pm\operatorname{arctg}\frac{\gamma'}{\gamma''}=\int\frac{G-Cr\gamma}{A(1-\gamma^2)}dt.$$

Bei der Zerlegung von U,V,W erhält man jetzt $\alpha'',\beta'',\gamma''$ aus den reellen, α',β',γ' aus den imaginären Teilen. Das Doppelzeichen in den Gleichungen oben hängt mit der Wahl der Richtungen auf den ξ- und η-Axen zusammen. Auch ergeben sich γ'' und γ' aus der Gleichung (19'') zusammen mit $\gamma''^2+\gamma'^2=1-\gamma^2$. Es ist $\psi=\operatorname{arctg}\frac{\gamma'}{\gamma''}-\frac{\pi}{2}$ der Eulersche Winkel, der die Länge des aufsteigenden Knotens angibt und dessen Ableitung in Bezug auf die Zeit die Präzession misst.

Aus den hier erhaltenen Gleichungen ergibt sich der Lagrangesche Fall der Drehung des schweren Umdrehungskörpers als Grenzfall, indem man, die positive ζ-Axe als lotrecht nach oben gerichtet angenommen, $\zeta_0=-\varrho=-\infty$ und $k=0$ derart werden lässt, dass $-k\zeta_0=g$ bleibt, wo g die Beschleunigung der Schwere ist. Dass der jetzt behandelte Fall mit dem

Lagrangeschen fast identisch ist, sieht man auch daraus, dass wenn man die Kraft $P = Mk\varrho$ auf die Richtungen SR und die ζ-Axe zerlegt, die letztere Komponente konstant und gleich $Mk\zeta_0$ wird. Der Unterschied liegt nur in der Gegenkraft im Punkte O.

3. Die Lösung der im Art. 2 behandelten Aufgabe setzt nicht voraus, dass der Punkt S, in welchem die gegen R gerichtete Kraft $P = Mk\varrho$ angreift, der Schwerpunkt des Körpers sein müsste; er kann ein beliebiger Punkt der z-Axe sein. Beispielsweise könnte der Schwerpunkt mit dem festen Punkte O zusammenfallen und die Kraft P mittelst einer Spiralfeder zwischen S und R hervorgebracht sein. Auch könnte die Kraft P eine abstossende sein, was einem negativen Werte von k entsprechen würde.

Es mögen jetzt zwei Kräfte auf den Körper wirken, und zwar eine Kraft $P = Mk\varrho$ im Punkte S der z-Axe, gerichtet nach dem Punkt R auf der ζ-Axe und proportional $SR = \varrho$ ganz wie oben, ferner eine Kraft $P' = Mk'\varrho'$ im Punkte S' der z-Axe und gerichtet nach einem Punkte S' der ζ-Axe sowie proportional der Entfernung $S'R' = \varrho'$. Die Kraftmomente werden dann gemäss (7)

$$\left\{\begin{aligned} M_x &= -M(k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0')\beta, \\ M_y &= M(k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0')\alpha, \\ M_z &= 0, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

worin alle Bezeichnungen analog den früheren sind. Man sieht dass die Aufgabe in derselben Weise wie die frühere behandelt werden kann; der einzige Unterschied steckt in den Ausdrücken der Konstanten.

Tatsächlich können die beiden Kräfte P und P' durch eine einzige Kraft P_r mit ähnlichen Eigenschaften wie P und P' ersetzt werden. P_r greift in dem Punkte S_r auf der z-Axe an, für welchen

$$OS_r = z_r = \frac{k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0'}{k\zeta_0 + k'\zeta_0'} \tag{21}$$

ist, d.h. in dem Schwerpunkte der in S und S' bez. verlegten Massen $k\zeta_0$ und $k'\zeta_0'$, und ist gerichtet nach dem Punkte R_r auf der ζ-Axe, für welchen

$$OR_r = \zeta_r = \frac{kz_0\zeta_0 + k'z_0'\zeta_0'}{kz_0 + k'z_0'} \tag{22}$$

ist und der den Schwerpunkt der in R und R' bez. verlegten Massen kz_0 und $k'z_0'$ bildet. Bezeichnet ϱ_r den Abstand S_rR_r, so gilt für die Grösse der Kraft P_r der Ausdruck

$$P_r = M\frac{(k\zeta_0 + k'\zeta_0')(kz_0 + k'z_0')}{k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0'}\varrho_r. \tag{23}$$

Wenn speziell

$$k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0' = 0, \tag{24}$$

so verschwinden die Momente (20), d.h. die Resultante P_r der Kräfte P und P' geht durch den festen Punkt O und der Körper bewegt sich als ob er kräftefrei wäre. Ist besonders

$$kz_0 + k'z_0' = 0, \tag{25}$$

so rückt der Punkt R_r in's Unendliche und die Kraft P_r reduziert sich zu einer in S_r angreifenden, stets der ζ-Axe parallelen Kraft von der unveränderlichen Grösse

$$P_r = M(k\zeta_0 + k'\zeta_0'). \tag{26}$$

Wenn ferner speziell

$$k\zeta_0 + k'\zeta_0' = 0 \tag{27}$$

ist, so fällt S_r in's Unendliche und es resultiert eine der z-Axe parallele Kraft P_r von unveränderlicher Grösse

$$P_r = -M(kz_0 + k'z_0'), \tag{28}$$

welche durch den im Raume festen Punkt R_r geht. Falls schliesslich die Bedingungen (25) und (27) auf einmal erfüllt sind, liefern die Kräfte P und P' ein Kräftepaar in der Ebene der Axen Oz und $O\zeta$, mit dem Momente

$$-M(k\zeta_0 z_0 + k'\zeta_0' z_0') = -M\frac{\zeta_0}{z_0}(kz_0^2 + k'z_0'^2),$$

und wenn allen drei Bedingungen (24), (25) und (27) genügt wird, heben sich die Kräfte P und P' gegenseitig auf.

Man sieht unmittelbar, welche Vereinfachungen eintreten, wenn die Punkte S und S' oder die Punkte R und R' zusammenfallen oder wenn $k = k'$ oder $k = -k'$ ist.

Es könnte z.B. auch die eine Kraft vom Anfang an parallel der ζ-Axe und der Grösse nach unveränderlich angenommen werden, z.B. durch die Schwere des Körpers ersetzt werden.

Das hier für zwei Kräfte gefundene lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Kräften erweitern, welchen in bestimmten Punkten $S, S', S''\ldots$ der z-Axe angreifen, nach den im Raume festen Punkten $R, R', R''\ldots$ der ζ-Axe gerichtet sind und durch die Ausdrücke $Mk\,.\,SR$, $Mk'\,.\,S'R'$, $Mk''\,.\,S''R''\ldots$ der Grösse nach gegeben sind.

4. Es sei wieder $A = B$, der Schwerpunkt des Körpers liege auf der z-Axe und in einem Punkte S derselben im Abstande z_0 von O wirke eine der negativen ζ-Axe parallele Kraft $P = Mk\zeta = Mkz_0\gamma$, somit proportional der Entfernung von der im Raume festen $\xi\eta$-Ebene, welche eine anziehende oder abstossende Wirkung ausübt, jenachdem k positiv oder negativ ist.

Die Komponenten der Kraft P auf die Axen Ox, Oy, Oz sind dann

$$X = -Mkz_0\gamma\alpha; \quad Y = -Mkz_0\gamma\beta; \quad Z = -Mkz_0\gamma^2$$

und die Kraftmomente in bezug auf dieselben Axen

$$M_x = Mkz_0^2\gamma\beta; \quad M_y = -Mkz_0^2\gamma\alpha; \quad M_z = 0; \tag{29}$$

somit ist das System der Differentialgleichungen der Drehung

$$\text{(30)} \quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = Mkz_0^2\gamma\beta, \\ A\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = -Mkz_0^2\gamma\alpha, \\ C\frac{dr}{dt} = 0. \end{cases} \qquad \text{(31)} \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \end{cases}$$

Man berechnet hiezu die vier algebraischen Integrale

(I) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$

(II) $A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -Mkz_0^2\gamma^2 + E',$

(III) $A(\alpha p + \beta q) + C\gamma r = G,$

(IV) $r = \text{Konst.},$

welche ganz dieselbe Bedeutung haben wie die Integrale (I)..(IV) im Art. 2.

Ferner bildet man in derselben Weise wie dort die Gleichung

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)(-Mkz_0^2\gamma^2 + E) - (G - C\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma), \tag{32}$$

worin also $F(\gamma)$ jetzt eine ganze Funktion vierten Grades von γ darstellt. Somit wird auch jetzt γ als eine eindeutige elliptische Funktion einer linearen Verbindung der Zeit erhalten. Die Fortsetzung der Rechnung ist formell dieselbe wie im Art. 2. (Die Formeln (12) bis (19)).

Die Lösung wird ohne weiteres ausgedehnt zu mehreren in Punkten der z-Axe angreifenden, der ζ-Axe parallelen Kräften, welche proportional den Entfernungen von der $\xi\eta$-Ebene sind und mit im allgemeinen verschiedenen Proportionalitätsfaktoren gebildet sind. Die Resultierende zu zwei Kräften P und P' ist die der negativen ζ-Axe parallele Kraft

$$P_r = M(kz_0 + k'z_0')\gamma$$

im Punkte S_r im Abstande

$$z_r = \frac{kz_0^2 + k'z_0'^2}{kz_0 + k'z_0'}$$

von O, wobei also auch

$$P_r = M\frac{(kz_0 + k'z_0')^2}{kz_0^2 + k'z_0'^2} z_r\gamma$$

ist. Die Kraft P_r geht durch O, falls

$$kz_0^2 + k'z_0'^2 = 0,$$

und wird mit der speziellen Annahme

$$kz_0 + k'z_0' = 0$$

durch ein Kräftepaar ersetzt, das die positive z-Axe gegen die positive ζ-Axe mit dem Momente $-M(kz_0^2 + k'z_0'^2)\gamma\sqrt{1-\gamma^2}$ dreht.

5. Auf den Körper, für welchen $A = B$ sei, wirke gleichzeitig eine Kraft $P = Mk\varrho$ von dem im Art. 2 betrachteten Typus und eine Kraft $P' = Mk'z_0'\gamma$ von der im Art. 4 behandelten Art. Die Lösung wird auch dann in derselben Weise wie in obigen Fällen erhalten. Es genüge hier die Differentialgl. für γ hinzuschreiben, d.h.

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)\{E + 2Mk\zeta_0 z_0\gamma - Mk'z_0'^2\gamma^2\} - (G - C\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma). \tag{33}$$

6. Auf den Körper, für welchen $A = B$ sei, wirke im Punkte S der z-Axe eine senkrecht gegen die ζ-Axe gerichtete Kraft P, welche proportional der Entfernung ϱ von derselben sei, also

$$P = Mk\varrho = Mkz_0\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Dies könnte mechanisch verwirklicht werden durch eine Spiralfeder in einem gegen die ζ-Axe senkrechten Rohr mit geigneter, (fast) reibungsfreier Führung längs dieser Axe. Die Komponenten der Kraft P auf die x-, y-, und z-Axen sind

$$X = Mkz_0\gamma\alpha; \quad Y = Mkz_0\gamma\beta; \quad Z = -Mkz_0\gamma^2,$$

die Kraftmomente in Bezug auf dieselben Axen

$$M_x = -Mkz_0^2\gamma\beta; \quad M_y = Mkz_0^2\gamma\alpha; \quad M_z = 0, \tag{34}$$

d.h. die Ausdrücke (29) mit entgegengesetzten Zeichen, wie man ja auch direkt einsieht Die Differentialgleichungen der Bewegung werden also

$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = -Mkz_0^2\gamma\beta, \\ A\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = \quad Mkz_0^2\gamma\alpha, \\ C\frac{dr}{dt} = 0, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta, \end{cases} \tag{36}$$

ihre vier algebraischen Integrale

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{I}$$

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = Mkz_0^2\gamma^2 + E', \tag{II}$$

$$A(\alpha p + \beta q) + C\gamma r = G, \tag{III}$$

$$r = \text{Konst.} \tag{IV}$$

und die Gleichung für γ

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)(Mkz_0^2\gamma^2 + E) - (G - Cr\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma). \tag{37}$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe ist dann formell dieselbe wie in den Art. 2 und 4. Auch sieht man unmittelbar, wie die Sache liegt, wenn mehrere Kräfte der jetzt betrachteten Art auf den Körper wirken.

7. Wenn man bei den in den Art. 2, 4 und 6 behandelten Fällen die Kraft P nicht proportional dem Abstande ϱ, sondern der Grösse nach unveränderlich annimmt, so kommt man im Falle des Art. 4 auf den klassischen Lagrangeschen Fall zurück; in den beiden anderen Fällen kann die Lösung zwar noch auf Quadraturen zurückgeführt werden, aber im allgemeinen nicht mehr mittelst elliptischer Funktionen vollbracht werden. Mechanisch könnten diese beiden Fälle mit Hülfe einer Schnur verwirklicht werden, in welcher eine konstante Spannung aufrechtgehalten wird.

Es sei zuerst die konstante Kraft

$$P = Mh$$

von dem Punkte S der z-Axe nach dem festen Punkte R der ζ-Axe gerichtet, wie im Art. 2. Ihre Komponenten auf die x-, y- und z-Axen sind dann

$$X = Mh\frac{\zeta_0\alpha}{\varrho}; \quad Y = Mh\frac{\zeta_0\beta}{\varrho}; \quad Z = Mh\frac{\zeta_0\gamma - z_0}{\varrho},$$

worin

(38) $$\varrho = \sqrt{z_0^2 + \zeta_0^2 - 2 z_0 \zeta_0 \gamma}$$

ist, die Kraftmomente

(39) $$M_x = -Mh\frac{z_0\zeta_0\beta}{\varrho}; \quad M_y = Mh\frac{z_0\zeta_0\alpha}{\varrho}; \quad M_z = 0$$

und die Differentialgl. der Bewegung

(40) $$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = -\frac{Mhz_0\zeta_0\beta}{\sqrt{z_0^2+\zeta_0^2-2z_0\zeta_0\gamma}}, \\ A\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = \frac{Mhz_0\zeta_0\alpha}{\sqrt{z_0^2+\zeta_0^2-2z_0\zeta_0\gamma}}, \\ C\frac{dr}{dt} = 0, \end{cases} \qquad (41) \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \end{cases}$$

Zu denselben erhält man wieder vier algebraische Integrale

(I) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

(II) $$A(p^2+q^2) + Cr^2 = -2Mh\sqrt{z_0^2+\zeta_0^2-2z_0\zeta_0\gamma} + E',$$

(III) $$A(\alpha p + \beta q) + C\gamma r = G,$$

(IV) $$r = \text{Konst.}$$

Die Differentialgl. für γ wird aber jetzt

(42) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)(-2Mh\sqrt{z_0^2+\zeta_0^2-2z_0\zeta_0\gamma}+E) - (G-Cr\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma),$$

somit $F(\gamma)$ keine ganze rationale Funktion von γ mehr. Wählt man indessen ϱ statt γ als Veränderliche, so findet man

(43) $$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{A\left\{4z_0^2\zeta_0^2 - (z_0^2+\zeta_0^2-\varrho^2)^2\right\}(-2Mh\varrho+E) - \left\{2Gz_0\zeta_0 - Cr(z_0^2+\zeta_0^2-\varrho^2)\right\}^2}{4A^2\varrho^2} = \Phi(\varrho),$$

worin $\varrho^2\Phi(\varrho)$ eine ganze Funktion fünften Grades von ϱ ist. Somit wird ϱ eine hyperelliptische Funktion von t, folglich auch γ. Bei speziellen Lagen von S und R und speziellen Anfangsbedingungen kann ϱ sich auf eine elliptische Funktion reduzieren, z.B. wenn

$$z_0 = \zeta_0 \quad \text{und} \quad G = Cr$$

oder

$$z_0 = -\zeta_0 \quad \text{und} \quad G = -Cr.$$

In beiden Fällen wird

(44) $$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{A(\varrho^2-4z_0^2)(-2Mh\varrho+E) - C^2r^2\varrho^2}{4A^2} = \Phi(\varrho).$$

8. Es sei ferner die unveränderliche Kraft $P = Mh$ senkrecht gegen die ζ-Axe gerichtet. Ihre Komponenten sind dann

$$X = Mh\frac{\gamma\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad Y = Mh\frac{\gamma\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad Z = Mh\frac{\gamma^2-1}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

die Kraftmomente

(45) $$M_x = -\frac{Mhz_0\gamma\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad M_y = \frac{Mhz_0\gamma\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad M_z = 0,$$

die Differentialgl. der Bewegung

$$(46)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=-\frac{Mhz_0\gamma\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}},\\ A\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=\frac{Mhz_0\gamma\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}},\\ C\frac{dr}{dt}=0, \end{cases} \qquad (47)\qquad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}=r\beta-q\gamma,\\ \frac{d\beta}{dt}=p\gamma-r\alpha,\\ \frac{d\gamma}{dt}=q\alpha-p\beta, \end{cases}$$

die vier algebraischen Integrale hiezu

(I) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$

(II) $A(p^2+q^2)+Cr^2=-2Mhz_0\sqrt{1-\gamma^2}+E',$

(III) $A(\alpha p+\beta q)+C\gamma r=G,$

(IV) $r=\text{Konst.},$

und die Differentialgl. für γ

$$(48)\qquad \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2=\frac{A(1-\gamma^2)(-2Mhz_0\sqrt{1-\gamma^2}+E)-(G-C r\gamma)^2}{A^2}=F(\gamma).$$

Als Differentialgleichung für $\varrho=z_0\sqrt{1-\gamma^2}$ erhält man

$$(49)\qquad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2=\frac{(z_0^2-\varrho^2)\left\{A\varrho^2(-2Mh\varrho+E)-(Gz_0-Cr\sqrt{z_0^2-\varrho^2})^2\right\}}{A^2\varrho^2}=\Phi(\varrho).$$

Es ist weder $F(\gamma)$ in bezug auf γ, noch $\Phi(\varrho)$ in bezug auf ϱ eine rationale Funktion. Mit den speziellen Annahmen $Cr=0$, d.h. keine Drehung um die z-Axe, oder $C=0$, oder die Flächenkonstante $G=0$ wird ϱ eine hyperelliptische Funktion der Zeit, und wenn z.B. zugleich $r=0$, $G=0$, $E=0$ ϱ eine elliptische Funktion von t.

9. Es sei wie vorher $A=B$ und es wirke auf den Körper eine Kraft im Punkte S der z-Axe, mit der Richtung nach einem festen Punkte R der ζ-Axe, aber allgemein durch den Ausdruck $P=M\chi(\varrho)$ gegeben, worin

$$\varrho=\sqrt{z_0^2+\zeta_0^2-2z_0\zeta_0\gamma}$$

die Entfernung SR darstellt. Die Komponenten der Kraft P auf die x-, y- und z-Axen sind dann

$$X=M\zeta_0\alpha\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad Y=M\zeta_0\beta\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad Z=M(\zeta_0\gamma-z_0)\frac{\chi(\varrho)}{\varrho},$$

die Kraftmomente

$$(50)\qquad M_x=-Mz_0\zeta_0\beta\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad M_y=Mz_0\zeta_0\alpha\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad M_z=0.$$

Zu den Differentialgleichungen der Bewegung erhält man immer noch vier Integrale, von welchen (I), (III) und (IV) dieselben wie in allen obigen Fällen sind, während (II) jetzt die folgende Form bekommt:

(II) $$A(p^2+q^2)=-2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho+E$$

und somit algebraisch wird, wenn $\int\chi(\varrho)\,d\varrho$ eine algebraische Funktion ist. Die Differentialgl. für ϱ lautet jetzt

$$(51)\qquad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2=\frac{A\left\{4z_0^2\zeta_0^2-(z_0^2+\zeta_0^2-\varrho^2)^2\right\}\left\{-2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho+E\right\}-\left\{2Gz_0\zeta_0-Cr(z_0^2+\zeta_0^2-\varrho^2)\right\}^2}{4A^2\varrho^2}=\Phi(\varrho).$$

Bei allgemeinen Anfangsbedingungen wird ϱ^2 und somit auch γ eine eindeutige elliptische Funktion der Zeit in den Fällen

$$\chi(\varrho) = k\varrho; \quad \chi(\varrho) = k\varrho^3; \quad \chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^3}; \quad \chi(\varrho) = k\varrho + k_1\varrho^3, \tag{52}$$

während u.a. in den Fällen

$$\chi(\varrho) = h; \quad \chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^2} \tag{53}$$

ϱ sich als eine hyperelliptische Funktion der Zeit ergibt. Von diesen wurden ja die Fälle $\chi(\varrho) = k\varrho$ und $\chi(\varrho) = h$ schon oben betrachtet.[1]

10. Es sei ferner mit $A = B$ die im Punkte S der z-Axe wirkende Kraft P parallel der negativen ζ-Axe und der Grösse nach durch den Ausdruck

$$P = M\chi(z_0\gamma) = M\chi(\varrho)$$

gegeben. Ihre Komponenten auf die x-, y- und z-Axen sind dann

$$X = -M\chi(z_0\gamma)\alpha; \quad Y = -M\chi(z_0\gamma)\beta; \quad Z = -M\chi(z_0\gamma)\gamma$$

und die Kraftmomente

$$M_x = Mz_0\chi(z_0\gamma)\beta; \quad M_y = -Mz_0\chi(z_0\gamma)\alpha; \quad M_z = 0. \tag{54}$$

Für das Integral (II) erhält man jetzt

$$A(p^2 + q^2) = -Mz_0\int\chi(z_0\gamma)\,d\gamma + E = -2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho + E, \tag{II}$$

während γ die Differentialgl.

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)\left\{-2Mz_0\int\chi(z_0\gamma)\,d\gamma + E\right\} - (G - C\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma) \tag{55}$$

und $\varrho = z_0\gamma$ die Differentialgl.

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{A(z_0^2 - \varrho^2)\left[-2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho + E\right] - (Gz_0 - C\varrho)^2}{A^2} = \Phi(\varrho) \tag{56}$$

erfüllt. Hieraus ist ersichtlich, dass bei allgemeinen Anfangsbedingungen γ und ϱ elliptische Funktionen von t werden, falls

$$\begin{cases} \chi(\varrho) = g; \quad \chi(\varrho) = k\varrho; \quad \chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^2}; \quad \chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^3}, \\ \chi(\varrho) = g + k\varrho; \quad \chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^2} + \frac{k_1}{\varrho^3} \end{cases} \tag{57}$$

ist. Der Fall $\chi(\varrho) = g$ ist der klassische Lagrangesche, der Fall $\chi(\varrho) = k\varrho$ wurde im Art. 4

[1] In der Note XX zu „Cours de Mécanique, par DESPEYROUS", T. II, Paris 1886, p. 546 zeigt DARBOUX, dass das Problem der Drehung um einen festen Punkt O auch dann auf Quadraturen zurückgeführt wird, wenn das Potential der wirkenden äusseren Kräfte ein Funktion von γ allein ist. Dies trifft ein bei einem einwirkenden Umdrehungskörper, dessen Axe durch O geht. Besonders wird der Fall erwähnt, dass eine homogene Kugel, die in einem beliebigen Punkte befestigt sei, von einem Massenpunkte nach dem Newtonschen Gesetze angezogen wird. Eine unmittelbare Verallgemeinerung hiervon wäre den Massenpunkt durch eine Kugel zu ersetzen; auch könnten beiden Kugeln aus konzentrischen Schichten aufgebaut sein. Der Darboux'sche Spezialfall der Kugel führt, wie oben nachgewiesen, auf hyperelliptische Funktionen und gehört somit nicht zu den einfachsten denkbaren.

behandelt; beachtenswert sind besonders noch der aus beiden zusammengesetzte Fall $\chi(\varrho) = g + k\varrho$, in welchem sich folgende Formeln ergeben:

(II) $$A(p^2+q^2) = -Mz_0\gamma(2g + kz_0\gamma) + E,$$

(58) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)\{-Mz_0\gamma(2g+kz_0\gamma)+E\}-(G-C r\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma),$$

sowie der Fall $\chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^2}$, in welchem man erhält:

(II) $$A(p^2+q^2) = 2\frac{Mk}{z_0}\frac{1}{\gamma} + E,$$

(59) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)(2Mk+Ez_0\gamma)-z_0\gamma(G-Cr\gamma)^2}{A^2 z_0\gamma} = F(\gamma).$$

11. Endlich werde mit der Annahme $A = B$ vorausgesetzt, dass der Körper im Punkte S der z-Axe von einer Kraft P angegriffen wird, welche längs der Senkrechten ϱ auf der ζ-Axe wirkt und durch den Ausdruck

$$P = M\chi(\varrho) = M\chi(z_0\sqrt{1-\gamma^2})$$

dargestellt ist. Die Komponenten dieser Kraft auf die x-, y- und z-Axen sind

$$X = Mz_0\gamma\alpha\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad Y = Mz_0\gamma\beta\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad Z = -Mz_0(1-\gamma^2)\frac{\chi(\varrho)}{\varrho}$$

und die Kraftmomente

(60) $$M_x = -Mz_0^2\gamma\beta\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad M_y = Mz_0^2\gamma\alpha\frac{\chi(\varrho)}{\varrho};\quad M_z = 0.$$

Als Integral (II) der Differentialgleichungen der Bewegung wird jetzt erhalten

(II) $$A(p^2+q^2) = 2Mz_0\int\chi(z_0\sqrt{1-\gamma^2})\frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} + E = -2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho + E;$$

es genügt γ der Differentialgl.

(61) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A(1-\gamma^2)\left\{2Mz_0\int\chi(z_0\sqrt{1-\gamma^2})\frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}+E\right\}-(G-Cr\gamma)^2}{A^2} = F(\gamma)$$

und $\varrho = z_0\sqrt{1-\gamma^2}$ der Differentialgl.

(62) $$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{z_0^2-\varrho^2}{\varrho^2}\left\{A\varrho^2(-2M\int\chi(\varrho)\,d\varrho + E) - \left(Gz_0 - Cr\sqrt{z_0^2-\varrho^2}\right)^2\right\} = \Phi(\varrho).$$

Bei allgemeinen Anfangsbedingungen wird γ eine elliptische Funktion der Zeit, wenn

(63) $$\chi(\varrho) = k\varrho;$$

dieser Fall wurde im Art. 6 behandelt.

Wenn

(64) $$\chi(\varrho) = \frac{k}{\varrho^3},$$

so ergibt sich

(65) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{A\left\{Mk + Ez_0^2(1-\gamma^2)\right\} - z_0^2(G-Cr\gamma)^2}{A^2 z_0^2}$$

und somit die bemerkenswerte Tatsache, dass die Lösung sogar keine elliptische Funktionen erfordert.

12. Der um O drehbare Körper sei jetzt von der von Frau KOWALEVSKI betrachteten Art, d.h. es sei

$$A = B = 2C.$$

Im Punkte (x_0, y_0) oder S in dessen xy-Ebene greife aber nicht die Schwere, sondern eine Kraft P an, welche nach dem festen Punkte $R(\zeta = \zeta_0)$ der ζ-Axe gerichtet ist und proportional der Entfernung $\varrho = SR$, somit

$$P = Mk\varrho = Mk\sqrt{(\zeta_0\alpha - x_0) + (\zeta_0\beta - y_0)^2 + \zeta_0^2\gamma^2} = \tag{66}$$
$$= Mk\sqrt{\zeta_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 2\zeta_0(\alpha x_0 + \beta y_0)}.$$

Wegen etwas einfacherer Schreibweise werde

$$A = 2,\ B = 2,\ C = 1,\ M = m$$

gesetzt, was durch passende Wahl der Einheiten immer möglich ist. Die Kraft P hat die Komponenten auf die x-, y- und z-Axen

$$X = mk(\zeta_0\alpha - x_0);\quad Y = mk(\zeta_0\beta - y_0);\quad Z = mk\zeta_0\gamma$$

und die Kraftmomente sind

$$M_x = mk\zeta_0 y_0\gamma;\quad M_y = -mk\zeta_0 x_0\gamma;\quad M_z = mk\zeta_0(x_0\beta - y_0\alpha), \tag{67}$$

ferner die Differentialgl. der Drehungsbewegung

$$\begin{cases} 2\frac{dp}{dt} - qr = -mk\zeta_0 y_0\gamma, \\ 2\frac{dq}{dt} + rp = -mk\zeta_0 x_0\gamma, \\ \frac{dr}{dt} = mk\zeta_0(x_0\beta - y_0\alpha), \end{cases} \tag{68}$$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = r\beta - q\gamma, \\ \frac{d\beta}{dt} = p\gamma - r\alpha, \\ \frac{d\gamma}{dt} = q\alpha - p\beta. \end{cases} \tag{69}$$

Frau KOWALEVSKI[1] nimmt auch $y_0 = 0$, was ja immer möglich ist, die Formeln aber weniger symmetrisch macht. Zu den Gleichungen (68) und (69) hat man, falls α, β, γ Richtungscosinus selber sein sollen, die drei algebraischen Integrale

$$\text{(I)} \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$\text{(II)} \qquad 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2mk\zeta_0(x_0\alpha + y_0\beta) + \text{Konst.},$$
$$\text{(III)} \qquad 2(\alpha p + \beta q) + \gamma r = \text{Konst.}$$

Die Differentialgl. (68) unterscheiden sich ausser durch die Ausdrücke der Konstanten nur dadurch von Frau KOWALEVSKIS Gleichungen, dass y_0 beibehalten wurde, und können in derselben Weise behandelt werden. Die Rechnungen sollen jedoch hier etwas anders durchgeführt werden, teilweise in Übereinstimmung mit einer Vorlesung von Prof. SCHOTTKY.

Zunächst findet man zu den Gleichungen (68) und (69) noch ein viertes algebraisches Integral. Man erhält

$$\begin{cases} 2\frac{d(p+iq)}{dt} = -ir(p+iq) - imk\zeta_0\gamma(x_0 + iy_0), \\ \frac{d(\alpha+i\beta)}{dt} = i\gamma(p+iq) - ir(\alpha+i\beta) \end{cases} \tag{69}$$

[1] Acta Mathematica, T. XII, p. 177–232.

und hieraus mit Anwendung der Bezeichnung

$$F = (p+iq)^2 + mk\zeta_0(x_0+iy_0)(\alpha+i\beta)$$

$$\frac{dF}{dt} = -irF.$$

Für die konjugierte Grösse

$$F' = (p-iq)^2 + mk\zeta_0(x_0-iy_0)(\alpha-i\beta)$$

gilt ebenso

$$\frac{dF'}{dt} = irF',$$

also

$$F\frac{dF'}{dt} + F'\frac{dF}{dt} = 0$$

und es ergibt sich das vierte algebraische Integral

$$\text{(IV)} \qquad FF' = \text{Konst.}$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade in bezug auf p, q, vom zweiten in bezug auf α und β. Zwischen den vier Integralen kann man α, β, γ eliminieren und bekommt eine algebraische Relation zwischen p, q und r. Es bewegt sich also der Endpunkt von ω in einer algebraischen Fläche, nicht aber in einer algebraischen Kurve.

Man wende jetzt die Bezeichnungen

$$\text{(70)} \qquad \begin{cases} a = mk\zeta_0(x_0+iy_0); & a' = mk\zeta_0(x_0-iy_0), \\ p+iq = ax; & p-iq = a'x', \\ \alpha+i\beta = au; & \alpha-i\beta = a'u' \end{cases}$$

an und erhält dann statt der vier Gleichungen (I) . . . (IV)

$$\text{(71)} \qquad \begin{cases} aa'uu' + \gamma^2 = 1, \\ 2aa'xx' + r^2 = aa'(a+u') + \text{Konst.}, \\ aa'(u'x+ux') + \gamma r = \text{Konst.}, \\ (x^2+u)(x'^2+u') = \text{Konst.} \end{cases}$$

Mit Anwendung der Bezeichnung

$$\text{(72)} \qquad aa' = n^2$$

und der Veränderlichen

$$\text{(73)} \qquad y = x^2+u; \quad y' = x'^2+u'$$

statt u und u' ergibt sich hieraus

$$\text{(74)} \qquad yy' = D,$$

$$\text{(75)} \qquad \begin{cases} \frac{r^2}{n^2} = y+y'-(x+x')^2+A, \\ \frac{\gamma r}{n^2} = -yx'-y'x+xx'(x+x')+B, \\ \frac{\gamma^2}{n^2} = yx'^2+y'x^2-x^2x'^2+C, \end{cases}$$

wobei ausserdem die Ordnung der Gleichungen geändert und die Integrationskonstanten bezeichnet wurden, α, β, γ aber die Richtungscosinus selber nur in dem Falle bezeichnen, dass

(76) $$n^2(C+D)=1$$

ist, sonst ihnen proportionale Grössen sind.

Wenn γ und r zwischen den drei Gleichungen (75) eliminiert werden, so folgt

$$\{y+y'-(x+x')^2+A\}\{yx'^2+y'x^2-x^2x'^2+C\}-\{yx'+y'x-xx'(x+x')-B\}^2=0$$

und man hat zwei Gleichungen, welche y und y' algebraisch durch x und x' ausdrücken. Es werden r und γ als algebraische Funktionen von x und x' erhalten und es erübrigt nur x und x' als Funktionen von t zu bestimmen.

Aus der obigen Gleichung und $yy'=D$ folgt

(77) $$G(x')y+G(x)y'=H(x,x'),$$

worin

$$G(x)=x^4-Ax^2-2Bx-C,$$

(78) $$H(x,x')=AC-B^2-Ax^2x'^2-2Bxx'(x+x')-C(x+x')^2+D(x-x')^2,$$

und man sieht, dass $y/G(x)$ und $y'/G(x')$ die Wurzeln der Gleichung

(79) $$G(x)G(x')\varrho^2-H(x,x')\varrho+D=0$$

darstellen.

Zunächst einige Transformationsformeln. Führt man die Funktion

(80) $$G(x,x')=x^2x'^2-Axx'-B(x+x')-C$$

ein, so wird

$$G^2(x,x')-G(x)G(x')$$

eine ganze symmetrische Funktion von x und x', welche für $x=x'$ verschwindet; man setzt deshalb

(81) $$G(x)G(x')-G^2(x,x')=(x-x')^2L(x,x'),$$

worin wieder $L(x,x')$ eine ganze symmetrische Funktion von x und x' ist, und findet identisch

(82) $$H(x,x')=D(x-x')^2+L(x,x')=(x-x')^2\left\{D+\frac{G(x)G(x')-G^2(x,x')}{(x-x')^4}\right\}.$$

Aus der mit $4yG(x')$ multiplizierten Gleichung (75) erhält man

$$\{2yG(x')-H\}^2=H^2-4DG(x)G(x')=$$

$$=\{H+2\sqrt{D}\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}\}\{H-2\sqrt{D}\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}\}$$

$$=(x-x')^4\prod_{2\text{ Fakt.}}\left\{D+\frac{G(x)G(x')-G^2(x,x')}{(x-x')^4}\pm\frac{2\sqrt{D}\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}}{(x-x')^2}\right\}=$$

$$=(x-x')^4\prod_{4\text{ Fakt.}}\left\{\sqrt{D}\pm\frac{\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}\pm G(x,x')}{(x-x')^2}\right\}.$$

Statt x und x' führt man noch zwei neue Variabeln s und s' mittelst der Gleichungen

(83) $$\begin{cases} s=\dfrac{G(x,x')-\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}}{(x-x')^2}, \\ s'=\dfrac{G(x,x')+\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}}{(x-x')^2} \end{cases}$$

ein; sie werden als schliessliche Integrationsvariabeln benutzt. Es wird dann

$$\{2yG(x') - H\}^2 = (x-x')^4 (D-s^2)(D-s'^2),$$

(84) $$H(x,x') = (x-x')^2 (D - ss')$$

und folgt

(85)
$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{(x-x')^2}{2G(x')} \{ D - ss' + \sqrt{D-s^2}\sqrt{D-s'^2} \}, \\ y' &= \frac{(x-x')^2}{2G(x)} \{ D - ss' + \sqrt{D-s^2}\sqrt{D-s'^2} \}. \end{aligned} \right.$$

Gemäss (83) und (81) sind s und s' die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades

(86) $$(x-x')^2 s^2 - 2G(x,x')s - L(x,x') = 0.$$

Die Grössen x und x' drücken sich algebraisch durch s und s' aus. Ordnet man die Gl. (86) nach Potenzen von x, so erhält man

$$\Phi x^2 + 2\psi x + \chi = 0$$

oder

$$(\Phi x + \psi)^2 = \psi^2 - \Phi\chi.$$

Hierin ist $(\Phi x + \psi)^2$ vom vierten Grade in Bezug auf x' und in Bezug auf s. Weil die Gl. (86) mit $G(x') = 0$ zwei gleiche Wurzeln $\frac{G(x,x')}{(x-x')^2}$ bekommt, muss

(87) $$(\Phi x + \psi)^2 = G(x')S$$

sein, worin S höchstens vom vierten Grade, tatsächlich nur vom dritten Grade in bezug auf s ist und einfach durch die Spezialisierung $x' = 0$ erhalten wird. Es ergibt sich dabei aus (86)

$$s^2x^2 + 2s(Bx + C) + Cx^2 - AC + B^2 = 0,$$

somit

$$\Phi = s^2 + C; \quad \psi = sB; \quad \chi = 2sC + B^2 - AC,$$

ferner, mit Achtgeben auf $G(x' = 0) = -C$,

(88) $$S = \frac{\psi^2 - \Phi\chi}{-C} = B^2 + (s^2 + C)(2s - A)$$

und

(89) $$\Phi x + \psi = +\sqrt{G(x')}\sqrt{S},$$

wo das Zeichen + gewählt wurde. In derselben Weise erhält man

(90) $$S' = B^2 + (s'^2 + C)(2s' - A)$$

und

(91) $$\Phi' x' + \psi' = -\sqrt{G(x)}\sqrt{S'}.$$

Aus (87) und (85), d.h.

$$N(x,x',s) \equiv s^2(x-x')^2 - 2G(x,x')s - L(x,x') = 0,$$

folgt

(92) $$\frac{\partial N}{\partial x}dx + \frac{\partial N}{\partial x'}dx' + \frac{\partial N}{\partial s}ds = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial x} = \Phi x + \psi = +\sqrt{G(x')}\sqrt{S},$$

und zufolge der Symmetrie

$$\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial x'} = +\sqrt{G(x)}\sqrt{S},$$

ferner

$$\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial s} = (x-x')^2 s - G(x,x') = -\sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}$$

sowie beim Einsetzen dieser Ausdrücke in (92) die Differentialformel

$$\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{dx}{\sqrt{G(x)}} + \frac{dx'}{\sqrt{G(x')}}. \tag{93}$$

In derselben Weise erhält man

$$\frac{ds'}{\sqrt{S'}} = -\frac{dx}{\sqrt{G(x)}} + \frac{dx'}{\sqrt{G(x')}}. \tag{94}$$

Es sind S und S' ganze Funktionen dritten, $G(x)$ und $G(x')$ ganze Funktionen vierten Grades. Die algebraischen Beziehungen zwischen s, s', x, x' können auf Grund dieser Gleichungen durch transzendente ersetzt werden, mit Anwendung von elliptischen Funktionen.

Um zuletzt s und s' als Funktionen der Zeit darzustellen, beachtet man, dass gemäss den Gl. (69) und (70)

$$2i\frac{dx}{dt} = rx + \gamma; \quad -2i\frac{dx'}{dt} = rx' + \gamma$$

und hieraus mit Anwendung noch der Gl. (75) allgemein erhalten wird

$$\frac{4}{n^2}\left(\lambda\frac{dx}{dt} + \lambda'\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \frac{r^2}{n^2}(\lambda x - \lambda' x')^2 + 2\frac{r\gamma}{n^2}(\lambda x - \lambda' x')(\lambda - \lambda') + \frac{\gamma^2}{n^2}(\lambda - \lambda')^2 =$$
$$= \lambda^2\{y(x-x')^2 - G(x)\} + \lambda'^2\{y'(x-x')^2 - G(x')\} + 2\lambda\lambda' G(x,x').$$

Setzt man dann speziell

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{G(x)}}, \quad \lambda' = \frac{1}{\sqrt{G(x')}}$$

und beachtet die Formeln (93), (77) und (82), so findet man

$$-\frac{4}{n^2}\frac{1}{S}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{D(x-x')^4}{G(x)G(x')} - \frac{\{G(x,x') - \sqrt{G(x)}\sqrt{G(x')}\}^2}{G(x)G(x')}$$

und mit Anwendung von (83)

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{S}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{s^2 - D}{(s'-s)^2} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{n^2}\frac{1}{S'}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 = \frac{s'^2 - D}{(s'-s)^2},$$

ferner hieraus, mit Einführung der ganzen Ausdrücke fünften Grades

$$\begin{cases} R(s) = n^2 S(s^2 - D), \\ R(s') = n^2 S'(s'^2 - D), \end{cases} \tag{95}$$

$$\frac{dt}{s'-s} = -\frac{ds}{\sqrt{R(s)}} = \frac{ds'}{\sqrt{R(s')}}$$

sowie zuletzt

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{\sqrt{R(s)}} + \dfrac{ds'}{\sqrt{R(s')}} = 0, \\ dt = \dfrac{s\,ds}{\sqrt{R(s)}} + \dfrac{s'\,ds'}{\sqrt{R(s')}}. \end{cases} \tag{96}$$

Die noch übrigen zwei Integrale des Problems werden dann mittelst hyperelliptischer Quadraturen in der Form

(V) $$\int^{s} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}} + \int^{s'} \frac{ds'}{\sqrt{R(s')}} = \text{Konst.},$$

(VI) $$\int^{s} \frac{s\,ds}{\sqrt{R(s)}} + \int^{s'} \frac{s'\,ds'}{\sqrt{R(s')}} = t + \text{Konst.}$$

erhalten.

Bekanntlich ist jede symmetrische Funktion von s und s' eine eindeutige Funktion von t. Dies ist hier der Fall mit allen Grössen p, q, r, α, β, γ. Man kann ferner zeigen, dass sie für alle endlichen t-Werte den Charakter rationaler Funktionen besitzen. Bei der analytischen Behandlung kann t als ein komplexe Veränderliche betrachtet werden; für das mechanische Problem haben aber nur reelle Werte von t Bedeutung.

Betreffend die weitergehende Ausführung, mit expliciter Anwendung von elliptischen Funktionen und ϑ-Funktionen von zwei Veränderlichen, werde nur auf die Abhandlung von Frau Kowalevski hingewiesen.

13. Nach der obigen allgemeinen Übersicht über das Problem der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt bei verschiedenen Gesetzen der wirkenden Kräfte sollen einige Fälle beim Lagrangeschen Körper ($A = B$, $x_0 = y_0 = 0$) näher ausgeführt werden und zunächst in Kürze der im Art. 2 behandelte Fall, obgleich derselbe sich, wie wir gesehen, nur ganz unwesentlich von dem klassischen Lagrangeschen Fall des schweren Umdrehungskörpers unterscheidet.

In der Gleichung (11) werde G durch G' ersetzt und die Bezeichnung

(97) $$K = -2Mk\zeta_0 z_0$$

benutzt. Der Kürze wegen sollen nur positive Werte von K angenommen werden, obgleich negative Werte ebenso zulässig wären. Man erhält dann

(98) $$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{K}{A}\left\{\left(1-\gamma^2\right)\left(\frac{E}{K}-\gamma\right) - \frac{(G'-Cr\gamma)^2}{AK}\right\} = \frac{K}{A} I(\gamma).$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

(99) $$F = AE + C^2r^2; \quad G = AK - 2CrG'; \quad H = AE - G'^2$$

ist

(100) $$I(\gamma) = \gamma^3 - \frac{F}{AK}\gamma^2 - \frac{G}{AK}\gamma + \frac{H}{AK}.$$

Die Wurzeln dieses Ausdruckes seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und es werde der beim mechanischen Problem allein mögliche Fall betrachtet, dass sie alle reell sind, d.h. dass die unten angegebene Discriminante Δ positiv ist, wie man übrigens hier direkt nachweisen könnte. In bezug auf diese Wurzeln gilt

(101) $$\gamma_1 > 1 > \gamma_2 > \gamma > \gamma_3 > -1.$$ [1]

Es ist jetzt

$$dt = \pm \sqrt{\frac{A}{K}} \frac{d\gamma}{\sqrt{I(\gamma)}}$$

[1] Im Falle $K < 0$ hätte man

$$+1 > \gamma_1 > \gamma > \gamma_2 > -1 > \gamma_3.$$

und wird mit angemessener Wahl des Zeitanfangs und des Wurzelzeichens

$$t = \sqrt{\frac{A}{K}} \int_{\gamma}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{\sqrt{\Gamma(\gamma)}}. \tag{102}$$

Setzt man um zur Weierstrass'schen Normalform überzugehen

$$\gamma = s + \frac{1}{3}\frac{F}{AK} = s + \frac{1}{3}\frac{AE + C^2 r^2}{AK}, \tag{103}$$

$$4\Gamma(\gamma) = S = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = 4s^3 - g_2 s - g_3, \tag{104}$$

wobei

$$e_1 > \frac{3AK-F}{3AK} > e_2 > s > e_3 > -\frac{3AK+F}{3AK}, \tag{105}$$

so erhält man

$$dt = -2\sqrt{\frac{A}{K}}\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{106}$$

$$g_2 = \frac{4}{3}\frac{F^2+3AKG}{A^2K^2}; \quad g_3 = \frac{4}{27}\frac{2F^3+9AKFG-27A^2K^2H}{A^3K^3},$$

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = \frac{16}{A^4K^4}\{F^2(G^2+4FH)+2AKG(2G^2+9FH)-A^2K^2H^2\}. \tag{107}$$

γ variirt zwischen $\gamma_{\max} = \gamma_2$ und $\gamma_{\min} = \gamma_3$ und s zwischen e_2 und e_3. Grenzfälle sind $\gamma_{\max} = +1$, falls $G' = -Cr$, und $\gamma_{\min} = -1$, falls $G' = Cr$; die Figurenaxe des Körpers beschreibt dann auf der Fläche einer Kugel mit dem Mittelpunkte O sog. Rosettekurven.

Ferner folgt

$$s = \wp(u); \quad u = \int_{\infty}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} + \int_{\infty}^{e_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} = \omega'' + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{A}}\,t, \tag{108}$$

worin $\omega'' = \omega + \omega'$ und 2ω die reelle, $2\omega'$ die rein imaginäre Periode eines primitiven Periodenpaares von $\wp(u)$ darstellen. Mit Anwendung der Bezeichnung

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{A}}$$

ergibt sich alsdann

$$\gamma = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + \wp(\omega'' + nt) = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + e_2 - \frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{\wp(nt)-e_2}. \tag{109}$$

Die oberen Extremwerte von γ

$$\gamma_{\max} = \gamma_2 = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + e_2$$

gehören den Zeiten $t = 0, \frac{2\omega}{n}, \frac{4\omega}{n} \cdots$ an, die unteren Extremwerte

$$\gamma_{\min} = \gamma_3 = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + e_3$$

den Zeiten $\frac{\omega}{n}, \frac{3\omega}{n}, \frac{5\omega}{n} \cdots$. Es ist $2\frac{\omega}{n} = 4\sqrt{\frac{A}{K}}\,\omega$ die entsprechende oder Nutationsperiode.

Zur Bestimmung von α, β, p und q hat man die Formeln (VI′) oder (VI″) und (14) im Art. 2, worin $\gamma = f(t)$ ist, und zur Bestimmung von $\gamma'', \gamma', \alpha'', \beta'', \alpha', \beta'$ die Formeln (19′) und (17) dort. Man beachtet wegen der vorkommenden Integrationen, dass

$$\frac{G'\gamma - Cr}{1-\gamma^2} = \frac{Cr - G'}{2(\gamma-1)} - \frac{Cr + G'}{2(\gamma+1)},$$

$$\frac{G' - Cr\gamma}{1-\gamma^2} = \frac{Cr - G'}{2(\gamma-1)} + \frac{Cr + G'}{2(\gamma+1)}.$$

Setzt man

$$(110)\qquad \begin{cases} \gamma - 1 = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + \wp(u) - 1 = \frac{F - 3AK}{3AK} + \wp(u) = \wp(u) - \wp(v), \\ \gamma + 1 = \frac{1}{3}\frac{F}{AK} + \wp(u) + 1 = \frac{F + 3AK}{3AK} + \wp(u) = \wp(u) - \wp(w), \end{cases}$$

so ist

$$(111)\qquad \wp(v) = \frac{3AK - F}{3AK};\quad \wp(w) = -\frac{3AK + F}{3AK};\quad \wp(v) - \wp(w) = 2$$

und

$$(112)\qquad e_1 > \wp(v) > e_2 > s > e_3 > \wp(w),$$

d.h. $v = \omega + \varepsilon_1 \omega'$, $w = \varepsilon_2 \omega'$ mit $0 < \varepsilon_1 < 1$, $0 < \varepsilon_2 < 1$, ferner

$$\wp'^2(v) = -\frac{4(Cr - G')^2}{AK};\quad \wp'^2(w) = -\frac{4(Cr + G')^2}{AK}$$

und, indem $|G'| > C|r|$ ist,

$$(113)\qquad \wp'(v) = \pm\frac{2(Cr - G')}{\sqrt{AK}}\,i;\quad \wp'(w) = \mp\frac{2(Cr + G')}{\sqrt{AK}}\,i,$$

wo das obere oder untere Zeichen gewählt wird, jenachdem G' negativ oder positiv ist.

Indem

$$(114)\qquad \int \frac{du}{\wp(u) - \wp(v)} = \frac{1}{\wp'(v)}\left\{\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}u\right\} + \text{Konst.}$$

erhält man mit Beachten obiger Ausdrücke

$$(115)\qquad \int \frac{G'\gamma - Cr}{A(1-\gamma^2)}\,dt = \mp i\log\sqrt{\frac{\sigma(u-v)\sigma(u-w)}{\sigma(u+v)\sigma(u+w)}} \mp i\left\{\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}u + \text{Konst.},$$

$$(116)\qquad \int \frac{G' - Cr\gamma}{A(1-\gamma^2)}\,dt = \mp i\log\sqrt{\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+w)}{\sigma(u+v)\sigma(u-w)}} \mp i\left\{\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} - \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}u + \text{Konst.},$$

und es sind dies bei angemessener Konstantenbestimmung reelle Grössen. Aus der Gleichung (VI″) folgt jetzt

$$(117)\qquad \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} = \left\{\frac{C}{A}r + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{K}{A}}\left[\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right]\right\}t + i\log\sqrt{\frac{\sigma(u-v)\sigma(u-w)}{\sigma(u+v)\sigma(u+w)}} + \text{Konst.} = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Die Gleichung (19″) gibt ebenso

$$(118)\qquad \pm\operatorname{arctg}\frac{\gamma'}{\gamma''} = \mp i\log\sqrt{\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+w)}{\sigma(u+v)\sigma(u-w)}} \mp i\left\{\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)} - \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}u + \text{Konst.} = \frac{\pi}{2} + \psi.$$

Es könnten alle diese Gleichungen so transformiert werden, dass nur reelle Grössen erscheinen, mag aber hier unterbleiben.

Zur Berechnung von $\alpha'', \beta'', \alpha', \beta'$ liefern die Gleichungen (17), nachdem $\alpha, \beta, \gamma', \gamma''$ gefunden,

$$(119)\qquad \begin{cases} \alpha'' = \frac{-\alpha\gamma\gamma'' \mp \beta\gamma'}{1-\gamma^2};\quad \beta'' = \frac{-\beta\gamma\gamma'' \pm \alpha\gamma'}{1-\gamma^2}, \\ \alpha' = \frac{-\alpha\gamma\gamma' \pm \beta\gamma''}{1-\gamma^2};\quad \beta' = \frac{-\beta\gamma\gamma' \mp \alpha\gamma''}{1-\gamma^2}. \end{cases}$$

Es erübrigt noch die Bestimmung von p und q aus der Gleichung (14). Dieselbe geht über in

$$p+iq=\frac{G'-Cr-Cr[\wp(u)-\wp(v)]+\frac{i}{2}\sqrt{AK}\,\wp'(u)}{A\sqrt{[\wp(v)-\wp(u)][\wp(u)-\wp(w)]}}e^{\left(i\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}= \tag{120}$$

$$=\frac{G'-Cr\gamma+iA\frac{d\gamma}{dt}}{A\sqrt{1-\gamma^2}}(\sin\varphi+i\cos\varphi).$$

Weil $\wp'(u)$ und $\frac{d\gamma}{dt}$ hier reell sind, folgt noch

$$\begin{cases} p=\dfrac{(G'-Cr\gamma)\sin\varphi-A\frac{d\gamma}{dt}\cos\varphi}{A\sqrt{1-\gamma^2}}, \\ q=\dfrac{(G'-Cr\gamma)\cos\varphi+A\frac{d\gamma}{dt}\sin\varphi}{A\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases} \tag{121}$$

Mit Anwendung der drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ gehen sie, indem

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{G'-Cr\gamma}{A(1-\gamma^2)}, \tag{122}$$

über in

$$p=\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\vartheta+\frac{d\vartheta}{dt}\cos\varphi;\quad q=\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\vartheta-\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi, \tag{123}$$

welche bekannte Gleichungen aus der Drehungstheorie sind. Auch hat man in ausgeführter Form

$$\begin{cases} p=\dfrac{(G'-Cr\gamma)\alpha\mp\beta\sqrt{A(1-\gamma^2)(E-K\gamma)-(G'-Cr\gamma)^2}}{A(1-\gamma^2)}, \\ q=\dfrac{(G'-Cr\gamma)\beta\pm\alpha\sqrt{A(1-\gamma^2)(E-K\gamma)-(G'-Cr\gamma)^2}}{A(1-\gamma^2)}, \end{cases} \tag{124}$$

wie übrigens aus den algebraischen Integralgleichungen unmittelbar hervorgeht. Das obere Zeichen gilt als γ wächst, das untere als γ abnimmt.

14. Die Gleichungen (32) und (37) haben beide die Form

$$A\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2=A(1-\gamma^2)(E'-K\gamma^2)-(G'-Cr\gamma)^2=R(\gamma), \tag{125}$$

worin

$$K=\pm Mkz_0^2 \tag{126}$$

je nach Umständen positiv oder negativ ist. Der Kürze wegen werde hier nur der Fall

$$K>0 \tag{127}$$

betrachtet, obgleich die Behandlung der Aufgabe dadurch unvollständig bleibt. Man sieht unmittelbar, dass $R(\gamma)$ dann eine im Intervalle $+1\cdots+\infty$ liegende reelle Wurzel γ_1 und eine im Intervalle $-\infty\cdots-1$ liegende reelle Wurzel γ_4 besitzt. Folglich gibt es beim mechanischen Problem noch zwei reelle Wurzeln γ_2 und γ_3 zwischen -1 und $+1$, so dass

$$\gamma_1>1>\gamma_2>\gamma>\gamma_3>-1>\gamma_4 \tag{128}$$

ist. Dasselbe wird mit Hülfe allgemeiner Transformationsgleichungen nachgewiesen. Es sei

(129) $$R(x) = Fx^4 + 4Gx^3 + 6Hx^2 + 4Ix + J,$$

so hat man mit

$$g_2 = FJ - 4GI + 3H^2,$$

$$g_3 = FHJ + 2GHI - FI^2 - JG^2 - H^3,$$

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2,$$

$$D = G^2 - FH; \quad E = F^2I - 3FGH + 2G^3$$

die Gleichung

(130) $$4\left(\frac{D}{F}\right)^3 - g_2\frac{D}{F} - g_3 = \frac{E^2}{F^3}$$

und die Bedingungen für vier reelle Wurzeln von $R(x)$ sind dass ausser $\Delta > 0$ zugleich

(131) $$D > 0; \quad 12D^2 - F^2g_2 > 0.$$

In unserem Falle ist

(132) $$F = AK; \quad 4G = 0; \quad 6H = -(AK + AE' + C^2r^2); \quad 4I = 2CrG'; \quad J = -G'^2$$

und berechnet sich

$$12g_2 = (AK + AE' + C^2r^2)^2 - 12AKG'^2,$$

$$216g_3 = (AK + AE' + C^2r^2)^3 + 36AK(AK + AE' + C^2r^2)G'^2 - 54AKC^2r^2G'^2,$$

$$6D = AK(AK + AE' + C^2r^2); \quad 2E = A^2K^2CrG',$$

$$16(12D^2 - F^2g_2) = A^2K^2\{(AK + AE' + C^2r^2)^2 + 4AKG'^2\}.$$

Gemäss den algebraischen Integralgleichungen ist

$$|G'| > C|r|; \quad E' - K\gamma^2 - Cr^2 > 0,$$

somit E' positiv und $AK + AE' + C^2r^2$ positiv, d.h. mit $K > 0$ auch $D > 0$, $12D^2 - F^2g_2 > 0$ und alle vier Wurzeln von $R(\gamma)$ reell.

Den Grenzfällen $\gamma_2 = +1$ und $\gamma_3 = -1$ entsprechen bez. $G' = Cr$ und $G' = -Cr$, wie im Art. 13. Man setzt jetzt

(133) $$\frac{dt}{A} = \pm\frac{d\gamma}{\sqrt{R(\gamma)}}; \quad \frac{t}{A} = \int_{\gamma}^{\gamma_2}\frac{d\gamma}{\sqrt{R(\gamma)}} = u$$

und transformiert zu WEIERSTRASS' Normalform. Aus (130) ist ersichtlich, dass man bei beliebiger Bestimmung des Zeichens von $\sqrt{AK}$ ein Argument w so wählen kann, dass in bezug auf die Funktion $\wp(u) = \wp(u, g_2, g_3)$

(134) $$\wp(w) = \frac{D}{F} = \frac{AK + AE' \pm C^2r^2}{6}; \quad \wp'(w) = -\frac{E}{F\sqrt{F}} = -\frac{1}{2}\sqrt{AK}CrG'.$$

Es seien mit e_1, e_2, e_3 alle hier reell und $e_1 > e_2 > e_3$ 2ω und $2\omega'$ bez. die reelle und die rein imaginäre Periode eines primitiven Periodenpaares von $\wp(u)$ sowie $\omega'' = \omega + \omega'$. Ich entlehne hier der Kürze wegen einige Transformationsformeln der Abhandlung von Frau KOWALEVSKI, die dieselben einer Vorlesung von WEIERSTRASS entnommen. Es sei $0 < w < 2\omega$; die Grössen

(135) $$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{F} - e_1}; \quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{F} - e_2}; \quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{F} - e_3}$$

sind reell und positiv. Mit Anwendung der Bezeichnungen

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)}; \qquad h_0' = \frac{\sigma_1(w)-\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_0'' = \frac{-\sigma_1(w)+\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)}; \qquad h_0''' = \frac{-\sigma_1(w)-\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

erhält man als Wurzeln des Ausdruckes $R(\gamma)$

$$\gamma_1 = -\frac{G}{F} - \frac{h_0'}{\sqrt{F}} = -\frac{h_0'}{\sqrt{AK}}; \quad \gamma_2 = -\frac{h_0''}{\sqrt{AK}}; \quad \gamma_3 = -\frac{h_0'''}{\sqrt{AK}}; \quad \gamma_4 = -\frac{h_0}{\sqrt{AK}} \tag{136}$$

und mit Benutzung noch der Bezeichnungen

$$h_1 = \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_2 = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_1' = \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_2)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_2' = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_2^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_1'' = \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_2'' = \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_1''' = \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$
$$h_2''' = \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

als Lösungen der Differentialgl.

$$du = \frac{d\gamma}{\sqrt{R(\gamma)}} \tag{137}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\gamma &= \gamma_1 - \frac{2}{\sqrt{AK}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'\wp(u)+h_2'},\\
\gamma &= \gamma_2 - \frac{2}{\sqrt{AK}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1''\wp(u)+h_2''},\\
\gamma &= \gamma_3 - \frac{2}{\sqrt{AK}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1'''\wp(u)+h_2'''},\\
\gamma &= \gamma_4 - \frac{2}{\sqrt{AK}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1\wp(u)+h_2}
\end{aligned}\right. \tag{138}$$

mit der Eigenschaft, dass sie sich für $u=0$ auf bez. $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und γ_4 reduzieren und übrigens gerade Funktionen von u sind. Unter diesen wählt man hier

$$\gamma = \gamma_2 - \frac{2}{\sqrt{AK}}\,\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1''\wp(u)+h_2''}, \tag{139}$$

welche dann zusammen mit

$$u = \frac{t}{A} \tag{140}$$

die Lösung der Aufgabe, γ als Funktion von t zu bestimmen, darstellt. Der grösste Wert von

γ ist γ_2 und entspricht den Zeiten $0,\ 2\omega A,\ 4\omega A \ldots$, der kleinste Wert γ_3 und kommt vor zu den Zeiten $\omega A,\ 3\omega A \ldots$. Die Nutationsperiode beträgt also $2\omega A$.

Bei der Fortsetzung der Rechnung nach den Formeln (6″) und (19″) erscheinen wieder elliptische Integrale dritter Art in Ausdrücken von der Form

$$\int \frac{L + M\wp(u)}{\wp(u) - N}\, du = Mu + \{L + M\wp(v)\} \int \frac{du}{\wp(u) - \wp(v)},$$

die nicht weiter ausgeführt werden sollen.

ACTA SOCIETATIS SCIENTARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 15.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER ROLLENDE BEWEGUNG

ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON
HJ. TALLQVIST

(Vorgelegt am 20. September 1926)

HELSINGFORS 1926

HELSINGFORS 1926
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATURGESELLSCHAFT

1. *Rollen einer beliebigen Kurve auf einer anderen.* Die Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, dass eine mit dem Systeme fest verbundene Kurve (Γ), die bewegliche Polkurve, ohne zu gleiten auf einer in der Ebene festen Kurve (C), der festen Polkurve, rollt. Der gemeinsame Berührungspunkt $C = \Gamma$ beider Kurven ist der augenblickliche Rotationsmittelpunkt oder Pol der Geschwindigkeiten. Die Kurven (C) und (Γ) können als Grundkurven von zwei Zylinderflächen (C) und (Γ) aufgefasst werden, deren Erzeugende senkrecht zur Ebene der Bewegung sind. Der Zylinder (Γ) rollt ohne zu gleiten auf dem Zylinder (C) und dreht sich dabei in jedem Augenblick um die gemeinsame Berührungslinie beider. Noch allgemeiner könnte man bei der folgenden Untersuchung den Zylinder (Γ) durch einen beliebigen Körper ersetzen, welcher eine auf die Erzeugenden des Zylinders (C) senkrechte Symmetrieebene der Massenverteilung besitzt. Der Kürze wegen werde hier meistens nur von den Kurven in der Zeichnungsebene gesprochen, auch wenn es sich um die dynamische Aufgabe der rollenden Bewegung des Zylinders (Γ) auf (C) unter dem Einfluss gegebener Kräfte handelt.

In allen hier betrachteten Fällen rollender Bewegung hat das bewegliche System nur einen Freiheitsgrad und das Integral der lebendigen Kraft bildet die Grundlage der Behandlung. In mehreren Fällen, in welchen die Lösung der Aufgabe mit Hülfe der elliptischen Funktionen gewonnen werden kann, ist sie tatsächlich durchgeführt worden.

Es seien die Gleichungen der festen Polkurve (C) (Fig. 1) in bezug auf das feste Koordinatensystem λ, μ in Parameterform

$$\lambda = \lambda(\varphi); \quad \mu = \mu(\varphi), \tag{1}$$

die Gleichungen der beweglichen Polkurve (Γ) in bezug auf die mit dem beweglichen System fest verbundenen Koordinatenaxen $O\xi, O\eta$, wieder in Parameterform,

$$\xi = \xi(\psi); \quad \eta = \eta(\psi), \tag{2}$$

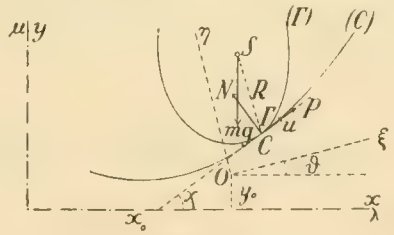


Fig. 1.

ferner x_0, y_0 die Koordinaten des Anfangspunktes O im xy-System und ϑ der Winkel zwischen der x- und der ξ-Axe.

Dass die Punkte C und Γ beider Kurven zusammenfallen, wird durch die Gleichungen

$$\lambda = x_0 + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta; \quad \mu = y_0 + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta \tag{3}$$

ausgedrückt, dass die beiden Linienelemente in denselben gemeinsam sind, ebenso durch die Formeln

$$d\lambda = \cos\vartheta\, d\xi - \sin\vartheta\, d\eta; \quad d\mu = \sin\vartheta\, d\xi + \cos\vartheta\, d\eta. \tag{4}$$

Künftig sollen (λ, μ) und (ξ, η) meistens die zusammenfallenden Punkte C und Γ bezeichnen.

Für die Linienelemente gilt

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2; \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2; \quad ds^2 = d\sigma^2, \tag{5}$$

für die Tangentenrichtung in C

$$\operatorname{tg}(\chi - \vartheta) = \frac{d\eta}{d\xi}, \tag{6 a}$$

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi} + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \dfrac{d\eta}{d\xi}\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{\sin\vartheta\, d\xi + \cos\vartheta\, d\eta}{\cos\vartheta\, d\xi - \sin\vartheta\, d\eta}, \tag{6 b}$$

und hieraus folgt mit $d\sigma > 0$

$$\sin\chi = \frac{\sin\vartheta\, d\xi + \cos\vartheta\, d\eta}{d\sigma}; \quad \cos\chi = \frac{\cos\vartheta\, d\xi - \sin\vartheta\, d\eta}{d\sigma}. \tag{6 c}$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) liefern Ausdrücke für x_0 und y_0 mittelst φ, ψ, ϑ; differenziert man die Gleichungen (1) und (2) und setzt ein in (6 b), so findet man eine Beziehung zwischen φ, ψ und ϑ, aus welcher ϑ genommen gedacht werde; man erhält dann Ausdrücke von x_0 und y_0 mittelst φ und ψ. Aus (1), (2) und der letzten Gleichung (5) ergibt sich durch Integration die Beziehung zwischen φ und ψ. Man bekommt alsdann Ausdrücke der Grössen x_0, y_0 und ϑ mittelst φ oder mittelst ψ sowie Ausdrücke von ξ und η mittelst φ oder von x und y mittelst ψ.

Die Wechselgeschwindigkeit u, mit welcher der Punkt C sich auf den Kurven (C) und (Γ) verschiebt, hat im $\xi\eta$-System die Komponenten

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}$$

und im xy-System die Komponenten

$$\frac{d\lambda}{dt} = \cos\vartheta\frac{d\xi}{dt} - \sin\vartheta\frac{d\eta}{dt}; \quad \frac{d\mu}{dt} = \sin\vartheta\frac{d\xi}{dt} + \cos\vartheta\frac{d\eta}{dt}, \tag{7}$$

es ist

$$u^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2. \tag{8}$$

Das bewegliche System hat die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}, \tag{9}$$

welche positiv gerechnet wird in der Richtung von der positiven x- zur positiven y-Axe, und eine Winkelbeschleunigung

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}, \tag{10}$$

in bezug auf deren Zeichen dasselbe gilt.

Ein beliebiger Punkt S des rollenden Systems, mit den Koordinaten ξ_s, η_s in bezug auf die ξ- und η-Axen, hat im xy-System die Koordinaten

$$(11)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \xi_s \cos\vartheta - \eta_s \sin\vartheta = \lambda + (\xi_s - \xi)\cos\vartheta - (\eta_s - \eta)\sin\vartheta, \\ y = y_0 + \xi_s \sin\vartheta + \eta_s \cos\vartheta = \mu + (\xi_s - \xi)\sin\vartheta + (\eta_s - \eta)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Indem man hier die rechten Seiten als Funktionen von φ oder von ψ ausdrückt, geben diese Formeln die Bahnkurve des Punktes S, sowie die Abhängigkeit zwischen den Lagen von S und C.

Die Geschwindigkeitskomponenten von S sind im xy-System

$$(12)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\{(\xi_s - \xi)\sin\vartheta + (\eta_s - \eta)\cos\vartheta\}\omega = -(y - \mu)\omega, \\ \frac{dy}{dt} = \{(\xi_s - \xi)\cos\vartheta - (\eta_s - \eta)\sin\vartheta\}\omega = (x - \lambda)\omega, \end{cases}$$

und zeigen, wie die Geschwindigkeit durch die Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω um das Momentanzentrum oder den Pol C entsteht. Auf die ξ-, η-Axen hat die Geschwindigkeit die Projektionen $-(\eta_s - \eta)\omega$; $(\xi_s - \xi)\omega$.

Für die Beschleunigungskomponenten des Punktes S im xy-System ergibt sich

$$(13)\qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \omega\frac{d\mu}{dt} - \{(\xi_s - \xi)\cos\vartheta - (\eta_s - \eta)\sin\vartheta\}\omega^2 - \{(\xi_s - \xi)\sin\vartheta + (\eta_s - \eta)\cos\vartheta\}\varepsilon, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega\frac{d\lambda}{dt} - \{(\xi_s - \xi)\sin\vartheta + (\eta_s - \eta)\cos\vartheta\}\omega^2 + \{(\xi_s - \xi)\cos\vartheta - (\eta_s - \eta)\sin\vartheta\}\varepsilon \end{cases}$$

und für ihre Projektionen auf die ξ- und η-Axen bez.

$$(14)\qquad \begin{cases} a_\xi = -\left\{\sin\vartheta\frac{d\lambda}{dt} - \cos\vartheta\frac{d\mu}{dt}\right\} - (\xi_s - \xi)\omega^2 - (\eta_s - \eta)\varepsilon, \\ a_\eta = -\left\{\cos\vartheta\frac{d\lambda}{dt} + \sin\vartheta\frac{d\mu}{dt}\right\} - (\eta_s - \eta)\omega^2 + (\xi_s - \xi)\varepsilon. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke zeigen die bekannte Tatsache, dass die Beschleunigung des Punktes S sich aus drei Komponenten zusammensetzt und zwar: 1) aus einer Beschleunigung von der Grösse $|\omega_1 \cdot |u|$, gleich dem Produkte der Winkelgeschwindigkeit und Wechselgeschwindigkeit, senkrecht auf der letzteren und nach derjenigen Seite von u gerichtet, nach der ω das System nicht dreht, 2) aus der Zentripetalbeschleunigung $CS \cdot \omega^2 = R\omega^2$ in der Richtung von S nach C, und 3) aus der Tangentialbeschleunigung $CS \cdot \varepsilon = R\varepsilon$, senkrecht auf CS in positivem Sinne.

Es werde noch die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der von S beschriebenen Bahnkurve berechnet. Man erhält mit $CS = R$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \left\{(\eta_s - \eta)\frac{d\xi}{dt} - (\xi_s - \xi)\frac{d\eta}{dt}\right\}\omega^2 + R^2\omega^3,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = R^2\omega^2.$$

Bezeichnet u_1 die Projektion der Wechselgeschwindigkeit u auf diejenige Richtung, welche mit CS einen rechten Winkel in negativem Sinne einschliesst, also

$$u_1 = \frac{\eta_s - \eta}{R}\frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi_s - \xi}{R}\frac{d\eta}{dt},$$

so findet man

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R} + \frac{u_1}{R^2\omega} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{u_1}{R\omega}\right), \tag{15}$$

worin $R\omega$ die mit ihrem Zeichen gerechnete Geschwindigkeit des Punktes S ist und der Krümmungsradius ϱ positiv in der Richtung von S nach C gerechnet wird. Er ist also gleich R, vermindert in dem Verhältnis $1 : \left(1 + \frac{u_1}{R\omega}\right)$, somit speziell für Punkte der Tangente in C gleich R und für Punkte der Normalen in C gleich

$$\varrho_n = \frac{\frac{R}{u}}{1 - \frac{}{R\omega}} = \frac{R^2\omega}{R\omega + u}. \tag{16}$$

In den Ausdruck (15) kann man die Krümmungsradien der Polkurven im Punkte C einführen. Es sei $d\sigma = ds$ positiv. Man berechnet aus (6 a) durch Differentiation

$$d\chi = \omega\, dt + \frac{d\xi\, d^2\eta - d\eta\, d^2\xi}{d\sigma^2},$$

somit

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{d\chi}{ds} = \frac{d\chi}{d\sigma} = \frac{\omega}{\frac{d\sigma}{dt}} + \frac{d\xi\, d^2\eta - d\eta\, d^2\xi}{d\sigma^3} = \frac{\omega}{u} + \frac{1}{\varrho_\gamma}$$

oder

$$\frac{\omega}{u} = \frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho_\gamma}; \quad u = -\frac{\varrho_\gamma \varrho_c}{\varrho_c - \varrho_\gamma}\omega, \tag{17}$$

und erhält alsdann aus (15), wenn der Winkel zwischen u und CS mit (μ, R) bezeichnet wird,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{\sin(u, R)}{R^2\left(\frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho_\gamma}\right)} = \frac{1}{R} - \frac{\varrho_\gamma \varrho_c \sin(u, R)}{R^2(\varrho_c - \varrho_\gamma)}, \tag{18}$$

und speziell für einen Punkt der Normalen in C

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2\left(\frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{\varrho_\gamma}\right)} = \frac{1}{R} - \frac{\varrho_\gamma \varrho_c}{R^2(\varrho_c - \varrho_\gamma)}. \tag{19}$$

Die Krümmungsradien ϱ_c und ϱ_γ werden positiv gerechnet, wenn die Kurven (C) und (Γ) konkav nach der positiven y-Richtung sind.[1] Man nennt auch

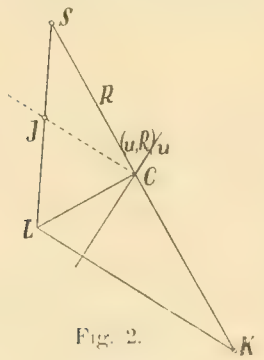


Fig. 2.

[1] Um den Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve von S zu bekommen, konstruiert man zunächst (Fig. 2) gemäss (17) $-\frac{u}{\omega}$ als vierte Proportionale zu ϱ_c, $\varrho_c - \varrho_\gamma$ und ϱ_γ, setzt es auf der Normalen in C als CJ ab, wobei J der sog. Wendepol ist. Dann verbindet man S mit J, zieht in C eine Senkrechte CL auf CS und durch deren Schnittpunkt L mit SJ die Parallele LK zu CJ. Alsdann ist deren Schnittpunkt K mit SC der gesuchte Krümmungsmittelpunkt, wie es ja die Formel (18) einfach ergibt.

$$\frac{1}{\varrho_\gamma} \quad \frac{1}{\varrho_c}$$

relative Krümmung der Kurve (Γ) in bezug auf die Kurve (C). In der Figur 1 ist $\varrho_c > \varrho_\gamma > 0$ und die Kurve (Γ) rollt innerhalb der Kurve (C). Dasselbe würde mit $0 > \varrho_\gamma > \varrho_c$ der Fall sein. Wäre $\varrho_\gamma > 0 > \varrho_c$ oder $\varrho_c > 0 > \varrho_\gamma$, so würde (Γ) auf der konvexen Seite von (C) rollen, und wäre $\varrho_\gamma > \varrho_c > 0$ oder $0 > \varrho_c > \varrho_\gamma$, so würde (Γ) mit seiner konkaven Seite auf der konvexen Seite von (C) rollen.

Das oben dargestellte enthält natürlich nichts wesentlich neues, war aber notwendig schon wegen der zu gebrauchenden Bezeichnungen. Für näheres in bezug auf die ebene Bewegung und die rollende Bewegung, was die kinematische Seite betrifft, sehe man z. B. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. I.

Es sei noch bemerkt, dass man bei der Untersuchung der Bewegung eines einzelnen Punktes S gewöhnlich den Anfangspunkt O in denselben verlegen kann. Es ist dann $\xi_s = 0$, $\eta_s = 0$ und $x = x_0, y = y_0$, und man erhält statt (11)

$$\text{(20 a)} \qquad \begin{cases} x = x_0 = \lambda - \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta, \\ y = y_0 = \mu - \xi \sin\vartheta - \eta \cos\vartheta, \end{cases}$$

sowie umgekehrt

$$\text{(20 b)} \qquad \begin{cases} \xi = -\{(x-\lambda)\cos\vartheta + (y-\mu)\sin\vartheta\}, \\ \eta = -\{-(x-\lambda)\sin\vartheta + (y-\mu)\cos\vartheta\}. \end{cases}$$

2. *Die dynamische Aufgabe.* Das Rollen ohne Gleiten des Zylinders (Γ) auf dem Zylinder (C) oder, wie wir sagen werden, der Kurve (Scheibe) (Γ) auf der Kurve (Scheibe) (C) soll erfolgen unter dem Einfluss seiner Schwere im Schwerpunkte S. Eine genügende Reibung soll das Gleiten verhindern, oder auch eine um (Γ) gelegte Schnur. Die Masse des Zylinders (Γ) sei m und kann auch teilweise oder ganz ausserhalb der Zylinderfläche (Γ) sich befindend gedacht werden, das Trägheitsmoment in bezug auf eine den Erzeugenden des Zylinders parallele Axe durch S, gleich K. Die kinetische Energie des rollenden Körpers ist dann

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\} + \tfrac{1}{2} K \omega^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m \left\{ \left[\frac{dx_0}{dt} - (\xi_s \sin\vartheta + \eta_s \cos\vartheta)\omega\right]^2 + \left[\frac{dy_0}{dt} + (\xi_s \cos\vartheta - \eta_s \sin\vartheta)\omega\right]^2 \right\} + \tfrac{1}{2} K \omega^2 = \\ &= \tfrac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 \right\} + \tfrac{1}{2} \left\{ m(\xi_s^2 + \eta_s^2) + K \right\} \omega^2 + \\ &\quad + m\omega \left\{ -\frac{dx_0}{dt}(\xi_s \sin\vartheta + \eta_s \cos\vartheta) + \frac{dy_0}{dt}(\xi_s \cos\vartheta - \eta_s \sin\vartheta) \right\} = \\ &= \tfrac{1}{2} m \left\{ \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 \right\} + \tfrac{1}{2} \left\{ m(\xi_s^2 + \eta_s^2) + K \right\} \omega^2 + m\omega \left\{ (x - x_0)\frac{dy_0}{dt} - (y - y_0)\frac{dx_0}{dt} \right\} \\ &= \tfrac{1}{2} m \left\{ (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 \right\} \omega^2 + \tfrac{1}{2} K \omega^2 = \tfrac{1}{2}(mR^2 + K)\omega^2, \end{aligned}$$

worin $K + m(\xi_s^2 + \eta_s^2)$ das Trägheitsmoment in bezug auf O, $K + mR^2$ das veränderliche Trägheitsmoment in bezug auf C sind. Für die kinetische Energie kann man Ausdrucke von der Form

(22 a) $$L = \Phi(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad \text{oder} \quad L = \Psi(\psi)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

oder noch mit Anwendung von (11) von der Form

(22 b) $$L = F(y)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

aufstellen. Wenn die Schwere mg die wirkende Kraft und die y-Axe vertikal nach oben gerichtet ist, so ist das Energie-Integral der Bewegung

(23 a) $$L - L_0 = -mg(y - y_0)$$

oder

(23 b) $$L + mgy = \text{Konst.} = h,$$

und gibt somit z. B. eine Differentialgleichung für y als Funktion t (oder für φ oder ψ u. s. w.). Die Aufgabe führt speziell auf elliptische Funktionen, wenn man $F(y)$ in die Form eines Quotienten oder eines Produktes von zwei Faktoren setzen kann, von welchen der eine das Quadrat einer rationalen Funktion von y, der andere eine ganze Funktion von y vom zweiten oder dritten Grade ist.

Durch Anwendung des Satzes von der Bewegung des Schwerpunktes findet man den Druck N im Stützpunkte oder in der Stützlinie C sowie die tangentielle Kraft P, welche erforderlich ist um das Gleiten zu verhindern. Es seien die in der Fig. 1 angegebenen Richtungen von N und P die positiven. Man hat dann

(24) $$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\sin\chi + P\cos\chi, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + N\cos\chi + P\sin\chi \end{cases}$$

und erhält durch Projektion auf die Richtungen von N und P, wenn noch a_s die totale Beschleunigung von S bezeichnet,

(25) $$\begin{cases} N = mg\cos\chi - m\left(\sin\chi\frac{d^2x}{dt^2} - \cos\chi\frac{d^2y}{dt^2}\right) = mg\cos\chi + ma_s\cos(a_s, N), \\ P = mg\sin\chi + m\left(\cos\chi\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\chi\frac{d^2y}{dt^2}\right) = mg\sin\chi + ma_s\sin(a_s, N), \end{cases}$$

wie übrigens ohne weiteres direkt folgt. Man berechnet noch auf Grund der Gleichungen (6 c), (13) und (14) oder schreibt unmittelbar hin, mit Kenntnis der drei Komponenten von a_s,

(26) $$\begin{cases} a_s\cos(a_s, N) = -a_\xi\frac{d\eta}{d\sigma} + a_\eta\frac{d\xi}{d\sigma} = -\omega u - R\omega^2\cos(N, R) + R\varepsilon\sin(N, R), \\ a_s\sin(a_s, N) = a_\xi\frac{d\xi}{d\sigma} + a_\eta\frac{d\eta}{d\sigma} = -R\omega^2\sin(N, R) - R\varepsilon\cos(N, R), \end{cases}$$

und erhält damit aus (25)

(27) $$\begin{cases} N = mg\cos\chi - m\omega u - mR\omega^2\cos(N, R) + mR\varepsilon\sin(N, R), \\ P = mg\sin\chi - mR\omega^2\sin(N, R) - mR\varepsilon\cos(N, R). \end{cases}$$

Es ist gemäss (17)

(28) $$-m\omega u = \frac{m\omega^2}{\frac{1}{\varrho_\gamma} - \frac{1}{\varrho_c}} = m\omega^2\frac{\varrho_\gamma\varrho_c}{\varrho_c - \varrho_\gamma}$$

und

(29) $$(N, R) = \frac{\pi}{2} - (u, R).$$

In einem Punkte, wo N Null wird und sein Zeichen ändert, hört entweder die Berührung beim Rollen auf, wenn sie nicht in irgend einer Art sichergestellt ist, oder tritt die Bedingung für ihre Möglichkeit in Kraft.

3. *Andere Kraftgesetze.* Statt der Schwere als wirkende Kraft könnten auch andere Kraftgesetze benutzt werden, welche übrigens zum Teil mechanisch verwirklicht werden können. Wenn der rollende Zylinder in seinem Schwerpunkte S von einer Kraft angegriffen wird, welche senkrecht auf einer festen Geraden in der Normalebene von S ist und durch eine gegebene Funktion des Abstandes von dieser Geraden dargestellt wird, so erhält man, wenn man die Gerade zur x-Axe wählt und die Kraft, in der Richtung nach der x-Axe positiv genommen, mit $mf(y)$ bezeichnet, als elementare Arbeit derselben

$$\cdot mf(y)\,dy,$$

und als totale Arbeit

(30) $$-m\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy,$$

so dass die Bewegungsgleichung wird

(31 a) $$L - L_0 = -m\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy$$

oder

(31 b) $$L + m\int^{y} f(y)\,dy = \text{Konst.} = h.$$

Für L kann man hier den Ausdruck (22 b) nehmen. Die Aufgabe führt auf elliptische Funktionen, wenn

$$\frac{h - m\int^{y} f(y)\,dy}{F(y)}$$

nach Absonderung derjenigen Faktoren, welche Quadrate von rationalen Funktionen von y sind, ein Polynom in y vom dritten oder vierten Grade zurücklässt.

Wenn im Schwerpunkte S in der Fig. 1 eine Kraft in der Richtung nach einem festen Punkte (a, b) wirkt, welche eine Funktion $mf(r)$ des Abstandes

$$r = +\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ist, so ergibt sich die totale Arbeit

(32 a) $$-m\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr,$$

und dieser Ausdruck kann mit Hülfe von (11) z. B. in eine Form

(32 b) $$-m\int_{\varphi_0}^{\varphi} f_1(\varphi)\,d\varphi$$

transformiert werden. Als Bewegungsgleichung findet man dann mit Anwendung von (22 a)

(33 a) $$L - L_0 = \Phi(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - L_0 = -m\int_{\varphi_0}^{\varphi} f_1(\varphi)\,d\varphi$$

oder

(33 b) $$L + m\int^{\varphi} f_1(\varphi)\,d\varphi = \text{Konst.} = h.$$

Die Veränderliche φ braucht nicht eine Länge zu sein, sondern könnte z. B. auch ein Winkel sein. In speziellen Fällen können auch jetzt elliptische Funktionen auftreten.

Die einfachsten Fälle ergeben sich, wenn $f(y)$ und $f(r)$ proportional der Entfernung sind, d. h. $f(y) = ky$ oder $f(r) = kr$ ist. Man erhält dann in (30) und (32 a) bez.

$$-m\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy = -\tfrac{1}{2}mk(y^2 - y_0^2),$$

$$-m\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = -\tfrac{1}{2}mk(r^2 - r_0^2).$$

Die Kraft könnte aber auch z. B. umgekehrt proportional dem Quadrate oder der dritten Potenz des Abstandes sein u. s. w.

Auch die Ausdrücke (25) werden einfach erhalten; die Modifikation tritt in den ersten Gliedern rechts ein.

Die Aufgabe könnte ferner so verallgemeinert werden, dass die Kraft in irgend einem anderen Punkte des rollenden Zylinders als dem Schwerpunkt angreift.

4. *Rollen längs einer Geraden.* Als Gleichungen der Geraden werde genommen

(34) $$\lambda = \varphi\cos\alpha, \quad \mu = \varphi\sin\alpha,$$

so dass sie durch den festen Anfangspunkt geht und φ den Abstand von demselben bezeichnet. Dabei ist

(35) $$\frac{d\lambda}{dt} = \cos\alpha\,\frac{d\varphi}{dt}; \quad \frac{d\mu}{dt} = \sin\alpha\,\frac{d\varphi}{dt},$$

(36) $$|u| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|; \quad ds = d\varphi; \quad s = \varphi; \quad \chi = \alpha$$

sowie gemäss (4) und (35)

(37) $$d\xi = \cos(\alpha - \vartheta)\,d\varphi; \quad d\eta = \sin(\alpha - \vartheta)\,d\varphi.$$

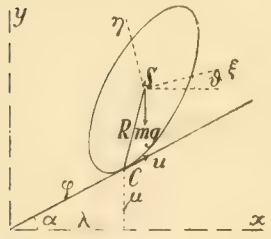


Fig. 3.

Die Gleichungen (2) geben

(38) $$d\xi = \xi'(\psi)\,d\psi = \xi'\,d\psi; \quad d\eta = \eta'(\psi)\,d\psi = \eta'\,d\psi,$$

so dass die Gleichung

(39) $$\frac{\eta'(\psi)}{\xi'(\psi)} = \frac{\eta'}{\xi'} = \operatorname{tg}(\alpha - \vartheta)$$

die Beziehung zwischen ψ und ϑ liefert. Gemäss (5) sei ferner

(40) $$\varphi - \varphi_0 = \sigma - \sigma_0 = \int\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \int_{\psi_0}^{\psi}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\,d\psi,$$

woraus also nach Ausführung der Integration die Abhängigkeit zwischen φ und ψ hervorgeht. Man kann dann ϑ und ψ und nachher auch ξ und η als Funktionen von φ ausdrücken.

Der bewegliche Anfangspunkt O möge mit S zusammenfallen; die Gleichungen (20) geben dann

$$\begin{cases} x = x_0 = \varphi \cos\alpha - \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta, \\ y = y_0 = \varphi \sin\alpha - \xi \sin\vartheta - \eta \cos\vartheta \end{cases} \tag{41}$$

und

$$\begin{cases} \xi = -x\cos\vartheta - y\sin\vartheta + \varphi\cos(\alpha-\vartheta), \\ \eta = \quad x\sin\vartheta - y\cos\vartheta + \varphi\sin(\alpha-\vartheta). \end{cases} \tag{42}$$

Weil $\varrho_x = \infty$ ist, folgt aus (17) für die Wechselgeschwindigkeit

$$u = -\varrho_y \omega, \tag{43}$$

und der Ausdruck (18) für die Krümmung der von S beschriebenen Bahnkurve vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{\varrho_y \sin(u,R)}{R^2}, \quad \text{woraus} \quad \varrho = \frac{R^2}{R - \varrho_y \sin(u,R)}. \tag{44}$$

Die Konstruktion von $\varrho = SK$ gemäss Fig. 2 ist auch jetzt anwendbar; der Wendepol J ist der Krümmungsmittelpunkt der rollenden Kurve.

In bezug auf die dynamische Aufgabe hat man, wenn die Schwere die wirkende Kraft ist,

$$L = \frac{1}{2}\{m(\xi^2+\eta^2) + K\}\omega^2, \tag{45}$$

$$L + mgy = \text{Konst.} = h, \tag{46}$$

und gemäss (27)

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + m\varrho_y\omega^2 - mR\omega^2\cos(N,R) + mR\varepsilon\sin(N,R), \\ P = mg\sin\alpha - mR\omega^2\sin(N,R) - mR\varepsilon\cos(N,R), \end{cases} \tag{47}$$

worin

$$(N,R) = \frac{\pi}{2} + \alpha - (R,x). \tag{48}$$

Die Gerade, auf welcher die Kurve rollt, sei speziell h o r i z o n t a l. Dann ist $\alpha = 0$ und es folgt $\mu = 0$, $\lambda = \varphi = s$, ferner aus (37) und (39)

$$d\xi = \cos\vartheta\, d\varphi\,; \quad d\eta = -\sin\vartheta\, d\varphi \tag{49}$$

$$\frac{\eta'(\psi)}{\xi'(\psi)} = \frac{\eta'}{\xi'} = -\operatorname{tg}\vartheta, \tag{50}$$

während die Formeln (40), (44), (45) und (46) keine Änderung erleiden, und statt (41) tritt

$$x = \varphi - \xi\cos\vartheta + \eta\sin\vartheta\,; \quad y = -\xi\sin\vartheta - \eta\cos\vartheta. \tag{51}$$

In den Formeln (47) ersetzt man die beiden ersten Glieder rechts durch bez. mg und 0, und die Formel (48) wird

$$(N,R) = \frac{\pi}{2} - (R,x) = \frac{\pi}{2} - (u,R). \tag{52}$$

Wenn der längs der horizontalen Geraden rollende Zylinder von einer Kraft angegriffen wird, welche nach dem festen Punkte $\lambda = 0$, $\mu = b$ gerichtet und der Entfernung proportional ist, so tritt statt (46) die Gleichung

(53 a) $$\tfrac{1}{2}\{m(\xi^2+\eta^2)+K\}\omega^2+\tfrac{1}{2}mk\{x^2+(y-b)^2\}=\text{Konst.}=h$$

oder, mit Anwendung von (51),

(53 b) $$\tfrac{1}{2}\{m(\xi^2+\eta^2)+K\}\omega^2+$$
$$+\tfrac{1}{2}mk\{\xi^2+\eta^2+\varphi^2+b^2-2\xi(\varphi\cos\vartheta-b\sin\vartheta)+2\eta(\varphi\sin\vartheta+b\cos\vartheta)\}=h.$$

5. *Rollen eines Kreises auf einer Geraden.* Es sei α der Neigungswinkel der Geraden, a der Radius des Kreises und e der Abstand des Punktes S vom Kreismittelpunkte M (Fig. 4). Als Gleichungen des Kreises werde genommen

(54) $$\xi+e=-a\cos\psi;\quad \eta=-a\sin\psi.$$

Gemäss (39) wird alsdann

$$-\cot\psi=\operatorname{tg}(\alpha-\vartheta),$$

d. h.

(55) $$\vartheta=\tfrac{\pi}{2}+\alpha-\psi.$$

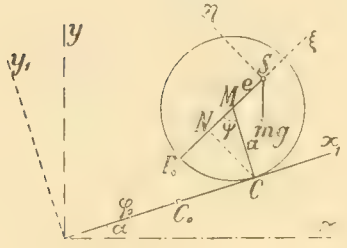


Fig. 4.

Wenn die Werte $\psi=0$ und $\sigma=0$ zusammengehören, so folgt aus (40)

(56) $$\sigma=a\psi=\varphi-\varphi_0.$$

Aus (41) erhält man die Koordinaten des Punktes S im xy-System

(57) $$\begin{cases} x=\varphi_0\cos\alpha-a\sin\alpha+a\psi\cos\alpha-e\sin(\alpha-\psi),\\ y=\varphi_0\sin\alpha+a\cos\alpha+a\psi\sin\alpha+e\cos(\alpha-\psi).\end{cases}$$

In bezug auf ein Koordinatsystem x_1, y_1, in welchem die Gerade x_1-Axe ist, ergibt sich einfacher

(58) $$x_1=\varphi_0+a\psi+e\sin\psi;\quad y_1=a+e\cos\psi.$$

Indem man ψ aus diesen Gleichungen eliminiert, findet man

(59) $$x_1=\varphi_0\pm\sqrt{e^2-(y_1-a)^2}+a\arccos\frac{y_1-a}{e}.$$

Diese Gleichung stellt eine Zykloide dar, wenn $e=a$ (oder $e=-a$) und der Punkt S auf dem rollenden Kreise liegt, eine verkürzte Zykloide, wenn derselbe innerhalb des Kreises liegt ($|e|<a$), und eine verlängerte Zykloide, wenn S ausserhalb des Kreises sich befindet ($|e|>a$). Die Zykloide hat Spitzen auf der Grundgeraden, die verkürzte Zykloide ist eine wellenförmige Kurve und die verlängerte Zykloide schneidet sich selbst in ihren Doppelpunkten. Die Normale der Kurve hat die Richtung SC und für deren Krümmungshalbmesser folgt aus (44) mit

(60) $$R=\sqrt{a^2+2ae\cos\psi+e^2}$$

(61) $$\varrho=\frac{(a^2+2ae\cos\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}{e(e+a\cos\psi)}.$$

Bezeichnet N die Projektion von C auf SM, so ist auch

(62) $$\varrho = \frac{SC^3}{SM \cdot SN}.$$

Der Ausdruck (61) gibt $\varrho = \infty$, wenn $c = 0$, d. h. für den Mittelpunkt M des Kreises, der sich in einer Geraden bewegt, sowie mit $c = a$ den Krümmungshalbmesser der Zykloide

(63) $$\varrho = 2a\sqrt{2(1+\cos\psi)} = 2SC,$$

bekanntlich gleich der doppelten Normalen SC.

Wenn der Zylinder oder die Kreisscheibe unter dem Einfluss seiner exzentrisch in S wirkenden Schwere rollt, hat man mit

(64) $$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}$$

(65) $$L = \frac{1}{2}\left\{m(a^2 + 2ac\cos\psi + c^2) + K\right\}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

und bekommt die Bewegungsgleichung

(66) $$\frac{1}{2}\left\{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K\right\}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + mg\left\{\varphi_0 \sin\alpha + a\cos\alpha + a\psi\sin\alpha + c\cos(\alpha - \psi)\right\} = h.$$

Beiläufig mag hier daran erinnert werden, dass man vor der Erfindung der Züge in Kanonen und Anwendung von um die Längsaxe rotierenden Langgeschossen einige Zeit als Geschoss hohle Kugeln mit exzentrischem Schwerpunkt benutzte, die eine Rotation um eine Queraxe annahmen. Die treibende Kraft ist jedoch hierbei der veränderliche Druck der Pulvergase, in Vergleich womit die Wirkung der Schwere im Lauf fast unmerklich bleibt. Die Resultierende der Druckkräfte geht durch den Mittelpunkt der Kugel, verursacht aber eine Rotation, weil der Schwerpunkt vom Mittelpunkt verschieden ist. Übrigens ist ja diese Bewegung kein Rollen ohne Gleiten, aber man könnte bei der Kreisscheibe z. B. den Fall betrachten, dass eine der Grundgeraden parallele unveränderliche Kraft P im Mittelpunkte M der Scheibe wirken würde. Die Arbeit einer aufwärts gerichteten Kraft P ist

$$P\sigma = P(\varphi - \varphi_0) = Pa\psi$$

und die Bewegungsgleichung wird, jetzt unabhängig von der Neigung der Geraden,

(67) $$\frac{1}{2}\left\{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K\right\}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - Pa\psi = h,$$

jedoch nicht genügend einfach um eine Integration zu erlauben.

Auch die Gleichung (66) ist sehr kompliziert und vereinfacht sich wesentlich nur, wenn S in den Mittelpunkt M des Kreises fällt oder wenn die Gerade horizontal ist. In jenem Falle erhält man das gleichförmig verzögerte (oder bei negativem α gleichförmig beschleunigte) Rollen entlang der Geraden gemäss der Gleichung

(68) $$\varphi - \varphi_0 = \text{Konst.} - \frac{1}{2}\frac{m}{m + \frac{K}{a^2}} g\sin\alpha\,(t - t_0)^2.$$

Die Bewegung des Schwerpunktes geschieht somit mit einer im Verhältnis $m : \left(m + \frac{K}{a^2}\right)$ verminderten Schwerebeschleunigung; beispielsweise bei der homogenen rollenden Kugel im Verhältnis $\frac{5}{7}$, beim homogenen Zylinder im Verhältnis $\frac{2}{3}$.

Beim Rollen auf einer Horizontalebene ist $\alpha = 0$ und

$$y = a + e\cos\psi \tag{69}$$

und die Gleichung (66) gibt, wenn man noch y als Variable einführt,

$$\frac{m(e^2 - a^2 + 2ay) + K}{e^2 - (y-a)^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2(h - mgy). \tag{70}$$

Diese Aufgabe führt somit auf elliptische Funktionen und wird im Art. 19 eingehender behandelt.

Hier sollen noch in diesem zuletzt betrachteten Falle der Druck N und die tangentiale Kraft P berechnet werden. Aus (47) ergibt sich jetzt

$$\begin{cases} N = mg - me\omega^2\cos\psi + me\varepsilon\sin\psi, \\ P = -mc\omega^2\sin\psi - m\varepsilon(a + e\cos\psi). \end{cases} \tag{71}$$

Man hat gemäss (66), wo $\alpha = 0$ zu setzen ist,

$$\omega^2 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2(h - mga - mge\cos\psi)}{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K} \tag{72}$$

und bildet hieraus durch Differentiation

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\{2ha + g[m(e^2 - a^2) + K]\}me\sin\psi}{\{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K\}^2}. \tag{73}$$

Indem man diese Werte in (71) einsetzt, findet man, wenn ausserdem noch y statt ψ benutzt wird,

$$\begin{cases} N = mg - \dfrac{2m(y-a)(h-mgy)}{m(e^2 - a^2 + 2ay) + K} - \dfrac{m^2[e^2 - (y-a)^2]\{2ha + g[m(e^2 - a^2) + K]\}}{\{m(e^2 - a^2 + 2ay) + K\}^2}, \\ P = \mp m\sqrt{e^2 - (y-a)^2}\left\{\dfrac{2(h-mgy)}{m(e^2 - a^2 + 2ay) + K} - \dfrac{my\{2ha + g[m(e^2 - a^2) + K]\}}{\{m(e^2 - a^2 + 2ay) + K\}^2}\right\}. \end{cases} \tag{74}$$

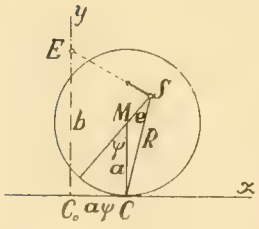


Fig. 5.

Zuletzt werde der Fall behandelt, dass der Kreis auf einer horizontalen Geraden rollt (Fig. 5), unter dem Einfluss einer exzentrisch in S wirkenden Kraft, welche nach dem Zentrum E mit den Koordinaten $\lambda = 0$, $\mu = b$ gerichtet und der Entfernung r von diesem Zentrum proportional ist. Die Bewegungsgleichung wird gemäss (53 a), wenn k jetzt durch k^2 ersetzt wird,

$$\tfrac{1}{2}\{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K\}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mk^2\{(a\psi + e\sin\psi)^2 + (b - a - e\cos\psi)^2\} = h, \tag{75}$$

und speziell mit $e = 0$

$$\tfrac{1}{2}(ma^2 + K)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h - \tfrac{1}{2}mk^2\{a^2\psi^2 + (b-a)^2\}, \tag{76}$$

oder noch mit $b = a$, was wie ersichtlich, keinen wesentlichen Unterschied macht,

$$\tfrac{1}{2}(ma^2 + K)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h - \tfrac{1}{2}mk^2a^2\psi^2. \tag{77}$$

Wählt man $x = a\psi$ zur Veränderlichen, so hat man

$$\left(m+\frac{K}{a^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2h - mk^2x^2, \tag{78}$$

worin h positiv sein muss. Bei der Integration findet man, wenn noch der Kürze wegen

$$M = m + \frac{K}{a^2} \tag{79}$$

gesetzt wird,

$$x = \sqrt{\frac{2h}{m}}\,\frac{1}{k}\sin\left\{\sqrt{\frac{m}{M}}\,k(t-t_0)\right\}, \tag{80}$$

d. h. es handelt sich um harmonische Rollschwingungen mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{k}\sqrt{\frac{M}{m}} = \frac{2\pi}{k}\sqrt{1+\frac{K}{ma^2}}. \tag{81}$$

Beispielsweise ist bei der homogenen Kreisscheibe

$$T = \sqrt{6}\,\frac{\pi}{k}. \tag{82}$$

Der Vorgang ändert sich nicht, wenn der Körper ausserdem von seiner Schwere angegriffen wird; diese wird durch einen ebenso grossen Druck N aufgehoben.

Man behandelt auch einfach den Fall, in welchem die Kraft mk^2r eine abstossende Kraft ist.

6. *Rollen einer Parabel auf einer horizontalen Geraden.* Die Betrachtung werde beschränkt auf Punkte S, welche auf der Axe der Parabel gelegen sind (Fig. 6). Die Gleichungen der Parabel in einem Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte in S und der ξ-Axe entlang der Parabelaxe sind, wenn a den Abstand zwischen S und dem Scheitel T der Parabel bezeichnet,

$$\xi = \psi; \quad \eta^2 = 2p(\psi + a), \tag{83}$$

worin p positiv gedacht wird. Gemäss (50) erhält man

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{p}{\eta} = \mp\sqrt{\frac{p}{2(\psi+a)}}. \tag{84}$$

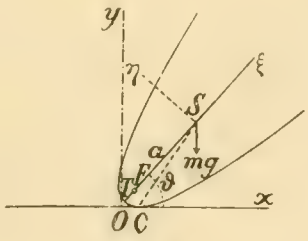


Fig. 6.

Für die Länge des Parabelbogens σ, vom Scheitel T gerechnet, gilt

$$\sigma = \mp\int_{-a}^{\psi}\sqrt{1+\frac{p^2}{\eta^2}}\,d\psi = \mp\frac{1}{p}\int_0^{\eta}\sqrt{p^2+\eta^2}\,d\eta = \mp\frac{1}{2}\left\{\frac{\eta}{p}\sqrt{p^2+\eta^2} + p\log\frac{\eta+\sqrt{p^2+\eta^2}}{p}\right\}. \tag{85}$$

Mit der Koordinatenwahl in der Figur muss das Zeichen — genommen werden, so dass gemäss (40) erhalten wird

$$\sigma = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\eta}{p}\sqrt{p^2+\eta^2} + p\log\frac{\eta+\sqrt{p^2+\eta^2}}{p}\right\} = \varphi, \tag{86}$$

worin statt η auch ψ eingeführt werden könnte.

Als Bahngleichungen des Punktes S geben die Formeln (51) jetzt

$$x = \frac{(p-2a)\,\eta}{2\sqrt{p^2+\eta^2}} - \frac{1}{2}p\log\frac{\eta+\sqrt{p^2+\eta^2}}{p}; \quad y = \frac{\eta^2+2pa}{2\sqrt{p^2+\eta^2}}. \tag{87}$$

Wenn $a = \frac{1}{2}p$, d. h. wenn der Punkt S mit dem Brennpunkt der Parabel zusammenfällt, so erhält man einfacher

(88 a) $$x = -\frac{1}{2}p\log\frac{\eta+\sqrt{p^2+\eta^2}}{p}; \quad 2y = \sqrt{p^2+\eta^2}$$

und nach Elimination von η

(88 b) $$y = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right),$$

d. h. das bekannte Resultat, dass der Brennpunkt der rollenden Parabel eine gewöhnliche Kettenlinie beschreibt, deren Direktrix die Tangente der Parabel im Scheitelpunkte in der symmetrischen Lage ist.

Auch aus den Gleichungen (67) könnte man η eliminieren, was jedoch unterbleiben mag. Ferner könnte man die beim Rollen entstehende Kurve eine verlängerte oder verkürzte Kettenlinie nennen, je nachdem $a > \frac{1}{2}p$ oder $a < \frac{1}{2}p$ ist, aber auch negative Werte von a können gewählt werden. Mit $a = 0$ erhält man als Gleichung der vom Parabelscheitel beschriebenen Kurve

(89) $$x = \frac{1}{2}\sqrt{2y}\sqrt{\sqrt{p^2+y^2}-y} - \frac{1}{2}p\log\frac{\sqrt{\sqrt{p^2+y^2}+y}\left\{\sqrt{\sqrt{p^2+y^2}+y}+\sqrt{2y}\right\}}{p}.$$

Dieselbe hat eine Spitze im Punkte O. Bei negativen a-Werten hat die Rollkurve einen Doppelpunkt.

Bei der dynamischen Aufgabe, wenn eine parabolische Scheibe unter dem Einfluss der Schwere rollt, berechnet man in dem allgemeinen Falle

(90) $$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{p}{p^2+\eta^2}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\eta^4 + 4p(p-a)\eta^2 + 4p^2a^2}{4p^2},$$

(91) $$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{m}{4p^2}[\eta^4 + 4p(p-a)\eta^2 + 4p^2a^2] + K\right\}\frac{p^2}{(p^2+\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2.$$

Das Integral der lebendigen Kraft ist alsdann

(92) $$\frac{m[\eta^4 + 4p(p-a)\eta^2 + 4p^2a^2] + 4p^2K}{8(p^2+\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + mg\frac{\eta^2+2pa}{2\sqrt{p^2+\eta^2}} = h,$$

oder, wenn $\zeta = \sqrt{p^2+\eta^2}$ als Variable benutzt wird,

(93) $$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{8h\zeta^2(\zeta^2-\eta^2) - 4mg\zeta(\zeta^2-p^2)(\zeta^2-p^2+2pa)}{m[(\zeta^2-p^2)^2 + 4p(p-a)(\zeta^2-p^2) + 4p^2a^2] + 4p^2K}.$$

Wie ersichtlich kommt man hier sogar nicht mit hyperelliptischen Funktionen aus. Mit $a = \frac{1}{2}p$ wird etwas einfacher

$$\omega = \frac{p}{\zeta\sqrt{\zeta^2-p^2}}\frac{d\zeta}{dt}; \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{(p^2+\eta^2)^2}{4p^2} = \frac{\zeta^4}{4p^2},$$

$$L = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{4}m\zeta^4 + Kp^2}{\zeta^2(\zeta^2-p^2)}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2,$$

(94) $$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{\zeta^2(\zeta^2-p^2)(2h-mg\zeta)}{\frac{1}{4}m\zeta^4 + Kp^2}.$$

Es muss sein

(95) $$h > mga\,,$$

worin a positiv vorausgesetzt werde. Die parabolische Scheibe führt rollende Schwingungen aus zwischen zwei in bezug auf Oy symmetrische Lagen, welche durch

(96) $$\zeta_0 = \frac{h + \sqrt{h^2 - mgp(2a-p)}}{mg}$$

bestimmt sind. Mit $a = \frac{1}{2}p$ ist speziell

(97) $$\zeta_0 = 2\frac{h}{mg}\,.$$

Für $a < p$ ist die Gleichgewichtslage stabil; die Schwingungszeit der unendlich kleinen Schwingungen um dieselbe beträgt

(98) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2+K}{mg(p-a)}}\,,$$

speziell mit $a = \frac{1}{2}p$

(99) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mp^2+2K}{mgp}}\,.$$

7. *Rollen eines beliebigen Kegelschnittes auf einer horizontalen Geraden.* Es werde zuerst der Fall betrachtet, dass der Punkt S mit einem Brennpunkte F des Kegelschnittes zusammenfällt (Fig. 7). Die Gleichung des Kegelschnittes in Polarkoordinaten R, ψ, mit dem Pol im Brennpunkte F, ist dann

(100) $$R = \frac{p}{1+e\cos\psi}\,;$$

als Parametergleichungen nehme man

(101) $$\xi = -R\cos\psi = -\frac{p\cos\psi}{1+e\cos\psi}\,; \quad \eta = -R\sin\psi = -\frac{p\sin\psi}{1+e\cos\psi}\,.$$

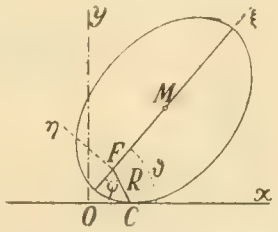


Fig. 7.

Gemäss (50) erhält man alsdann

(102) $$\frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{e+\cos\psi}{\sin\psi} = -\operatorname{tg}\vartheta$$

und hieraus

(103) $$\cos\vartheta = \frac{\sin\psi}{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}\,; \quad \sin\vartheta = \frac{e+\cos\psi}{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}$$

sowie für den Winkel $FCx = (u, R) = \psi + \vartheta$

(104) $$\cos(\psi+\vartheta) = \frac{-e\sin\psi}{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}} = -e\cos\vartheta\,; \quad \sin(\psi+\vartheta) = \frac{1+e\cos\psi}{\sqrt{1+2e\cos\psi+\psi^2}}\,.$$

Ferner ergibt eine Differentiation

(105) $$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1+e\cos\psi}{1+2e\cos\psi+e^2}\frac{d\psi}{dt}\,.$$

Für die Bogenlänge des Kegelschnittes findet man mit den Anfangsdaten in der Figur gemäss der Gl. (40)

(106) $$\varphi = \sigma = p\int_0^{\psi}\frac{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}{(1+e\cos\psi)^2}\,d\psi\,;$$

die Formeln (51) geben hiermit für die vom Brennpunkt beschriebene Rollkurve

$$(107)\qquad \begin{cases} x = p\int_0^{\psi} \frac{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}{(1+e\cos\psi)^2}\,d\psi - \frac{p\,e\sin\psi}{(1+e\cos\psi)\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}, \\ y = \frac{p}{\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}}. \end{cases}$$

Wie im Art. 6 gefunden, ist diese Kurve bei der Parabel als Erzeugenden die gewöhnliche Kettenlinie, während man bekanntlich bei der Ellipse und der Hyperbel bez. die Meridiankurven der Onduloide und Nodoide genannten Flächen erhält, denen die Eigenschaft zukommt nebst der Kugel und der Katenoide (Rotationsfläche der Kettenlinie um ihre Leitgerade) die einzigen Rotationsflächen mit konstanter mittlerer Krümmung zu sein (siehe L. L. LINDELÖF, Surfaces de révolution à courbure moyenne constante, Acta Soc. Scient. Fenn., T. VII, 1863). Von diesen sog. Delaunay'schen Kurven (G. LORIA, Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven, Leipzig 1902, p. 509) ist die Meridiankurve der Onduloide eine periodische, wellenförmige Linie, die Meridiankurve der Nodoide eine periodische Kurve mit Doppelpunkten und Schleifen.

Es werde hier noch die Differentialgleichung dieser Kurven abgeleitet. Wenn dl ihr Bogendifferential bezeichnet, so hat man, indem ihre Tangente senkrecht auf CF steht,

$$(108)\qquad \frac{dx}{dl} = \sin(\psi+\vartheta); \quad \frac{dy}{dl} = -\cos(\psi+\vartheta).$$

Man berechnet, mit Anwendung der Formeln (104) und des zweiten Ausdruckes (107),

$$1+2e\cos\psi+e^2 = \frac{p^2}{y^2} = 2(1+e\cos\psi)-(1-e^2) =$$
$$= 2\sqrt{1+2e\cos\psi+e^2}\sin(\psi+\vartheta)-(1-e^2) = 2\,\frac{p}{y}\,\frac{dx}{dl}-(1-e^2)$$

oder

$$(109)\qquad (1-e^2)y^2 - 2py\frac{dx}{dl} + p^2 = 0$$

und dies ist folglich die gemeinsame Differentialgleichung aller Delaunay'schen Kurven.

Wenn die rollende Kurve eine Parabel ist, so hat man $e=1$ und erhält

$$(110)\qquad \frac{dx}{\frac{1}{2}p} = \frac{dl}{y} = \pm\frac{dy}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}p^2}}$$

sowie nach Ausführung der Integration wieder die gewöhnliche Kettenlinie

$$(111)\qquad y = p\left(e^{\frac{2x}{p}} + e^{-\frac{2x}{p}}\right),$$

wie im Art. 6. Ist die erzeugende Kurve eine Ellipse mit den Halbaxen a und b, hat man

$$(112)\qquad \begin{cases} a = \frac{p}{1-e^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}, \\ p = \frac{b^2}{a}; \quad 1-e^2 = \frac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

und erhält aus (109) die Differentialgleichung

$$(113\,a)\qquad y^2 - 2ay\frac{dx}{dl} + b^2 = 0$$

oder

(113 b) $$\frac{dx}{dl} = \frac{y^2 + b^2}{2ay}.$$

Man berechnet hieraus

(114) $$\frac{dl}{2ay} = \frac{dx}{y^2 + b^2} = \pm \frac{dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}$$

und erhält somit als Differentialgleichung der Meridiankurve der Onduloide

(115) $$dx = \pm \frac{(y^2 + b^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 + b^2)^2}}.$$

Schliesslich ergibt sich bei der Hyperbel

(116) $$\begin{cases} a = \dfrac{p}{e^2 - 1}; & b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}, \\ p = \dfrac{b^2}{a}; & e^2 - 1 = \dfrac{b^2}{a^2}; \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dl} = \frac{b^2 - y^2}{2ay}$$

und

(117) $$dx = \pm \frac{(b^2 - y^2)\,dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (b^2 - y^2)^2}}.$$

Die Integration der Gleichungen (115) und (117) erfordert die Anwendung der elliptischen Funktionen, mag aber hier unterbleiben. Einzelheiten über diese Kurven findet man in den oben erwähnten Arbeiten. Ihre Bogenlänge wird, wie unmittelbar aus (114) ersichtlich, auf elementarem Wege erhalten. Hier werde nur noch die Krümmung der Meridiankurve der Onduloide aus unserer Formel (44) berechnet. Man findet aus (107) und (112)

(118) $$1 + 2e\cos\psi + e^2 = \frac{b^4}{a^2y^2}; \quad 1 + e\cos\psi = \frac{b^2(b^2 + y^2)}{2a^2y^2},$$

hiermit aus (101)

(119) $$R = \frac{2ay^2}{b^2 + y^2}.$$

Ferner folgt aus (105) und (106) sowie (118)

(120) $$\varrho_\gamma = -\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{(1 + 2e\cos\psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e\cos\psi)^3} = \frac{8a^2b^2y^3}{(b^2 + y^2)^3}.$$

Setzt man diese Werte und

(121) $$R\sin(u, R) = y$$

ein in (44), so ist das schliessliche Resultat

(122) $$\varrho = \frac{2ay^2}{b^2 - y^2}.$$

Bei der Hyperbel als Erzeugenden erhält man in derselben Weise

(123) $$R = \frac{2ay}{b^2 - y^2}; \quad \varrho = \frac{2ay^2}{b^2 + y^2}.$$

Um jetzt die dynamische Aufgabe vorzunehmen, wirke im Brennpunkt F des Kegelschnittes die Schwere mg. Die Gleichung (105) gibt die Winkelgeschwindigkeit und aus (101) erhält man

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 = \frac{p^2}{(1 + e\cos\psi)^2}, \tag{124}$$

somit für die kinetische Energie des rollenden Körpers

$$L = \frac{1}{2}\left\{ \frac{mp^2}{(1 + e\cos\psi)^2} + K \right\} \frac{(1 + e\cos\psi)^2}{(1 + 2e\cos\psi + e^2)^2} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \tag{125}$$

Die Bewegungsgleichung wird alsdann

$$\frac{1}{2}\left\{ \frac{mp^2}{(1 + e\cos\psi)^2} + K \right\} \frac{(1 + e\cos\psi)^2}{(1 + 2e\cos\psi + e^2)^2} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h - \frac{mgp}{\sqrt{1 + 2e\cos\psi + e^2}}. \tag{126}$$

Es soll hier noch y als Veränderliche eingeführt werden. Man berechnet aus (107) durch Differentiation

$$d\psi = \pm \frac{2p^2\, dy}{y\sqrt{4e^2y^4 - [p^2 - (1 + e^2)y^2]^2}} \tag{127}$$

und erhält hieraus bei der rollenden Ellipse

$$d\psi = \pm \frac{2b^4\, dy}{y\sqrt{4a^2(a^2 - b^2)y^4 - [b^4 - (2a^2 - b^2)y^2]^2}}, \tag{128}$$

bei der rollenden Hyperbel

$$d\psi = \pm \frac{2b^4\, dy}{y\sqrt{4a^2(a^2 + b^2)y^4 - [b^4 - (2a^2 + b^2)y^2]^2}}. \tag{129}$$

Mit Anwendung noch der Formeln (118) transformiert man die Gleichung (126) bei der Ellipse zu

$$b^4\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2y^2\left\{4a^2(a^2 - b^2)y^4 - [b^4 - (2a^2 - b^2)y^2]^2\right\}(h - mgy)}{4ma^2y^4 + K(b^2 + y^2)^2} \tag{130}$$

und bei der Hyperbel mit Hülfe der (118) entsprechenden Formeln in

$$b^4\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2y^2\left\{4a^2(a^2 + b^2)y^4 - [b^4 - (2a^2 + b^2)y^2]^2\right\}(h - mgy)}{4ma^2y^4 + K(b^2 - y^2)^2}. \tag{131}$$

Bei einer elliptischen Scheibe sind die Grenzwerte von y

$$\begin{cases} y_{\min} = a(1 - e) = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \\ y_{\max} = a(1 + e) = a + \sqrt{a^2 - b^2}. \end{cases} \tag{132}$$

Es muss sein

$$h > mga(1 - e). \tag{133 a}$$

Ist

$$h > mga(1 + e), \tag{133 b}$$

so macht die Scheibe volle Umläufe, d. h. rollt immer in derselben Richtung. Wenn dagegen

$$mga(1 + e) > h > mga(1 - e), \tag{133 c}$$

so führt die Scheibe Rollschwingungen um die unterste symmetrische Lage aus, welche eine stabile Gleichgewichtslage ist, indem dort

$$TK - TF = \varrho_\gamma - a(1 - e) = p - a(1 - e) = ae(1 - e) > 0. \tag{134}$$

Die Schwingungszeit der unendlich kleinen Schwingungen um diese Lage beträgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m a^2 (1-e)^2 + K}{mgae(1-e)}}. \tag{135}$$

Bei der von zwei Hyperbelästen begrenzten Scheibe ist

$$\begin{cases} y_{\min} = a(e-1) = \sqrt{a^2+b^2} - a \\ y_{\max} = a(e+1) = \sqrt{a^2+b^2} + a \end{cases} \tag{136}$$

und muss immer

$$h > mga(e-1) \tag{137 a}$$

sein. Ist

$$h > mga(e+1), \tag{137 b}$$

so ergibt sich auch hier stetiges Rollen in derselben Richtung, wobei wechselweise die beiden Hyperbeläste auf der horizontalen Geraden abrollen. Ist dagegen

$$mga(e+1) > h > mga(e-1), \tag{137 c}$$

so handelt es sich um Rollschwingungen um die eine stabile Gleichgewichtslage, und zwar gehört hierbei zu unendlich kleinen Schwingungen die Schwingungszeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m a^2 (e-1)^2 + K}{mgae(e-1)}}. \tag{138}$$

Beim Rollen einer Ellipse längs einer Geraden beschreibt der Mittelpunkt der Ellipse (Fig. 8) die sog. Sturm'sche Kurve (Loria, l. c. p. 511). Man nehme jetzt als Parametergleichungen der Ellipse mit Anwendung der exzentrischen Anomalie

$$\xi = -a\cos\psi; \quad \eta = -b\sin\psi, \tag{139}$$

wo $a > b$. Gemäss (50) wird

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi, \tag{140}$$

woraus

$$\cos\vartheta = \frac{b\cos\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}; \quad \sin\vartheta = \frac{a\sin\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}. \tag{141}$$

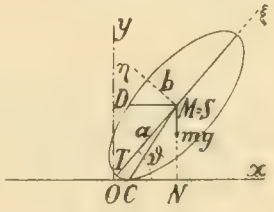


Fig. 8.

Der Ellipsenbogen vom Scheitel T nach C beträgt

$$\sigma = \varphi = \int_0^{\psi} \sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}\, d\psi, \tag{142}$$

und die Parametergleichungen der vom Mittelpunkt beschriebenen Kurve sind gemäss (51)

$$\begin{cases} x = \int_0^{\psi} \sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}\, d\psi + \dfrac{ab\cos 2\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}, \\ y = \dfrac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\sin 2\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}. \end{cases} \tag{143}$$

Die Differentialgleichung der Sturm'schen Kurve wird in mehr geometrischer Weise einfach erhalten (vergl. Loria, l. c.). Man zieht den horizontalen Halbmesser MD und hat gemäss den Eigenschaften der Ellipse

$$MD^2 + MC^2 = a^2 + b^2; \quad MD \cdot MC \sin CMD = ab,$$

ferner

$$\sin CMD = \sin MCN = \frac{dx}{dl},$$

$$y = MN = MC \sin CMD,$$

und erhält hieraus

$$MD^2 + \left(y \frac{dl}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2; \quad MD \cdot y = ab$$

und nach Elimination von MD aus diesen Gleichungen

$$\frac{a^2 b^2}{y^2} + y^2 \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 = a^2 + b^2,$$

woraus schliesslich gefolgert wird

$$dx = + \frac{y^2 \cdot dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)(y^2 - b^2)}}. \tag{144}$$

Die Ellipse rolle jetzt unter dem Einfluss ihrer Schwere mg im Mittelpunkte M. Man hat dabei

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{ab}{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} \frac{d\psi}{dt}, \tag{145}$$

$$L = \frac{1}{2} \{ m (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) + K \} \omega^2, \tag{146}$$

und erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{a^2 b^2 \{ m (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) + K \}}{2 (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi)^2} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = h - \frac{mg (a^2 + b^2) \sin \psi \cos \psi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi}}. \tag{147}$$

Hierbei ist

$$y_{\min} = b; \quad y_{\max} = a \tag{148}$$

und es muss sein

$$h > mgb. \tag{149 a}$$

Ist

$$h > mga, \tag{149 b}$$

so geschieht das Rollen die ganze Zeit in derselben Richtung, mit vollständigen Umläufen der Ellipse. Ist dagegen

$$mga > h > mgb, \tag{149 c}$$

so führt die Ellipse Rollschwingungen aus um die kleinere Axe als vertikale Symmetrieaxe, so dass der Mittelpunkt zwischen zwei Lagen in der Höhe $h : mg$ oszilliert. Bei unendlich kleinen Schwingungen, somit h von mgb unendlich wenig verschieden, ist die Schwingungszeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{1 - e^2} \{ ma^2 (1 - e^2) + K \}}{mgae^2}}. \tag{150}$$

Bei einer homogenen Ellipsscheibe hat man

$$K = \frac{1}{4} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{4} ma^2 (2 - e^2)$$

und

$$ma^2 (1 - e^2) + K = ma^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} e^2\right).$$

Es könnte die analoge Aufgabe bei einer von zwei Hyperbelästen begrenzten Scheibe gelöst werden.

8. *Rollen eines Körpers mit ebener Begrenzungsfläche auf einem beliebigen Zylinder.* Es werden dieselben Bezeichnungen wie im Art. 1 benutzt (Fig. 9); der Anfangspunkt des $\xi\eta$-Systems wird auf der rollenden Geraden genommen, so dass

$$\xi = \psi = \sigma, \quad \eta = 0 \tag{151}$$

die Koordinaten des Berührungspunktes $\Gamma = C$ sind, während die feste Polkurve die Gleichungen

$$\lambda = \lambda(\varphi); \quad \mu = \mu(\varphi) \tag{152}$$

hat. Es ist hier $\chi = \vartheta$ und aus den Gleichungen (4) und (5) ergibt sich

$$d\lambda = \cos\vartheta\, d\psi; \quad d\mu = \sin\vartheta\, d\psi; \tag{153}$$

$$\{\lambda'^2(\varphi) + \mu'^2(\varphi)\}\, d\varphi^2 = d\psi^2 \tag{154}$$

sowie

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{\mu'(\varphi)}{\lambda'(\varphi)}, \\ \cos\vartheta = \dfrac{\lambda'(\varphi)}{\sqrt{\lambda'^2(\varphi) + \mu'^2(\varphi)}}; \quad \sin\vartheta = \dfrac{\mu'(\varphi)}{\sqrt{\lambda'^2(\varphi) + \mu'^2(\varphi)}}. \end{cases} \tag{155}$$

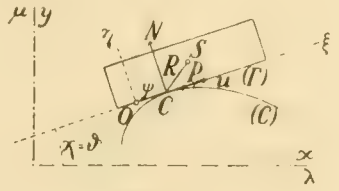


Fig. 9.

Für einen beliebigen Punkt S des rollenden Körpers mit den Koordinaten ξ_s, η_s erhält man

$$x = \lambda + \frac{(\xi_s - \psi)\lambda' - \eta_s\mu'}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}}; \quad y = \mu + \frac{(\xi_s - \psi)\mu' + \eta_s\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}} \tag{156}$$

und für die Krümmung seiner Bahnkurve aus (18) mit $\varrho_\gamma = \infty$, wenn man noch ϱ_c durch $-\varrho_c$ ersetzt, so dass es hier positiv gerechnet wird für eine nach unten konkave Kurve (C),

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{\varrho_c \sin(u, R)}{R^2}. \tag{157}$$

Die Konstruktion des Krümmungsradius ϱ nach Fig. 2 ist auch jetzt anwendbar; nur ist J jetzt der Krümmungsmittelpunkt der festen Polkurve.

Wenn der Punkt S auf der ξ-Axe liegt, so ist seine Bahnkurve eine Evolvente der festen Polkurve und hat eine Spitze in dem auf derselben liegenden Punkte.

Bei der dynamischen Aufgabe, Rollen des Körpers ohne Gleiten unter dem Einfluss der in S wirkenden Schwere mg, ergibt sich

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\lambda'\mu'' - \mu'\lambda''}{\lambda'^2 + \mu'^2}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\lambda'\mu'' - \mu'\lambda''}{(\lambda'^2 + \mu'^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{\varrho_c}\,\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{\varrho_c}u, \tag{158}$$

wobei

$$d\psi = \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}\, d\varphi \quad \text{und} \quad \psi - \psi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}\, d\varphi \tag{159}$$

genommen wurde, ferner für die Geschwindigkeitskomponenten von S gemäss (12) und (155) oder durch Differentiation von (156)

$$(160)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')\{\mu'(\xi_s-\psi)+\lambda'\eta_s\}}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{\mu'(\xi_s-\psi)+\lambda'\eta_s}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\omega, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')\{\lambda'(\xi_s-\psi)-\mu'\eta_s\}}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\lambda'(\xi_s-\psi)-\mu'\eta_s}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\omega. \end{cases}$$

Hieraus berechnet sich alsdann die kinetische Energie

$$(161)\qquad L = \tfrac{1}{2}\{m[(\xi_s-\psi)^2+\eta_s^2]+K\}\omega^2 = \tfrac{1}{2}\{m[(\xi_s-\psi)^2+\eta_s^2]+K\}\frac{(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')^2}{(\lambda'^2+\mu'^2)^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

und das Energie-Integral

$$(162)\qquad \tfrac{1}{2}\{m[(\xi_s-\psi)^2+\eta_s^2]+K\}\frac{(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')^2}{(\lambda'^2+\mu'^2)^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg\left\{\mu+\frac{\mu'(\xi_s-\psi)+\lambda'\eta_s}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\right\} = h,$$

worin ψ mittelst (159) in φ ausgedrückt zu denken ist.

Für den Druck N und die tangentiale Gegenkraft P geben die Formeln (27) und (28) hier mit Beachten des Zeichens von ϱ_γ

$$(163)\qquad \begin{aligned} N &= mg\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}} + m\varrho_c\omega^2 - mR\omega^2\cos(N,R) + mR\varepsilon\sin(N,R), \\ P &= mg\frac{\mu'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}} - mR\omega^2\sin(N,R) - mR\varepsilon\cos(N,R), \end{aligned}$$

worin die Winkelbeschleunigung ε gleich

$$(164)\qquad \varepsilon = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\lambda'\mu''-\mu'\lambda''}{\lambda'^2+\mu'^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{(\lambda'^2+\mu'^2)(\lambda'\mu'''-\mu'\lambda''')-2(\lambda'\lambda''+\mu'\mu'')(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')}{(\lambda'^2+\mu'^2)^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

ist und die Werte von $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ und $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ aus (162) und der aus derselben durch Differentiation erhaltenen Gleichung eingesetzt werden könnten.

In bezug auf die Behandlung der Bewegung bei anderen Kraftgesetzen als der Schwere sei nur auf Art. 3 hingewiesen.

9. *Rollen einer ebenen Scheibe auf einem Kreiszylinder.* Es seien in Fig. 10 die Gleichungen des festen Kreises

$$(165)\qquad \lambda = a\sin\varphi\,;\quad \mu = a\cos\varphi,$$

wobei also

$$\lambda'^2+\mu'^2 = a^2;\quad a\,d\varphi = d\psi;\quad a\varphi = \psi;\quad \vartheta = -\varphi.$$

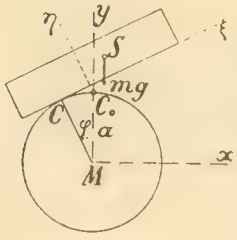


Fig. 9.

Aus (156) folgt dann

$$(166)\qquad \begin{cases} x = (\xi_s - a\varphi)\cos\varphi + (\eta_s + a)\sin\varphi, \\ y = -(\xi_s - a\varphi)\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi, \end{cases}$$

und die Elimination von φ aus diesen Gleichungen ergibt

$$a\varphi = \xi_s \pm \sqrt{x^2+y^2-(\eta_s+a)^2},$$

$$(167)\qquad x\sin\frac{\xi_s \pm \sqrt{x^2+y^2-(\eta_s+a)^2}}{a} + y\cos\frac{\xi_s \pm \sqrt{x^2+y^2-(\eta_s+a)^2}}{a} = \eta_s + a.$$

Die Bahnkurven sind die Evolventen eines Kreises mit dem Radius $a+\eta_s$ und speziell mit $\eta_s = 0$ des festen Kreises selbst. Für ihre Krümmungsradien ergibt sich aus (157)

(168) $$\varrho = \frac{R^2}{R - a\eta_s}$$

und speziell für $\eta_s = 0 \quad \varrho = R$.

Bei der dynamischen Aufgabe mit der Schwere als wirkender Kraft ist

(169) $$\frac{d\psi}{dt} = a\frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega = -\frac{d\varphi}{dt},$$

(170) $$L = \tfrac{1}{2}\{m[(\xi_s - a\varphi)^2 + \eta_s^2] + K\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

und die Bewegungsgleichung wird

(171) $$\tfrac{1}{2}\{m[(\xi_s - a\varphi)^2 + \eta_s^2] + K\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg\{-(\xi_s - a\varphi)\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi\} = h.$$

Wir nehmen speziell $\xi_s = 0$ und erhalten dann

(172) $$x = -a\varphi\cos\varphi + (\eta_s + a)\sin\varphi; \quad y = a\varphi\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi,$$

(173) $$\tfrac{1}{2}\{m[a^2\varphi^2 + \eta_s^2] + K\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = h - mg\{a\varphi\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi\} = h - mgy.$$

In dem letzten Falle soll noch der Druck N vom Zylinder auf die rollende Platte berechnet werden. Zur Abkürzung setze man das Trägheitsmoment der Platte in bezug auf die Axe im Berührungspunkt C gleich

(174 a) $$K_c = m(a^2\varphi^2 + \eta_s^2) + K = mk_\varphi^2,$$

wobei

(174 b) $$\frac{dK_c}{d\varphi} = 2ma^2\varphi.$$

Es ist jetzt

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

und folgt bei der Differentiation von (173)

(175 a) $$K_c\varepsilon = mg(a\varphi\cos\varphi - \eta_s\sin\varphi) + ma^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

oder

(175 b) $$k_\varphi^2\varepsilon = g(a\varphi\cos\varphi - \eta_s\sin\varphi) + a^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Setzt man diesen Wert und die Werte

(176) $$\varrho_c = a; \quad R\cos(N,R) = \eta_s; \quad R\sin(N,R) = -a\varphi$$

in die erste Formel (163) ein, so ergibt sich

$$\frac{N}{m} = g\cos\varphi - \frac{ga\varphi}{k_\varphi^2}(a\varphi\cos\varphi - \eta_s\sin\varphi) + \left(a - \eta_s - \frac{a^3\varphi^2}{k_\varphi^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

und schliesslich mit Hülfe von (173)

(177) $$k_\varphi^2\frac{N}{m} = k_\varphi^2 g\cos\varphi - ga\varphi(a\varphi\cos\varphi - \eta_s\sin\varphi) - 2g\frac{(a-\eta_s)k_\varphi^2 - a^3\varphi^2}{k_\varphi^2}[a\varphi\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi] + \frac{2\{(a-\eta_s)k_\varphi^2 - a^3\varphi^2\}h}{mk_\varphi^2}.$$

In dem obersten Punkte hat man mit $\varphi = 0$

(178 a) $$mk_0^2 = m\eta_s^2 + K$$

und

(178 b) $$N_0 = mg - 2\frac{a^2 - \eta_s^2}{k_0^2}mg + 2\frac{(a-\eta_s)h}{k_0^2},$$

positiv nach oben, in dem untersten Punkte mit $\varphi = \pi$

(179 a) $$mk_\pi^2 = m(a^2\pi^2 + \eta_s^2) + K$$

und

(179 b) $$N_\pi = -mg + \frac{a^2\pi^2}{k_\pi^2}mg + 2\frac{(a+\eta_s)[(a-\eta_s)k_\pi^2 - a^3\pi^2]}{k_\pi^4}mg + \frac{2[(a-\eta_s)k_\pi^2 - a^3\pi^2]h}{k_\pi^4},$$

positiv nach unten.

Damit der oberste Punkt in Frage komme, muss sein

(180) $$h > mg(a + \eta_s),$$

und es ist N_0 in demselben positiv, falls η_s die Bedingung

(181) $$3\eta_s^2 - 2\frac{h}{mg}(\eta_s - a) + \frac{K}{m} - 2a^2 > 0$$

erfüllt. Die oberste Lage ist eine stabile Gleichgewichtslage, wenn

(182) $$\eta_s < -a,$$

d. h. S unterhalb dem Mittelpunkte M des festen Kreises liegt, wie man es bei einem »Rollpendel» einrichten kann. Wenn h dann nur unbedeutend grösser als $mg(a + \eta_s)$ ist, so hat man kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage, und die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen beträgt

(183) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{K + m\eta_s^2}{-mg(a+\eta_s)}} = 2\pi\sqrt{-\frac{k_0^2}{g(a+\eta_s)}}.$$

Wenn eine solche Anordnung getroffen ist, dass die Scheibe nicht vom Zylinder abfallen kann, und welche nur Einfluss auf N hat, kann man sich auch eine untere Gleichgewichtslage sowie volle Umläufe in derselben Richtung denken. Die Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes in der unteren Lage ist

(184) $$\eta_s > -a,$$

d. h. dass S unterhalb dem Mittelpunkte M des Kreises fällt; es muss sein

(185) $$h + mg(a + \eta_s) > 0,$$

und die Schwingungszeit der unendlich kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage beträgt

(186) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{K + m\eta_s^2}{mg(a+\eta_s)}}.$$

Die Bedingungen für volle Umläufe sind, dass auf einmal

(187) $$h > mg(a + \eta_s); \quad h > -mg(a + \eta_s);$$

wenn $a + \eta_s > 0$, genügt die erste, wenn $a + \eta_s < 0$, die zweite Ungleichheit; nur positive Werte von h sind jetzt zulässig.

Auf die Scheibe wirke eine der Entfernung proportionale, nach einem festen Punkte $\lambda = 0$, $\mu = b$ gerichtete Kraft. Man nehme für den Angriffspunkt S $\xi_s = 0$ und erhält dann mittelst (166)

$$r^2 = x^2 + (y-b)^2 = a^2\varphi^2 + (\eta_s + a)^2 + b^2 - 2b\{a\varphi\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi\} \tag{188}$$

sowie als Bewegungsgleichung gemäss Art. 3

$$\tfrac{1}{2}\{m(a^2\varphi^2 + \eta_s^2) + K\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mk^2\{a^2\varphi^2 + (\eta_s + a)^2 + b^2 - 2b[a\varphi\sin\varphi + (\eta_s + a)\cos\varphi]\} = h. \tag{189}$$

Der Ausdruck vereinfacht sich nur, wenn $b = 0$ d. h. die Kraft nach dem Mittelpunkte des festen Kreises gerichtet ist. Man erhält alsdann

$$\tfrac{1}{2}\{m(a^2\varphi^2 + \eta_s^2) + K\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \tfrac{1}{2}mk^2\{a^2\varphi^2 + (\eta_s + a)^2\} = h \tag{190}$$

und die Lösung vollzieht sich mit elliptischen Funktionen. Einige Ausführungen hierzu im Art. 20.

10. *Rollen eines Kreises auf einer beliebigen Kurve.* In den allgemeinen Formeln des Art. 1 nehme man hier als Gleichungen der festen Polkurve (C)

$$\lambda = \varphi(\lambda); \quad \mu = \mu(\varphi), \tag{191}$$

als Gleichungen des rollenden Kreises (Γ) in einem Koordinatensysteme mit dem Anfangspunkte S

$$\xi = a\sin\psi; \quad \eta + e = -a\cos\psi. \tag{192}$$

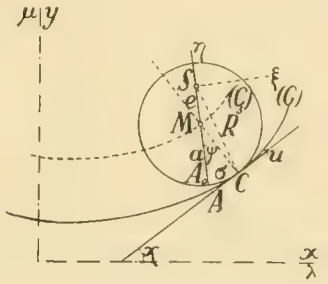


Fig. 11.

Ferner ist

$$\vartheta = \chi - \psi; \quad \operatorname{tg}\chi = \frac{\mu'(\varphi)}{\lambda'(\varphi)} = \frac{\mu'}{\lambda'} \tag{193}$$

$$\sigma = a\psi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\lambda'^2(\varphi) + \mu'^2(\varphi)}\, d\varphi \tag{194}$$

und gemäss (20 a) erhält man hieraus als Koordinaten des Punktes S im xy-System

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda + \frac{\lambda' e\sin\psi - \mu'(a + e\cos\psi)}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}}, \\ y &= \mu + \frac{\lambda'(a + e\cos\psi) + \mu' e\sin\psi}{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}}; \end{aligned}\right. \tag{195}$$

hieraus kann man sich ψ oder φ weggeschafft denken.

Für die Krümmung der Bahnkurve von S gibt die Formel (18) mit den Werten $\varrho_\gamma = a$ und

$$\left\{\begin{aligned} R\sin(u, R) &= a + e\cos\psi; \quad R\cos(u, R) = e\sin\psi, \\ R^2 &= a^2 + 2ae\cos\psi + e^2, \end{aligned}\right. \tag{196}$$

den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2ae\cos\psi + e^2}} - \frac{\varrho_c\, a(a + e\cos\psi)}{(\varrho_c - a)(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{197}$$

Wenn dl das Bogenelement der vom Kreismittelpunkt beschriebenen Kurve bezeichnet, welche eine Parallelkurve zu der festen Polkurve ist, so ergibt sich

(198) $$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = a^2\omega^2$$

mit

(199) $$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\chi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\lambda'\mu'' - \mu'\lambda''}{\lambda'^2+\mu'^2} - \frac{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}{a}\right)\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}\left(\frac{1}{\varrho_c} - \frac{1}{a}\right)\frac{d\varphi}{dt},$$

d. h.

(200) $$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = (\lambda'^2+\mu'^2)\left(\frac{\varrho_c - a}{\varrho_c}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Für die Wechselgeschwindigkeit u gilt

(201) $$u^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (\lambda'^2+\mu'^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = a^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

und somit folgt

(202) $$u^2 = \left(\frac{\varrho_c}{\varrho_c - a}\right)^2\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\varrho_c}{\varrho_c - a}\right)^2 a^2\omega^2$$

und

(203) $$\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\varrho_c - a}{\varrho_c}\right)^2.$$

Bei der dynamischen Aufgabe erhält man die kinetische Energie des rollenden Kreises

(204) $$L = \frac{1}{2}\{m(a^2 + 2ae\cos\psi + e^2) + K\}\omega^2$$

und mit der Schwere in S als wirkender Kraft die Energiegleichung

(205) $$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{m(a^2+2ae\cos\psi+e^2)+K\}\left\{\frac{\lambda'\mu''-\mu'\lambda''}{\lambda'^2+\mu'^2} - \frac{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}{a}\right\}^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \\ &\qquad = h - mg\left\{\mu + \frac{\lambda'(a+e\cos\psi)+\mu' e\sin\psi}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\right\}.\end{aligned}$$

Nunmehr beschränken wir uns jedoch auf den wesentlich einfacheren Fall, dass der Schwerpunkt S mit dem Mittelpunkte M des rollenden Kreises zusammenfällt, somit $e = 0$ ist, und erhalten dann

(206) $$\xi = a\sin\psi\,; \quad \eta = -a\cos\psi$$

(207) $$x = \lambda - \frac{\mu' a}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\,; \quad y = \mu + \frac{\lambda' a}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}},$$

ferner

(208) $$L = \frac{1}{2}(ma^2 + K)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{K}{a^2}\right)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2,$$

worin m_k die auf den Umfang des Zylinders oder Kreises reduzierte Masse bezeichnet. Die dynamische Gleichung wird jetzt

(209) $$\frac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = h - mg\left(\mu + \frac{\lambda' a}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\right) = h - mgy\,.$$

Die Gleichung der Bewegung eines schweren Punktes auf der als absolut glatt gedachten, vom Mittelpunkt des rollenden Kreises beschriebenen Parallelkurve (C_s) der festen Polkurve (C) ist

(210) $$\frac{1}{2}M\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = H - Mgy\,.$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass die wirkliche Bewegung des Schwerpunktes S auf der Kurve (C_s) mit der Bewegung eines schweren Punktes auf der glatten Kurve (C_s) nahe verwandt

ist, nur muss man die wirkende Kraft in dem Verhältnis $\frac{m}{m+m_k}=\frac{ma^2}{ma^2+K}$ verkleinern. Dies stellt ein besonders wichtiges Resultat dar, wonach die Natur des Problems beurteilt werden kann. Dagegen besteht kein einfacher Zusammenhang zwischen dem Rollen einer schweren Kreisscheibe auf einer Kurve (C) und der Bewegung eines schweren Punktes auf der Kurve (C) selbst.

Die Gleichung der Parallelkurve (C_s) zu (C) möge in der Form

$$x=f(y) \tag{211}$$

berechnet sein. Man hat dann

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\{1+f'^2(y)\}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{212}$$

und findet als Gleichung (209) der Bewegung des Schwerpunktes S

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\{1+f'^2(y)\}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=h-mgy\,. \tag{213}$$

Die Aufgabe führt zu elliptischen Funktionen, wenn $1+f'^2(y)$ eine ganze Funktion vom zweiten oder dritten Grade in bezug auf y ist, multipliziert oder geteilt mit dem Quadrat einer rationalen Funktion von y.

Es werde noch der Druck N gegen den rollenden Kreis berechnet. Man findet aus (207) durch Differentiation

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\lambda'\left\{1-\frac{a(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left\{\lambda''+\frac{a\mu'(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')^2}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\mu'\left\{1-\frac{a(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left\{\mu''-\frac{a\lambda'(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')^2}{(\lambda'^2+\mu'^2)^{\frac{5}{2}}}\right\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,\end{aligned}\right. \tag{214}$$

und danach aus (25) und der Gleichung (205), für $e=0$,

$$\begin{aligned}N&=mg\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}+m\left\{\frac{\lambda'\mu''-\mu'\lambda''}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}-\frac{a(\lambda'\mu''-\mu'\lambda'')^2}{(\lambda'^2+\mu'^2)^2}\right\}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\\ &=mg\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}+\frac{m(\varrho_c-a)}{\varrho_c^2}(\lambda'^2+\mu'^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\\ &=mg\frac{\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}+2m\frac{a^2}{\varrho_c-a}\,\frac{h-mg\left(\mu+\dfrac{a\lambda'}{\sqrt{\lambda'^2+\mu'^2}}\right)}{ma^2+K}.\end{aligned} \tag{215}$$

11. *Rollen eines Kreises auf einem Kreise.* Mit dem Schwerpunkt S im Mittelpunkte des rollenden Kreises unterscheidet sich die Aufgabe nur unwesentlich vom Problem des einfachen Pendels. Es rolle zuerst ein kleinerer Kreis innerhalb eines grösseren (Fig. 12). Für den festen Kreis mit dem Radius b sei

$$\left\{\begin{aligned}\lambda&=b\sin\varphi;\quad \mu=-b\cos\varphi,\\ ds&=b\,d\varphi;\quad s=b\varphi,\end{aligned}\right. \tag{216}$$

ferner

$$b\varphi=a\psi, \tag{217}$$

worin $b>a$. Für die Bahn des Punktes S ergibt sich dann

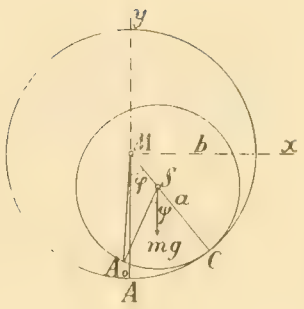


Fig. 12.

$$\begin{cases} x = (b-a)\sin\varphi; \quad y = -(b-a)\cos\varphi, \\ x^2 + y^2 = (b-a)^2. \end{cases} \tag{218}$$

Ferner ist

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt} = -\frac{b-a}{a}\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{219}$$

und die Bewegungsgleichung

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)(b-a)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - mg(b-a)\cos\varphi = h \tag{220}$$

oder mit y als Veränderlicher

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (h-mgy)\left(1-\frac{y^2}{(b-a)^2}\right). \tag{221}$$

Für den Druck N berechnet man

$$N = mg\cos\varphi + \frac{2m\{h+mg(b-a)\cos\varphi\}}{(m+m_k)(b-a)} = \frac{m\{2h+(3m+m_k)g(b-a)\cos\varphi\}}{(m+m_k)(b-a)}. \tag{222}$$

Man erhält Rollschwingungen um eine untere stabile Gleichgewichtslage, wenn

$$mg(b-a) > h > -mg(b-a), \tag{223}$$

und die Schwingungszeit der unendlich kleinen Schwingungen beträgt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_k}{mg}(b-a)}. \tag{224}$$

Die Bedingung für vollständige Umläufe ist

$$h > mg(b-a) \tag{225}$$

und der Druck N noch im höchsten Punkte positiv, falls

$$h > (b-a)\frac{3m+m_k}{2}g. \tag{226}$$

z. B. bei einer homogenen Kreisscheibe

$$h > \tfrac{7}{4}(b-a)mg.$$

Es rolle jetzt ein grösserer Kreis mit seiner Innenseite auf der Aussenseite eines kleineren Kreises (Fig. 13). Dabei ist

$$\lambda = b\sin\varphi, \quad \mu = b\cos\varphi, \tag{227}$$

$$b\varphi = a\psi; \quad a > b. \tag{228}$$

$$x = -(a-b)\sin\varphi; \quad y = -(a-b)\cos\varphi. \tag{229}$$

$$\omega = \frac{a-b}{a}\,\frac{d\varphi}{dt} \tag{230}$$

und die Bewegungsgleichung

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)(a-b)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = h + mg(a-b)\cos\varphi \tag{231}$$

oder in y

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (h-mgy)\left(1-\frac{y^2}{(a-b)^2}\right), \tag{232}$$

sowie schliesslich der Druck N, positiv nach aussen,

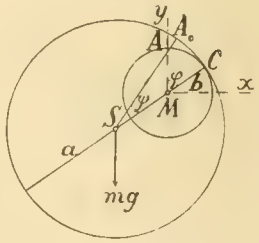


Fig. 13.

$$N = mg\cos\varphi + \frac{2m\{h + mg(a-b)\cos\varphi\}}{(m+m_k)(a-b)} = \frac{m\{2h + (3m+m_k)g(a-b)\cos\varphi\}}{(m+m_k)(a-b)}. \tag{233}$$

Man erhält Rollschwingungen um die obere stabile Gleichgewichtslage, wenn

$$mg(a-b) > h > -mg(a-b). \tag{234}$$

Die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen hat den Wert

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_k}{mg}(a-b)}. \tag{235}$$

Der grössere Kreis vollzieht vollständige Umläufe um den kleineren, wenn

$$h > mg(a-b), \tag{236}$$

und es ist der Druck N noch im niedrigsten Punkte positiv, falls

$$h > (a-b)\frac{3m+m_k}{2}g. \tag{237}$$

Zuletzt lassen wir einen Kreis mit seiner Aussenseite auf der Aussenseite eines festen Kreises rollen (Fig. 14). Dabei ist

$$\lambda = b\sin\varphi; \quad \mu = b\cos\varphi, \tag{238}$$

$$\xi = -a\sin\psi; \quad \eta = a\cos\psi, \tag{239}$$

$$s = b\varphi = a\psi = \sigma, \tag{240}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = (b+a)\sin\varphi; \quad y = (b+a)\cos\varphi. \\ x^2 + y^2 = (b+a)^2, \end{array}\right. \tag{241}$$

$$\omega = -\frac{b+a}{a}\frac{d\varphi}{dt}, \tag{242}$$

die dynamische Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)(b+a)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = h + mg(b+a)\cos\varphi \tag{243}$$

oder in y

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (h-mgy)\left(1 - \frac{y^2}{(b+a)^2}\right). \tag{244}$$

Der Druck N, positiv vom festen Kreise nach aussen gerechnet, beträgt

$$N = \frac{m\{(3m+m_k)g(b+a)\cos\varphi - 2h\}}{(m+m_k)(b+a)} \tag{245}$$

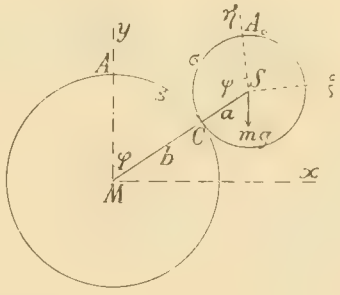


Fig. 14.

und ist immer im niedrigsten Punkte negativ. Wenn die Berührung jedoch in anderer Weise gesichert ist, z. B. durch einen M und S verbindenden Arm, so ergeben sich mit

$$mg(b+a) > h > -mg(b+a) \tag{246}$$

rollende Schwingungen um den niedrigsten Punkt mit einer Winkelamplitude

$$\arccos\frac{h}{mg(b+a)}.$$

Die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen beträgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_k}{mg}(a + b)}. \tag{247}$$

Man erhält volle Umläufe, falls

$$h > mg(b + a). \tag{248}$$

Wenn

$$h < \frac{3m + m_k}{2} g(b + a),$$

so wird der Druck N gleich Null für

$$\cos\varphi = \frac{2h}{(3m + m_k) g(b + a)}. \tag{249}$$

12. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve zu einer Zykloide.* Die Gleichungen der Zykloide (Fig. 15) seien

$$x = r(\varphi + \sin\varphi); \quad y = a + r(1 - \cos\varphi). \tag{250}$$

Man berechnet dann als Gleichungen ihrer Parallelkurve (C_s)

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= r(\varphi + \sin\varphi) + \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}, \\ \mu &= a + r(1 - \cos\varphi) - a\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}. \end{aligned}\right. \tag{251}$$

Hieraus ergibt sich

$$\lambda' = \sqrt{1+\cos\varphi}\left\{r\sqrt{1+\cos\varphi} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\right\}; \quad \mu' = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}\left\{r\sqrt{1+\cos\varphi} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\right\}, \tag{252}$$

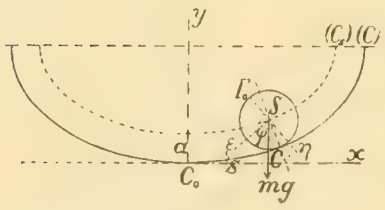


Fig. 15.

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}\chi, \\ &\chi = \tfrac{1}{2}\varphi, \\ &\cos\chi = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}; \quad \sin\chi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}}. \end{aligned}\right. \tag{253}$$

Als Gleichungen des rollenden Kreises nimmt man

$$\xi = a\sin\psi; \quad \eta = -a\cos\psi. \tag{254}$$

Die Formeln (207) geben hier wieder die Gleichungen (250) der Zykloide. Für die Bogenlänge derselben findet man

$$l = r\int_0^{\varphi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi, \tag{255}$$

für die Bogenlänge der Parallelkurve

$$s = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}a\varphi = l + a\chi. \tag{256}$$

Die Beziehung zwischen φ und ψ ist $s = \sigma$, d. h.

$$4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}a\varphi = 4r\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} + \frac{a}{2}\varphi = a\psi. \tag{257}$$

Ferner erhält man

$$\vartheta = \chi - \psi = -4\frac{r}{a}\sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -2\frac{r}{a}\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{r}{a}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,\frac{d\varphi}{dt}. \tag{258}$$

und bei der dynamischen Aufgabe, dem Rollen des Kreises unter dem Einfluss der Schwere in seinem Mittelpunkt, die kinetische Energie

$$L = \tfrac{1}{2}(m+m_k)\,a^2\,\omega^2 = (m+m_k)\,r^2\,(1+\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{259}$$

und die Bewegungsgleichung

$$(m+m_k)\,r^2\,(1+\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg\{a + r(1-\cos\varphi)\} = h. \tag{260}$$

Mit Anwendung von y findet man

$$(m+m_k)\frac{r}{y-a}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = h - mgy. \tag{261}$$

Bei der Integration braucht man also nur elementare Funktionen, wie man es ja im voraus weiss, mit Hinsicht auf das berühmte Problem der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Zykloide.

Es muss sein

$$h > mga; \tag{262}$$

die Ausführung der Integration in (261), so dass für $t = 0$ $y = a$, gibt

$$y = \frac{h+mga}{2mg} - \frac{h-mga}{2mg}\cos\left(\sqrt{\frac{mg}{(m+m_k)r}}\,t\right). \tag{263}$$

Die Rollschwingungen sind isokron mit der doppelten Periode von y, d. h.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m+m_k)\,4r}{mg}}, \tag{264}$$

unabhängig vom Radius des rollenden Kreises, wenn nur m_k dieselbe ist. Indem die Parallelkurve der Zykloide im niedrigsten Punkte den Krümmungsradius $b = 4r + a$ hat, steht der Ausdruck (264) in Übereinstimmung mit (224).

Die Zykloide möge jetzt ihre konvexe Seite nach oben kehren und der Kreis auf einer inneren Parallelkurve zu derselben rollen (Fig. 16). Die Gleichungen der Zykloide sind dann

$$x = r(\varphi + \sin\varphi); \quad y = a - r(1-\cos\varphi), \tag{265}$$

und es ergibt sich hieraus für Tangente und Bogenlänge

$$\chi = -\tfrac{1}{2}\varphi; \quad s = 4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi, \tag{266}$$

ferner als Gleichungen der Parallelkurve

$$\lambda = r(\varphi + \sin\varphi) - a\sin\tfrac{1}{2}\varphi; \quad \mu = a - r(1-\cos\varphi) - a\cos\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{267}$$

Die Gleichungen des rollenden Kreises sind

$$\xi = a\sin\psi; \quad \eta = -a\cos\psi, \tag{268}$$

die Beziehung zwischen φ und ψ ist

$$4r\sin\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}a\varphi = a\psi, \tag{269}$$

und man leitet ferner ab

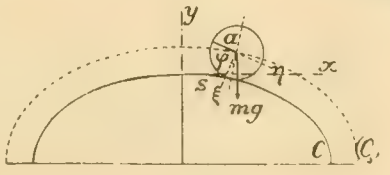


Fig. 16.

$$\vartheta = \chi - \psi = -4\frac{r}{a}\sin\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -2\frac{r}{a}\cos\frac{1}{2}\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{r}{a}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,\frac{d\varphi}{dt}. \tag{270}$$

Für die kinetische Energie des rollenden Kreises folgt alsdann

$$L = \frac{1}{2}(m+m_k)a^2\omega^2 = (m+m_k)r^2(1+\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \tag{271}$$

wie (259) und die Gleichung seiner Bewegung wird

$$(m+m_k)r^2(1+\cos\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = h - mg\{a - r(1-\cos\varphi)\}. \tag{272}$$

Damit der Kreis über den höchstens Punkt rollen könne, muss

$$h > mga. \tag{273}$$

Mit $h = mga$ befindet der Kreis sich im labilen Gleichgewichte in der höchsten Lage, entsprechend $\varphi = 0$.

13. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve einer Parabel.* Die Gleichung der Parabel in Fig. 17 mit ihrer Axe vertikal nach oben ist

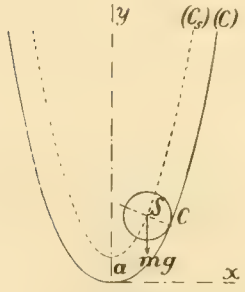


Fig. 17.

$$x^2 = 2p(y-a); \tag{274}$$

als Gleichungen der äusseren Parallelkurve im Abstande a berechnet man

$$\lambda = x + \frac{ax}{\sqrt{p^2+x^2}}; \quad \mu = a + \frac{x^2}{2p} - \frac{ap}{\sqrt{p^2+x^2}}. \tag{275}$$

Man erhält

$$-\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{p^2}{x^2} = \frac{p}{2(y-a)}; \quad 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{p+2(y-a)}{2(y-a)}; \tag{276}$$

gemäss der Gleichung (213) kann also das Problem mit Anwendung elliptischer Funktionen vollständig gelöst werden, falls nämlich die Schwere im Mittelpunkte S des Kreises die wirkende Kraft ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2(y-a)(h-mgy)}{p+2(y-a)}. \tag{277}$$

Es werde noch der Druck N mittelst der Formel (215) berechnet, wobei x jetzt φ vertritt. Man findet

$$\begin{gathered}
\lambda' = 1 + \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \mu' = \frac{x}{p}\left(1 + \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right).\\
\lambda'^2 + \mu'^2 = \frac{p^2+x^2}{p^2}\left\{1 + \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2.\\
\lambda'' = -\frac{3ap^2x}{(p^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad \mu'' = \frac{1}{p} + \frac{ap(p^2-2x^2)}{(p^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.\\
\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2.
\end{gathered} \tag{278}$$

(279) $$\varrho_c = a + \frac{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

(280) $$N = mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}} + \frac{m}{\sqrt{p^2+x^2}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\sqrt{\frac{p}{p+2(y-a)}}\left\{g + \frac{1}{2(y-a)}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} =$$
$$= mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}} - \frac{2mp^2}{m+m_k}\frac{h-mgy}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bei der Bewegung bleibt $h - mgy > 0$, somit N immer positiv. Man hat Rollschwingungen zwischen zwei Lagen in der Höhe $h : mg$. Die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen beträgt

(281) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_k}{m}\frac{p}{g}}.$$

Die Parabel habe jetzt eine vertikale Lage mit der Axe nach unten und der Kreis rolle auf einer inneren Parallelkurve (Fig. 18). Die Gleichung der Parabel ist dann

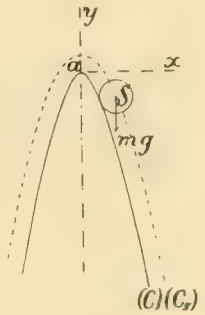


Fig. 18.

(282) $$x^2 = 2p(a-y)$$

und die Gleichungen der Parallelkurve sind

(283) $$\lambda = x - \frac{ax}{\sqrt{p^2+x^2}}; \quad \mu = a - \frac{x^2}{2p} - \frac{ap}{\sqrt{p^2+x^2}}.$$

Man erhält jetzt

(284) $$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{p+2(a-y)}{2(a-y)}$$

und die Aufgabe führt zu elliptischen Funktionen wie die vorige. Die Bewegungsgleichung wird gemäss (213)

(285) $$\frac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2(a-y)(h-mgy)}{p+2(a-y)}.$$

Die Berechnung des Druckes N ist hier folgende:

(286) $$\lambda' = 1 - \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \mu' = -\frac{x}{p}\left(1 - \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = \frac{p^2+x^2}{p^2}\left\{1 - \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2.$$

$$\lambda'' = \frac{3ap^2x}{(p^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad \mu'' = -\frac{1}{p} + \frac{ap(p^2-2x^2)}{(p^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'' = -\frac{1}{p}\left(1 - \frac{ap^2}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2.$$

(287) $$\varrho_c = a - \frac{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

(288) $$N = mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}} - \frac{m}{\sqrt{p^2+x^2}}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = m\sqrt{\frac{p}{p+2(a-y)}}\left\{g - \frac{1}{2(a-y)}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} =$$
$$= mg\frac{p}{\sqrt{p^2+x^2}} - \frac{2mp^2}{m+m_k}\frac{h-mgy}{(p^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit der Kreis über den Scheitel der Parallelkurve der Parabel rollen könne, muss

$$h > mga \tag{289}$$

sein.

Die beiden hier betrachteten Aufgaben werden im Art. 21 mit Hülfe von elliptischen Funktionen näher behandelt.

Auch das Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve einer Parabel mit horizontaler Axe führt zu elliptischen Funktionen.

14. *Rollen eines Kreises auf einer Parabel.* Die Gleichungen der Parabel (man verwende die Fig. 17 mit (C) und (C_1) getauscht) seien

$$\lambda^2 = 2p\varphi\,; \quad \mu = \varphi\,, \tag{290}$$

die Gleichungen des Kreises

$$\xi = a\sin\psi\,; \quad \eta = -a\cos\psi\,. \tag{291}$$

Der Parabelbogen hat den Wert

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2}\, d\varphi = \frac{1}{p}\int_0^{\lambda} \sqrt{p^2+\lambda^2}\, d\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{p}\sqrt{p^2+\lambda^2} + p\log\frac{\lambda+\sqrt{p^2+\lambda^2}}{p}\right\}, \tag{292}$$

und somit ist die Beziehung zwischen ψ und φ oder ψ und λ

$$\sigma = a\psi = s = \frac{1}{2}\left\{\frac{\lambda}{p}\sqrt{p^2+\lambda^2} + p\log\frac{\lambda+\sqrt{p^2+\lambda^2}}{p}\right\}. \tag{293}$$

Ferner ergeben sich als Gleichungen der von S beschriebenen Kurve, d. h. der inneren Parallelkurve der Parabel

$$x = \lambda - \frac{a\lambda}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}\,; \quad y = \frac{\lambda^2}{2p} + \frac{ap}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} \tag{294}$$

und hieraus für deren Bogenelement

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{p^2+\lambda^2}{p^2}\left\{1 - \frac{ap^2}{(p^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 d\lambda^2. \tag{295}$$

Die Bewegungsgleichung wird schliesslich

$$\frac{1}{2}(m+m_k)\frac{p^2+\lambda^2}{p^2}\left\{1 - \frac{ap^2}{(p^2+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}^2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = H - mg\left(\frac{\lambda^2}{2p} + \frac{ap}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}\right); \tag{296}$$

sie ist wie ersichtlich wesentlich komplizierter als in dem Falle, dass der Mittelpunkt des Kreises die Parabel beschreibt. Ähnliches gilt beim Rollen auf einer Ellipse oder einer Hyperbel.

15. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve zu einer Ellipse oder einer Hyperbel.* Der Kreis kann auf der Aussen- oder Innenseite der Parallelkurve der Ellipse oder eines Hyperbelastes rollen, wobei in jedem Falle sein Schwerpunkt die Ellipse oder den Hyperbelast beschreibt. Wenn es sich um eine Ellipse handelt und der Kreis auf der Innenseite rollt, wie in der Fig. 19, so hat man

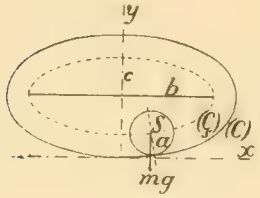


Fig. 19.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{(y-c-a)^2}{c^2} = 1\,. \tag{297}$$

Man bildet hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2 x}{b^2(y-c-a)}$$

und

$$\left(\frac{dl}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c^4 + (b^2 - c^2)(y - c - a)^2}{c^2 (y - a)(2c + a - y)}. \tag{298}$$

Gemäss (213) wird alsdann die Bewegungsgleichung

$$\frac{1}{2}(m + m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{c^2 (y - a)(2c + a - y)(h - mgy)}{c^4 + (b^2 - c^2)(y - c - a)^2} \tag{299}$$

und führt also zu hyperelliptischen Funktionen.

In derselben Weise erhält man, wenn S den oberen Ast der Hyperbel mit der Gleichung

$$\frac{(y - b + a)^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1 \tag{300}$$

beschreibt und der Kreis auf seiner unteren Parallelkurve rollt, die Gleichung

$$\frac{1}{2}(m + m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{b^2 (y + a)(y - 2b + a)(h - mgy)}{(b^2 + c^2)(y - b + a)^2 - b^4} \tag{301}$$

und kommt wieder zu hyperelliptischen Funktionen. Nur bei einzelnen ganz speziellen Werten von $h : mg$ könnte die Lösung mittelst elliptischer Funktionen erhalten werden (siehe auch Hj. Tallqvist: Einige Anwendungen der Theorie der elliptischen Funktionen auf Aufgaben der Mechanik, Öfversigt af Finska Vet. Soc. Förhandl. XXXIV, 1891—92).

16. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve zu einer gewöhnlichen Kettenlinie.* Die Gleichung der Kettenlinie in der Fig. 20, welche ihre konkave Seite nach oben kehrt, ist

$$y + p - a = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right). \tag{302}$$

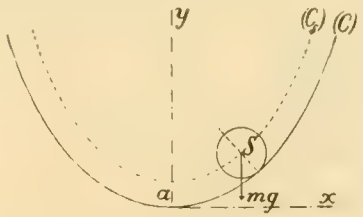


Fig. 20.

Man berechnet hieraus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}\right) + \frac{\sqrt{(y + p - a)^2 - p^2}}{p} \tag{303}$$

und

$$\left(\frac{dl}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{(y + p - a)^2}{(y - a)(y + 2p - a)}. \tag{304}$$

Die Lösung der Aufgabe wird somit mittelst elliptischer Funktionen gewonnen.

Als Gleichungen der Parallelkurve erhält man

$$\lambda = x \pm \frac{a\sqrt{(y - a)(y + 2p - a)}}{y + p - a}; \quad \mu = y - \frac{pa}{y + p - a}, \tag{305 a}$$

oder mit Anwendung von x

$$\lambda = x \pm a\,\frac{e^{\frac{x}{p}} - e^{-\frac{x}{p}}}{e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}}; \qquad \mu = \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) + \frac{(a - p)\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) - 2a}{e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}}. \tag{305 b}$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\frac{1}{2}(m + m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(y - a)(y + 2p - a)(h - mgy)}{(y + p - a)^2}. \tag{306}$$

Der Krümmungsradius der Kettenlinie ist

$$\varrho_c - a = \frac{(y + p - a)^2}{p}, \tag{307}$$

und es passt somit, indem für $y = a$ $\varrho_s - a = p$, auch hier der Ausdruck (281) für die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen.

Die Formel (215) gibt für den Druck N auf den rollenden Kreis

$$N = mg\frac{p}{y+p-a} + \frac{2mp(h-mgy)}{(m+m_k)(y+p-a)^2}. \tag{308}$$

Die Kettenlinie möge jetzt ihre konkave Seite nach unten kehren; so dass die Gleichungen derselben in einem Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Scheitel der inneren Parallelkurve

$$y = p + a - \frac{p}{2}\left(e^{\frac{x}{p}} + e^{-\frac{x}{p}}\right) \tag{309}$$

ist. Die Gleichungen der Parallelkurve sind dann

$$\lambda = x - \frac{a\sqrt{(a-y)(2p+a-y)}}{p+a-y}; \quad \mu = y - \frac{pa}{p+a-y}, \tag{310}$$

die Bewegungsgleichung

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(a-y)(2p+a-y)(h-mgy)}{(p+a-y)^2} \tag{311}$$

und der Druck N

$$N = mg\frac{p}{p+a-y} - \frac{2mp(h-mgy)}{(m+m_k)(p+a-y)^2}. \tag{312}$$

Wir kommen im Art. 22 auf die hier betrachteten Aufgaben zurück.

17. *Die Differentialgleichung der vom Kreismittelpunkt S beschriebenen Kurve* sei von der Form

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = A + By. \tag{313}$$

Hieraus folgt

$$dx = \pm\sqrt{A+By}\,dy \tag{314}$$

und

$$x = \pm\frac{2}{3}\frac{A+By}{B}\sqrt{A+By} + \text{Konst.} \tag{315 a}$$

oder

$$(A+By)^3 = \frac{9}{4}B^2(x - \text{Konst.})^2, \tag{315 b}$$

d. h. die Kurve (C_s) ist eine semikubische Parabel. Gemäss (213) ist die Gleichung der rollenden Bewegung eines Kreises auf einer Parallelkurve (C) zu (C_s)

$$\tfrac{1}{2}(m+m_k)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{h-mgy}{1+A+By} \tag{316}$$

und integriert sich in elementarer Weise.

Dasselbe gilt allgemeiner, wenn

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dl}{dy}\right)^2 = R^2(y)(A+By), \tag{317}$$

worin $R^2(y)$ das Quadrat einer rationalen Funktion von y ist.

Zu einem Rollproblem mit einer durch elliptische Funktionen zu erzielenden Lösung, beim Rollen eines Kreises auf einer gewissen Parallelkurve (C), führt die folgende Differentialgleichung der Bahn (C_s) des Kreismittelpunktes

(318) $$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = A + By + Cy^2 + Dy^3$$

oder allgemeiner

(319) $$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = R^2(y)\{A + By + Cy^2 + Dy^3\},$$

aber hier verlangt schon die Bestimmung der Kurve (C_x) selbst die Anwendung elliptischer Funktionen.

18. *Rollen einer beliebigen Kurve auf einem festen Kreise.* Die Gleichungen des Kreises (Fig. 21) seien

(320) $$\lambda = a\sin\varphi\,; \quad \mu = a\cos\varphi\,,$$

die Gleichungen der rollenden Kurve (Γ) im $\xi\eta$-System mit dem Anfangspunkte in S

(321) $$\xi = \xi(\psi)\,; \quad \eta = \eta(\psi)\,.$$

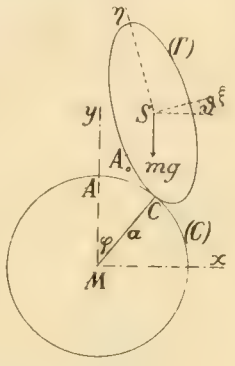


Fig. 21.

Wenn x, y die Koordinaten von S sind, so hat man für den Berührungspunkt C

(322) $$a\sin\varphi = x + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta\,; \quad a\cos\varphi = y + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta$$

und erhält ferner (vergl. Art. 1)

(323) $$\begin{cases} a\cos\varphi\,d\varphi = (\xi'\cos\vartheta - \eta'\sin\vartheta)\,d\psi\,; \quad -a\sin\varphi\,d\varphi = (\xi'\sin\vartheta + \eta'\cos\vartheta)\,d\psi\,, \\ a\,d\varphi = \pm\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\,d\psi\,, \end{cases}$$

(324) $$\operatorname{tg}\chi = \frac{d\mu}{d\lambda} = -\operatorname{tg}\varphi\,; \quad \chi = -\varphi\,,$$

(325) $$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}(\chi - \vartheta) = -\operatorname{tg}(\varphi + \vartheta)\,,$$

(326) $$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{\varphi - \operatorname{arctg}\frac{\eta'}{\xi'}\right\} = -\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{\xi'^2 + \eta'^2}\,\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\varrho_\gamma}\right)\frac{d\psi}{dt}\,.$$

Für die Krümmung der von S beschriebenen Kurve findet man aus (18) mit $\varrho_c = -a$ den Ausdruck

(327) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{a\varrho_\gamma\sin(u, R)}{R^2(a + \varrho_\gamma)}\,.$$

Wenn die Kurve (Γ) unter dem Einfluss der Schwere mg in S rollt, so hat man die kinetische Energie

(328) $$L = \frac{1}{2}\{m(\xi^2 + \eta^2) + K\}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\{mR^2 + K\}\,\omega^2$$

und erhält als Integral der lebendigen Kraft, was hier gewöhnlich die Bewegungsgleichung genannt worden ist,

(329) $$L + mgy = \text{Konst.} = h\,.$$

Der Druck N vom Kreise auf die rollende Kurve lässt sich z. B. aus den Ausdrücken (25) und (26) berechnen. Man findet hier

(330) $$R\cos(N,R)=\frac{\xi\eta'-\eta\xi'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}};\quad R\sin(N,R)=-\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

und erhält

(331) $$N=mg\cos\varphi+m\omega^2\frac{\varrho_\gamma}{a+\varrho_\gamma}-m\omega^2\frac{\xi\eta'-\eta\xi'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}-m\varepsilon\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}.$$

Hierin könnten die Werte von ω^2 und ε aus der Gleichung (329) und der daraus durch Differentiation in bezug auf t erhaltenen Gleichung eingesetzt werden.

Die Kurve (Γ) könnte auch auf der Innenseite des Kreises rollen; es würden sich unschwer die Formeln für diesen Fall aufstellen lassen.

Wenn die rollende Scheibe statt von ihrer Schwere von einer Kraft in S angegriffen wird, welche nach dem Mittelpunkte M des festen Kreises gerichtet und der Entfernung proportional ist, so tritt statt der Gleichung (329) die folgende:

(332 a) $$L+\tfrac{1}{2}mk^2(x^2+y^2)=h$$

und

(332 b) $$L+\tfrac{1}{2}mk^2\left\{a^2+\xi^2+\eta^2+2a\frac{\xi\eta'-\eta\xi'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}\right\}=h.$$

Beispiele zu der hier betrachteten Bewegung kamen vor im Art. 9, wo die rollende Kurve eine Gerade war, und im Art. 11, wo sie ein Kreis war; andere kompliziertere Beispiele sollen nicht behandelt werden.

19. *Rollen eines schweren Zylinders mit exzentrischem Schwerpunkt auf der Horizontalebene.* Mit den Bezeichnungen im Art. 5 ist die Differentialgleichung der Bewegung gemäss (70)

(333) $$\pm\sqrt{\frac{g}{a}}dt=\frac{\left\{y-\frac{1}{2a}\left(a^2-e^2-\frac{K}{m}\right)\right\}dy}{\sqrt{(y-a-e)\left(y-\frac{h}{mg}\right)(y-a+e)\left\{y-\frac{1}{2a}\left(a^2-e^2-\frac{K}{m}\right)\right\}}}.$$

Wir setzen hier

(334) $$R(y)=(y-a-e)\left(y-\frac{h}{mg}\right)(y-a+e)\left\{y-\frac{1}{2a}\left(a^2-e^2-\frac{K}{m}\right)\right\}$$

und rechnen die Zeit t von dem Augenblicke als S durch seine tiefste Lage hindurchgeht, dem Werte $y=a-e$ entsprechend. Alsdann wird

(335) $$\sqrt{\frac{g}{a}}\,t=\int_{a-e}^{y}\frac{\left\{y-\frac{1}{2a}\left(a^2-e^2-\frac{K}{m}\right)\right\}dy}{\sqrt{R(y)}}.$$

Zuerst sollen die periodischen Schwingungen des Zylinders um seine stabile Gleichgewichtslage behandelt werden. Dann ist

(336) $$a+e>\frac{h}{mg}>a-e$$

und dieser Fall umfasst auch das sog. Rollpendel. Die Umkehrpunkte der Schwingungen entsprechen dem Werte

(337) $$y=y_{\max}=\frac{h}{mg}.$$

Ferner benutzen wir die Bezeichnungen

$$y_1 = a + e; \quad y_2 = \frac{h}{mg}; \quad y_3 = a - e; \quad y_4 = \frac{1}{2a}\left(a^2 - c^2 - \frac{K}{m}\right); \tag{338}$$

die Grössenordnung dieser Wurzeln von $R(y)$ ist

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 . \tag{339}$$

Die Gleichung (335) schreibt sich jetzt

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\, t = \int_{y_3}^{y} \frac{y - y_4}{\sqrt{R(y)}}\, dy . \tag{340}$$

Nach WEIERSTRASS leistet man die Transformation

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}} \tag{341}$$

mittelst der Substitution

$$s = \frac{\sqrt{R(y_0)}\sqrt{R(y)} + R(y_0) + \frac{1}{2}R'(y_0)(y - y_0)}{2(y-y_0)^2} + \frac{R''(y_0)}{24} . \tag{342}$$

In unserem Falle ist

$$y_0 = y_3 \tag{343}$$

und berechnet sich

$$R(y_0) = 0 . \tag{344}$$

$$R'(y_0) = (y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_3 - y_4) = \frac{e}{a}\left(\frac{h}{mg} - a + e\right)\left\{\frac{K}{m} + (a-e)^2\right\} > 0 . \tag{345}$$

$$\begin{aligned} R''(y_0) &= 2\{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3) + (y_1 - y_4)(y_4 - y_3) + (y_2 - y_3)(y_4 - y_3)\} = \\ &= \frac{h}{mg}\,\frac{K}{ma} - \frac{h}{mg}\,\frac{(a+e)^2}{a} - \frac{K}{ma}(a+e) + \frac{(a-e)(a^2 - 8ae + 3e^2)}{a} . \end{aligned} \tag{346}$$

Mit Anwendung noch der verkürzenden Bezeichnungen

$$A = \frac{1}{2}R'(y_0); \quad B = \frac{1}{24}R''(y_0) = s_0 \tag{347}$$

wird die Transformationsgleichung (342)

$$s = \frac{A}{y - y_0} + B = \frac{A}{y - y_0} + s_0 . \tag{348}$$

Hieraus folgt

$$y = y_0 + \frac{A}{s - s_0} = y_3 + \frac{A}{s - s_0} = a - e + \frac{A}{s - s_0} \tag{349}$$

und man berechnet weiter

$$dy = -\frac{A\,ds}{(s - s_0)^2} , \tag{350}$$

$$\begin{cases} y - y_1 = -2e + \dfrac{A}{s - s_0} = -2e\,\dfrac{s - e_2}{s - s_0}, \\ y - y_2 = a - e - \dfrac{h}{mg} + \dfrac{A}{s - s_0} = \left(a - e - \dfrac{h}{mg}\right)\dfrac{s - e_1}{s - s_0}, \\ y - y_3 = \dfrac{A}{s - s_0}, \\ y - y_4 = \dfrac{K}{2ma} + \dfrac{(a-e)^2}{2a} + \dfrac{A}{s - s_0} = \dfrac{K_a}{2ma}\,\dfrac{s - e_3}{s - s_0}, \end{cases} \tag{351}$$

worin

(352) $$K_a = K + m(a-e)^2$$

das Trägheitsmoment des Zylinders in bezug auf diejenige Erzeugende seiner Mantelfläche ist, welche den kleinsten Abstand $|a-e|$ vom Schwerpunkte S hat, und die Wurzeln e_1, e_2, e_3 in der richtigen Grössenordnung

$$e_1 > e_2 > e_3$$

die folgenden Werte haben

(353)
$$\begin{cases} e_1 = s_0 + \dfrac{A}{\dfrac{h}{mg} - a + e} = s_0 + \dfrac{1}{4}\dfrac{e}{a}\left\{\dfrac{K}{m} + (a-e)^2\right\} = s_0 + \dfrac{eK_a}{4ma}, \\ e_2 = s_0 + \dfrac{A}{2e} = s_0 + \dfrac{1}{8a}\left(\dfrac{h}{mg} - a + e\right)\left\{\dfrac{K}{m} + (a-e)^2\right\} = s_0 + \left(\dfrac{h}{mg} - a + e\right)\dfrac{K_a}{8ma}, \\ e_3 = s_0 - \dfrac{A}{\dfrac{K}{2ma} + \dfrac{(a-e)^2}{2a}} = s_0 - \dfrac{e}{2}\left(\dfrac{h}{mg} - a + e\right). \end{cases}$$

Auch die Beziehung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

wird erfüllt. Die Werte (353) geben tatsächlich

(354) $$\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = -\frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

Aus (340) erhält man alsdann

(355) $$\frac{2m\sqrt{ag}}{K_a}t = -\int_{\infty}^{s} \frac{(s-e_3)\,ds}{(s-s_0)\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}.$$

Setzt man noch

(356) $$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}; \quad s = \wp(u); \quad s_0 = \wp(v),$$

so erhält man

(357) $$\frac{2m\sqrt{ag}}{K_a}t = \int_0^u \frac{\wp(u)-e_3}{\wp(u)-\wp(v)}\,du.$$

Es ist

(358) $$\wp'(v) = \sqrt{4(s_0-e_1)(s_0-e_2)(s_0-e_3)} = A = \frac{eK_a}{4ma}\left(\frac{h}{mg} - a + e\right)$$

reel und positiv; somit liegt $\wp(v) = s_0$ zwischen e_3 und e_2, wie übrigens unmittelbar aus (353) ersichtlich. Wenn $2\omega_1$ die reelle und $2\omega_3$ die rein imaginäre Periode eines primitiven Periodenpaares von $\wp(u)$ bezeichnen, so ist

(359) $$v = \omega_3 + \alpha, \quad (0 < \alpha < \omega_1).$$

Indem

$$\frac{\wp(u)-e_3}{\wp(u)-\wp(v)} = 1 + \frac{\wp(v)-e_3}{\wp(u)-\wp(v)}$$

und

(360) $$\int \frac{du}{\wp(u)-\wp(v)} = \frac{1}{\wp'(v)}\left\{\log\frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}u\right\} + \text{Konst.},$$

mit dem Hauptwert des Logarithmus genommen, gibt die Gl. (357) beim Integrieren

$$(361)\qquad \frac{2m\sqrt{ag}}{K_a}t = u + \frac{\wp(v)-e_3}{\wp'(v)}\left\{\log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma(v+u)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}u\right\} = u + \frac{2am}{K_a}\left\{\log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma(v+u)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}u\right\}.$$

Die Periode T der vollständigen Schwingungen des Zylinders hin und zurück ist die doppelte Periode von y und berechnet sich somit aus

$$(362)\qquad \frac{2m\sqrt{ag}}{4K_a}T = \omega_1 + \frac{4am}{K_a}\left\{\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\omega_1 - \eta_1 v\right\}.$$

Man hat

$$(363)\qquad y = a - e + \frac{A}{\wp(u)-\wp(v)} = y_2 + \frac{\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)} = a - e + \frac{eK_a\left(\frac{h}{mg}-a+e\right)}{4ma\{\wp(u)-\wp(v)\}}.$$

Es ist weiter laut Art. 5

$$(364)\qquad \begin{cases} x = a\psi + e\sin\psi\,; \quad y = a + e\cos\psi\,, \\ \varphi = a\psi\,, \\ \omega = -\dfrac{d\psi}{dt}\,, \\ \left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = (a^2 + 2ae\cos\psi + e^2)\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Man berechnet hier

$$(365)\qquad \begin{cases} e\cos\psi = y - a = -e + \dfrac{A}{\wp(u)-\wp(v)} = -e + \dfrac{\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\,, \\ e\sin\psi = \pm\sqrt{e^2-(y-a)^2} = \pm\sqrt{-(y-y_3)(y-y_1)} = \pm\dfrac{\sqrt{2eA\{\wp(u)-e_2\}}}{\wp(u)-\wp(v)} = \\ \qquad = +\dfrac{\sqrt{2eA}}{\wp(u)-\wp(v)}\dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}. \end{cases}$$

$$(366)\qquad \omega = -\frac{d\psi}{dt} = \mp 2\sqrt{\frac{2qaA}{e}}\frac{m}{K_a}\sqrt{\frac{\wp(u)-e_1}{\wp(u)-e_3}} = \mp\sqrt{\frac{2mg}{K_a}\left(\frac{h}{mg}-a+e\right)}\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}.$$

$$(367)\qquad \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{2\{h-mg(a-e)\}}{K_a}\left\{(a-e)^2 + \frac{2aA}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}\frac{\wp(u)-e_1}{\wp(u)-e_3}.$$

Für $t=0$ ist $u=0$, $y=a-e$, S am niedrigsten, die Winkelgeschwindigkeit ω hat ihren grössten Wert

$$(368)\qquad \max|\omega| = \sqrt{\frac{2}{K_a}\{h-mg(a-e)\}}$$

und ebenso die Geschwindigkeit von S ihren grössten Wert

$$(369)\qquad \max\left|\frac{dl}{dt}\right| = |a-e|\max|\omega| = |a-e|\sqrt{\frac{2}{K_a}\{h-mg(a-e)\}}.$$

Mit wachsendem u wachsen t und y, und für $t=\frac{1}{4}T$ wird $u=\omega_1$, y am grössten, gleich dem Werte (337), die Geschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ Null und die Bewegung kehrt um. Dabei ist

$$(370)\qquad \max\psi = \arccos\frac{1}{e}\left(\frac{h}{mg}-a\right);\quad \max\varphi = a\arccos\frac{1}{e}\left(\frac{h}{mg}-a\right).$$

Nachher wachsen t und u weiter und der Zylinder geht für $u=2\omega_1$, $t=\frac{1}{2}T$ wieder durch seine Gleichgewichtslage, wonach dasselbe sich nach der anderen Seite wiederholt.

Als Periode unendlich kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage erhält man einfach direkt durch Approximation in der Differentialgleichung (333)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_a}{mge}} = 2\pi \sqrt{\frac{K + m(a-e)^2}{mge}}, \tag{371}$$

die bekannte Formel für das Rollpendel (vergl. K. F. LINDMAN, Om rullningsfriktionen, Teknikern 1914, Helsingfors).

Es sei jetzt

$$\frac{h}{mg} > a + e, \tag{372}$$

so dass der Zylinder periodisch vollständige Umläufe macht. Die vier Wurzeln von $R(y)$ sind dann in Ordnung nach abnehmender Grösse

$$y_1 = \frac{h}{mg}; \quad y_2 = a + e; \quad y_3 = a - e; \quad y_4 = \frac{1}{2a}\left(a^2 - e^2 - \frac{K}{m}\right). \tag{373}$$

Man kann wieder $t = 0$ der Wurzel $y_3 = a - e$ entsprechen lassen und erhält dieselben Substitutionsformeln und Gleichungen (340), (348), (355)..(359) und (361) wie oben, nur ist jetzt

$$\begin{cases} y - y_1 = a - e - \dfrac{h}{mg} + \dfrac{A}{s - s_0} = \left(a - e - \dfrac{h}{mg}\right)\dfrac{s - e_2}{s - s_0}, \\ y - y_2 = -2e + \dfrac{A}{s - s_0} = -2e\dfrac{s - e_1}{s - s_0}, \\ y - y_3 = \dfrac{A}{s - s_0}, \\ y - y_4 = \dfrac{K_a}{2ma} + \dfrac{A}{s - s_0} = \dfrac{K_a}{2ma}\dfrac{s - e_3}{s - s_0}, \end{cases} \tag{374}$$

$$\begin{cases} e_1 = s_0 + \dfrac{A}{2e} = s_0 + \left(\dfrac{h}{mg} - a + e\right)\dfrac{K_a}{8ma}, \\ e_2 = s_0 + \dfrac{A}{\dfrac{h}{mg} - a + e} = s_0 + \dfrac{eK_a}{4ma}, \\ e_3 = s_0 - \dfrac{2maA}{K_a} = s_0 - \dfrac{e}{2}\left(\dfrac{h}{mg} - a + e\right). \end{cases} \tag{375}$$

Die Werte der Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ sind jetzt andere als in dem früheren Falle; die Periode T der vollständigen Umläufe ist formell die Hälfte der Periode der Schwingungen. Man erhält somit hier

$$\frac{2m\sqrt{ga}}{K_a} t = u + \frac{2am}{K_a}\left\{\log\frac{\sigma(v-u)}{\sigma(v+u)} + 2\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}u\right\}. \tag{376}$$

$$\frac{2m\sqrt{ga}}{2K_a} T = \omega_1 + \frac{4am}{K_a}\left\{\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\omega_1 - \eta_1 v\right\}. \tag{377}$$

Dazu berechnet man nebst (364)

$$(378)\quad \begin{cases} e\cos\psi = y - a = -e + \dfrac{A}{\wp(u)-\wp(v)} = -e + \dfrac{\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}, \\ e\sin\psi = \pm\sqrt{e^2-(y-a)^2} = \pm\sqrt{-(y-y_3)(y-y_2)} = \pm\dfrac{\sqrt{2eA\{\wp(u)-e_1\}}}{\wp(u)-\wp(v)} = \\ \qquad = +\dfrac{\sqrt{2eA}}{\wp(u)-\wp(v)}\,\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}. \end{cases}$$

$$(379)\quad \omega^2 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2}{K_a}\{h - mg(a-e)\}\frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-e_3}.$$

$$(380)\quad \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{2\{h-mg(a-e)\}}{K_a}\left\{(a-e)^2 + \frac{2aA}{\wp(u)-\wp(v)}\right\}\frac{\wp(u)-e_2}{\wp(u)-e_3}.$$

Wenn $t=0$ ist, ist $y=a-e$, $u=0$, und die Winkelgeschwindigkeit $|\omega|$ und die Geschwindigkeit $\left|\frac{dl}{dt}\right|$ des Schwerpunktes S haben ihre grössten Werte, welche durch die Ausdrücke (368) und (369) gegeben werden. Wenn t dann wächst, so wachsen u und y und nehmen $|\omega|$ und $\left|\frac{dl}{dt}\right|$ ab. Für $u=\omega_1$, $\wp(u)=e_1$, hat man $t=\frac{1}{2}T$, $y=y_{\max}=y_2=a+e$, $\psi=\pi$ und

$$(381)\quad \min|\omega| = \sqrt{\frac{2\{h-mg(a-e)\}}{K_a}\,\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}} = \sqrt{\frac{2\{h-mg(a+e)\}}{K+m(a+e)^2}},$$

worin $K+m(a+e)^2$ jetzt das Trägheitsmoment in bezug auf die Berührungsgerade, d. h. die momentane Rotationsaxe ist, sowie

$$(382)\quad \min\left|\frac{dl}{dt}\right| = (a+e)\min|\omega| = (a+e)\sqrt{\frac{2\{h-mg(a+e)\}}{K+m(a+e)^2}}.$$

Mit weiter wachsendem u setzt die Bewegung fort bei wachsendem ψ und φ in demselben Sinne, und ein vollständiger Umlauf ist vollbracht als $t=T$, $u=2\omega_1$, $\psi=2\pi$, $\varphi=2a\tau$ ist, wonach das ganze sich periodisch wiederholt.

Für

$$(383)\quad \frac{h}{mg} = a+e$$

ergibt sich ein Grenzfall, mit asymptotischer Annäherung an die höchste Lage von S, und die elliptischen Funktionen degenerieren.

20. *Rollen einer ebenen Platte auf einem Kreiszylinder unter dem Einfluss einer Zentralkraft.* Wenn die Kraft senkrecht gegen die Axe des festen Zylinders gerichtet und proportional der Entfernung ist, so gilt in dem symmetrischen Falle ($\xi_s=0$) die Gleichung (190) im Art. 9. Bezeichnet man etwas einfacher η_s mit b und wählt als neue Veränderliche

$$(384)\quad s = c - a^2\varphi^2,$$

so erhält man aus derselben

$$(385)\quad akdt = \pm\frac{(s-e_1)\,ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}},$$

mit dem Werte

$$(386)\quad c = \frac{1}{3}\left\{\frac{2h}{mk^2} - \frac{K}{m} - (2b^2+2ab+a^2)\right\}$$

und den Wurzeln

(387) $$e_1 = c + b^2 + \frac{K}{m}; \quad e_2 = c; \quad e_3 = c + (b+a)^2 - \frac{2h}{mk^2},$$

wobei

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Es muss sein

(388) $$h > \tfrac{1}{2} mk^2 (b+a)^2$$

und die Bewegung besteht in Schwingungen um die Gleichgewichtslage.

Ferner setze man

(389) $$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}; \quad s = \wp(u).$$

Der Gleichgewichtslage entsprechen die Werte $t = 0$, $\varphi = 0$, $s = c = e_2$, und $s = \wp(u)$ variiert zwischen e_2 und e_3. Aus (385) ergibt sich jetzt, wenn man anfangs s mit wachsendem t wachsen lässt,

(390) $$akt = \int_{\omega_2}^{u} \{\wp(u) - e_1\} du,$$

wobei $2\omega_1$ und $2\omega_3$ die reelle und die rein imaginäre Periode eines primitiven Periodenpaares von $\wp(u)$ seien. Für u kann man die Form

(391) $$u = \omega_2 - \alpha$$

nehmen, mit α reel. Indem

(392) $$\int \wp(u)\, du = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \text{Konst.},$$

ergibt sich dann

(393) $$akt = \Big|_{\omega_2}^{u} \left\{ -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - e_1 u \right\} = \Big|_{0}^{\alpha} \left\{ \frac{\sigma'(\alpha - \omega_2)}{\sigma(\alpha - \omega_2)} + e_1 (\alpha - \omega_2) \right\}$$

und ausgerechnet mit Hülfe des Additionsteoremes von $\frac{\sigma'}{\sigma}$

(394) $$akt = \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)} - \sqrt{\frac{\{\wp(\alpha) - e_1\}\{\wp(\alpha) - e_3\}}{\wp(\alpha) - e_2}} + e_1 \alpha.$$

Für die vollständige Periode T der Schwingungen erhält man

(395) $$T = \frac{4}{ak}(\eta_1 + e_1 \omega_1).$$

Men leitet noch folgende Formeln ab, mit Anwendung auch des Additionsteoremes für $\wp$.

(396) $$a^2 \varphi^2 = c - \wp(u) = 2e_2 + \wp(\alpha) - \frac{\{\wp(a) - e_1\}\{\wp(\alpha) - e_3\}}{\wp(\alpha) - e_2} = \frac{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}{\wp(\alpha) - e_2}.$$

(397) $$\max |\varphi| = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2h}{mk} - (b+a)^2},$$

(398) $$\frac{d\varphi}{dt} = \pm k \sqrt{\frac{\wp(u) - e_3}{e_1 - \wp(u)}},$$

(399) $$\max \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = k \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}} = \sqrt{\frac{2h - mk^2(b+a)^2}{K + mb^2}}.$$

worin $K + mb^2$ das Trägheitsmoment in bezug auf die Berührungslinie in der Gleichgewichtslage bezeichnet. Der letzte Wert ergibt sich auch direkt aus der Differentialgleichung (190).

Wenn t von Null wächst, so wächst α von Null bis zu dem Werte ω_1 für $t = \frac{1}{4}T$, welcher dem Umkehrpunkt entspricht. Dabei hat φ den Wert (397) und ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$. Zugleich nimmt $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ von dem Werte (399) ab. Es wachsen nachher t und α weiter und die Scheibe kehrt für $t = \frac{1}{2}T$, $\alpha = 2\omega_1$ zur Gleichgewichtslage zurück, um nachher nach der anderen Seite auszuschwingen.

Die Schwingungszeit unendlich kleiner Schwingungen hat die Grösse

$$T = 2\pi \frac{\sqrt{K + mb^2}}{\sqrt{mk}a}. \tag{400}$$

21. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve zu einer Parabel.* In dem Falle, dass der Kreis auf der inneren Parallelkurve rollt, wie in der Fig. 17, hat man die Differentialgleichung (277). Setzt man in derselben

$$y = c - s, \tag{401}$$

so erhält man

$$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,dt = \pm \frac{(s-e_1)\,ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}, \tag{402}$$

wobei

$$e = \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{mg} + 2a - \frac{p}{2}\right\}, \tag{403}$$

$$e_1 = c - a + \frac{p}{2}; \quad e_2 = c - a; \quad e_3 = c - \frac{h}{mg}, \tag{404}$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Es muss immer

$$h > mga \tag{405}$$

sein; die Bewegung besteht in Rollschwingungen um die unterste Lage, welche den Werten $t = 0$, $y = a$, $s = e_3$ entsprechen möge.

Setzt man alsdann wieder

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}; \quad s = \wp(u) \tag{406}$$

und lässt s mit wachsendem t zunächst abnehmen, so wird

$$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,t = \int_{\omega_2}^{u} \{\wp(u) - e_1\}\,du; \tag{407}$$

die Aufgabe ist folglich ziemlich ähnlich der im Art. 20 behandelten Aufgabe. Es ändert sich $\wp(u)$ bei den Schwingungen zwischen e_2 und e_3 und man setze deshalb

$$u = \omega_2 - \alpha, \tag{408}$$

mit α reel. Dabei ergibt sich ähnlich wie im Art. 20

(409) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,t=\frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)}-\sqrt{\frac{\{\wp(\alpha)-e_1\}\{\wp(\alpha)-e_3\}}{\wp(\alpha)-e_2}}+e_1\alpha$$

und als Periode T der vollständigen Schwingungen

(410) $$T=4\sqrt{\frac{2(m+m_k)}{mg}}(\eta_1+e_1\omega_1).$$

Hierzu berechnet man noch folgende Ausdrücke:

(411) $$y=a+e_2-\wp(u)=a+\frac{(e_1-e_2)(e_2-e_3)}{\wp(\alpha)-e_2}=a+\frac{1}{2}\frac{p}{mg}\frac{h-mga}{\wp(\alpha)-e_2};\quad \max y=\frac{h}{mg},$$

(412) $$x=+p\sqrt{\frac{e_2-e_3}{\wp(\alpha)-e_2}}=\pm p\sqrt{\frac{h-mga}{mg\{\wp(\alpha)-e_2\}}}.$$

(413) $$\frac{dx}{dt}=+\sqrt{\frac{p}{2}}\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\wp(u)-e_3}{e_1-\wp(u)}};\quad \frac{dy}{dt}=+\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\{e_2-\wp(u)\}\{\wp(u)-e_3\}}{e_1-\wp(u)}}.$$

(414) $$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{2mg}{m+m_k}\{\wp(u)-e_3\}.$$

(415) $$\max\left|\frac{dl}{dt}\right|=\max\left|\frac{dx}{dt}\right|=\sqrt{\frac{2(h-mga)}{m+m_k}}.$$

Wenn t von Null, der Gleichgewichtslage entsprechend, wächst, so wächst α und nimmt $\wp(\alpha)$ von ∞ ab, $\wp(u)$ von e_2 ab; x und y nehmen zu von den Anfangswerten bez. 0 und a, $\left|\frac{dl}{dt}\right|$ ab von dem grössten Werte (415). Für $t=\frac{1}{4}T$ wird der Umkehrpunkt erreicht; es ist in demselben $\alpha=\omega_1$, $u=\omega_3$, $y=y_{\max}=\frac{h}{mg}$, $\frac{dl}{dt}=0$. Der rollende Kreis kehrt dann zurück und erreicht für $t=\frac{1}{2}T$ wieder die Gleichgewichtslage, um nachher eine ähnliche Exkursion nach der anderen Seite auszuführen.

Wir betrachten jetzt den in der Fig. 18 dargestellten Fall, in welchem der Kreis auf der Aussenseite einer inneren Parallelkurve der nach unten gekehrten Parabel rollt. Der Kreis kann über den Scheitel der Kurve rollen, falls

(416) $$h>mga,$$

dagegen nicht, wenn

(417) $$h<mga.$$

Wir betrachten zuerst jenen Fall und nehmen an, dass nicht nur die Bedingung (416) erfüllt ist, sondern auch

(418) $$h>mg\left(a+\frac{1}{2}p\right).$$

In der Differentialgleichung (285) substituiert man jetzt

(419) $$y=c-s$$

und erhält

(420) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,dt=\pm\frac{(s-e_2)\,ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}},$$

worin

(421) $$c = \frac{1}{3}\left\{\frac{h}{mg} + 2a + \frac{p}{2}\right\}$$

und

(422) $$e_1 = c \quad a\,; \quad e_2 = c - a \quad \frac{p}{2}\,; \quad e_3 \quad c \quad \frac{h}{mg}\,,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0\,.$$

Man setzt dann

(423) $$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}\,; \quad s = \wp(u)$$

und erhält, wenn man den höchsten Punkt $y = a$ der Zeit $t = 0$ entsprechen und s wachsen lässt, wenn t wächst,

(424) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,t = -\int_{\omega_1}^{u} \{\wp(u) - e_2\}\,du\,.$$

Bei Ausführung der Integration ergibt sich

(425) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,t = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + e_2 u - (\eta_1 + e_2\omega_1)\,.$$

Weiter leitet man folgende Formeln ab:

(426) $$\begin{cases} x = \sqrt{2p}\sqrt{\wp(u) - e_1} = \sqrt{2p}\,\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\,, \\ y = a + e_1 - \wp(u) = c - \wp(u)\,. \end{cases}$$

(427) $$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{pmg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\wp(u)-e_3}{\wp(u)-e_2}}\,; \quad \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_3\}}{\wp(u)-e_2}}\,.$$

(428) $$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\wp(u)-e_3} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\,.$$

(429) $$\min\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{2(h-mga)}{m+m_k}}\,.$$

Von der der Zeit $t = 0$ entsprechenden höchsten Lage an, in welcher die Geschwindigkeit des Schwerpunktes S ihren kleinsten Wert (429) hat, nimmt x immer zu, y von a an immer ab, die Geschwindigkeit immer zu. Es wächst $s = \wp(u)$ von e_1 bis ∞ und u nimmt ab von ω_1 bis 0. Für negative Zeiten hat man die symmetrische Bewegung aufwärts auf der anderen Seite der Kurve, entsprechend einem Abnehmen von u von $\omega_1 + \alpha$ bis ω_1, wobei $0 < \alpha < \omega_1$.

Zuletzt setzen wir voraus, dass die Bedingung (417) erfüllt ist. Die Ordnung der Wurzeln e_1, e_2, e_3 ist dann

(430) $$e_1 = c - \frac{h}{mg}\,, \quad e_2 = c - a\,, \quad e_3 = c - a - \frac{p}{2}\,,$$

mit dem c-Werte (421), und man erhält statt (420)

(431) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,dt = \pm\frac{(s-e_3)\,ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}\,,$$

ausserdem wie früher

(432) $$y = c - s = c - \wp(u)\,.$$

Dem Werte $t = 0$ entspreche

(433) $$\max y = c - e_1 = \frac{h}{mg}.$$

Alsdann wird

(434) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,t = \int_{\omega_1}^{u} \{e_3 - \wp(u)\}\,du = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + e_3 u - (\eta_1 + e_3\omega_1)$$

und man berechnet noch

(435) $$x = \sqrt{2p}\,\sqrt{\wp(u) - e_2} = \sqrt{2p}\,\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)};\quad y = a + e_2 - \wp(u) = c - \wp(u).$$

(436) $$\frac{dx}{dt} = \mp\sqrt{\frac{pmg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\wp(u)-e_1}{\wp(u)-e_3}};\quad \frac{dy}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\frac{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}}{\wp(u)-e_3}}.$$

(437) $$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{\wp(u)-e_1} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}.$$

Dem Werte $\max y$ entspricht

(438) $$\min x = \sqrt{2p(e_1 - e_2)} = \sqrt{\frac{2p}{mg}(mga - h)}.$$

hier auf der positiven Kurvenseite. Wenn t von Null in's Unendliche wächst, so nimmt x zu und y ab (numerisch zu) und die Geschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ vom Anfangswert Null zu, alle in's Unendliche. Dabei nimmt u von ω_1 bis 0 ab und $\wp(u)$ wächst von e_1 bis ∞. Negativen t-Werten entspricht das entgegengesetzte Rollen aufwärts auf der positiven Kurvenseite mit denselben Geschwindigkeiten, von der Richtung abgesehen, bis zum Umkehrpunkt für $t = 0$.

22. *Rollen eines Kreises auf der Parallelkurve zu einer gewöhnlichen Kettenlinie.* Zuerst werde wie im Art. 16 der Fall betrachtet, dass die Kettenlinie ihre konkave Seite nach oben kehrt und der Kreis auf der inneren Seite der unteren Parallelkurve rollt. Er führt dann Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus. Man hat

(439) $$h > mga$$

und erhält aus der Differentialgleichung (306), wenn man

(440) $$y = c - s$$

mit

(441) $$c = \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{mg} + 2a - 2p\right)$$

setzt,

(442) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\,dt = \mp\frac{\{s - (c - a + p)\}\,ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

worin

(443) $$\begin{cases} e_1 = c - a + 2p;\quad e_2 = c - a,\quad e_3 = c - \dfrac{h}{mg}, \\ e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ c - a + p = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2) = -\tfrac{1}{2}e_3. \end{cases}$$

Es entspreche dem Werte $s = e_2$, d. h. $y = a$, die Zeit $t = 0$. Dann nimmt s mit wachsendem t zuerst ab und zwar bei der ersten Viertelschwingung bis zu dem Werte e_3, welcher $y = \frac{h}{mg}$ gibt, der Zeit $t = \frac{1}{4}T$ entsprechend. Mit

(444) $$u = -\int_{x}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}, \quad s = \wp(u)$$

erhält man dann

(445) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\, t = \int_{\omega_2}^{u} \left\{\wp(u) - \tfrac{1}{2}(e_1+e_2)\right\} du = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \eta_2 - \frac{e_1+e_2}{2}(u-\omega_2)$$

sowie

(446) $$T = 4\sqrt{\frac{2(m+m_k)}{mg}}\left\{\eta_1 + \frac{e_1+e_2}{2}\omega_1\right\}.$$

Setzt man noch, mit α reel und wachsend von 0 bis ω_1, wenn t von 0 bis $\frac{1}{4}T$ wächst,

(447) $$u = \omega_2 - \alpha,$$

so ergibt sich aus (445)

(448) $$\sqrt{\frac{mg}{2(m+m_k)}}\, t = \frac{e_1+e_2}{2}\alpha + \frac{\sigma'(\alpha)}{\sigma(\alpha)} - \sqrt{\frac{\{\wp(\alpha)-e_1\}\{\wp(\alpha)-e_3\}}{\wp(\alpha)-e_2}}.$$

Hierzu leitet man noch folgende Formeln ab:

(449) $$y = c - \wp(u) = c + e_2 + \wp(\alpha) - 2\sqrt{\{\wp(\alpha)-e_1\}\{\wp(\alpha)-e_3\}},$$

(450) $$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{p\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)}; \quad \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{2\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)},$$

(451) $$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{2\sqrt{\wp(u)-e_3}\,\sqrt{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}+p^2}}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)},$$

(452) $$\max\frac{dl}{dt} = \max\left|\frac{dx}{dt}\right| = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{e_2-e_3} = \sqrt{\frac{2(h-mga)}{m+m_k}},$$

und, um auch den Druck N zu nehmen, laut (308),

(453) $$\frac{N}{mg} = \frac{p}{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)} + \frac{2mp\{\wp(u)-e_3\}}{(m+m_k)\left\{\frac{1}{2}(e_1-e_2)-\wp(u)\right\}^2} =$$
$$= \frac{p\left\{(m+m_k)\left[\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)\right]+2mp\left[\wp(u)-e_3\right]\right\}}{(m+m_k)\left\{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)\right\}^2} = \frac{p\left\{(m-m_k)\wp(u)-\frac{1}{2}(5m+m_k)e_3\right\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)+\frac{1}{2}e_3\right\}^2}.$$

In dem niedrigsten Punkte hat man mit $\wp(u) = e_2$

(454) $$\max N = mg + \frac{2m(h-mga)}{(m+m_k)p}.$$

wie auch die Formel (308) unmittelbar gibt.

Es möge jetzt die Kettenlinie ihre konkave Seite nach unten kehren und der Kreis auf der Aussenseite der inneren Parallelkurve rollen. Dabei können wie im Art. 21 die beiden Fälle

(455) $$h > mga$$

und

(456) $$h < mga$$

vorkommen. Wir betrachten zuerst den Fall (455), in welchem der Kreis also über den Scheitel der Kurve rollen kann, und setzen voraus, dass h so gross ist, dass auch die Bedingung

(457) $$h > mga(a+2p)$$

erfüllt ist. Man erhält alsdann aus der Differentialgleichung (311) mit

(458) $$y = c - s$$

(459) $$\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,dt = \pm\frac{\left\{s-\frac{1}{2}(e_1+e_2)\right\}ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$$

worin

(460) $$\begin{cases} c = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{mg}+2a+2p\right), \\ e_1 = c-a; \quad e_2 = c-a-2p; \quad e_3 = c-\frac{h}{mg}, \\ e_1+e_2+e_3 = 0, \\ c-a-p = \frac{1}{2}(e_1+e_2) = -\frac{1}{2}e_3 \end{cases}$$

ist. Mit der Substitution (444) ergibt sich jetzt aus (459), wenn man $t=0$ der höchsten Lage $(y=a,\ s=e_1)$ entsprechen lässt,

(461) $$\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,t = \int_{\omega_1}^{u}\left\{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\wp(u)\right\}du = \frac{1}{2}(e_1+e_2)(u-\omega_1)+\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}-\eta_1.$$

Wenn t von 0 wächst, nimmt y von dem Werte a ab, s von e_1 zu, und u von ω_1 ab. In unendlicher Entfernung nähert sich y zu $-\infty$, s zu $+\infty$, u zu 0. Negativen wachsenden Werten von t entspricht die symmetrische Bewegung aufwärts auf der anderen Seite der Kurve. Man berechnet noch die Formeln

(462) $$y = c - s = c - \wp(u),$$

(463) $$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\cdot\frac{p\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)}; \quad \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\cdot\frac{\sqrt{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)},$$

(464) $$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\cdot\frac{\sqrt{\wp(u)-e_3}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)}\sqrt{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}+p^2},$$

und

(465) $$\min\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\sqrt{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{2(h-mga)}{m+m_k}}$$

im Scheitel der Bahn.

Für den Druck N findet man laut (312)

(466) $$\frac{N}{mg} = \frac{p}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)} - \frac{2mp\{\wp(u)-e_3\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)\right\}^2} =$$
$$= \frac{p\left\{(m+m_k)\left[\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)\right]-2m\left[\wp(u)-e_3\right]\right\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_1+e_2)\right\}^2} = \frac{p\left\{(m_k-m)\wp(u)+\frac{1}{2}(5m+m_k)e_3\right\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)+\frac{1}{2}e_3\right\}^2}$$

und speziell im Scheitel, für $\wp(u)=e_1$,

(467) $$N = mg - \frac{2m(h-mga)}{(m+m_k)p}.$$

Dieser Wert kann positiv oder negativ sein. Er wird Null, wenn

$$h = mg\left(a + \frac{m+m_k}{2m}p\right), \tag{468}$$

aber damit die Bedingung (457) erfüllt sei, muss dabei $m_k > 3m$ sein. Für grössere h-Werte als (468) wird N negativ, für kleinere Werte positiv. Es bezeichnet der Wert (468) den grössten h-Wert, bei welcher der Kreis noch über den Kurvenscheitel rollen kann, ohne gegen die Kurve mittelst einer besonderen Anordnung gepresst zu werden.

Allgemein erhält man aus (466) $N = 0$ für

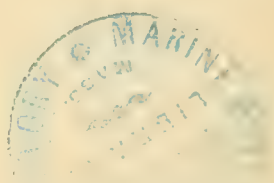
$$\wp(u) = \frac{5m+m_k}{2(m-m_k)}e_3$$

d. h.

$$y = c - \frac{5m+m_k}{2(m-m_k)}e_3 = \frac{2h-(m+m_k)g(a+p)}{(m-m_k)g}. \tag{469}$$

Zuletzt soll der Fall (456) betrachtet werden, in welchem der Kreis den Kurvenscheitel nicht erreicht. Die Bewegung ist je nach den Anfangsbedingungen ein Rollen aufwärts bis zu einem Umkehrpunkte und nachher ein Rollen abwärts, oder nur ein Rollen abwärts, ohne oder mit Anfangsgeschwindigkeit. Der Umkehrpunkt (reel oder virtuel in der wirklichen Bewegung) soll dem Zeitanfang $t = 0$ entsprechen. Für die Wurzeln e_1, e_2, e_3 hat man jetzt die Werte

$$\left\{\begin{aligned} &e_1 = c - \frac{h}{mg}; \quad e_2 = c - a; \quad e_3 = c - a - 2p, \\ &c - a - p = \frac{1}{2}(e_2 + e_3) = -\frac{1}{2}e_1, \end{aligned}\right. \tag{470}$$



mit dem c-Werte (460), und erhält mit

$$y = c - s = c - \wp(u) = a + e_2 - \wp(u) \tag{471}$$

für den höhsten oder Umkehrpunkt

$$\max y = c - e_1 = \frac{h}{mg}, \tag{472}$$

ferner

$$\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,t = -\int_{\omega_1}^{u}\left\{\wp(u) - \frac{1}{2}(e_2+e_3)\right\}du = \frac{1}{2}(e_2+e_3)(u-\omega_1) + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - \eta_1. \tag{473}$$

Wenn t von 0 bis ∞ wächst, wächst $\wp(u)$ von e_1 bis ∞, y nimmt ab von $\max y$ bis $-\infty$ und u von ω_1 bis 0. Es ergibt sich noch

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{p\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_2+e_3)}; \quad \frac{dy}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{\sqrt{\{\wp(u)-e_1\}\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_2+e_3)}. \tag{474}$$

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{m+m_k}}\,\frac{\sqrt{\wp(u)-e_1}}{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_2+e_3)}\sqrt{\{\wp(u)-e_2\}\{\wp(u)-e_3\}+p^2}. \tag{475}$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $\frac{dl}{dt} = 0$. Schliesslich berechnet man für den Druck N

$$\frac{N}{mg} = \frac{p}{\wp(u) - \frac{1}{2}(e_2+e_3)} - \frac{2mp\{\wp(u)-e_1\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u) - \frac{1}{2}(e_2+e_3)\right\}^2} =$$

(476)

$$= \frac{p\left\{(m+m_k)\left[\wp(u)-\frac{1}{2}(e_2+e_3)\right] - 2m\left[\wp(u)-e_1\right]\right\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)-\frac{1}{2}(e_2+e_3)\right\}^2} = \frac{p\left\{(m_k-m)\wp(u)+\frac{1}{2}(5m+m_k)e_1\right\}}{(m+m_k)\left\{\wp(u)+\frac{1}{2}e_1\right\}^2}.$$

Der Druck verschwindet für

$$\wp(u) = \frac{5m+m_k}{2(m-m_k)}e_1,$$

d. h.

(477)
$$y = \frac{2h-(m+m_k)g(a+p)}{(m-m_k)g}.$$

Ein solcher Punkt kommt während der Bewegung vor, nur wenn

(478)
$$m > m_k \quad \text{und} \quad h < mg(a+p).$$

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 1.

DIE AUSSERORDENTLICHE HALOERSCHEINUNG

AM 10. MÄRZ 1920

IN

SÜD-FINNLAND

VON

OSC. V. JOHANSSON

HELSINGFORS 1920
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITERATUR-GESELLSCHAFT

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 2.

LÖSNINGARS OPTISKA EGENSKAPER

EN HYPOTES RÖRANDE BYGGNADEN AV ELEKTROLYTERNAS MOLEKYLER

AV

JARL A. WASASTJERNA

(TRYCKT PÅ FÖRORD AV HERRAR L. W. ÖHOLM OCH HJ. TALLQVIST)

HELSINGFORS 1920
FINSKA LITTERATURSÄLLSKAPETS TRYCKERI A.-B.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 3.

ZUR THEORIE
DER
AUTOMORPHEN FUNKTIONEN
BELIEBIG VIELER VERÄNDERLICHEN

VON

P. J. MYRBERG

HELSINGFORS 1922
DRUCKEREI DER FINNISCHEN LITTERATURGESELLSCHAFT

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ

TOM. L. N:o 4.

ZUR KENNTNIS DER BLÜTENENTWICKLUNG EINIGER JUNCACEEN

VON

WIDAR BRENNER

MIT 1 TAFEL UND 41 FIGUREN IM TEXT

(Am 25. September 1922 von V. F. Brotherus und H. Lindberg mitgeteilt)

HELSINGFORS 1922

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 5.

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN IN DER UMGEBUNG EINER SINGULÄREN STELLE ODER LINIE

VON
F. UND R. NEVANLINNA

(Am 22. November 1922 von E. Lindelöf und J. W. Lindeberg mitgeteilt)

HELSINGFORS 1922

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 6.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DEN PICARD'SCHEN SATZ

VON
ROLF NEVANLINNA

HELSINGFORS 1924

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 7.

RECHERCHES

SUR LES

MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES

DANS LA

ZONE PHOTOGRAPHIQUE DE HELSINGFORS

PAR

RAGNAR FURUHJELM

II

Clichés de 6^h à 9^h

HELSINGFORS 1926,
IMPRIMERIE DE LA SOCIÉTÉ DE LITTÉRATURE FINNOISE

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 8.

ÜBER STABVERBINDUNGEN MIT VERÄNDERLICHEM KRAFTANGRIFF

VON
HARALD LUNELUND

(Am 17. November 1924 von Hj. Tallqvist und Osc. V. Johansson mitgeteilt)

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 9.

UNTERSUCHUNGEN
ZUR
THEORIE DER BELEUCHTUNG DES MONDES AUF GRUND PHOTOMETRISCHER MESSUNGEN

VON
E. SCHOENBERG

(Mitgeteilt am 23. Februar 1925 von K. F. Sundman und A. Donner)

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 10.

ÜBER DAS LEITVERMÖGEN DER MISCHUNGEN VON STARKEN ELEKTROLYTEN

UNTERSUCHUNGEN BEI SEHR KLEINEN KONZENTRATIONEN

VON

J. E. RENHOLM

(Mitgeteilt am 23. Februar 1925 von L. W. Öholm und Osc. V. Johansson)

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 11.

ÜBER

FACHWERKTRÄGER

MIT

VERÄNDERLICHEM KRAFTANGRIFF

VON

HARALD LUNELUND

(Vorgelegt von Hj. Tallqvist und Osc. V. Johansson am 23. März 1925).

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 12.

ÜBER DIE EIGENSCHAFTEN MEROMORPHER FUNKTIONEN IN EINEM WINKELRAUM

VON

ROLF NEVANLINNA

(Am 20 Mai 1925 mitgeteilt von E. Lindelöf und K. F. Sundman)

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 13.

ÜBER DIE NUMERISCHE INTEGRATION VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

E. J. NYSTRÖM

(Mitgeteilt am 28. September 1925 von E. Lindelöf und K. F. Sundman)

HELSINGFORS 1925

ACTA SOCIETATIS SCIENTARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 14.

ÜBER DIE DREHUNG EINES STARREN KÖRPERS UM EINEN FESTEN PUNKT

VON
HJ. TALLQVIST

(Vorgelegt am 19 April 1926)

HELSINGFORS 1926

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ
TOM. L. N:o 15.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER ROLLENDE BEWEGUNG

ANWENDUNGEN DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON
HJ. TALLQVIST

(Vorgelegt am 20. September 1926)

HELSINGFORS 1926

MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 04193